2022 年 6 月 17 日 統計数理研究所 オープンハウス

市場ノイズ下でのジャンプ・ブラウン運動の汎関数の局所SIML推定

国友直人　大学統計教員養成センター 特任教授

1　英文概要(Summary)

To estimate some Brownian and jump functionals from high-frequency financial data under market microstructure noise, we introduce a new local estimation method of the integrated volatility, the continuous and jump quadratic variations, and higher-order variation of Ito's semi-martingale processes. We develop the local SIML (LSIML) method, which is an extension of the separating information maximum likelihood (SIML) method proposed by Kunitomo, Sato and Kurisu (2018). The new method is simple and it has some desirable asymptotic properties as well as reasonable finite sample properties. This is a joint work with Seisho Sato (University of Tokyo) and the paper will be appeared in Japanese Journal of Statistics and Data Analysis (2022, JJSD).

2　金融確率過程の局所(Local)SIML推定

近年では高頻度金融データが利用可能となりボラティリティなどの推定が行われている．市場ノイズ(micro-market noise)を含む統計モデル，(p次元)観測系列$Y(t_i^n)=X(t_i^n)+\epsilon_n v(t_i^n)$ $(i=1,\cdots,n)$ を考察する．ここで$\epsilon_n\ (=1/n^{\delta},\delta\geq 0)$はノイズの大きさ，ゼロなら古典的確率過程，定数ならマイクロマーケットノイズモデル，nにつれて小さくなる場合をsmall-noiseモデルと呼ぶ．確率過程$X(t)$はItoセミマルチンゲール型，ボラティリティ関数σ_t^2は拡散型(係数に正則条件を仮定)，

$$X(t)=X(0)+\int_0^t \sigma_s dB_s+\sum_{0\leq s\leq t}\Delta X_s\ \ (0\leq s\leq t\leq 1)\ ,$$

$$\sigma_t^2=\sigma_0+\int_0^t \mu_s^{\sigma}ds+\int_0^t \omega_s^{\sigma}dB_s^{\sigma}\ \ (0\leq s\leq t\leq 1)\ ,$$

項$\sum_{0\leq s\leq t}\Delta X_s$は$\int_0^{t+}\int_X f_1(s,x,\cdot)N_p(dsdx)+\int_0^{+t}\int_X f_2(2,x.\cdot)\hat{N}_p(ds,dx)$ (可測関数f_i　$(i=1,2)$，ポワソン乱測度$N_p(dtdx)$，コンペンセータ$\hat{N}_p(dtdx)$) により定義されるが，ジャンプ数が$[0,1]$で有限となる場合を考察する．ブラウン運動 B_s,B_s^{σ}とジャンプ$X_t-X_{t-}\neq 0$ $(\Delta X=X_t-X_{t-}$の期待値ゼロにとる$)$は独立，また市場ノイズ$v(t_i^n)$ $(=v_i)$はブラウン運動，ジャンプと独立，互いに独立な確率変数列($\mathbf{E}[v_i]=0,\mathbf{E}[v_i^2]=1$)とする．

