システム空間の不変な情報幾何学的構造

公文　雅之　**リスク解析戦略研究センター　特任准教授**

【概要】
正則な正方型の伝達関数行列全体（正則システム空間）はその Fourier 係数を座標系として無限次元の Lie 群になる．そこでLie 群における左移動および右移動に関して不変な微分幾何学的構造として, この空間に 左不変および右不変な Riemann 計量と線形接続が定義される．これらの構造は先ず因果的正則システム空間に対する inner-outer factorization を通じて最小位相 (outer) システム空間と全域通過 (inner) システム空間に導入され，さらにこれらのシステムをモジュール として2次および高次のキュムラントスペクトル密度空間に構成される．また Riemann 計量の積分可能条件から各システム空間に Bregman 型の情報幾何学的 ダイバージェンスが生み出され，導入した情報幾何学的諸構造はブロック 型の非線形フィードバック機構の解明に適用される．これらの研究内容について以下の論文から概説する．

Invariant information geometrical structures on system spaces.
ISM Research Memorandum, No. 1210, 2020.
Information geometry of nonlinear feedback systems.
ISM Research Memorandum, No. 1217, 2022.

【正則システム空間の不変な計量と接続】

$\Sigma = \{H(z) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} h(u)z^u,\ \exists H(z)^{-1}\}$: 正則システム空間
$H(z) = H(z,\boldsymbol{\theta}) = H(z,\boldsymbol{\xi}) \in \Sigma$: 無限次元 Lie 群
$\boldsymbol{\theta} = (\theta^{\mathbb{I}}) = (h(u); u = 0, \pm 1, \dots)$: Fourier 係数 $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{\xi} = (\xi^{\mathbb{A}})$: 他の座標系
$H, K \in \Sigma$　$L_H(K) = HK \in \Sigma$: 左移動　$R_H(K) = KH \in \Sigma$: 右移動

$T_H(\Sigma) = \{X_H = \sum_{\mathbb{I}} x^{\mathbb{I}}(\partial_{\mathbb{I}})_H,\ \partial_{\mathbb{I}} = \partial/\partial\theta^{\mathbb{I}}\}$: $H \in \Sigma$ での接空間
$g_K^{(L)}(X_K, Y_K) = g_{L_H(K)}^{(L)}((L_H)_* X_K, (L_H)_* Y_K)$: 計量の左不変条件
$g_K^{(R)}(X_K, Y_K) = g_{R_H(K)}^{(R)}((R_H)_* X_K, (R_H)_* Y_K)$: 計量の右不変条件
$\Rightarrow$ $g_{\mathbb{AB}}^{(L)}(\boldsymbol{\xi}) = \langle l_{\mathbb{A}}(H), l_{\mathbb{B}}(H)\rangle$　$l_{\mathbb{A}}(H) = H^{-1}\partial_{\mathbb{A}} H$: 左不変計量
　$g_{\mathbb{AB}}^{(R)}(\boldsymbol{\xi}) = \langle r_{\mathbb{A}}(H), r_{\mathbb{B}}(H)\rangle$　$r_{\mathbb{A}}(H) = \partial_{\mathbb{A}} H H^{-1}$: 右不変計量
$\langle X, Y\rangle = [XY^*] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \mathrm{tr}(X(z)Y(z)^*)\frac{dz}{z}$　$Y(z)^* = Y(\bar{z})'$: 内積

