統計数理研究所 75 周年記念事業（2019）
©2019 統計数理研究所

極値分布と指数逆ガウス型分布に関するある一般化について

Generalization for the Extreme Value and Exponential Inverse Gaussian Distributions

データ科学研究系 金藤 浩司 （Koji Kanefuji）

要　　旨

本報告では実数上で定義される二つの確率分布の一般化について紹介する。この一般化によって、一般化極値分布と一般化指数逆ガウス型分布を導出している。本報告とは異なり分布関数によって定義された一般化極値分布もある。そこでは母数の値により、三つのタイプの極値分布（タイプ I:ガンベル型、タイプ II:フレシェ型、タイプ III：ワイブル型）を表現している。

キーワード：母変動係数; 寿命分布；確率素分

1. はじめに

本稿では、タイプ I の極値分布の一般化を検討する。この確率分布の母歪度は零ではなく、非対称の性質を有している。同様の性質を有する実数上の分布として、指数逆ガウス型分布 (Kanefuji and Iwase; 1996) がある。この確率分布は、タイプ I の極値分布が利用される場面においてデータ解析上の別の候補となる一つの確率分布である。指数逆ガウス型分布に関しても同様な一般化を行う。極値分布は指数変換によるガンマ分布との関連性はよく知られている。同様の関連性は、逆ガウス型分布と指数逆ガウス型分布の間にも見られる。この関連性がタイプ I の極値分布と指数逆ガウス型分布の一般化の元となるアイデアである。さらに、3 母数ガンマ分布や 3 母数逆ガウス型分布は、本稿での一般化手法と直接的な関連性を有している。

実際のデータ解析において、タイプ I の極値分布が用いられる場合において、データから計算される標本歪度がその母歪度から大きく外れている場合が多々存在する。これらの変動に対応するため、本報告で定義するような一般化分布が有用となる。

また、Jenkinson(1955) により、一般化極値分布として、三つのタイプの極値分布を包含する分布が提案されている。

2. 二つの確率分布の一般化

タイプ I の極値分布 $EV(\mu, \sigma^2)$ は、次のように定義される。

$$\exp\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim Ga(1, 1^2),$$

ここで、$0 < \sigma < \infty,\ -\infty < \mu < \infty,\ -\infty < X < \infty$ であり、記号 $Ga(m, c^2)$ は、母平均 m、母変動係数 c であるガンマ分布を表している。

定義 1. タイプＩの一般化極値分布 $X \sim GEV(\mu, \sigma^2, \lambda)$ を以下で定義する。

$$\exp\left(\lambda \frac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim Ga(1, \lambda^2),$$

ここで、$0 < \sigma < \infty,\ -\infty < \mu < \infty,\ |\lambda| < \infty,\ -\infty < X < \infty$ であり、λ は無次元量である。

$GEV(\mu, \sigma^2, \lambda)$ に従う確率変数の確率素分 $f(x)dx$ は以下である。

$$f(x)dx = \frac{\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)} \exp\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{x-\mu}{\sigma} - \frac{1}{2\lambda^2}\left\{2\exp\left(\lambda\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right)\frac{dx}{\sigma},$$

ここで、$-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty, |\lambda| < \infty$ であり、$\Gamma(x)$ はガンマ関数である。

指数逆ガウス型分布 $EIG(\mu, \sigma^2)$ は以下の様に定義される。

$$\exp\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim IG(1, 1^2),$$

ここで、$0 < \sigma < \infty,\ -\infty < \mu < \infty,\ -\infty < X < \infty,$ であり、記号 $IG(m, c^2)$ は、母平均 m、母変動係数 c である逆ガウス型分布を表している。

定義 2. 一般化指数逆ガウス型分布 $X \sim GEIG(\mu, \sigma^2, \lambda)$ を以下で定義する。

$$\exp\left(\lambda \frac{X-\mu}{\sigma}\right) \sim IG(1, \lambda^2),$$

ここで、 $0 < \sigma < \infty,\ -\infty < \mu < \infty,\ \lambda < \infty, -\infty < X < \infty$ であり、λ は無次元量である。

$GEIG(\mu, \sigma^2, \lambda)$ に従う確率変数の確率素分 $f(x)dx$ は以下である。

$$f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(\lambda\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\lambda^2}\left(2\sinh\left(\lambda\frac{x-\mu}{2\sigma}\right)\right)^2\right\}\frac{dx}{\sigma},$$

ここで、$-\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma < \infty, |\lambda| < \infty$ であり、$\sinh(x)$ は双曲線正弦関数である。

謝　辞

本稿の内容は、岩瀬晃盛広島大学名誉教授との共同研究の成果である。

参　考　文　献

Jenkinson, A. F. (1955). The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **81** (348), 158–171.

Kanefuji K. and Iwase K. (1996). Exponential Inverse Gaussian Distribution, *Computational Statistics*, **11** (*), 315–326.