Coxモデルにおける変化点検出のための情報量規準

尾崎 凌斗　総合研究大学院大学 統計科学専攻 博士課程（3年次編入）4年

1 目的

変化点をもつCoxモデルにおいて，部分尤度推定法で得られる推定量に対する固有の漸近理論を構築することで，モデルの非正則性を考慮したAIC型の情報量規準を開発する

2 準備

回帰パラメータの値がm回変化するCoxモデル

$$\lambda(t \mid z) = \lambda_0(t)\exp(\boldsymbol{\beta}^{(j)\mathrm{T}} z), \quad t \in [k^{(j-1)}, k^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, m+1$$

- $\lambda(t \mid z)$：共変量zが与えられた下でのハザード関数
- $\lambda_0(t)$：ベースラインハザード関数
- $\boldsymbol{\beta}^{(j)}$：p次元ベクトルの回帰パラメータ
- $\boldsymbol{\beta} \equiv (\boldsymbol{\beta}^{(1)\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}^{(2)\mathrm{T}}, \dots, \boldsymbol{\beta}^{(m+1)\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$：$p(m+1)$次元ベクトル
- $\boldsymbol{k} \equiv (k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(m)})^{\mathrm{T}}$：$m$次元ベクトルの変化点パラメータ
- $k^{(0)} = 0$，$k^{(m+1)} = T_0$（T_0：追跡期間）
- 真値：$\boldsymbol{k}^* = (k^{*(1)}, \dots, k^{*(m)})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}^{*(j)}$
- $0 < k^{*(1)} < k^{*(2)} < \cdots < k^{*(m)} < T_0$

正則化対数部分尤度関数（L_2罰則）

$$\begin{aligned} l_\xi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{k}; \boldsymbol{t}) &\equiv \sum_{j=1}^{m+1} l_\xi(\boldsymbol{\beta}^{(j)}, \boldsymbol{k}; \boldsymbol{t}) \\ &\equiv \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i \in D^{(j)}} \left[\boldsymbol{\beta}^{(j)\mathrm{T}} z_i - \log\left\{\sum_{i' \in R(t_i)} \exp(\boldsymbol{\beta}^{(j)\mathrm{T}} z_{i'})\right\} - \frac{\xi}{2}\boldsymbol{\beta}^{(j)\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}^{(j)}\right] \end{aligned}$$

- $D^{(j)} = \{i \mid t_i \in [k^{(j-1)}, k^{(j)})$でイベント発生$\}$
- $R(x)$：時点xでのリスク集合
- ξ：L_2罰則の正則化パラメータ

AIC型情報量規準の定義

$$-2l_\xi(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{t}}; \boldsymbol{t}) + 2\mathrm{E}\{b_\xi(\boldsymbol{k}^*, \boldsymbol{\beta}^*_\xi)\}$$

- $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{t}}) \equiv \mathrm{argsup}_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{k}}\, l_\xi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{k}; \boldsymbol{t})$，$\boldsymbol{\beta}^*_\xi \equiv \mathrm{argsup}_{\boldsymbol{\beta}}\, \mathrm{E}\{l_\xi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{k}^*; \boldsymbol{t})\}$
- $b_\xi(\boldsymbol{k}^*, \boldsymbol{\beta}^*_\xi)$：$\sup_{\boldsymbol{k}} \hat{l}l_\xi(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}) - \hat{l}l_\xi\{\mathrm{argsup}_{\boldsymbol{k}}\, \hat{l}l_\xi(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}); \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}\}$の弱極限
- $\hat{l}l_\xi(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}) \equiv l_\xi(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{k}; \boldsymbol{t}) - l_\xi(\boldsymbol{\beta}^*_\xi, \boldsymbol{k}^*; \boldsymbol{t})$
- 変化点がなく$\xi = 0$のときは$\mathrm{E}\{b_{\xi=0}(\boldsymbol{k}^*, \boldsymbol{\beta}^*_\xi)\} = p$（Xu et.al. 2009）

3 補題

回帰パラメータ推定量の漸近的性質

$$\text{一致性}：\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{\beta}^*_\xi = \mathrm{o_P}(1)$$
$$\text{漸近正規性}：\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{\beta}^*_\xi) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{N}(\boldsymbol{0}_p, \boldsymbol{\Sigma}_\xi)$$

- $k^{(j)} = k^{*(j)} + s^{(j)}/n$（$s^{(j)}$：有限，$j = 1, 2, \dots, m+1$）
- $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}} \equiv \mathrm{argsup}_{\boldsymbol{\beta}}\, l_\xi(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{k}; \boldsymbol{t})$
- $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$：平均ベクトル$\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列$\boldsymbol{\Sigma}$の多変量正規分布
  - $\boldsymbol{0}_p$：p次元零ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}_\xi$：Ozaki and Ninomiya (2022)参照
- 変化点がない場合の漸近的性質を導出したTsiatis (1981)を拡張