$\mathfrak{X}(\Sigma) = \{X = \sum_{\mathbb{I}} x^{\mathbb{I}}(\boldsymbol{\theta})\partial_{\mathbb{I}}\}$: Σ 上のベクトル場 $X = \{X_H | H \in \Sigma\}$ 全体
$(X, Y) \in \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$: $\mathfrak{X}(\Sigma)$ 上の共変微分
$(L_H)_*(\nabla_X^{(L)} Y)_K = (\nabla_{(L_H)_* X}^{(L)} (L_H)_* Y)_{L_H(K)}$: 共変微分の左不変条件
$(R_H)_*(\nabla_X^{(R)} Y)_K = (\nabla_{(R_H)_* X}^{(R)} (R_H)_* Y)_{R_H(K)}$: 共変微分の右不変条件
$\Rightarrow$ $\Gamma_{\mathbb{ABC}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi}) = Q_{\mathbb{ABC}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{\{\mathbb{ABC}\}} d_{\mathbb{ABC}}^{(L,R)} T_{\mathbb{ABC}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi})$: (左, 右) 不変接続
　$\Gamma_{\mathbb{ABC}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi})$: 6 パラメータ $\{d_{\mathbb{ABC}}^{(L,R)}\}$ (左, 右) 不変接続
$Q_{\mathbb{ABC}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi}) = [\partial_{\mathbb{A}} g_{\mathbb{BC}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi}) + \partial_{\mathbb{B}} g_{\mathbb{AC}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi}) - \partial_{\mathbb{C}} g_{\mathbb{AB}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi})]/2$: Riemann 接続
$T_{\mathbb{ABC}}^{(L)}(\boldsymbol{\xi}) = \langle l_{\mathbb{A}}(H) l_{\mathbb{B}}(H), l_{\mathbb{C}}(H)\rangle$　$T_{\mathbb{ABC}}^{(R)}(\boldsymbol{\xi}) = \langle r_{\mathbb{A}}(H) r_{\mathbb{B}}(H), r_{\mathbb{C}}(H)\rangle$

【最小位相および全域通過システム空間の計量と接続】

$\Sigma^+ = \{H(z) \in \Sigma | H(z) = \sum_{u=0}^{\infty} h(u)z^u\}$: 因果的正則システム空間
$\Sigma^+ = \Sigma_O^+ \times \Sigma_I^+$; $H(z) = A(z)B(z)$　$\Sigma^+ = \Sigma_I^+ \times \Sigma_O^+$; $H(z) = B(z)A(z)$
$\Sigma_O^+ = \{A(z) \in \Sigma^+ | A(z)^{-1} \in \Sigma^+\}$: 最小位相 (outer) システム空間
$\Sigma_I^+ = \{B(z) \in \Sigma^+ | B(z)B(z)^* = E\}$: 全域通過 (inner) システム空間
$\sim$ inner-outer factorization　$A(z, \boldsymbol{\xi}_O)$; $\boldsymbol{\xi}_O = (\xi_O^{\boldsymbol{\alpha}})$　$B(z, \boldsymbol{\xi}_I)$; $\boldsymbol{\xi}_I = (\xi_I^{\boldsymbol{\kappa}})$

$g_{\boldsymbol{\alpha\beta}}^{(L)}(\boldsymbol{\xi}_O) = \langle l_{\boldsymbol{\alpha}}(A), l_{\boldsymbol{\beta}}(A)\rangle$　$g_{\boldsymbol{\alpha\beta}}^{(R)}(\boldsymbol{\xi}_O) = \langle r_{\boldsymbol{\alpha}}(A), r_{\boldsymbol{\beta}}(A)\rangle$: (左,右)不変計量
$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi}_O) = Q_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi}_O) + \sum_{\{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}\}} d_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}^{(L,R)} T_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}^{(L,R)}(\boldsymbol{\xi}_O)$: (左,右)不変接続

$B(z) \in \Sigma_I^+$ のパラユニタリ性 $(B(z)B(z)^* = E)$ より 左右の区別なく
$g_{\boldsymbol{\kappa\lambda}}^{(I)}(\boldsymbol{\xi}_I) = \langle \partial_{\boldsymbol{\kappa}} B, \partial_{\boldsymbol{\lambda}} B\rangle$: 不変計量
$\Gamma_{\boldsymbol{\kappa\lambda\mu}}^{(I)}(\boldsymbol{\xi}_I) = Q_{\boldsymbol{\kappa\lambda\mu}}^{(I)}(\boldsymbol{\xi}_I) + d^{(I)} T_{\boldsymbol{\kappa\lambda\mu}}^{(I)}(\boldsymbol{\xi}_I)$: 1パラメータ不変接続
$T_{\boldsymbol{\kappa\lambda\mu}}^{(I)}(\boldsymbol{\xi}_I) = \langle \partial_{\boldsymbol{\kappa}} B B^* \partial_{\boldsymbol{\lambda}} B, \partial_{\boldsymbol{\mu}} B\rangle$: 完全反対称テンソル