観測データから例えば$p=1$，任意の正整数rに対して$V(2r)=\int_0^1\sigma_s^{2r}ds$ を推定する問題を考察する．$r=1$とするとintegrated volatility，SIML推定量の漸近分散は$2V(4)=2\int_0^1\sigma_s^4 ds$ で与えられる(Kunitomo et al.　(2018)参照)．　確率過程の二乗変分(Quadratic Variation，QV)は$V(2)=\int_0^1\sigma_s^2 ds+\sum_{0\leq s\leq 1}(\Delta X_s)^2$ より 連続部分$V_C(2)=\int_0^1\sigma_s^2 ds$ とジャンプ部分$V_J(2)=\sum_{0\leq s\leq 1}(\Delta X_s)^2$ を推定する問題も考察する．
データ数n，区間$[0,1]$を$b(n)$個の区間に分割，各区間に$c^*(n)$個の観測値があるとする．ここで $c^*(n)$は$c^*(n)\to\infty$，$b(n)\to\infty$，$b(n)\sim n/c^*(n)$ $(n\to\infty)$，$c^*(n)=[n^{\gamma}]$　$(0<\gamma<1)$，$b(n)\sim n^{1-\gamma}$，$n=b(n)c(n)$となる状況を考察する．各区間にSIML推定(Kunitomo et. al (2018)) を適用，$m_c=[c(n)^{\alpha}]$ $(0<\alpha<0.5)$ $(i=1,\cdots,b(n))$，第i区間のk番目のデータ$z_{k,(i)}$ ($I_c(i)$ $(k=1,\cdots,c(n);i=1,\cdots,b(n))$とおく．ここではKunitomo et al.　(2018)の定式化にしたがい$c(n)\times p$の観測行列$\mathbf{Y}_{c(n),(i)}$，$c(n)\times p$の変換行列$\mathbf{Z}_{n,(i)}$ $(=(\mathbf{z}'_{k,(i)}))$　$(i=1,\cdots,b(n))$ を$\mathbf{Z}_{c(n),(i)}=h_{c(n)}^{-1/2}\mathbf{P}_{c(n)}\mathbf{C}_{c(n)}^{-1}\left(\mathbf{Y}_{c(n),(i)}-\bar{\mathbf{Y}}_{0,(i)}\right)$ と定める．なお$h_{c(n)}=1/c(n)$,$c(n)\times c(n)$行列

$$\mathbf{C}_{c(n)}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\ ,$$

$\mathbf{P}_{c(n)}=(p_{jk})$,$p_{jk}=\sqrt{\frac{2}{c(n)+\frac{1}{2}}}\cos\left[\frac{2\pi}{2c(n)+1}(k-\frac{1}{2})(j-\frac{1}{2})\right]$, 初期値は$p\times 1$ベクトル$\mathbf{y}_{0,(i)}$，$\bar{\mathbf{Y}}_{0,(i)}=\mathbf{1}_{c(n)}\cdot\mathbf{y}'_{0,(i)}$ より定める．このとき$\mathbf{C}_{c(n)}^{-1}\mathbf{C}_{c(n)}^{\prime -1}=\mathbf{P}_{c(n)}\mathbf{D}_{c(n)}\mathbf{P}'_{c(n)}$，$\mathbf{D}_{c(n)}$は対角行列($d_k=2\left[1-\cos(\pi(\frac{2k-1}{2c(n)+1}))\right]$ $(k=1,\cdots,c(n))$)，$a_{k,c(n)}=c(n)d_k=4c(n)\sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{2k-1}{2c(n)+1}\right)\right](k=1,\cdots,n)$となる．$p=1$ のとき第i区間の2次積率$M_{2,(i)}=\frac{1}{m_c}\sum_{k=1}^{m_c}[z_{k,(i)}]^2$ とすると，LSIML推定量$V(2r)$は$\hat{V}(2r)=b(n)^{r-1}\sum_{i=1}^{b(n)}[M_{2,(i)}]^r$ で与えられる．このとき次の結果が得られる．

(Jump項が無い場合)
定理 **3**: $p=1$，$r\geq 2$,$\delta\geq 0$，$v(t_i^{(n)})$はi.i.d.系列，$\mathbf{E}[v_i]=0$，$\mathbf{E}[v_i^{4r}]<+\infty$，$\sigma_s$は有界，Lipschitz-continuous，$\alpha_1^*=1+[4\delta-1]/[3\gamma]$，$\alpha_2^*=1+[4\delta-3]/[5\gamma]$, $0<\gamma<1$とする．
(i) $m_c=[c(n)^{\alpha}]$, $0<\alpha<\min\{0.5,\alpha_{1r}^*\}$ $(\alpha_1^*>0)$，$n\longrightarrow\infty$のとき
$\hat{V}(2r)-V(2r)\xrightarrow{p}0$.
(ii) 条件$\gamma\alpha>1-\gamma$，$0<\gamma<1$ の下で$m_c=[c(n)^{\alpha}]$，$0<\alpha<\min\{0.4,\alpha_{2r}^*\}$ $(\alpha_2^*>0)$，$n\longrightarrow\infty$のとき
$\sqrt{m_c b(n)}\left[(\hat{V}(2r)-V(2r))+(V(2r)-V^*(2r))\right]\overset{\mathcal{L}-s}{\rightarrow}N[0,W]$　(安定収束(stable convergence)の意味)，$W=2r^2\int_0^1\sigma_s^{4r}ds$，$V^*(2r)=[b(n)]^{r-1}\sum_{i=1}^{b(n)}(\int_{t_{i-1}^{(n)}}^{(n)}\sigma_s^2 ds)^r$.

