

ブラインド・デコンボリューションに対する非平滑正則化付き DC 最適化アプローチ

高橋 翔大 総合研究大学院大学 統計科学専攻 5 年一貫制博士課程 4 年

1 ブラインド・デコンボリューション

- フィルタ $f \in \mathbb{R}^m$ と信号 $g \in \mathbb{R}^m$ の畳み込み

$$\tilde{y} = f * g \quad (1)$$

が観測される. \tilde{y} が与えられたとき, f は未知の状態での g を求める.

- 応用: 画像処理, 通信工学, 天文学など.

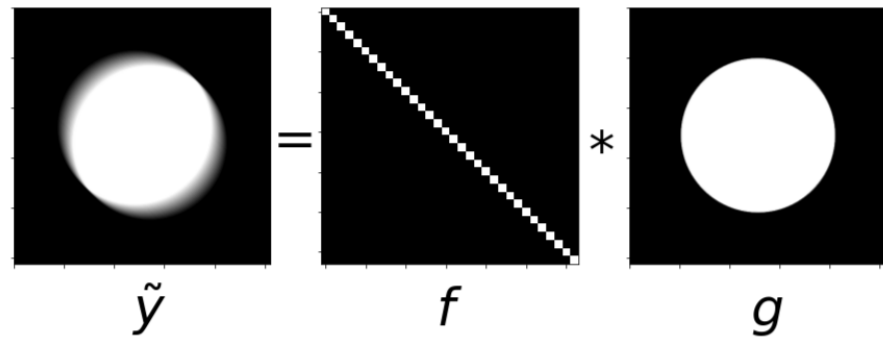


図 1: 画像処理における例: ぼけた画像 \tilde{y} からブレ f を除去し, 原画像 g を求める.

- 線形演算子 $\tilde{B} : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ と $\tilde{A} : \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対し, $h^* \in \mathbb{R}^{d_1}, x^* \in \mathbb{R}^{d_2}$ が存在して $f = \tilde{B}h^*, g = \tilde{A}x^*$ が成り立つと仮定する.

- (1) の両辺に離散フーリエ変換 $\sqrt{m}F \in \mathbb{C}^{m \times m}$ を施す:

$$y = Bh^* \odot \overline{Ax^*}. \quad (2)$$

($y = \frac{1}{\sqrt{m}}F\tilde{y}, B = F\tilde{B}, \overline{A} = F\tilde{A}, \odot$ は要素ごとの積, $\bar{\cdot}$ は複素共役.)

- (2) を近似的に満たす (h^*, x^*) を次の最適化問題を解くことで求める:

$$\min_{(h,x) \in \text{cl}C} \Psi(h, x) := F(h, x) + G(h, x). \quad (3)$$

– $F(h, x) = \frac{1}{2}\|Bh \odot \overline{Ax} - y\|_2^2$. ∇F が Lipschitz 連続でないので, 近接勾配法や FISTA の収束性を保証できない.

– $G : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ は非平滑 (微分不可能) な凸関数.

– $C \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ は制約に対応する非空な開凸集合.

2 提案手法

2.1 DC 分解

- $F(h, x)$ に difference of convex (DC) 分解 $F = F_1 - F_2$ を行う:

$$F_1(h, x) = \frac{1}{4}\|Bh\|_4^4 + \frac{1}{4}\|Ax\|_4^4 + \frac{1}{2}\left(\|Bh \odot Ax\|_2^2 + \|y \odot Bh\|_2^2 + \|Ax\|_2^2 + \|y\|_2^2\right),$$

$$F_2(h, x) = \frac{1}{4}\|Bh\|_4^4 + \frac{1}{4}\|Ax\|_4^4 + \frac{1}{2}\|\tilde{y} \odot Bh + \overline{Ax}\|_2^2.$$

- 最適化問題 (3) は DC 最適化問題として定式化できる:

$$\min_{(h,x) \in \text{cl}C} F_1(h, x) - F_2(h, x) + G(h, x). \quad (4)$$

2.2 Bregman proximal DC algorithm (BPDCA)

- \mathcal{C}^1 級凸関数 $H : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ に対し, Bregman 距離 D_H を次のように定義する:

$$D_H(z, w) = H(z) - H(w) - \langle \nabla H(w), z - w \rangle \geq 0.$$

- DC 最適化問題 (4) に対して BPDCA は有効. Ψ の線形近似

$$G(z) + F_1(z) - F_2(z) \simeq G(z) + \langle \nabla F_1(z^k) - \nabla F_2(z^k), z - z^k \rangle$$

に近接項 $\frac{1}{\lambda}D_H(z, z^k)$ を足した子問題を最小化する. ($z = (h, x)$).

