オブザーバ併合コントローラによる移流拡散方程式の安定化シミュレーション

筒井 良行　総合研究大学院大学 統計科学専攻 5年一貫制博士課程5年

移流拡散方程式

インクの濃度や温度の分布が対流+拡散により時間変化する様子を記述.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \Delta u(t,x) - \boldsymbol{a}(x)\cdot\boldsymbol{\nabla} u(t,x)\\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial {x_d}^2}\right)u(t,x) - \left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+a_d\frac{\partial}{\partial x_d}\right)u(t,x)\\ &\text{for } (t,x)\in[0,\infty)\times\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

$\boldsymbol{a}$は媒質の速度場, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$は分布を考える領域.

制御目的

目標とする指数減衰度$\gamma > 0$に対して, u及び後に付加される制御器の各量を$O(\exp(-\gamma t))$のオーダーで減衰させるような (例えば$\|u(t)\| \lesssim \exp(-\gamma t)$), 制御器を構成する. 特に, 有限次元の入出力を想定する.

制御手法

上述の移流拡散方程式に入出力項を備えた状態空間モデルを考える;

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + \sum_{k=1}^{r} b^k f^k(t) \quad \text{where } Au := (\Delta - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})u,\\ y^k(t) &= \big(u(t), c^k\big)_{L^2(\Omega)} \quad k=1,\ldots,p\end{aligned}$$

b^k, c^kはそれぞれ入力, 出力の影響関数.

改善すべき有限個のモードの抽出

Aの固有値は, 系(1)においては対応する固有モードの時間的指数減衰度に対応する. Aの性質から, 複素平面上γより右に位置するAの固有値は有限個 (l個とする). 即ち, 指数減衰度がγに満たない**有限個**の成分さえ改善すれば良い, という見通しが立つ.

本発表の制御手法では, 有限次元部分に着目して設計された制御器が, 元来安定であった無限次元部分に影響を及ぼしうること (スピルオーバー)を考慮して, その影響を打ち消すために, l個とは別の固有成分に対する推定器を付け加える.

状態の固有関数展開

Aの固有関数$\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$と, Aの随伴A^*の固有関数$\{\phi_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$によって, Aの作用を固有成分毎の和に分解可能;

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i (u,\phi_i^*)_{L^2(\Omega)}\phi_i$$

(移流効果無し (i.e. $\boldsymbol{a}=0$)の場合, $A=A^*$であり, $\phi_i=\phi_i^*$.)

有限次元部分空間への射影$u\mapsto\sum_{i=1}^{l}\big(u,\phi_i^*\big)_{L^2(\Omega)}\phi_i$などによって, 固有成分$u_i := \big(u,\phi_i^*\big)_{L^2(\Omega)}$が従う常微分方程式を導出可能.

制御手法

l次元部分を推定するオブザーバと$n-l$次元部分を推定するフィルタを導入し, z_1をフィードバックする;

$$\begin{aligned}\frac{dz_1(t)}{dt} &= A_1 z_1(t) + B_1 f(t) + G(y(t) - C_1 z_1(t) - C_2 z_2(t)),\\ \frac{dz_2(t)}{dt} &= A_2 z_2(t) + B_2 f(t),\\ f(t) &= F z_1(t).\end{aligned}$$

F, Gは極配置の方法に基づき, x_1, z_1が目標の減衰度より速く減衰するよう設計. A_1, B_1, C_1などは, 大まかに言うとA, B, Cに前述の射影を作用させたもの.

数値例

固有値問題を解析的に解くことが可能な例を見てみる. $d=1, \Omega=(0,L)$として,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u - a\frac{\partial}{\partial x}u \quad \text{where } a(x)\equiv \text{const.},\\ u(t,0) &= u(t,L) = 0.\end{aligned}$$

このとき$A=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-a\dfrac{\partial}{\partial x}$, $A^*=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+a\dfrac{\partial}{\partial x}$に対する固有値問題の解は,

$$\begin{aligned}\phi_m(x) \propto \exp\left(\frac{a}{2}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right),\ \phi_m^*(x) \propto \exp\left(-\frac{a}{2}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right),\\ \lambda_m = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad m\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

その他の設定について,

$$\begin{aligned}L=10,\ a\equiv 1,\ u(0,x) &= x(L-x), \gamma=1, n-l=4,\\ b^1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(L/4)^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(L/4)^2}\left(x-\frac{L}{4}\right)^2\right],\\ c^1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(L/4)^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(L/4)^2}\left(x-\frac{3}{4}L\right)^2\right]\end{aligned}$$

とすれば, $\lambda_1=-0.3487$, $\lambda_2=-0.6448$, $\lambda_3=-1.1383,\ldots$より$l=2$が分かる. F, Gの設計に関わる再配置先の極は, $\lambda_3-1, \lambda_3-2, \lambda_3-3, \lambda_3-4$とする. Figure 1は状態の時間発展の様子. なお, 目標の減衰度がほぼ達成されたことも確認できた (図は紙面の都合上略す.).

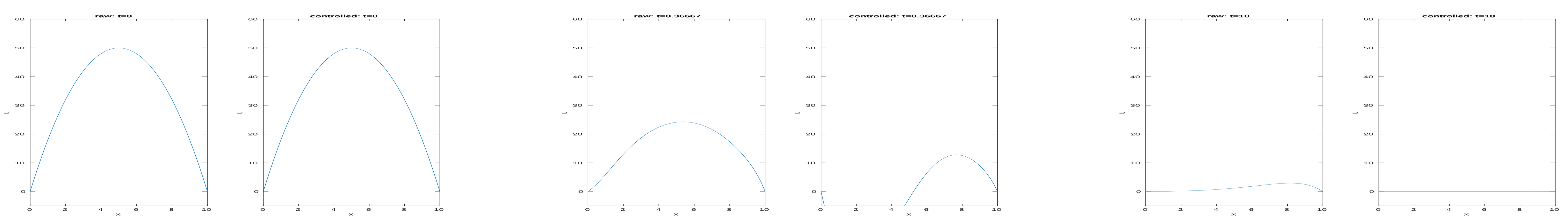

Figure 1: 制御無/制御有の場合の状態uの時間発展. 横軸はx軸, 縦軸は各点におけるuの値. 各図左は制御無し/右は制御有り. 左図は$t=0$, 中央図は$t=0.36667$, 右図は$t=10$.