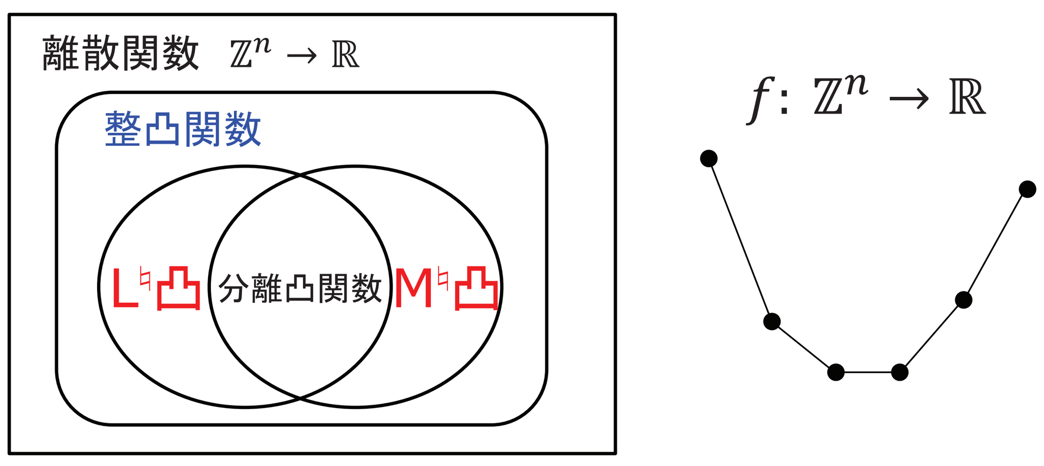
整凸関数と分離凸関数に対するフェンシェル双対性

室田　一雄　大学統計教員育成センター　特任教授

1　離散凸解析におけるフェンシェル双対性

離散凸解析においては，双対性が整数の世界で論じられ，L♮凸関数や M♮凸関数に関してフェンシェル型最大最小定理が成り立つことが知られている．これは，マトロイドや劣モジュラ関数に関する最大最小定理を統一的に拡張したものである．

一方，整凸関数の概念は離散関数の一般的な枠組みを与えており，離散凸解析に登場する殆どすべての関数は整凸関数である．整凸関数は，マトロイド的な組合せ構造をもたない離散凸関数の概念と位置づけることができる．

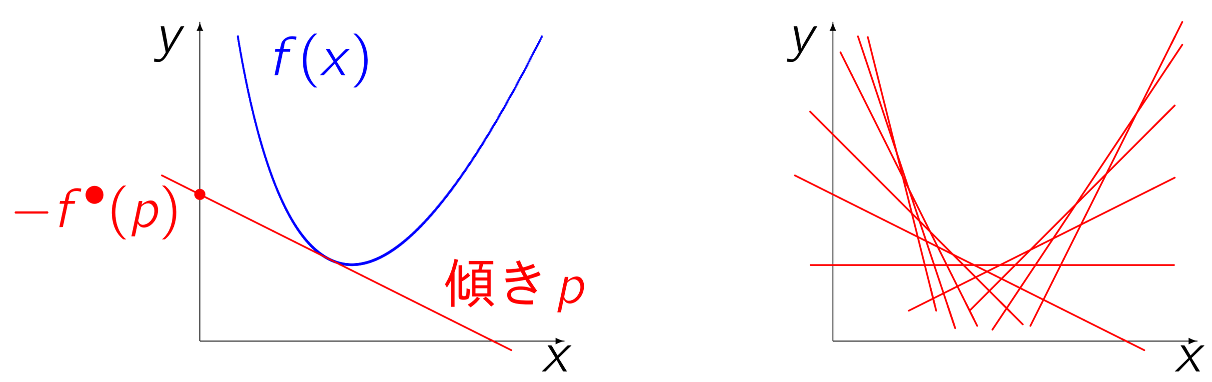


本研究では，整数値の整凸関数と分離凸関数の組に対してフェンシェル型最大最小定理が成り立つことを示した．フーリエ・モツキンの消去法という線形不等式系に対する一般的な手法を利用する証明法が特徴的である．フーリエ・モツキンの消去法は不等式の足し算だけで議論を進めるので凸性と相性がよく，劣モジュラ性などが使えない状況においても離散凸解析の道具として有効である．

整数値の離散凸関数 $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ に対して，その離散ルジャンドル変換は

$$f^{\bullet}(p) = \max\{p \cdot x - f(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n\} \quad (p \in \mathbb{Z}^n)$$

で定義される．これは，通常の凸解析におけるルジャンドル変換



の離散版である．右図は，凸関数が接線によって復元できる（包絡線になっている）ことを示している．離散ルジャンドル変換の凹関数版は

$$g^{\circ}(p) = \min\{p \cdot x - g(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n\} \quad (p \in \mathbb{Z}^n)$$

で定義される．

離散凸解析におけるフェンシェル双対性（最大･最小定理）の一般形は

$$\min_{x \in \mathbb{Z}^n}\{f(x) - g(x)\} = \max_{p \in \mathbb{Z}^n}\{g^{\circ}(p) - f^{\bullet}(p)\} \qquad (1)$$

である．次の定理が知られている．

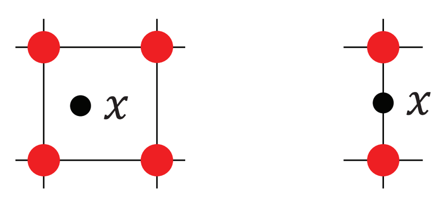
フェンシェル型 双対定理

- 整数値M♮凸関数 f と整数値M♮凹関数 g に対して (1) が成り立つ．
- 整数値L♮凸関数 f と整数値L♮凹関数 g に対して (1) が成り立つ．

