

Lévy過程を用いた最適配当問題

野場 啓 統計思考院 助教

1 最適配当問題について

1.1 De Finetti の最適配当問題

ある企業は自身の資産から、株主に配当金を支払うものとする。この時、より多くの配当金を支払えることが望ましい。企業が破産までに支払う配当金の総額の期待値を最大化する配当戦略を考える問題を、最適配当問題と呼ぶ。この問題は、企業の資産を確率過程(ここでは、 $t \geq 0$ ごとに定義される確率変数 X_t の集合 $X = \{X_t : t \geq 0\}$ を指す)を用いて表すことにより、さまざまな研究者により研究されてきた。特に近年では、制御前の企業の資産を(一次元)Lévy過程で表した場合における最適戦略の研究結果がいくつか現れた。確率過程 X が(一次元)Lévy過程とは、

- 任意の $t \geq 0$ に対して、 X_t は \mathbb{R} に値を取る。
 - $X_0 = 0$, a.s., である。
 - $t \mapsto X_t$ は a.s. で右連続で左極限を持つ関数である。
 - 任意の $0 \leq s \leq t$ に対して、 $X_t - X_s$ と $X_{t-s} - X_0$ は同分布である。
 - 任意の $0 \leq s \leq t$ に対して、 $X_t - X_s$ と $\{X_u : u \in [0, s]\}$ は独立である。
- という条件を満たすものである。

1.2 資本注入を含む最適配当問題

1.1章で与えた設定に加え、企業は破産を避けるために、時折株主から資本注入を受けるものとする。この場合、より多くの配当金を支払い、受ける資本注入はより少なくすることが望ましい。企業が支払える配当金の総額から受ける資本注入の総額を引いたものの期待値を最大化する配当戦略を考える問題を、資本注入を含む最適配当問題と呼ぶことにする。このポスターでは、資本注入を含む最適配当問題の研究結果の例として、[1]の内容を簡単に説明する。

2 資本注入を含む最適配当問題について

2.1 数学的設定

値 $\alpha > 0$ を固定する。確率過程 X を、いくつかの条件を満たす Lévy 過程とする。また、 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 \mathbb{P}_x は $X_0 = x$ を a.s. で満たす Lévy 過程 X の法則とする。つまり、確率過程 $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t : t \geq 0\}$ を

$$\tilde{X}_t = X_t - x, \quad t \geq 0$$

で与えると、 \tilde{X} は 1.1章で与えた Lévy 過程の条件を満たす。

本研究において、任意の(配当)戦略 π は以下の条件を満たすものとする(いくつかの細かい条件は省略する)。

- 戦略 π を用いた時、時間 $t \geq 0$ までに支払った配当金の総額は L_t^π で表すことにする。この時、確率過程 $L^\pi = \{L_t^\pi : t \geq 0\}$ は非単調減少であり、時間について絶対連続であり、その密度は α 以下となる(簡単に言い換えると、関数 $t \mapsto L_t^\pi$ はジャンプをせず、傾きは高々 α になる)。
- 戦略 π を用いた時、時間 $t \geq 0$ までに受けた資本注入の総額は R_t^π で表すことにする。この時、確率過程 $R^\pi = \{R_t^\pi : t \geq 0\}$ は非単調減少であり、

$$X_t - L_t^\pi + R_t^\pi \geq 0, \quad t \geq 0$$

を満たす(つまり、企業が絶対に破産しないように資本注入が行われる)。

割引率を $q > 0$ 、資本注入のコストを $\beta > 1$ とすると、戦略 π をとった時の、初期の資産が $x \in \mathbb{R}$ の時の、支払った配当金の総額から受けた資本注入の総額を引いた値の期待賞味現在価値は、

$$v_\pi(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_{[0, \infty)} e^{-qt} dL_t^\pi - \beta \int_{[0, \infty)} e^{-qt} dR_t^\pi \right]$$

