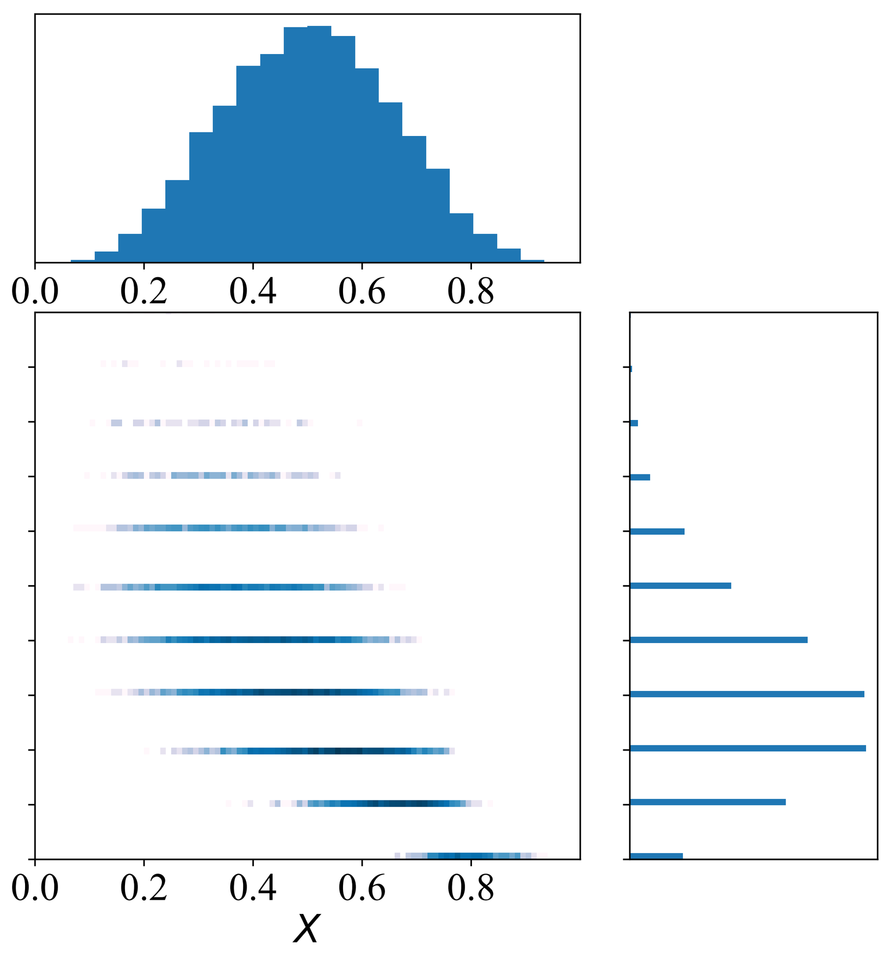
最小情報従属モデルによる依存関係の解析

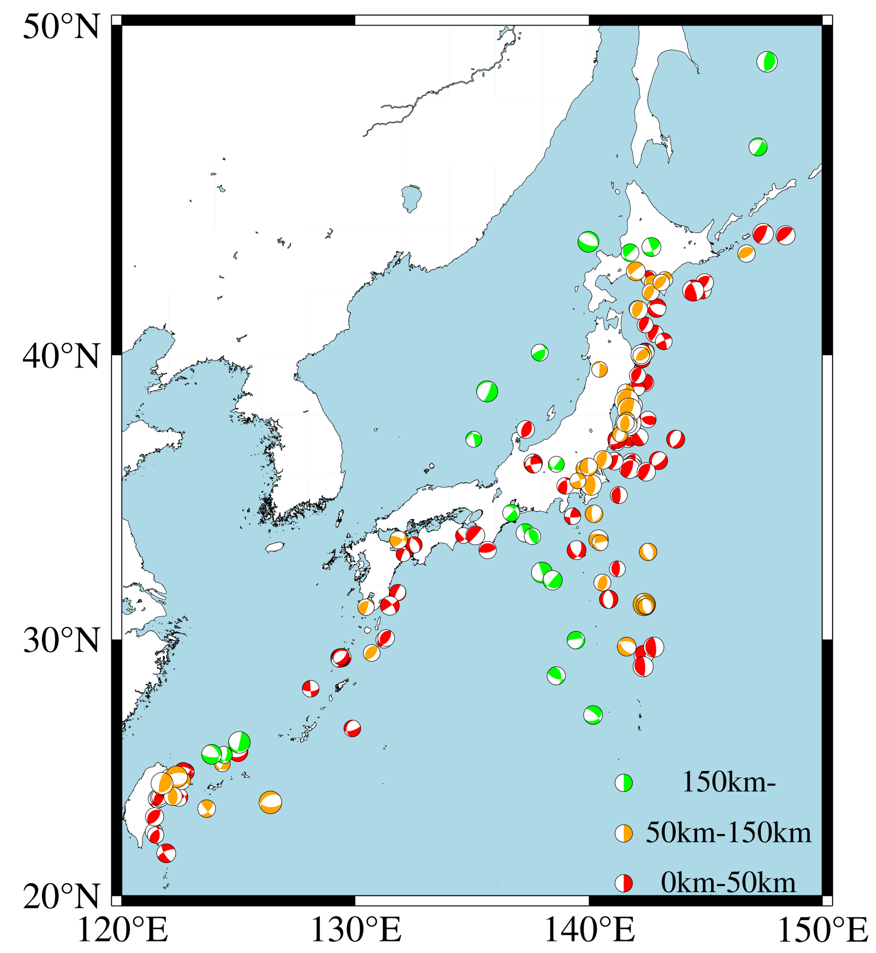
矢野 恵佑　　数理・推論研究系 准教授（共同研究者：東京大学 清 智也教授）

概要：
- ➢ 任意の対象間の任意の次数の依存関係を捉えるモデルを提案
- ➢ 依存関係を表すパラメータの効率的な推定方法の提案

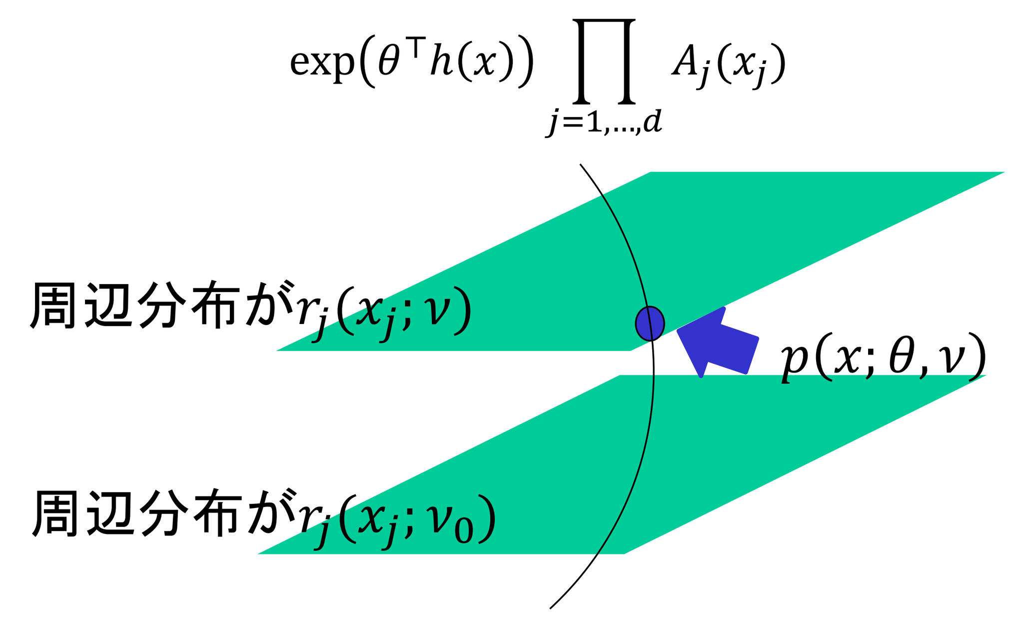
背景：
- さまざまな対象(実数, カテゴリ変数, 角度, 多様体, …)の依存関係(3次以上の依存関係も含む)を知りたい



カウントデータと割合データの関係



深さと発震機構解(直交枠データ)の関係



提案モデルの幾何構造

提案モデル：最小情報従属モデル
- 任意の積空間$\mathcal{X} \coloneqq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_d$と測度$\mathrm{d}x \coloneqq \mathrm{d}x_1 \times \cdots \times \mathrm{d}x_d$を考える
- 各jに対しνで添字付けられた分布$r_j(x_j;\nu)$と関数$h\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$を考える
- 積空間$\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_d$の分布

$$p(x;\theta,\nu) = \exp\left(\theta^\top h(x) - \sum_{j=1,\dots,d} a_j(x_j;\nu) - \psi(\theta,\nu)\right) \prod_{j=1,\dots,d} r_j(x_j;\nu)$$