変化点パラメータ推定量の漸近的性質

$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}^* + \boldsymbol{s}/n$とする

$$\hat{l}l_\xi(\boldsymbol{k}; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}) = \begin{cases} \mathrm{O_P}(1) & (\boldsymbol{s} : \text{finite}) \\ -\mathrm{O_P}(\boldsymbol{s}/n) & (\boldsymbol{s} : \text{otherwise}) \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \hat{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}^* = \mathrm{O_P}(1/n)$$

- 変化点パラメータのMPLE $\hat{\boldsymbol{k}}$ に対して速い収束が成り立つ

4 主結果

定理：正則化最大対数部分尤度の漸近バイアス：$\mathrm{E}\{b_\xi(\boldsymbol{k}^*, \boldsymbol{\beta}^*_\xi)\}$

$$2\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}^{*(j)}_\xi, \boldsymbol{A}^{*(j)}_\xi + \xi^{*(j)}\boldsymbol{I}_p) + \sum_{j=1}^{m+1} \mathrm{tr}\{\boldsymbol{A}^{*(j)}_\xi(\boldsymbol{A}^{*(j)}_\xi + \xi^{*(j)}\boldsymbol{I}_p)^{-1}\}.$$

- $\boldsymbol{\beta}^{*(j+1)}_\xi - \boldsymbol{\beta}^{*(j)}_\xi = \Delta^{(j)}_{\boldsymbol{\beta}^*_\xi}/\sqrt{\alpha_n}, \quad \mathrm{O}(1) \neq \alpha_n = \mathrm{o}(n)$
- $\Delta^{(j)}_{\boldsymbol{\beta}^*_\xi}$：定ベクトル，$\boldsymbol{I}_p$：$p$次元単位行列
- $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}^{(j)\dagger}, \boldsymbol{A}^{(j)\ddagger})$：スカラー値を返す行列$\boldsymbol{A}^{(j)\dagger}, \boldsymbol{A}^{(j)\ddagger}$の関数（Ozaki and Ninomiya 2022）

系：最大対数部分尤度の漸近バイアス：$\mathrm{E}\{b_{\xi=0}(\boldsymbol{k}^*, \boldsymbol{\beta}^*_{\xi=0})\}$

$$3m + p(m+1)$$

- $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}^{*(j)}_\xi, \boldsymbol{A}^{*(j)}_\xi) = 3/2$（Ozaki and Ninomiya 2022）

5 数値実験：最大対数部分尤度の漸近バイアス

シミュレーションモデル：変化点1つの単変量Coxモデル

$$\lambda(t \mid z) = \begin{cases} \lambda_0(t)\exp(\beta^{(1)} z), & t \in [0, k) \\ \lambda_0(t)\exp(\beta^{(2)} z), & t \in [k, T_0) \end{cases}$$

漸近バイアス評価

提案手法：$3m + p(m+1) = 3 \times 1 + 1 \times (1+1) = 5$
比較手法：$m + p(m+1) = 1 + 1 \times (1+1) = 3$

- 比較手法は変化点パラメータによるバイアスを回帰パラメータによるバイアスと同様に扱ったもの

モンテカルロシミュレーション結果

α	$\exp(\boldsymbol{\beta}^{*(1)})$	$\exp(\boldsymbol{\beta}^{*(2)})$	#D: 50	#D: 100	#D: 200
0.5	1.0	0.9	4.78 (0.47)	5.16 (0.44)	5.41 (0.49)
		0.8	4.99 (0.49)	5.25 (0.47)	5.25 (0.43)
		0.7	4.69 (0.42)	5.47 (0.47)	5.34 (0.37)
		0.6	4.51 (0.43)	5.23 (0.46)	5.26 (0.41)

mean (SD)

- $D = D^{(1)} + D^{(2)}$，繰り返し回数：100回
- 真の変化点：$\Pr(T < t) \leq 100 \times (1-\alpha)$を満たす時点$t$

参考文献 Ozaki, R. and Ninomiya, Y. (2022). Information criteria for detecting change-points in the Cox proportional hazards model, *arXiv preprint*, 2203.15973.
Tsiatis, A. A. (1981). A large sample study of Cox's regression model. *The Annals of Statistics*, **9**(1), 93-108.
Xu, R., Vaida, F., and Harrington, D. P. (2009). Using profile likelihood for semiparametric model selection with application to proportional hazards mixed models. *Statistica Sinica*, **19**(2), 819.