2021年6月18日 統計数理研究所 オープンハウス

褶曲の自己アフィン性とそのモデル

菊地 和平 統計思考院 特任助教

褶曲の振幅と波長において異なったスケーリング指数により定義され、自己アフィン性を持つことを報告している [1]。褶曲に対して、次元解析のバッキンガムのΠ定理を適用し、波長と層の厚さの関係を導されている [2]。しかし、褶曲の振幅と波長に対する自己アフィン性が指摘されていない。そこで、自己アフィンの導出を検討した (本発表の内容は、[3] に基づく、詳しくはそちらを参照のこと)。

✔地質構造データに対して褶曲構造の自己アフィン解析

対象とした東北日本弧における褶曲の断面図を同じ地質図からトレースし、そのトレースした断面図 (x: 東西方向、y: 高さ方向)に対して自己アフィン解析を行った。具体的には、ある長さαが断面図上の始点から終点までに、幾つ存在するかをNとし、αを計測した際の各座標の値 $P_i(x_i, y_i)$ からその分散 (X, Y)を求め自己アフィン性の指標となるハースト指数Hを求めた。

$$X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_c)^2, \quad Y^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - y_c)^2,$$

Nと標準偏差(X, Y)のグラフを作成。この時ハースト指数Hは

$$H = \nu_y/\nu_y,$$

ν_x: Xに関するグラフの傾き
ν_y: Yに関するグラフの傾き

と定義される。この時褶曲構造は

$\nu_y \neq \nu_y$ $(H \neq 1)$: 自己アフィンを持つ[1]

Shimamoto (1979)[2]に則り、褶曲構造をモデル化、また考慮されていなかった、振幅を加えた褶曲に関する方程式を考えるために、際振幅 (a)の物理量を新たに取り入れる

褶曲構造のモデル化

物理量	記号	単位系
層厚	$\bar{H}$	L
媒質の層厚	h	L
構造幅	D	L
褶曲波長	L	L
層の粘性率	η_1	$ML^{-1}T^{-1}$
媒質の粘性率	η_2	$ML^{-1}T^{-1}$
境界の変位速度	V	LT^{-1}
変形時間	t	T
振幅	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{L}$

✔褶曲に対するバッキンガムのΠ定理の適用

モデルを記述する方程式はモデルの物理量から,

$$f(h, L, D, \bar{H}, \eta_1, \eta_2, v, t, a) = 0. \qquad (1)$$

バッキンガムのπ定理＊より

$$n - m = 9 - 3 = 6. \qquad (2)$$

従って、6個の無次元量でモデルは記述される。

$$\Phi_1\left(\frac{L}{h}, \frac{h}{D}, \frac{h}{\bar{H}}, \frac{\eta_1}{\eta_2}, \frac{Vt}{L}, \frac{L}{a}\right) = 0, \qquad (3)$$

＊バッキンガムのΠ定理[4]

ある系でのn個の物理量$A_1, A_2, \cdots, A_n$の間に方程式が成り立つ時:

$$f(A_1, A_2, \cdots, A_n) = 0. \quad \text{(A-1)}$$

完全方程式の1次の量を変えても関数関係に変化はない。物理量に対して基本量がm個あるとしたとき、Π定理では、

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{n-m}) = 0, \quad \text{(A-2)}$$

$m - n$個の無次元量 (π)で式を書き表すことができる。

✔褶曲の自己アフィン性の検証

これまでは考慮されていなかった、ゼロまたは無限大の量を考慮することする:

$$\lim_{\Pi_0 \to 0} \frac{\Pi}{{\Pi_0}^{\delta}} = \lim_{\Pi_0 \to 0} {\Pi_0}^{-\delta} f\left(\Pi_0, \frac{\Pi_1}{{\Pi_0}^{\delta_1}}, \cdots, \frac{\Pi_n}{{\Pi_0}^{\delta_n}}\right).$$

δ = べき指数, Π, Π_1 = 無次元量

Incomplete self-similarity[5]を施すと、(3)の方程式は、

$$\frac{L}{a} = \left(\frac{L}{h}\right)^{\delta} \Phi_1\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}, \frac{Vt}{L}\right), \qquad (4)$$

となる。

波長Lと振幅aの関係は、

$$L^{1-\delta} \propto a. \quad (5)$$

となる指数$1 - \delta$は、褶曲の自己アフィン性を表すハースト指数Hを用いて

$$1 - \delta = H. \, (6)$$

このδが0でない($H \neq 1$ となる) 場合は、スケールされる方向によってスケーリングの違いをもった自己アフィン性であることを意味する。このことは、方向により褶曲の発達のしやすさが異なっていると考えられる。もしこの指数δが0である場合、ハースト指数は、$H = 1$ でスケールされる方向に違いがない自己相似性であることを意味する。褶曲はテクトニックな応力場と重力下で形成され、その形成過程が等方性的か異方性的かの違いにより自己相似性、自己アフィン性が表れると考えられる [3]。

参考文献

[1] Kikuchi, K et. al., (2013) *Acta Geophysica*, **61**, 6, pp. 1642-1658.
[2] Shimamoto, T. (1974) *Tectonophysics*, **22**, pp. 253-263.
[4] Buckingham, (1914) Physical Review, **4**, pp. 345-376.
[5] Barenblatt, G.I. (1979) Consultants Bureau, New York.