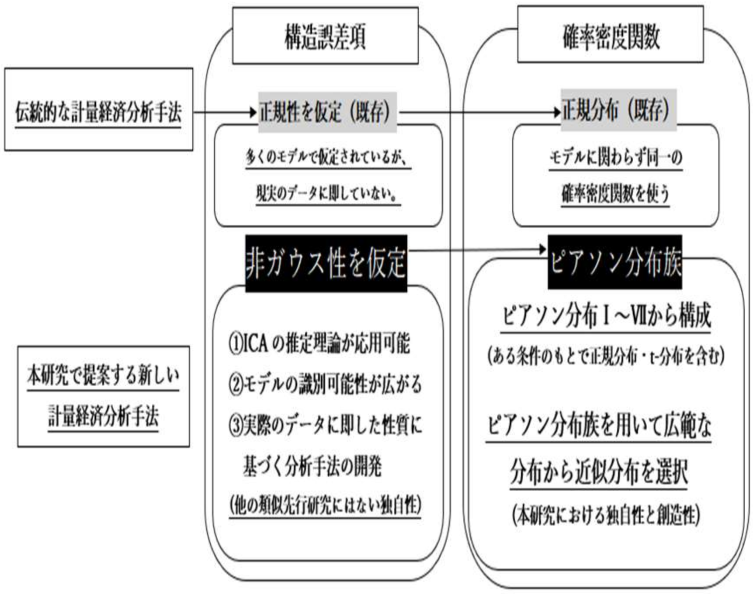
Data-Driven型最尤法の提案

中西 正 リスク解析戦略研究センター 特任助教

【はじめに】

Structural Vector Autoregressive (SVAR)モデルの構造誤差項は、伝統的な計量経済分析において、正規分布に従うとされているが、実際のデータ分析では非正規分布に従っていることが少なからずある。この問題に対し、”Data Driven”の観点から構造誤差項の分布のタイプと形状を表すパラメータを推定し、その情報をもとに疑似尤度関数を構築し、最尤推定を行う方法を提案した。
※本報告は前川功一氏(広島大学および広島経済大学名誉教授)との共同研究によるものである。

【伝統的 vs 新しい計量経済分析】



【SVARモデル】

ラグ1のSVARモデルを以下に示す。

- SVARモデル：$y_t = By_t + B_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$
- SVARモデルの誘導形：$y_t = B_0^{-1} B_1 y_{t-1} + u_t$
- 誘導形残差：$u_t = B_0^{-1}\varepsilon_t$

伝統的な計量経済分析の場合、構造誤差項ε_tの各要素が互いに独立な平均0，分散・共分散行列$\sigma^2 I$の正規分布に従うと仮定されるので、$u_t \sim N(0,\Omega)$ 、$\Omega = \sigma^2 B_0^{-1} B_0^{-1\prime}$である。

【ICAアルゴリズム】

正確な非正規分布の形状を知らない場合、どのようにして非正規型SVARモデルを最尤推定するのかという問題がある。ここでは、Independent Component Analysis(ICA)アルゴリズムを用いて、誘導形残差を構造誤差項と係数行列に分解する方法を採用した。まずは、ICAの概略を述べる。
いまn個の独立に非正規分布に従うn個の潜在変数$s_1, s_2, \cdots, s_n$ があり、これらの潜在変数の効果がミックスされた結果として、n個の観測値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$が観測される状況を考える。
ICAの基本式：$x = As$

ここに$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，$s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)'$ である。Aは、フルランクを持つ$n \times n$の行列で混合行列と呼ばれる。独立成分分析の問題とは、与えられた観測値 x のみからsとAをいかに抽出するかという問題である。ここで ICAの基本式とSVARモデルの誘導形残差を表す式の類似性に着目すれば、ICAとSVARモデルの関係が見えてくる。

- $x = As \quad vs \quad u_t = B_0^{-1}\varepsilon_t$

ただし、ICAアルゴリズムを用いる場合は、各構造誤差項は非正規布に従い(高々一つの要素が正規分布であっても良い)、統計的に独立であるという仮定が置かれる。非正規性の仮定により歪度や尖度などの高次のモーメント情報が利用可能になり、それによって識別性の問題を回避することができる(詳しくはLanne et al., 2017を参照)。

【モンテカルロ実験のデータ発生過程】

SVARモデルの誘導形：$y_t = Ay_{t-1} + B_0^{-1}\varepsilon_t$
ε_tの各要素の分布としてt-, Hyperbolic Secant-, Laplace-分布の何れかを仮定する。

$$\text{係数行列}A:\ B_0^{-1}B_1 = A = \begin{pmatrix} .96 & .01 & .21 & -.03 \\ .19 & 1.24 & .62 & -.07 \\ -.12 & -.25 & .39 & .07 \\ -.22 & -.05 & -.37 & .95 \end{pmatrix}$$

$$\text{係数行列}B_0^{-1}:\ B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1.41} & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{.57} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{.57} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上の想定の下でy_tを発生させ、誘導形残差$\hat{u}_t$を求める。ICAアルゴリズムを使って$\hat{u}_t = B_0^{-1}\hat{\varepsilon}_t$の関係から$\varepsilon_t$の推定値$\hat{\varepsilon}_t$を求める。最後に$\hat{\varepsilon}_t$の分布を推定し、推定された分布を使って、疑似尤度関数を構築し、B_0^{-1}の最尤推定値を求める。※ B_0^{-1}の太字になっている成分を推定する。

【実験結果】

Laplace (λ=0.5)の乱数を100個発生させ、用意した相関行列と掛け合わせて構造誤差項を生成した。誘導形残差を計算し、ICAを用いて無相関化された構造誤差項を得る。次に構造誤差項の分布の形状を表すパラメータを推定し、疑似尤度関数を構築し、最尤推定値を計算した。200回繰り返し推定して得られた推定値、標準誤差、平均平方二乗誤差の平均を以下に示す。提案した手法から得られた推定値の平均は真の値に近い値が得られた。

	True Parameter	Mean	Std	RMSE
b_{13}	1.4142	1.4065	0.0378	0.0367
b_{14}	1.0000	1.0062	0.0075	0.0094
b_{23}	1.0000	1.0159	0.0694	0.0677
b_{31}	0.5733	0.5758	0.0037	0.0038
b_{42}	0.5733	0.5758	0.0060	0.0059