

# 中心極限確率場に対する期待ミンコフスキー汎関数の漸近展開

栗木 哲 数理・推論研究系 教授

本研究は、松原隆彦 (KEK), 日影千秋 (IPMU) 両氏との共同研究です。

## 1 等方的弱非ガウス確率場と宇宙論

ここではサンプルパスが滑らかな等方的弱非ガウス確率場

$$X(t), \quad t \in E \subset \mathbb{R}^n$$

を扱う。このような信号は、宇宙の大規模構造 (the large-scale structure of the universe) や宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) として観測される。ここで弱非ガウス性は

$$\text{cum}(X(t_1), \dots, X(t_k)) = O(\nu^{k-2}), \quad k \geq 2, \quad (1.1)$$

( $\nu \ll 1$ ) と記述される。ここではこの関係をみだすものとして、中心極限確率場 (central limit random field)

$$X(t) = X_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Z_{(i)}(t), \quad t \in E \subset \mathbb{R}^n,$$

を考える。ただし  $Z_{(i)}$  は滑らかなサンプルパスを持つ平均0の等方的 i.i.d. 非ガウス確率場で、関係式 (1.1) は  $\nu = 1/\sqrt{N}$  となりつつ、

宇宙論研究ではレベル集合 (イクスカージョン集合)

$$E_x = \{t \in E \mid X(t) \geq x\} = X^{-1}([x, \infty))$$

のミンコフスキー汎関数の理論値と観測値、あるいはシミュレータによる値を比較し、理論の妥当性を確認する。ここで集合  $M \subset \mathbb{R}^n$  のミンコフスキー汎関数  $\mathcal{M}_j(M)$ ,  $j = 1, \dots, n$  とは  $M$  のまわりの半径  $\rho > 0$  のチューブの体積多項式

$$\text{Vol}_n(\text{Tube}(M, \rho)) = \sum_{j=0}^n \omega_{n-j} \rho^{n-j} \mathcal{L}_j(M)$$

の係数として定義される。ただし  $\omega_j$  は  $\mathbb{R}^j$  の単位球の体積。  $\mathcal{M}_j(M) = \binom{n}{j}^{-1} \omega_j \mathcal{L}_{n-j}(M)$  を  $M$  の  $j$  次ミンコフスキー汎関数という。

一般に確率場が等方的の場合、

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_k(E_x)] = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{k+j}{k} \mathcal{L}_{k+j}(E) \Xi_{j,N}(x)$$

がなりつつ。さらにガウス確率場の場合には関数  $\Xi_{j,N}(x)$  はエルミート多項式を用いて陽に表されることが知られている。中心極限確率場の場合の  $\Xi_{j,N}(x)$  の導出が、ここでの問題である。

## 2 主結果

次の公式 (Kac-Rice公式) を出発点とする。  $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ ,  $\mathbb{E}[X(s)X(t)] = \rho(\frac{1}{2}\|s-t\|^2)$ ,  $\rho(0) = 1$ ,  $\gamma = -\rho'(0)$  とおく。

**命題 1.** ( $X(t), \nabla X(t), \nabla^2 X(t)$ ) ( $t$  固定) の密度関数  $p_N$  が存在するとき、正則条件の下で

$$\Xi_{n,N}(x) = \int_x^\infty \left[ \int_{\text{Sym}(n)} \det(-R + \gamma x I_n) p_N(x, 0, R) dR \right] dx.$$

## 出典

- [1] SK & T. Matsubara, Asymptotic expansion of the expected Minkowski functional for isotropic central limit random fields, arXiv:2011.04953 [math.ST].  
 [2] T. Matsubara & SK, Weakly non-Gaussian formula for the Minkowski functionals in general dimensions, Physical Review D, 104, 103522 (Nov 2021).  
 [3] T. Matsubara, C. Hikage & SK, Minkowski functionals and the nonlinear perturbation theory in the large-scale structure: second-order effects, Physical Review D, 105, 023527 (Jan 2022).