Algorithm 1 DC 最適化問題 (4) に対する BPDCA [1]

入力: $z^0 \in C$, $LH - F_1$ が凸関数となる H と $0 < \lambda < 1/L$.

for $k = 0, 1, 2, \dots$, do

$$z^{k+1} = \operatorname{argmin}_{z \in \text{cl}C} \left\{ \langle \nabla F_1(z^k) - \nabla F_2(z^k), z \rangle + G(z) + \frac{1}{\lambda}D_H(z, z^k) \right\}.$$

- G が非平滑でも有効. G が ℓ_1 ノルムするとき, 子問題は閉形式で解ける.

- Nesterov の外挿で加速 \rightarrow BPDCA with Extrapolation (BPDCAe) [1]

- DC 最適化問題 (4) に対して, H を次のように定義する:

$$H(h, x) = \frac{1}{4}\left(\|h\|_2^2 + \|x\|_2^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\|h\|_2^2 + \|x\|_2^2\right).$$

b_j, a_j をそれぞれ B^H, A^H の第 j 行ベクトルとする. この H に対し,

$$L \geq \sum_{j=1}^m (3\|b_j\|_2^4 + 3\|a_j\|_2^4 + \|b_j\|_2^2\|a_j\|_2^2 + |y_j|^2\|b_j\|_2^2 + \|a_j\|_2^2) \quad (5)$$

を満たす L で, $LH - F_1$ は凸関数になる [2].

3 数値実験

- $h \in \mathbb{R}^{d_1}$ は $\sqrt{d_1} \times \sqrt{d_1}$ ピクセルのぼかしカーネル ($\sqrt{d_1} = 48$).

- $x \in \mathbb{R}^{d_2}$ は離散ウェーブレット係数 ($d_2 = 65536$).

- \tilde{B} は h のピクセル数を揃える操作, \tilde{A} は離散ウェーブレット逆変換.

– 画像のピクセル数は 512×512 ($m = 262144$).

- $G(h, x) = \theta\|h\|_1, \theta = 0.01$.

- $\text{cl}C = \{(h, x) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \mid h \geq 0, x \geq 0\}$.

- 比較アルゴリズム: BPDCA(e), FISTA, 交互最小化.

– BPDCA(e): (5) を満たす L を調整して使用. 最大反復数は 30000.

– FISTA: 直線探索と組み合わせた. 最大反復数は 30000.

– 交互最小化: Ψ を h と x について交互に最小化. 子問題は FISTA で解く. 最大反復数は 3000, 子問題の反復数は 10.