この定理は，マトロイドの交差定理や劣モジュラ関数の離散分離定理などの重要な定理を特殊ケースとして含んでいるものである．

2　定理とその位置づけ

整凸関数は次のように定義される．実数ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ の整数近傍を $N(x) = \{z \in \mathbb{Z}^n \mid \|x - z\|_{\infty} < 1\}$ と定義する：



整数格子上の関数 $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ の局所凸拡張 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}}\{p \cdot x + \alpha \mid p \cdot z + \alpha \leq f(z) \ (\forall z \in N(x))\}$$

($x \in \mathbb{R}^n$) と定義する．$\tilde{f}$ が $\mathbb{R}^n$ 上で凸であるとき，f を整凸関数とよぶ．$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x_i)$ (ただし $\psi_i(t-1) + \psi_i(t+1) \leq 2\psi_i(t)$, $t \in \mathbb{Z}$) の形の関数 Ψ を（離散変数の）分離凹関数と呼ぶ．

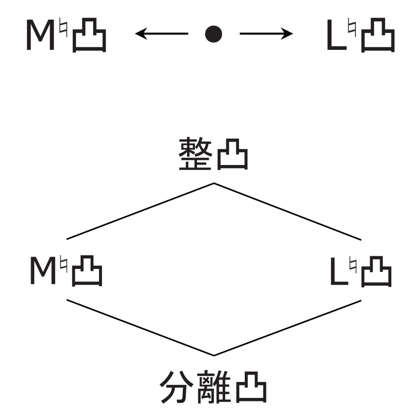
定理 2.1　整数値の整凸関数 $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ と整数値の分離凹関数 $\Psi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ に対して，

$$\min\{f(x) - \Psi(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n\} = \max\{\Psi^{\circ}(p) - f^{\bullet}(p) \mid p \in \mathbb{Z}^n\} \qquad (2)$$

が成り立つ．ただし (2) の左辺の最小値は有限値と仮定する．■

離散凸解析におけるフェンシェル双対性の一般形は (1) であるが，定理2.1 と既知の事実により，これが成立する (f, g) の組は以下の通りとなる（○は成立，×は不成立）：

f \ g	整凹	L♮凹	M♮凹	分離凹
整凸	X	X	X	◎
L♮凸	X	○	X	○
M♮凸	X	X	○	○
分離凸	◎	○	○	○



(整凸 ⊃ L♮凸 ⊃ 分離凸，整凸 ⊃ M♮凸 ⊃ 分離凸)

定理 2.1 の証明の概略

関数 f の凸拡張を $\overline{f}$，Ψ の凹拡張を $\overline{\Psi}$ と表すと，次の関係がある：

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\min_{x \in \mathbb{Z}^n}\{f(x) - \Psi(x)\} & = & \displaystyle\min_{x \in \mathbb{R}^n}\{\overline{f}(x) - \overline{\Psi}(x)\} \\ & & \| \\ \displaystyle\max_{p \in \mathbb{Z}^n}\{\Psi^{\circ}(p) - f^{\bullet}(p)\} & \leq & \displaystyle\max_{p \in \mathbb{R}^n}\{\Psi^{\circ}(p) - f^{\bullet}(p)\}. \end{array}$$

ここで，上の行の等号＝は，整凸関数 $f - \Psi$ の凸拡張可能性から導かれ，縦の等号 || は，連続変数のフェンシェル双対性である．$\Phi(x) := -\Psi(x)$ とおき，最小化問題の最適解を $x^* \in \mathbb{Z}^n$ とすると，

$$p \in \partial_{\mathbb{R}} f(x^*) \cap (-\partial_{\mathbb{R}} \Phi(x^*)) \qquad (3)$$

を満たす $p \in \mathbb{R}^n$ が存在する ($\partial_{\mathbb{R}} f(x^*)$, $\partial_{\mathbb{R}} \Phi(x^*)$ は，f, Φ の x^* における劣微分)．(3) を満たす整数ベクトル $p \in \mathbb{Z}^n$ の存在を示せば (2) が証明される．

$\Phi(x)$ は整数値の分離凸関数だから，$\partial_{\mathbb{R}} \Phi(x^*)$ は整数区間である．すなわち，ある $\alpha \in (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})^n, \beta \in (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})^n$ が存在して，

$$p \in -\partial_{\mathbb{R}} \Phi(x^*) \Leftrightarrow -\beta_j \leq p_j \leq -\alpha_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

一方，f の整凸性により，

$$p \in \partial_{\mathbb{R}} f(x^*) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j p_j \leq f(x^* + d) - f(x^*) \ (\forall d \in \{-1, 0, +1\}^n) \qquad (5)$$

となる．(4) と (5) を合併した不等式系に対してフーリエ・モツキンの消去法を適用する．その際，(4) の不等式が単純な形をしていることと，(5) の不等式の右辺が整凸性をもつことから，変数消去の過程で生成される不等式を特徴付けることができ，そこから (3) を満たす整数ベクトル $p \in \mathbb{Z}^n$ の存在が導かれる．

参考文献

・Murota, K., Tamura, A.: Integrality of subgradients and biconjugates of integrally convex functions. Optimization Letters **14**, 195–208 (2020)

・Murota, K., Tamura, A.: Discrete Fenchel duality for a pair of integrally convex and separable convex functions. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Published online (February 2, 2022)