2021年6月18日　統計数理研究所　オープンハウス

複素 DC 最適化問題に対するアルゴリズムとその応用

高橋 翔大　総合研究大学院大学 統計科学専攻 5 年一貫制博士課程 3 年

1　複素 DC 最適化問題

凸関数同士の差で表せる目的関数の最適化問題 $(\mathcal{P})$ を扱う.

- 複素 Difference of Convex (DC) 最適化問題:

$$(\mathcal{P})\quad \min_{\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^d}\quad g(\boldsymbol{z})+f_1(\boldsymbol{z})-f_2(\boldsymbol{z}).$$

- $f_1, f_2, g : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ は凸関数で, $(\mathcal{P})$ は複素最適化問題の一種.

1.1　複素微分可能性

複素関数の複素微分可能性は Cauchy-Riemann の方程式と等価.

- 複素関数 $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は実関数 $u, v : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を用いて,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\quad z = x+iy,\quad x,y\in\mathbb{R} \tag{1}$$

  と表せる. z がベクトルの場合でも, (1) は同様に成り立つ.
- Cauchy-Riemann の方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

- $f : \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ は $v\equiv 0$ より, 任意の点で (2) をみたさず, 複素微分不可能.

1.2　Wirtinger 微分と複素勾配

代わりに, 複素微分可能性を緩和した Wirtinger 微分を導入する.

- Wirtinger 微分:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

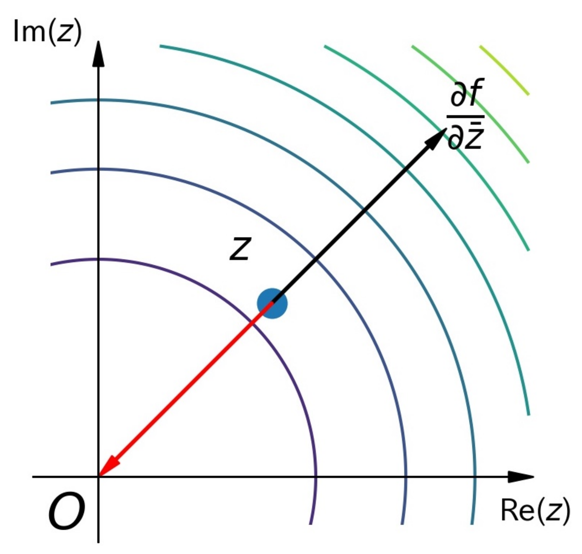

図 1: $f(z) = |z|^2$ の等高線と z での Wirtinger 微分.

- $f : \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ とすると $-\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ は減少方向になる (図 1).

次に, 多変数複素関数 $f : \mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$ に Wirtinger 微分を拡張する.

- 各要素ごとに Wirtinger 微分して得られる勾配を複素勾配と呼ぶ:

$$\nabla_{\mathcal{C}} f(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}} & \frac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial \bar{\boldsymbol{z}}}\end{bmatrix}^{\mathsf{H}}.$$

- $f : \mathbb{C}^d\to\mathbb{R}$ ならば, 任意の $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\mathbb{C}^d$ に対し, 以下の性質を満たす:

$$\left\langle \nabla_{\mathcal{C}} f(\boldsymbol{z}), \begin{bmatrix}\boldsymbol{w}\\ \bar{\boldsymbol{w}}\end{bmatrix}\right\rangle = 2\,\mathrm{Re}(\langle \nabla f(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{w}\rangle),\quad \nabla f(\boldsymbol{z}) := \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial \bar{\boldsymbol{z}}}\right)^{\mathsf{T}}.$$

  つまり, 複素変数実数値関数では $\nabla f(z)$ が重要となる.

1.3　複素劣勾配と複素劣微分

- $f : \mathbb{C}^d\to\mathbb{R}$ は $f(\boldsymbol{z}) = u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ より, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ に関して微分不可能なとき, Wirtinger 微分不可能.
- 凸関数 f が Wirtinger 微分可能とは限らない場合, $\hat{\boldsymbol{z}}\in\mathbb{C}^d$ における複素劣勾配と複素劣微分を定義する.
  - ◇次の不等式をみたす $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^d$ を $\hat{\boldsymbol{z}}$ における複素劣勾配と呼ぶ:

$$f(\boldsymbol{z}) \ge f(\hat{\boldsymbol{z}}) + 2\,\mathrm{Re}(\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}-\hat{\boldsymbol{z}}\rangle),\quad \forall \boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^d.$$

  - ◇次の集合を $\hat{\boldsymbol{z}}$ における複素劣微分と呼ぶ:

$$\partial f(\hat{\boldsymbol{z}}) = \left\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{C}^d \mid f(\boldsymbol{z}) \ge f(\hat{\boldsymbol{z}}) + 2\,\mathrm{Re}(\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{z}-\hat{\boldsymbol{z}}\rangle),\quad \forall \boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^d\right\}.$$

2　Bregman Proximal DC Algorithm (BPDCA)

BPDCA [Takahashi *et al.* '21] は実関数の最適化問題 $(\mathcal{P})$ に有効.