【2次および高次スペクトル密度空間の計量と接続】

$\Phi_2 = \{S_2(z) = A(z)A(z)^*$ or $A(z)^*A(z)\} \cong \Sigma_O^+$: 2次スペクトル密度空間
$S_2(z) \in \Phi_2$ のパラエルミート性 $(S_2(z) = S_2(z)^*)$ より 左右の区別なく
$g_{\boldsymbol{\alpha\beta}}^{(S_2)}(\boldsymbol{\xi}_O) = [l_{\boldsymbol{\alpha}}(S_2) l_{\boldsymbol{\beta}}(S_2)] = [r_{\boldsymbol{\alpha}}(S_2) r_{\boldsymbol{\beta}}(S_2)]$: 不変計量
$\Gamma_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}^{(S_2)}(\boldsymbol{\xi}_O) = Q_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}^{(S_2)}(\boldsymbol{\xi}_O) + d^{(S_2)} T_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}^{(S_2)}(\boldsymbol{\xi}_O)$: 1パラメータ不変接続
$T_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}^{(S_2)}(\boldsymbol{\xi}_O) = [l_{\boldsymbol{\alpha}}(S_2) l_{\boldsymbol{\beta}}(S_2) l_{\boldsymbol{\gamma}}(S_2)] = [r_{\boldsymbol{\alpha}}(S_2) r_{\boldsymbol{\beta}}(S_2) r_{\boldsymbol{\gamma}}(S_2)]$
$\sim$ 完全対称テンソル

$\Phi_k^I = \{S_k(z_1, \dots, z_k) = B(z_1)\cdots B(z_k),\ B(z_i) \in \Sigma_I^+\}$
$\sim k$ 次スペクトル密度空間 $(k \geq 3)$
$g^{(S_k^I)}(\boldsymbol{\xi}_I) = \langle \partial_{\boldsymbol{\kappa}} S_k^I, \partial_{\boldsymbol{\lambda}} S_k^I\rangle$: 不変計量
$\Gamma_{\boldsymbol{\kappa\lambda\mu}}^{(S_k^I)}(\boldsymbol{\xi}_I) = Q_{\boldsymbol{\kappa\lambda\mu}}^{(S_k^I)}(\boldsymbol{\xi}_I)$: 不変接続 (Riemann 接続)

【情報幾何学的ダイバージェンス】

$\mathcal{K} = \{K(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}) = [K^{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta})]\}$: 多変量マーティンゲール空間
$\mathcal{M} = \{Q(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}) = [Q_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta})]\}$: 多変量測度空間
$\boldsymbol{a} = (a_1 \cdots a_k),\ \boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_k),\ \boldsymbol{\theta} = (\theta^\alpha) \subset \mathbb{R}^s$
$G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \langle K(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}), Q(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}')\rangle$: 内積関数
$g_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) = \langle \partial_\alpha K(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}), \partial_\beta Q(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta})\rangle$　$g_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = g_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta})$: 計量積分可能条件
$\Leftrightarrow$ $\exists D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = E(\boldsymbol{\theta}) + F(\boldsymbol{\theta}') - G(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}')$: Bregman 型ダイバージェンス
$D^{(S_2)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = [S_2(z, \boldsymbol{\theta}')^{-1} S_2(z, \boldsymbol{\theta}) + \log(S_2(z, \boldsymbol{\theta}')^{-1} S_2(z, \boldsymbol{\theta}))] - c$　on Φ_2
$D^{(S_k^I)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \frac{1}{2}\|S_k^I(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}) - S_k^I(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\theta}')\|^2$　on Φ_k^I

$\Rightarrow$ Information geometry of multiple martingale models.