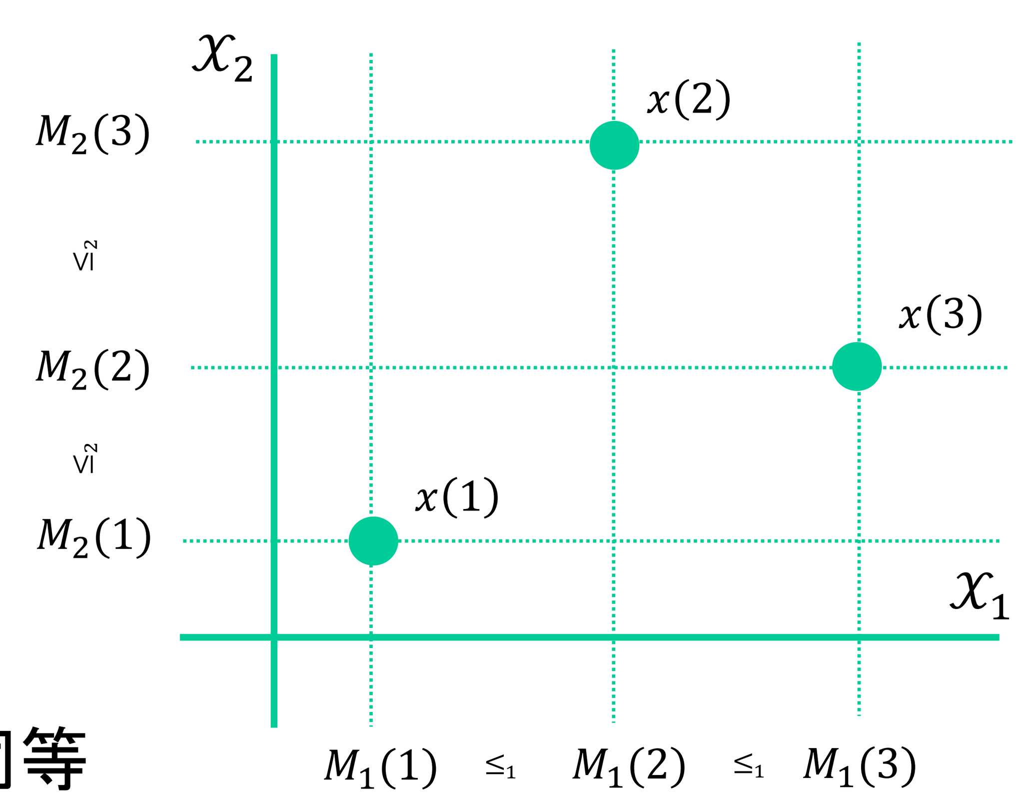
- $a_j(\cdot;\nu)$と$\psi(\theta,\nu)$は次を満たすように決まる：

$$\int p(x;\theta,\nu)\mathrm{d}x_{-j} = r_i(x_j;\nu), j = 1,\dots,d \ \text{ and } \int \sum_{j=1,\dots,d} a_j(x_j;\theta,\nu) p(x;\theta,\nu)\mathrm{d}x = 0$$

提案モデルでの依存関係のパラメータ$\boldsymbol{\theta}$の推定
- データ$\{x(t)\colon t = 1,\dots,n\}$を右図のように周辺経験分布$M$と順位統計量$\pi \in \mathrm{S}_n^d$に分解
- 尤度は次のように分解できる

$$\prod_{t=1,\dots,n} p(x(t);\theta,\nu) = f(\pi \mid M;\theta) g(M;\theta,\nu)$$

$$f(\pi \mid M;\theta) \propto \exp\left(\theta^\top \sum_t h((M \circ \pi)(t))\right)$$