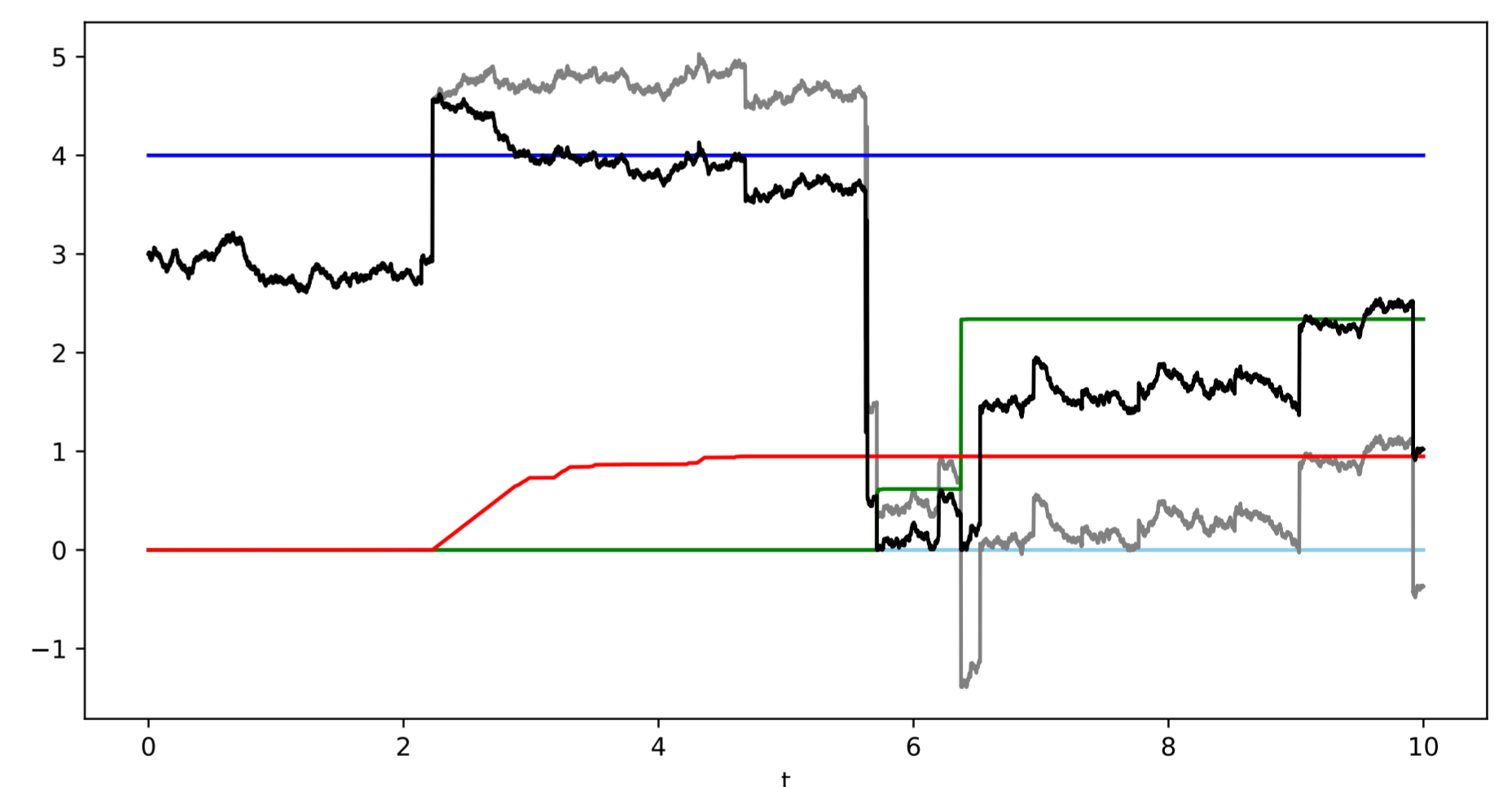
で与えられる。全ての戦略から成る集合を \mathcal{A} とする。この時、

$$v_{\pi^*}(x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}} v_\pi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

を満たす戦略 $\pi^* \in \mathcal{A}$ を最適戦略と呼ぶ。本研究の目的は、最適戦略を求めることである。

2.2 屈折-反射戦略

企業の資金が値 $b \geq 0$ を超えている時に時間ごとに傾き α だけ配当金を支払続け、企業の資金が 0 を下回った時、下回った分だけ資本注入を受ける戦略 π_b を、値 $b \geq 0$ での屈折-反射戦略と呼ぶ(定義の詳細は省略する)。例えば、値 4 での屈折-反射戦略を適用した時、企業の資産は以下の図のように変動する。



グレーの線: 制御前の企業の資金の挙動 (X).
 黒線: 制御前の企業の資金の挙動 ($X - L^{\pi_4} + R^{\pi_4}$).
 赤線: 支払った配当金の総額 (L^{π_4}).
 緑線: 受けた資本注入の総額 (R^{π_4}).

3 主結果

いくつかの計算を行うことにより、ある値 $b^* \geq 0$ を得ることができる(この計算については省略する)。この時、以下の主結果が得られる。

Theorem 3.1. 値 b^* での屈折-反射戦略 π_{b^*} は、最適戦略である。

参考文献

- [1] K. Noba. On the optimality of the refraction–reflection strategy for Lévy processes. arXiv preprint arXiv:2110.09560, 2021.