- BPDCA を複素最適化問題 $(\mathcal{P})$ に拡張.
  - ◇ f_2, g が Wirtinger 微分可能とは限らない場合でも適用可能.
  - ◇実数の場合と同様に収束定理 [Takahashi *et al.* '21] が成り立つ.
  - ◇凸関数 $\phi : \mathbb{C}^d\to\mathbb{R}$ に対し, $L\phi - f_1$ が凸関数となる $L>0$ を与える.
  - ◇Bregman 距離: $D_\phi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) = \phi(\boldsymbol{z}) - \phi(\boldsymbol{w}) - 2\,\mathrm{Re}(\langle \nabla\phi(\boldsymbol{w}), \boldsymbol{z}-\boldsymbol{w}\rangle)$.
  - ◇ $\lambda\in(0, 1/L)$ とし,

$$\boldsymbol{\xi}^k \in \partial f_2(\boldsymbol{z}^k),$$
$$\boldsymbol{z}^{k+1} \leftarrow \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^d}\left\{g(\boldsymbol{z}) + 2\,\mathrm{Re}(\langle \nabla f_1(\boldsymbol{z}^k) - \boldsymbol{\xi}^k, \boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^k\rangle) + \frac{1}{\lambda}D_\phi(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}^k)\right\}.$$

3　複素最適化の応用: Blind Deconvolution

- Blind Deconvolution: ノイズ $\boldsymbol{n}\in\mathbb{C}^m$ を含む観測情報 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\odot\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{m\times d}$ から疎な $\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^d$ を求める ($\odot$ はアダマール積).
  - ◇応用: 天文学における電波干渉計を用いたイメージング [Repetti *et al.* '17], 医用画像処理 [Li *et al.* '19], 無線通信 [Ahmed *et al.* '19] など.
  - ◇画像処理では, $\boldsymbol{y}$ が (周波数領域における) 観測画像, $\boldsymbol{B}$ がフーリエ変換, $\boldsymbol{h}$ がブレやボケの情報, $\boldsymbol{A}$ がウェーブレット変換など, $\boldsymbol{z}$ はウェーブレット係数 ($\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$ が (周波数領域における) 真の画像) となる.

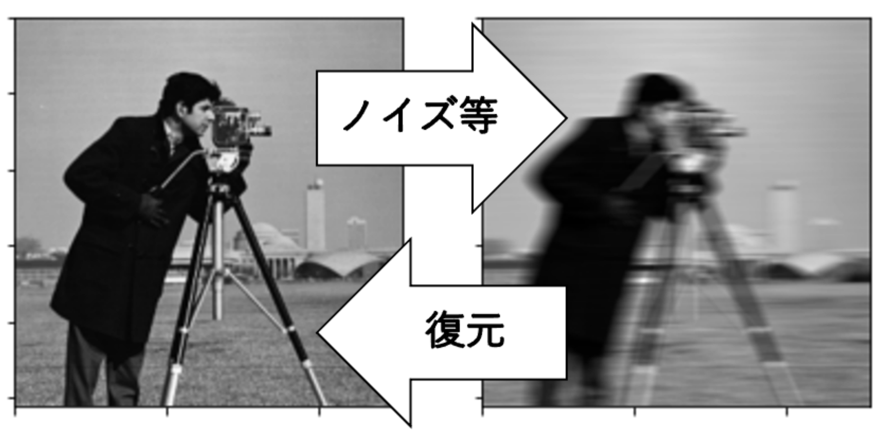

図 2: Blind Deconvolution による画像処理. 観測画像から真の画像を復元.

- スパース正則化項 g を加え, 次の複素最適化問題に定式化できる:

$$\min_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^d}\quad g(\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}) + f(\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}),\quad f(\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{B}\boldsymbol{h}\odot\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|^2.$$

  - ◇ g は Wirtinger 微分不可能であり, 既存手法では解くことができない.
- Blind Deconvolution を BPDCA によって解くことが可能.
  - ◇凸関数 f_1, f_2 で $f = f_1 - f_2$ とすると, $(\mathcal{P})$ に帰着できる:

$$f_1(\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}) := \sum_{j=1}^m\left\{\frac{1}{2}(|\boldsymbol{b}_j^{\mathsf{H}}\boldsymbol{h}|^2 + |\boldsymbol{a}_j^{\mathsf{H}}\boldsymbol{z}|^2)^2 + |y_j|^2|\boldsymbol{b}_j^{\mathsf{H}}\boldsymbol{h}|^2 + |\boldsymbol{a}_j^{\mathsf{H}}\boldsymbol{z}|^2\right\} + \|\boldsymbol{y}\|^2,$$
$$f_2(\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}) := \sum_{j=1}^m\left\{\frac{1}{2}(|\boldsymbol{b}_j^{\mathsf{H}}\boldsymbol{h}|^4 + |\boldsymbol{a}_j^{\mathsf{H}}\boldsymbol{z}|^4) + |\bar{y}_j\boldsymbol{b}_j^{\mathsf{H}}\boldsymbol{h} + \boldsymbol{a}_j^{\mathsf{H}}\boldsymbol{z}|^2\right\}.$$

    ($\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{a}_j$ は $\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}$ の j 行目)
  - ◇凸関数 $\phi(\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}) = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{h}\|^2 + \|\boldsymbol{z}\|^2)^2 + \|\boldsymbol{h}\|^2 + \|\boldsymbol{z}\|^2$ とすると,

$$L = \sum_{j=1}^m\left\{3\|\boldsymbol{b}_j\|^4 + 3\|\boldsymbol{a}_j\|^4 + \|\boldsymbol{b}_j\|^2\|\boldsymbol{a}_j\|^2 + |y_j|^2\|\boldsymbol{b}_j\|^2 + \|\boldsymbol{a}_j\|^2\right\}$$

    で $L\phi - f_1$ は凸関数になる.
  - ◇ $\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}$ がスパースなとき, BPDCA で高精度な信号復元が期待できる.