

スピングラス理論による制限等長定数評価 Evaluation of restricted isometry constants using spin-glass theory

数理・推論研究系 坂田 綾香 (Ayaka Sakata)

要 旨

制限等長定数は、圧縮センシングにおける完全再構成条件を与えるが、その厳密評価は困難である。我々は統計物理学におけるスピングラス理論を用いて、制限等長定数を制度よく見積もる方法を提案した。

キーワード：圧縮センシング、制限等長性

原信号がゼロ成分を多く持つ (スパース性) という事前知識の下で、次元より少ない観測から信号を復元する枠組みである圧縮センシング (CS) は、様々な分野において利用されている。 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ を観測行列とすると、線形観測 $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ から $S (< N)$ 個の非ゼロ要素を持つ信号 \mathbf{x} (S スパースベクトル) を再構成する問題として CS は定式化される。 ℓ_0, ℓ_1 再構成法は代表的手法であり、 S スパースベクトル \mathbf{x} が完全復元される十分条件は制限等長定数により与えられる [Candés and Tao (2005)]。ここでは、観測行列 $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ はコラムが典型的に $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{ii} = 1$ ($i \in \{1, \dots, N\}$) を満たすように規格化されているとする。全ての S スパースベクトル \mathbf{x} に対して次の不等式が成立するとき、行列 \mathbf{A} は制限等長性を満たす。

$$(0.1) \quad (1 - \delta_S^{\min}) \|\mathbf{x}\|_F^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_F^2 \leq (1 + \delta_S^{\max}) \|\mathbf{x}\|_F^2$$

また $0 < \delta_S^{\min} \leq \delta_S^{\max}$ を制限等長定数 (RIC) と呼ぶ。RIC が与える ℓ_0, ℓ_1 再構成による完全復元条件は [Candés et al. (2006)] 等に示されている。

RIC は \mathbf{A} のグラム行列の固有値と関係づけられる。 S スパースベクトル \mathbf{x} の非ゼロ要素の位置を $T \subseteq V = \{1, \dots, N\}$, $|T| = S$ として表現し、 \mathbf{A} の $i \in T$ コラムからなる行列を \mathbf{A}_T 、また $\mathbf{x}_T = \{x_i | i \in T\}$ とすると、 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}_T \mathbf{x}_T$ である。そして全ての T について、次の不等式が成立する。

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) \|\mathbf{x}_T\|_F^2 \leq \|\mathbf{A}_T \mathbf{x}_T\|_F^2 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) \|\mathbf{x}_T\|_F^2$$

$\lambda_{\min}(\mathbf{B})$, $\lambda_{\max}(\mathbf{B})$ は \mathbf{B} の最小・最大固有値を表し、上付きの T は転置を表す。(0.1) との比較から、 $\lambda_{\min}^*(\mathbf{A}; S) = \min_{T: T \subseteq V, |T|=S} \lambda_{\min}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T)$ および $\lambda_{\max}^*(\mathbf{A}; S) = \max_{T: T \subseteq V, |T|=S} \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T)$ を用いて、RIC は次のように表現される。

$$(0.2) \quad \delta_S^{\min} = 1 - \lambda_{\min}^*(\mathbf{A}; S), \quad \delta_S^{\max} = \lambda_{\max}^*(\mathbf{A}; S) - 1$$

(0.2) を厳密に評価するには、あらゆる T について固有値を評価しなくてはならない。これは計算量的に困難であるため、様々な近似方法が考えられてきた [Bah and Tanner (2010)]。我々は統計物理学におけるスピングラス理論を用いて、RIC の評価を改善することに成功した。そ

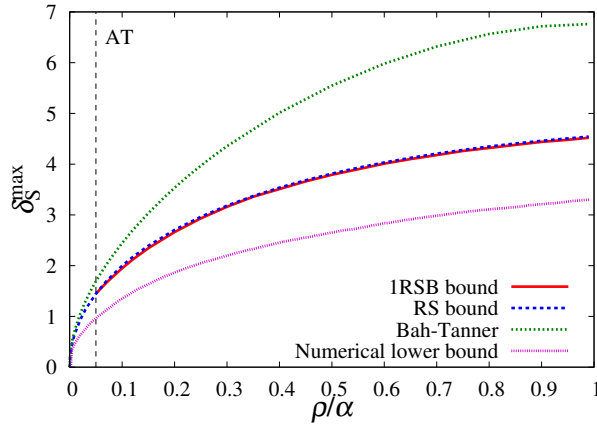


図 1. $\alpha = 0.5$ での RIC の ρ/α 依存性。

の際、 $M = N\alpha$, $S = N\rho$ ($\alpha, \rho \sim O(1)$) として $N \rightarrow \infty$ 極限を考えた。

図 1 は、観測行列がガウシアンランダム行列の場合の δ_S^{\max} について、先行研究と我々の評価法を比較したものである。垂直点線の ρ/α において、レプリカ対称性の破れに伴った相転移現象が起きる。"Numerical lower bound"とは数値的に評価された RIC の下界であり、RIC がこれより大きいことを保証している。"Bah-Tanner"は先行研究による RIC の上界評価である。我々の"1RSB bound", "RS bound"も上界評価であるが、先行研究よりも精度の高い上界評価となっている。1RSB bound とは、レプリカ対称性の破れを 1 段階考慮した評価となっており、逐次的に対称性の破れを考慮していくことで上界評価が正しい値に近づいていくことが数学的に保証される。また δ_S^{\min} についても精度の良い評価を達成し、更にランダム一次転移や Gardner 転移と呼ばれる相転移現象が見られることも発見した。具体的評価法は [Sakata and Kabashima (2015)] に示されている。

提案手法は、ランダム直交行列から構成された観測行列に対しても適用可能である。様々な行列に対して RIC を評価することで、効率的観測方法などが提案できると考えられる。

謝 辞

本研究は樺島祥介氏 (東京工業大学) との共同研究である。

参 考 文 献

- Bah, B. and Tanner, J. (2010). Improved Bounds on Restricted Isometry Constants for Gaussian Matrices, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **31**, 2882–2898.
- Candés, E. J. and Tao, T. (2005). Decoding by linear programming, *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 4203–4215.
- Candés, E. J., Romberg, J. and Tao, T. (2006). Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction From Highly Incomplete Frequency Information, *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 489–509.
- Sakata, A. and Kabashima, Y. (2015). Replica Symmetric Bound for Restricted Isometry Constant, *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*, **2015**, 2006–2010.