統計数理研究所 75 周年記念事業（2019）

拡散過程の非同期・ノイズ付観測データに対する最尤型推定法

Maximum likelihood type estimation for diffusion processes with noisy, nonsynchronous observations

数理・推論研究系　荻原　哲平（Teppei Ogihara）

近年株式市場における一日内の全取引の情報を記録した「高頻度データ」の利用可能性が高まり，従来のデータに比べて膨大な情報量をもつため，金融市場のミクロ構造のさらなる解明が期待され，このようなデータを用いたデータ解析手法が活発に研究されている．通常，日内において株価が観測されるのは株価の約定時であるため, 異なる株式に対して観測時刻が一致していないという「非同期観測」の問題が必然的に生じ，特にデータの共変動（共分散）の推定が困難になる．データの線形補完や直前データを用いた補完などによるシンプルな「同期化」を行ったデータに対する共変動推定量には深刻なバイアスが存在することが知られている．

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の二次元確率過程 $X = \{X_t\}_{0\le t\le T}$ が以下を満たすとする：

$$dX_t = \mu(t, X_t, \sigma_*)dt + b(t, X_t, \sigma_*)dW_t, \quad t \in [0, T].$$

ここで, σ_* はモデルの d 次元パラメータ, $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ ： 二次元標準ブラウン運動, μ は $\mathbb{R}^2$ 値，b は $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ 値既知関数とする．X の成分を X^1, X^2 と書き, X^1, X^2 の観測時刻をそれぞれランダム時刻 $\{S_i^n\}_{i=0}^{\ell_{1,n}}, \{T_j^n\}_{j=0}^{\ell_{2,n}} \subset [0, T]$ で表す．データが高頻度観測になる極限を扱うため，$n \to \infty$ の時 $\max_{i,j} |S_i^n - S_{i-1}^n| \vee |T_j^n - T_{j-1}^n| \to^p 0$ を仮定する．この時観測データ $\{S_i^n\}_i, \{T_j^n\}_j, \{X^1_{S_i^n}\}_i, \{X^2_{T_j^n}\}_j$ からモデル・パラメータ σ_* を推定する問題を考える．

非同期観測モデルに対する最尤型推定法

Ogihara and Yoshida (2014) において，σ_* に対する疑似対数尤度関数を用いた最尤型推定法が提案されている．$\mu \equiv 0$ かつ b, X_0 と $\{S_i^n\}_i, \{T_j^n\}_j$ が非ランダムの時，$\{X^1_{S_i^n}\}_i, \{X^2_{T_j^n}\}_j$ は多変量正規分布に従い，共分散関数を計算することが可能であるため，対数尤度関数を二次形式で与えることができる．一般の場合でも同様に疑似対数尤度関数 $H_n(\sigma)$ を近似的に構成可能であり，$H_n(\sigma)$ を最大にするパラメータの値として最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n$ が定義される．このように定義された $\hat{\sigma}_n$ に対して，μ, b の微分可能性や非退化性等の条件と，観測時刻列 $\{S_i^n\}_i, \{T_j^n\}_j$ の漸近挙動に関する条件の下，漸近混合正規性：

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n - \sigma_*) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma^{-1/2}\mathcal{N} \quad \text{as} \quad n \to \infty \tag{0.1}$$

が示される．ただし，$\to^{s\text{-}\mathcal{L}}$ は stable convergence を表し，∂_σ を σ に関する微分，$\Gamma = \text{P-}\lim_{n\to\infty}(-\partial_\sigma^2 H_n(\sigma_*)/n)$，$\mathcal{N}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ のある拡張上で定義された，$\mathcal{F}$ と独立に $N(0, I_d)$ に従う確率変数とする．ここで I_d は d 次元単位行列である．