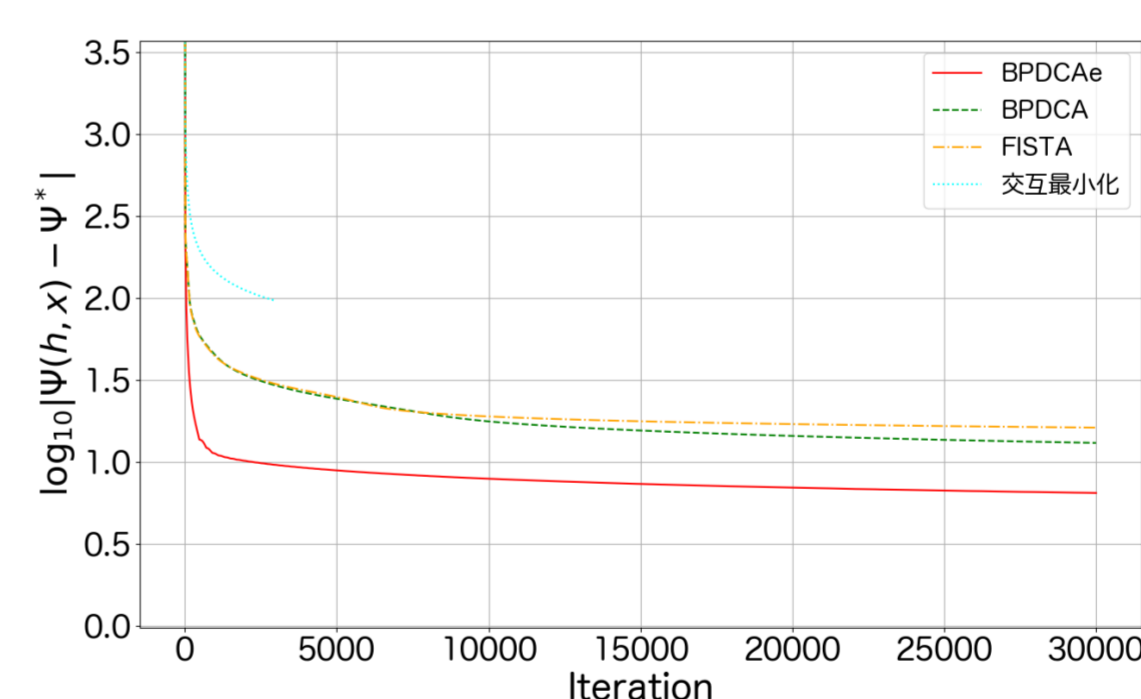


図 2: 各反復での目的関数値と $\Psi^* = \Psi(h^*, x^*)$ の差を対数スケールで比較.

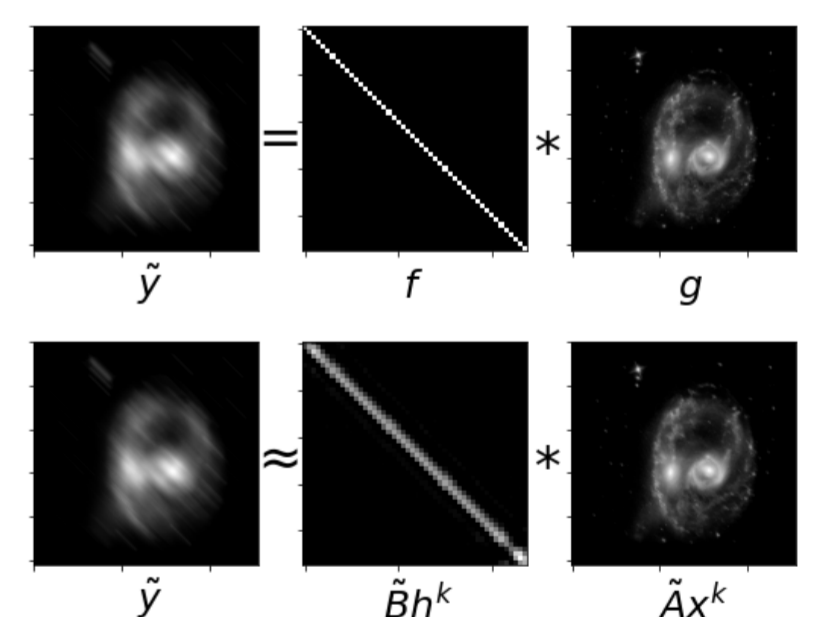


図 3: 上段: ボケ画像 \tilde{y} と正解データ f, g . 下段: BPDCAe の復元結果.

参考文献

- [1] S. Takahashi, M. Fukuda, and M. Tanaka. New Bregman proximal type algorithms for solving DC optimization problems. *arXiv preprint arXiv:2105.04873*, 2021.
- [2] S. Takahashi, M. Tanaka, and S. Ikeda. Blind deconvolution with non-smooth regularization via Bregman proximal DCAs. *arXiv preprint arXiv:2205.06460*, 2022.