

アンサンブルカルマンフィルタによるエージェントベースモデルのオンライン推定法

相澤 景 総合研究大学院大学 統計科学専攻 博士課程（3年次編入学）5年

1. はじめに

- エージェントベースモデル(ABM)には、 エージェントの特徴やシステムの振る舞いを決定づけるさまざまなパラメータが含まれている.
- ABMではパラメータ推定のステップがしばしば欠けており、 方法論的課題が指摘されている. 近年、 SMD(Simulated Minimum Distance)法やベイズ推定法によるパラメータ推定法が評価されている[1].
- また、 Sequential Monte Carlo(SMC)法による推定も評価されているが[2], SMC法はオンライン推定において退化の問題が生じうる.
- 本研究では、 アンサンブルカルマンフィルタ(EnKF)によるABMパラメータのオンライン推定法を定式化し、 数値実験を通じて適用結果を評価する.

2. 推定手法

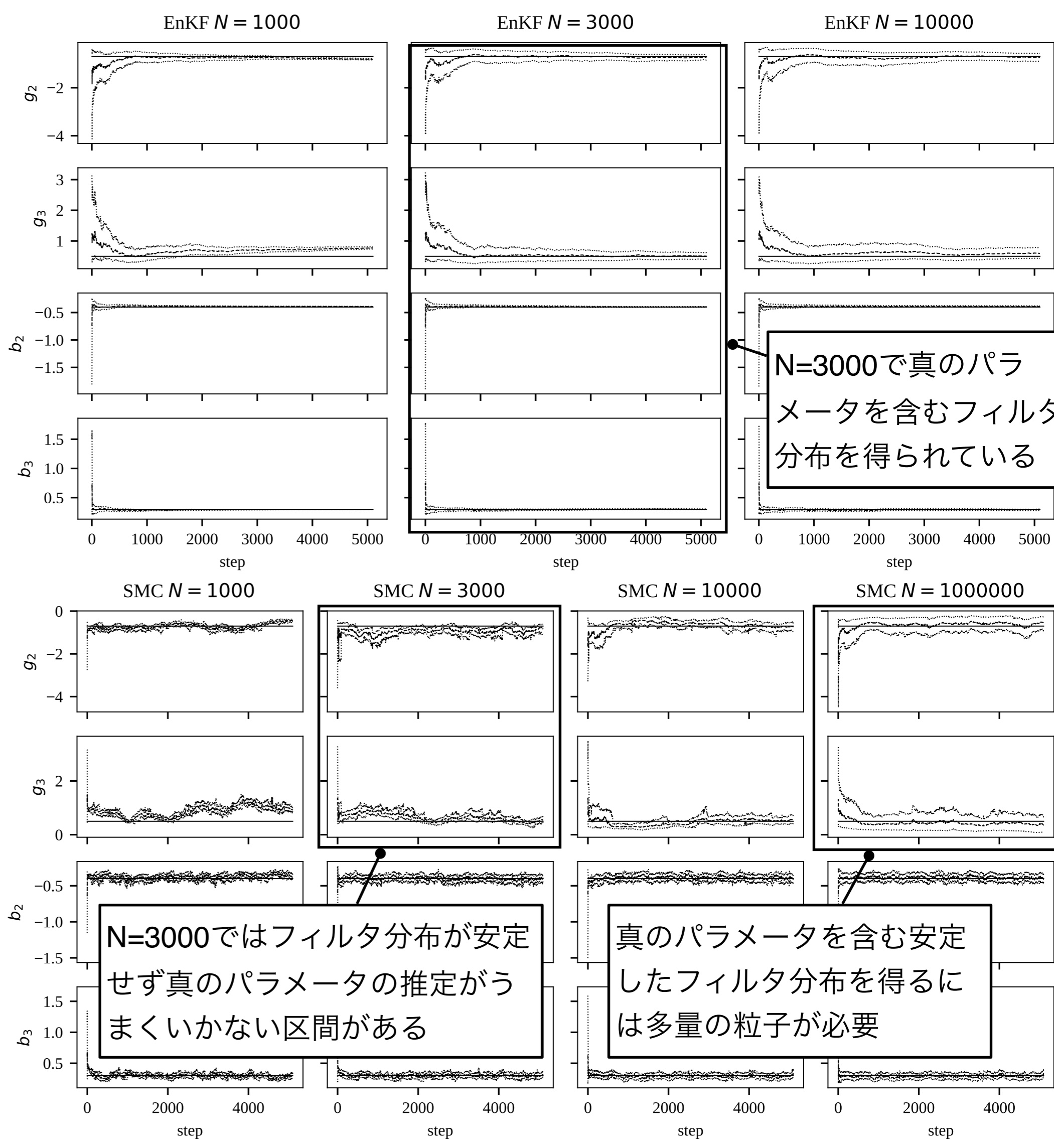
- EnKFによるパラメータ推定のための拡大状態空間モデルの定式化
 - システムモデル：ABMを非線形・非ガウスモデルで表現
$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{v}_t; \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{v}_t \sim q(\boldsymbol{v}_t | \boldsymbol{\theta}), \tag{1}$$
 - 観測モデル：線形・ガウスモデルで表現
$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{H} \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{w}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}). \tag{2}$$
 - 拡大状態ベクトル
$$\boldsymbol{z}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_t \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_t \end{pmatrix} \tag{3}$$
 - 拡大状態ベクトルのシステムモデル表現
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_{t-1}, \boldsymbol{v}_t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{v}_t; \boldsymbol{u}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_{t-1})) \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}}_{t-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$
 - 拡大状態空間モデル
$$\boldsymbol{z}_t = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_{t-1}, \boldsymbol{v}_t), \boldsymbol{v}_t \sim q(\boldsymbol{v}_t | \boldsymbol{\theta}), \tag{5}$$
$$\boldsymbol{y}_t = \tilde{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{w}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}). \tag{6}$$
- 観測モデルが線形・ガウスなのでEnKFを適用可能