- 条件付き尤度 $f(\pi \mid M;\theta)$の最大化によりθを推定→ a_jの計算不要, 最尤法と漸近同等

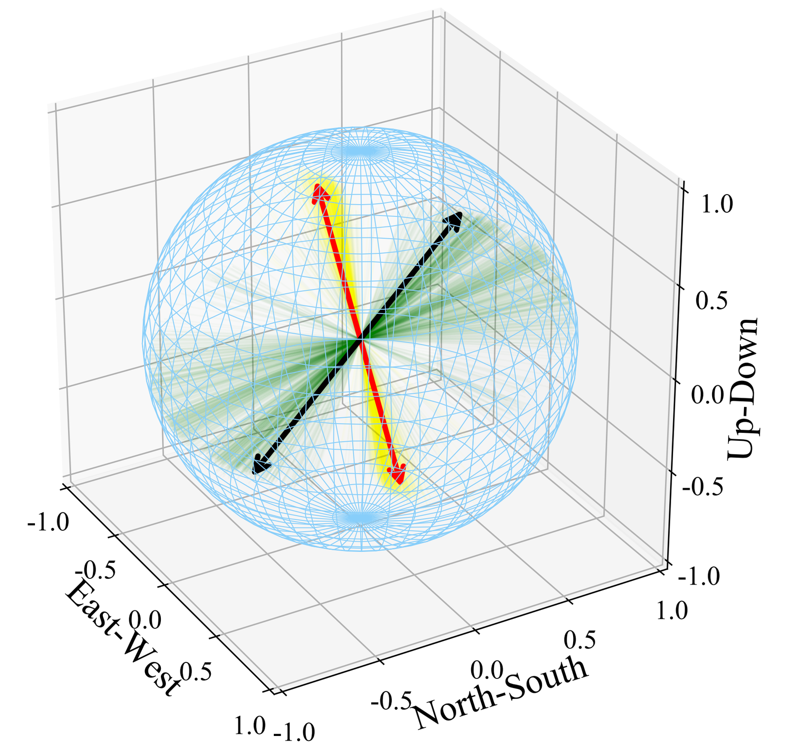
震源の深さと発震機構解の解析
- 地震の発震機構解は直交する二つの軸 (Arnold and Jupp, 2013)
  - 主圧力を表すP軸と主張力を表すT軸
- 震源の深さzと発震機構解(P,T)の関係を

$$H^P = H^P(z,P) = zPP^\top \text{ and } H^T = H^T(z,T) = zTT^\top$$

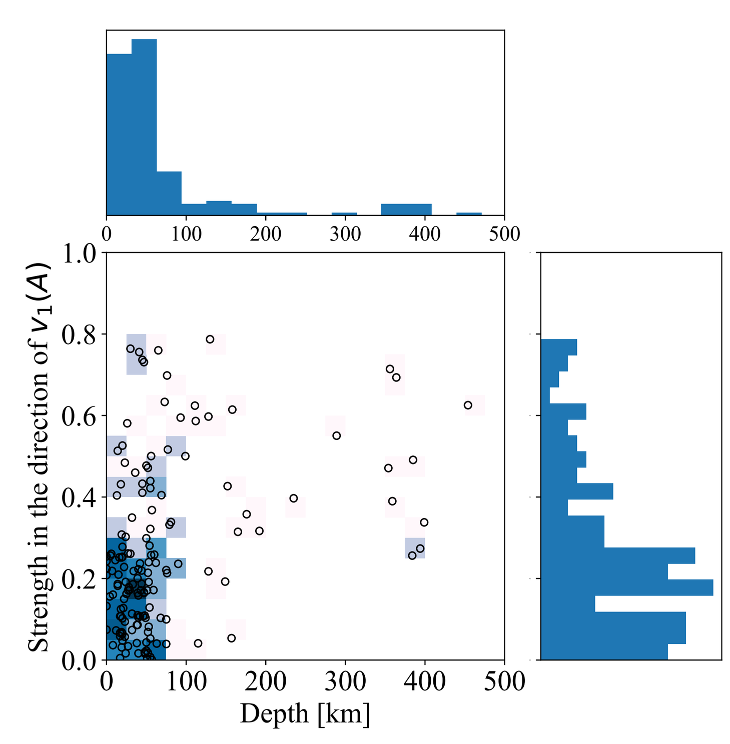
を利用した最小情報従属モデル

$$p(x;A,B,\nu) = \mathrm{etr}(AH^P)\mathrm{etr}(BH^T)\cdots$$

によって調べる。
- 2021年の158個の地震(Japan Meteorological Agency)を利用



Aの固有ベクトルの推定値とその不確実性
赤が第一固有ベクトル;黒が第3固有ベクトル



Aの第一固有ベクトルへの射影と深さ

参考文献
[1] R. Arnold and P. Jupp (2013) Statistics of orthogonal axial frames. Biometrika 100 (3): 571--586
[2] Japan Meteorological Agency. The seismological bulletin of Japan, 2022.