

# 多層整数計画に基づくクリンチ／エリミネーション数の計算

## Calculation of Clinch and Elimination Numbers Based on Multilayered Integer Programming

数理・推論研究系 伊藤 聡 (Satoshi Ito)

### 1. はじめに

リーグスポーツのシーズン中のどの時点においても、最終的にリーグ優勝やプレーオフ出場権など特定の状況（指標）が達成されることが確定する最小の勝ち試合数（クリンチ数），もしくは逆にその状況（指標）に届かないことが確定する最小の負け試合数（エリミネーション数）が存在する．本研究は，順位決定に係る複数の判定基準が存在する場合のクリンチおよびエリミネーション数の計算を，多層の整数計画問題を解くことにより高速に行う汎用的な枠組みを開発することを目的としている．

### 2. 整数計画モデルと上下界の多層構造

リーグに属するチームの集合を  $L$  とし，そのチーム数を  $n$  とする．リーグ  $L$  の全チーム間のこれまでの勝敗記録と残り試合数が与えられているとし， $w_{ij}$  をチーム  $i \in L$  のチーム  $j \in L$  に対する現時点での勝数， $g_{ij}$  をチーム  $i, j$  間の残り試合数とする．チーム  $i \in L$  のチーム  $j \in L$  に対する今後の勝数を  $x_{ij}$  と表すことにすると，

$$X := \{ x = (x_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n} \mid x_{ij} + x_{ji} \leq g_{ij}, x_{ii} = 0, x_{ij} \geq 0 \ (\forall i, j \in L) \}$$

は今後起こり得る勝敗に関するシナリオを過不足無く与える（ $\mathbb{Z}$  は整数の集合であり，引分がない場合は第 1 式の不等号を等号に変えるものとする）．

順位判定基準が複数あり，そのうち最初の  $m$  個が勝敗数のみに基づく基準（すなわち  $m+1$  番目の基準は得失点差など勝敗数以外に基づくもの）であるとする．このときチーム  $a \in L$  の例えば（簡単な例として）第  $k$  位クリンチ数は，チーム  $a$  が今後引き分けることなく，かつ  $m$  個のうちのいずれかの基準でチーム  $a$  より上位の成績を持つチームが  $k$  個存在するという制約条件のもとで，チーム  $a$  の今後の勝数  $\sum_{j \in L} x_{aj}$  の最大値  $\bar{z}$  を求めることにより得られる（この最大化問題に許容解がなければ既に第  $k$  位以上が確定していることになるし， $\bar{z}$  が残り試合数と等しければ今後全勝しても第  $k+1$  位以下の可能性があることになり，そうでなければ第  $k$  位クリンチ数は  $\bar{z}+1$  となる）．ここで注意すべきことは， $m$  個の順位判定のうち最初の  $m-1$  個は等号なし（ $<$ ）であり，最後の  $m$  番目のみが等号つき（ $\leq$ ）の順位判定となることである．例えば 2016 年に始まった男子プロバスケットボールの B.LEAGUE では，①勝率（勝数）→ ②当該クラブ間勝率（当該クラブ間 1 試合平均勝数）→ ③当該クラブ間得失点差 → ④当該クラブ間 1 試合平均得点 → ⑤得失点差 → ⑥ 1 試合平均得点（総得点）→ ⑦理事会が必要と判断した場合に抽選と判定基準が続くが，この場合  $m=2$  であり，判定基準②に関して同成績であっても③以降の基準により順位が変わる可能性が残っているため，チーム  $a$  にとってより都合の悪い状況を想定するという意味で②に対する順位判定は等号つきである必要がある．

上記の例のような整数計画モデルは当該チーム間成績が絡む場合などには非線形となり、汎用最適化パッケージを用いて直接解くことは必ずしも容易でない。そこで、最大目的関数値の上界と下界をうまく利用することを考える。図1のように、 $m-1$  番目までの順位判定のうちいずれか一つの不等号 ( $<$ ) を等号つき ( $\leq$ ) に変更することにより  $m-1$  個のレベルの上界が得られ、また、1 番目を除く順位判定をそれ以降を含めて取り去る（すなわち順位判定を途中で打ち切る）ことにより  $m-1$  個のレベルの下界が得られる。さらに、 $m$  番目の順位判定を等号なし ( $<$ ) に変えて得られる、よりタイトな下界を用いることにより、勝敗数以外の要素に基づく  $m+1$  番目以降の判定基準を考慮する必要性の有無も判定することができる。

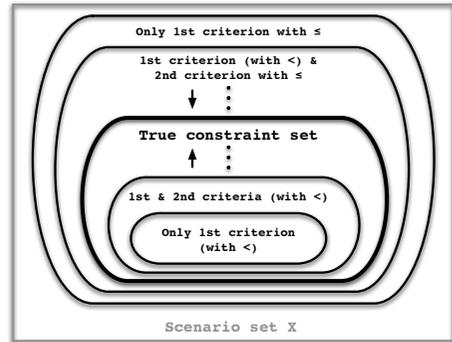


図 1: 上下界の多層構造

### 3. 数値実験

B.LEAGUE において考えられる指標のうち、B1 チャンピオンシップ・トーナメント進出のエリミネーション数について、2016-2017 シーズン第 15 節以降の 50 日分の勝敗記録に対して数値実験を行った結果を図 2 に示す。全 18 クラブのエリミネーション数を計算するのに要した個々の時間を一日単位で箱ひげ図にプロット（四分位点から 1.5 IQR を超える外れ値を点で表示）しているが、上下界の情報を使わずに解いた (a) に対して、これを活用した (b) では、極めて時間がかかるケースを抑えることにより平均計算時間を短縮することに成功している。

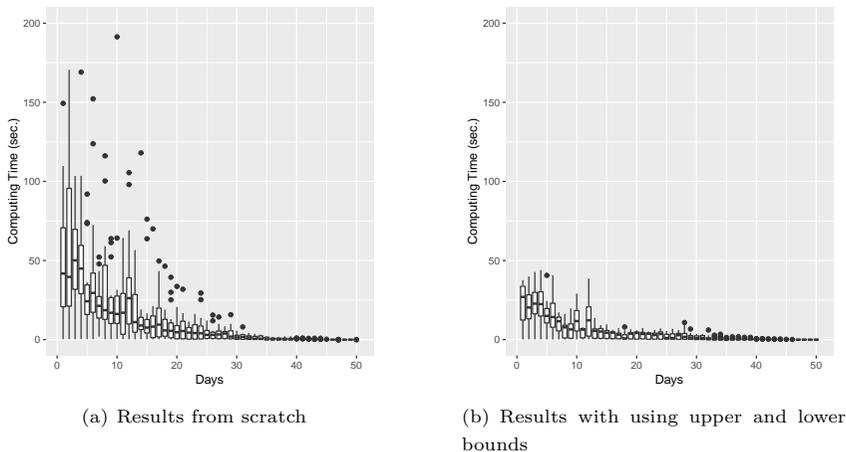


図 2: B1 チャンピオンシップ・トーナメント進出エリミネーション数の計算時間

### 参 考 文 献

Ito, S. and Shinano, Y. (2018). Calculation of clinch and elimination numbers for sports leagues with multiple tiebreaking criteria, ZIB-Report 18-51, urn:nbn:de:0297-zib-70591.