【フィードバック機構の情報幾何】

$\boldsymbol{y}_c = \tilde{H}[\boldsymbol{u}_c]$　$\tilde{H} = H * S_l = S_r * H$: 閉ループフィードバック機構
$S_l = (I + G * H)^{-1}$　$S_r = (I + H * G)^{-1}$: 感度演算子
$H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n,\ G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n,\ S_l = \sum_{n=0}^{\infty} S_{l(n)},\ S_r = \sum_{n=0}^{\infty} S_{r(n)}$
$\sim$ Volterra 級数展開
$\Rightarrow$ $l_\alpha(\tilde{H}_1) = l_\alpha(H_1) S_{l(1)} - r_\alpha(G_1) T_{l(1)}$　$S_{l(1)} + T_{l(1)} = E$
　$r_\alpha(\tilde{H}_1) = S_{r(1)} r_\alpha(H_1) - T_{r(1)} l_\alpha(G_1)$　$S_{r(1)} + T_{r(1)} = E$
$\nabla_{\partial_\alpha}^{(H_1,l)} l_\beta(H_1) = \partial_\alpha l_\beta(H_1) - l_\beta(H_1) l_\alpha(H_1)$
$\nabla_{\partial_\alpha}^{(G_1,r)} r_\beta(G_1) = \partial_\alpha r_\beta(G_1) + r_\beta(G_1) r_\alpha(G_1)$
$\Rightarrow$ $\nabla_{\partial_\alpha}^{(\tilde{H}_1,l)} l_\beta(\tilde{H}_1) = \nabla_{\partial_\alpha}^{(H_1,l)} l_\beta(H_1) S_{l(1)} - \nabla_{\partial_\alpha}^{(G_1,r)} r_\beta(G_1) T_{l(1)}$
$\nabla_{\partial_\alpha}^{(H_1,r)} r_\beta(H_1) = \partial_\alpha r_\beta(H_1) - r_\alpha(H_1) r_\beta(H_1)$
$\nabla_{\partial_\alpha}^{(G_1,l)} l_\beta(G_1) = \partial_\alpha l_\beta(G_1) + l_\alpha(G_1) l_\beta(G_1)$
$\Rightarrow$ $\nabla_{\partial_\alpha}^{(\tilde{H}_1,r)} r_\beta(\tilde{H}_1) = S_{r(1)} \nabla_{\partial_\alpha}^{(H_1,r)} r_\beta(H_1) - T_{r(1)} \nabla_{\partial_\alpha}^{(G_1,l)} l_\beta(G_1)$
H_1 : AR (自己回帰) 型　G_1 : MA (移動平均) 型
$\Rightarrow$ $\nabla_{\partial_\alpha}^{(H_1,l)} l_\beta(H_1),\ \nabla_{\partial_\alpha}^{(H_1,r)} r_\beta(H_1),\ \nabla_{\partial_\alpha}^{(G_1,r)} r_\beta(G_1),\ \nabla_{\partial_\alpha}^{(G_1,l)} l_\beta(G_1) \equiv 0$
$\Rightarrow$ $\nabla_{\partial_\alpha}^{(\tilde{H}_1,l)} l_\beta(\tilde{H}_1),\ \nabla_{\partial_\alpha}^{(\tilde{H}_1,r)} r_\beta(\tilde{H}_1) \equiv 0$