- ABMの題材：
 - BHモデル[3]：異質なエージェントの振る舞いから資産価格の変動を表現
$$\boldsymbol{x}_t = \frac{1}{1+r} \left[\sum_{s=1}^S n_{s,t} (g_s \boldsymbol{x}_{t-1} + b_s) + \boldsymbol{\epsilon}_t \right], \boldsymbol{\epsilon}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2),$$
$$n_{s,t} = \frac{\exp(\beta U_{s,t-1})}{\sum_{s=1}^S \exp(\beta U_{s,t-1})}, \tag{7}$$
$$U_{s,t-1} = (\boldsymbol{x}_{t-1} - (1+r)\boldsymbol{x}_{t-2})(g_s \boldsymbol{x}_{t-3} + b_s - (1+r)\boldsymbol{x}_{t-2}).$$
 - BHモデルのシステムモデル表現
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_t \\ \boldsymbol{x}_{t-1} \\ \boldsymbol{x}_{t-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+r} \left[\sum_{s=1}^S \frac{g(\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{x}_{t-2}, \boldsymbol{x}_{t-3}; s)(g_s \boldsymbol{x}_{t-1} + b_s)}{\sum_{s=1}^S g(\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{x}_{t-2}, \boldsymbol{x}_{t-3}; s)} + \boldsymbol{\epsilon}_t \right] \\ \boldsymbol{x}_{t-1} \\ \boldsymbol{x}_{t-2} \end{pmatrix} \tag{8}$$
$$= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{v}_t; \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{v}_t \sim q(\boldsymbol{v}_t | \boldsymbol{\theta}),$$
$$\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{\epsilon}_t \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2)$$
$$g(\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_{t-1}, \boldsymbol{x}_{t-2}; s) = \exp(\beta(\boldsymbol{x}_t - (1+r)\boldsymbol{x}_{t-1})(g_s \boldsymbol{x}_{t-2} + b_s - (1+r)\boldsymbol{x}_{t-1}))$$
- 式(1)となるので拡大状態空間モデル(5)(6)で表現可能