主結果を述べるために等方的キユムラントを定義する。

$$\text{cum}(X(t_1), \dots, X(t_k)) = N^{-\frac{1}{2}(k-2)} \kappa^{(k)}(x_{12}, x_{13}, \dots, x_{k-1,k}),$$

ただし  $x_{ab} = \frac{1}{2}\|t_a - t_b\|^2$ . ここで  $\kappa^{(k)}$  は  $Z_{(i)}$  の等方的  $k$  次キユムラント,  $\kappa_{(a,b), \dots, (c,d)}^{(k)} = (\partial/\partial x_{ab}) \cdots (\partial/\partial x_{cd}) \kappa^{(k)}$ , また  $H_k(x)$  をエルミート多項式とする。

**定理 2.**  $N \rightarrow \infty$  のとき、正則条件の下で

$$\gamma^{-n/2} \Xi_{n,N}(x) = \frac{\phi(x)}{(2\pi)^{n/2}} \left( H_{n-1}(x) + \frac{1}{\sqrt{N}} \Delta_{1,n}(x) + \frac{1}{N} \Delta_{2,n}(x) \right) + o(N^{-1}),$$

ただし

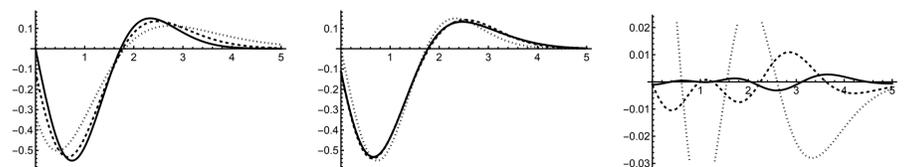
$$\begin{aligned} \Delta_{1,n}(x) &= \frac{1}{2} \gamma^{-2} \kappa_{11} n(n-1) H_{n-2}(x) - \frac{1}{2} \gamma^{-1} \kappa_1 n H_n(x) + \frac{1}{6} \kappa_0 H_{n+2}(x), \\ \Delta_{2,n}(x) &= \left( -\frac{1}{6} \gamma^{-3} (3\tilde{\kappa}_{111}^a + \tilde{\kappa}_{111}^d) + \frac{1}{8} \gamma^{-4} \kappa_{11}^2 (n-7) \right) n(n-1)(n-2) \\ &\quad \times H_{n-3}(x) + \left( \frac{1}{8} \gamma^{-2} (\tilde{\kappa}_{11}^{aa} (n-2) + 4\tilde{\kappa}_{11}^a (n-1)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \gamma^{-3} \kappa_1 \kappa_{11} (n-1)(n-4) \right) n H_{n-1}(x) \\ &\quad + \left( -\frac{1}{4} \gamma^{-1} \tilde{\kappa}_1 + \frac{1}{24} \gamma^{-2} (3\kappa_1^2 (n-2) + 2\kappa_0 \kappa_{11} (n-1)) \right) n H_{n+1}(x) \\ &\quad + \left( \frac{1}{24} \kappa_0 - \frac{1}{12} \gamma^{-1} \kappa_0 \kappa_{11} n \right) H_{n+3}(x) + \frac{1}{72} \kappa_0^2 H_{n+5}(x). \end{aligned}$$

ここで  $\kappa_0 = \kappa^{(3)}(0)$ ,  $\kappa_1 = \kappa_{(12)}^{(3)}(0)$ ,  $\kappa_{11} = \kappa_{(12),(13)}^{(3)}(0)$ ,  $\tilde{\kappa}_0 = \kappa^{(4)}(0)$ ,  $\tilde{\kappa}_1 = \kappa_{(12)}^{(4)}(0)$ ,  $\tilde{\kappa}_{11}^a = \kappa_{(12),(13)}^{(4)}(0)$ ,  $\tilde{\kappa}_{11}^{aa} = \kappa_{(12),(34)}^{(4)}(0)$ ,  $\tilde{\kappa}_{111}^d = \kappa_{(12),(13),(14)}^{(4)}(0)$ ,  $\tilde{\kappa}_{111}^a = \kappa_{(12),(13),(24)}^{(4)}(0)$ .

## 3 カイ2乗確率場

$Z_{(i)}(t)$ ,  $t \in E \subset \mathbb{R}^4$  を平均0,  $\mathbb{E}[Z_{(i)}(s)Z_{(i)}(t)] = \rho_Z(\frac{1}{2}\|s-t\|^2)$  s.t.  $\rho_Z(0) = 1$ ,  $\rho_Z'(0) = -g < 0$  の等方的ガウス確率場とし、中心極限確率場を構成する。

$$Y(t) = Y_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{i=1}^N (Z_{(i)}(t)^2 - 1).$$



左: 期待EC (点線:  $N = 10$ , 破線:  $N = 100$ , 実線:  $N = \infty$ )

中: 期待EC,  $N = 100$  (一点鎖線: 真値, 点線: ガウス近似, 破線: 1次近似, 実線: 2次近似)

右: 真値からの乖離,  $N = 100$  (点線: ガウス近似, 破線: 1次近似, 実線: 2次近似)