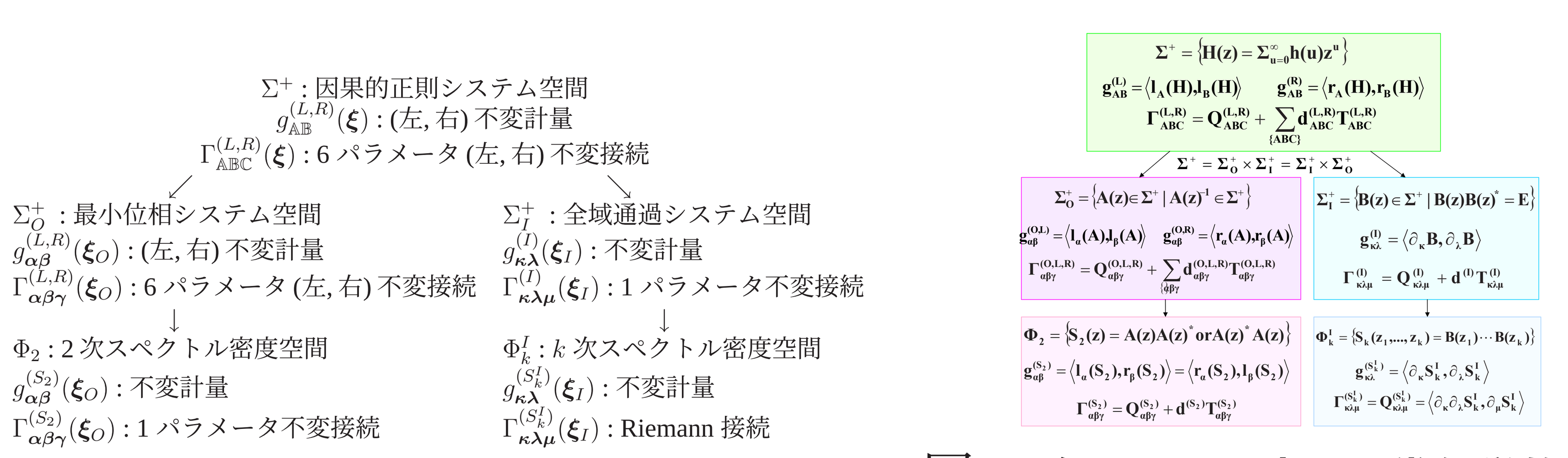

図 1: **各システム空間の幾何学的構造**

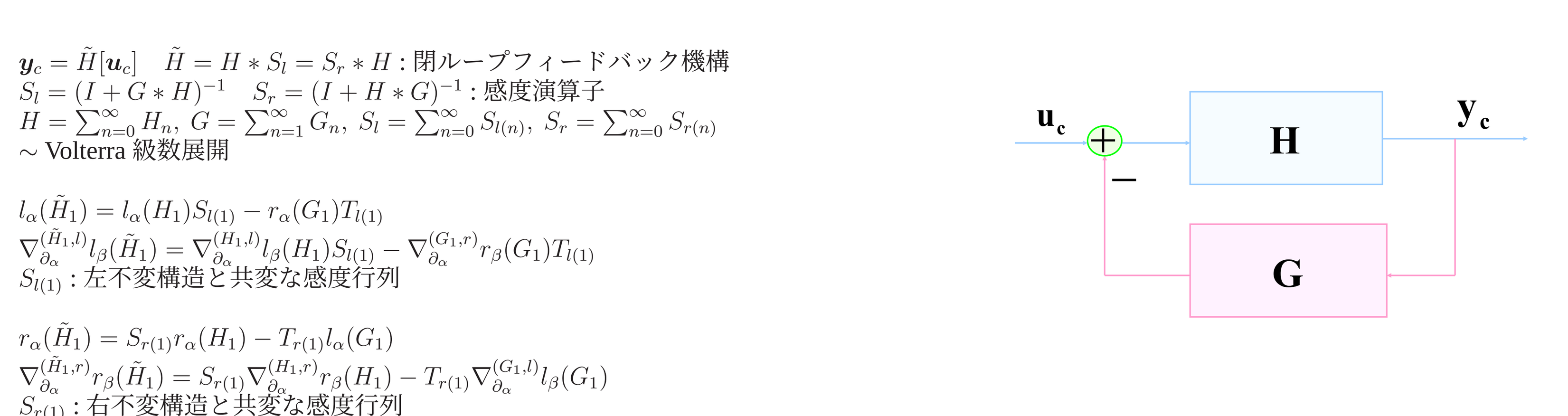

図 2: **閉ループフィードバック機構**