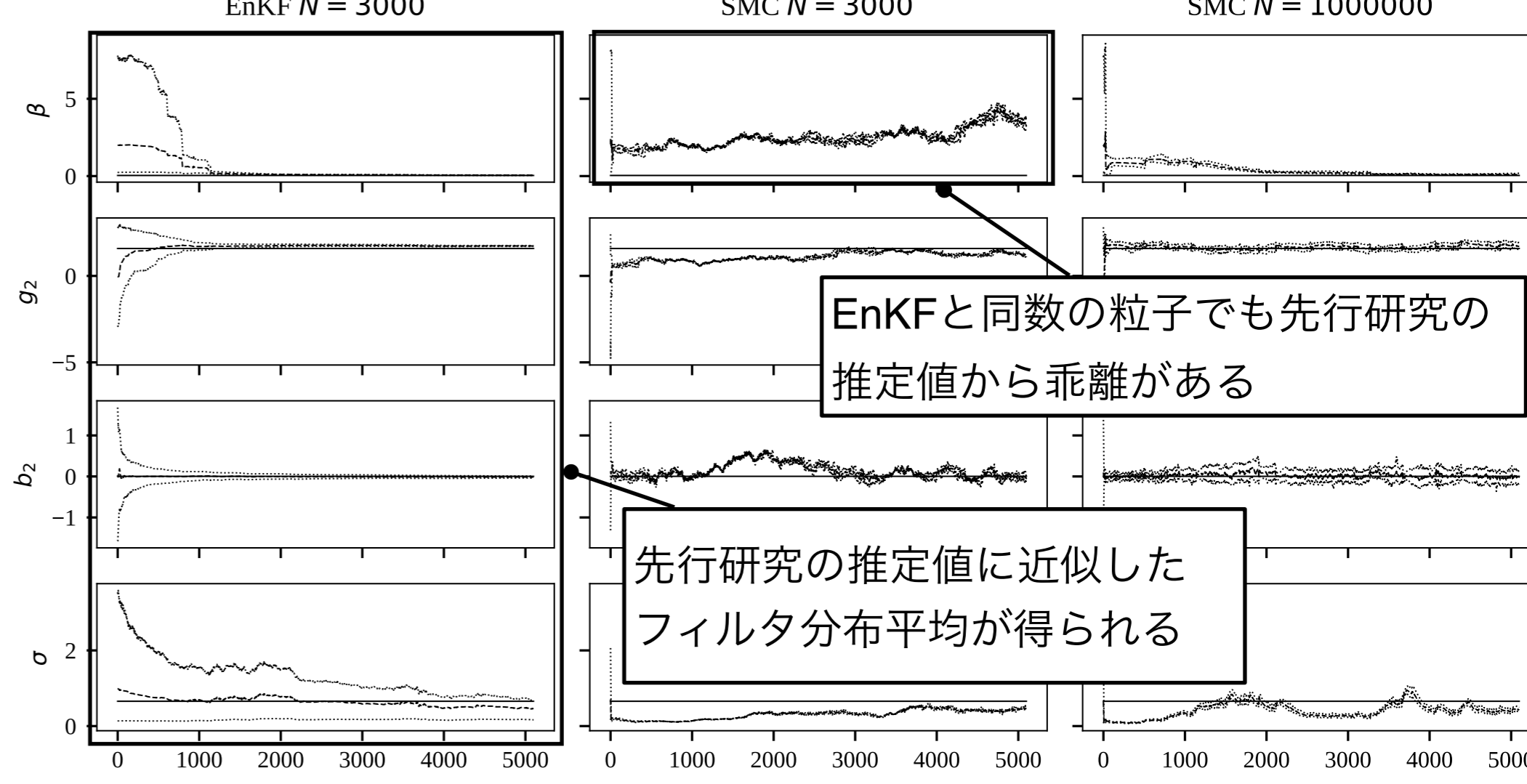
3. 実験設定

- 双子実験：真のパラメータから観測データを生成し(g_2, b_2, g_3, b_3)を推定
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\theta}_t) = \begin{pmatrix} \log(-g_{2,t}) \\ \log(-b_{2,t}) \\ \log(g_{3,t}) \\ \log(b_{3,t}) \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_t) = \begin{pmatrix} -\exp(\tilde{g}_{2,t}) \\ -\exp(\tilde{b}_{2,t}) \\ \exp(\tilde{g}_{3,t}) \\ \exp(\tilde{b}_{3,t}) \end{pmatrix}$$
- 実証分析：S&P500の変動成分から観測データを作成し(β, g_2, b_2, σ)を推定
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\theta}_t) = \begin{pmatrix} \log(\beta_t) \\ g_{2,t} \\ b_{2,t} \\ \log(\sigma_t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} \exp(\tilde{\beta}_t) \\ \tilde{g}_{2,t} \\ \tilde{b}_{2,t} \\ \exp(\tilde{\sigma}_t) \end{pmatrix}$$

3. 双子実験

- 真のパラメータ(−0.7, −0.4,0.5,0.3)のEnKF/SMCによる推定結果を比較
 - Nは粒子数
- 
- N=3000で真のパラメータを含むフィルタ分布を得られている
- N=3000ではフィルタ分布が安定せず真のパラメータの推定がうまくいかない区間がある
- 真のパラメータを含む安定したフィルタ分布を得るには多量の粒子が必要
- EnKFはSMCより少ない粒子数で効率的にABMパラメータの推定が可能

4. 実証分析

- 先行研究のパラメータ推定値[4]とEnKF/SMCによる推定結果を比較
- 
- EnKFと同数の粒子でも先行研究の推定値から乖離がある
- 先行研究の推定値に近似したフィルタ分布平均が得られる
- EnKFは先行研究と整合した結果が得られるがSMCでは退化可能性が高まる

5. 結論

- オンライン推定においては、 EnKFはSMCよりも効率的かつ安定した推定結果
- 実データでは、 SMCは退化が生じうるが、 EnKFは妥当な結果が得られる

参考文献

[1]Fagiolo, G., Guerini, M., Lamperti, F., Moneta, A., & Roventini, A. (2019). Validation of agent-based models in economics and finance. In *Computer Simulation Validation* (pp. 763-787). Springer, Cham.

[2]Lux, T. (2018). Estimation of agent-based models using sequential Monte Carlo methods. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 91, 391-408.

[3]W. A. Brock, C. H. Hommes, Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model, *Journal of Economic dynamics and Control* 22 (8-9) (1998) 1235–1274.

[4]J. Kukacka, J. Barunik, Estimation of financial agent-based models with simulated maximum likelihood, *Journal of Economic Dynamics and Control* 85 (2017) 21–45.