(Jump項ありの場合)
ジャンプ項が存在するときジャンプ項$V_J(2)$と連続項$V_C(2)$の推定量を$\hat{V}_J(2)=\sum_{i=1}^{b(n)}M_{2,(i)}\mathrm{I}(M_{2,(i)}>u_n)$, $\hat{V}_C(2)=\sum_{i=1}^{b(n)}M_{2,(i)}\mathrm{I}(M_{2,(i)}\leq u_n)$とする．ここで$\mathrm{I}(\cdot)$は指示関数，$u_n$は条件$A_n=\frac{1}{u_n^2}[\frac{1}{b(n)}+\frac{b(n)}{c(n)^{2-4\alpha}}]\xrightarrow{p}0$を満たすようにとる．
定理 **5**: $r=1$,$p=1$,$\delta\geq 0$，$v(t_i^{(n)})$はi.i.d.系列 ,$\mathbf{E}[v_i]=0$，$\mathbf{E}[v_i^4]<+\infty$，$\sigma_s$は有界, Lipschitz-continuous, jumpsは有界，$\alpha_1^*>0$，$\alpha_2^*>0$ A_nに上の条件を仮定, $0<\gamma<1$とする．
(i) $m_c=[c(n)^{\alpha}]$, $0<\alpha<\min\{0.5,\alpha_1^*\}$，$n\longrightarrow\infty$のとき
$\hat{V}_C(2)-V_C(2)\xrightarrow{p}0$, $\hat{V}_J(2)-V_J(2)\xrightarrow{p}0$.
(ii) $m_c=[c(n)^{\alpha}]$,$0<\alpha<\min\{0.4,\alpha_1^*\}$，$n\longrightarrow\infty$のとき
$\sqrt{m_c b(n)}\left[\hat{V}_J(2)-V_J(2)\right]\overset{\mathcal{L}-s}{\rightarrow}N[0,W_J]$, $\sqrt{m_c b(n)}\left[\hat{V}_C(2)-V_C(2)\right]\overset{\mathcal{L}-s}{\rightarrow}N[0,W_J]$　(安定収束(stable convergence)の意味)，$W_C=2\int_0^1\sigma_s^4 ds$，$W_J=4\sum_{0<s\leq 1}\sigma_s^2(\Delta X(s))^2$.

(結論) 高頻度データにもとづくSIML推定はよい統計的性質を持つ．本稿ではSIML法を拡張，局所SIML法を開発したが，ジャンプを含む一般の確率過程においてノイズを含む場合の拡散項の高次積率，セミマルチンゲールの二次変分，連続項，ジャンプ項などの推定が可能となり，幾つかのシミュレーションによっても本稿の主張は確かめられている．なおデータ分析例を含め詳しくはKunitomo and Sato (2021)が説明している．

参考文献

[1] Kunitomo, N., S. Sato and D. Kurisu (2018), *Separating Information Maximum Likelihood Method for High-Frequency Financial Data*, Springer.

[2] Kunitomo, N. and Sato, S. (2021), "Local SIML Estimation of Some Brownian and Jump Functionals under Market Microstructure Noise," MIMS-RBP Statistics & Data Science Series (SDS-21), http://www.mims.meiji.ac.jp/publications/datascience.html, 近刊(JJSD).