非同期観測モデルにおける局所漸近混合正規性

Jeganathan (1983) では，統計モデル $\{P_{\theta,n}\}$ の局所漸近混合正規性の下，任意の推定量の漸

近分散の下界を与える minimax 不等式が示された．この下界を達成する推定量は漸近有効推定量と呼ばれる．拡散過程の高頻度観測モデルに対しては，局所漸近混合正規性を示すには拡散過程の推移確率密度関数の漸近挙動を解析する必要があり，非同期性のない規則的な観測モデルに対して Gobet (2001) では Malliavin 解析の技術を用いて局所漸近混合正規性を示した．このモデルにおいては Genon-Catalot and Jacod (1993) の最尤型推定量が漸近有効となる．Ogihara (2015) では，Gobet (2001) の Malliavin 解析を用いた手法を応用し，拡散過程の非同期観測モデルに対する局所漸近混合正規性を証明し，最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n$ が漸近有効であることを示した．

非同期・ノイズ付観測モデルに対する最尤型推定法

高頻度データの解析上の問題点として，非同期観測に加えて，拡散過程によるモデリングにおける仮想的な観測ノイズの存在が実証研究から示唆されている．このような観測ノイズは「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ」と呼ばれる．

観測ノイズ $\{\epsilon_i^k\}_{k=1,2,i\in\mathbb{Z}_+}$ を $(X_t, W_t)_{0\le t\le T}$ と独立で, ある正定数 v_1, v_2 に対して, $E[\epsilon_i^k]=0$, $E[\epsilon_i^k\epsilon_j^l]=v_k\delta_{kl}\delta_{ij}$ を満たす確率変数として，観測が $\{X^1_{S_i^n}+\epsilon_i^1\}_{i=0}^{\ell_{1,n}}, \{X^2_{T_j^n}+\epsilon_j^2\}_{j=0}^{\ell_{2,n}}$ で与えられるような統計モデルとして非同期・ノイズ付観測がモデル化される．

この時 Ogihara (2018) において，モデル・パラメータ σ_* の最尤型推定量が以下のように構築されている．まず L_n を正整数列で，$L_n\to\infty$, $(L_n/\sqrt{n})\vee(n^{1/4}/L_n)\to 0$ を満たすものとし，観測区間全体 $[0,T]$ を L_n 個の区間に等分する．等分された各区間において，ϵ_i^k が正規分布に従うと仮定すれば拡散過程 X が局所的に条件付正規分布で近似されることを用いて対数尤度関数を正規近似し，各区間の近似対数尤度関数を足し合わせることで疑似対数尤度関数 $\mathcal{H}_n(\sigma)$ が構築される．最尤型推定量は $\check{\sigma}_n=\mathrm{argmax}_\sigma\mathcal{H}_n(\sigma)$ と計算される．

Ogihara (2018) において，μ, b の微分可能性や非退化性等の条件と，観測時刻列 $\{S_i^n\}_i, \{T_j^n\}_j$ の漸近挙動に関する条件の下，漸近混合正規性：

$$n^{1/4}(\check{\sigma}_n-\sigma_*)\to^{s\text{-}\mathcal{L}}\tilde{\Gamma}^{-1/2}\mathcal{N} \tag{0.2}$$

が示された．ただし，$\tilde{\Gamma}=\mathrm{P}\text{-}\lim_{n\to\infty}(-\partial_\sigma^2\mathcal{H}_n(\sigma_*)/\sqrt{n})$ である．特にこの結果は ϵ_i^k が正規分布に従わない場合でも成立する．

参 考 文 献

Genon-Catalot, V., Jacod, J. (1993): On the estimation of the diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion processes, Annals of Institute of Henri Poincare, 29, 119-151.

Gobet, E. (2001) Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion : a Malliavin calculus approach. Bernoulli, 7, 899-912.

Jeganathan, P. (1983) Some asymptotic properties of risk functions when the limit of the experiment is mixed normal. Sankhya Ser. A, 45, 66-87.

Ogihara, T. (2015): Local asymptotic mixed normality property for nonsynchronously observed diffusion processes, Bernoulli, 21, 2024-2072.

Ogihara, T. (2018): Parametric Inference for Nonsynchronously Observed Diffusion Processes in the Presence of Market Microstructure Noise, Bernoulli, 24, 3318–3383.

Ogihara, T. and Yoshida, N. (2014): Quasi-likelihood analysis for nonsynchronously observed diffusion processes, Stochastic Processes and their Applications, 124, 2954-3008.