裾共単調性尺度による裾従属性の定量化

小池　孝明　リスク解析戦略研究センター　特任助教

Joint work with
加藤 昇吾 (統計数理研究所)
Marius Hofert (University of Waterloo)

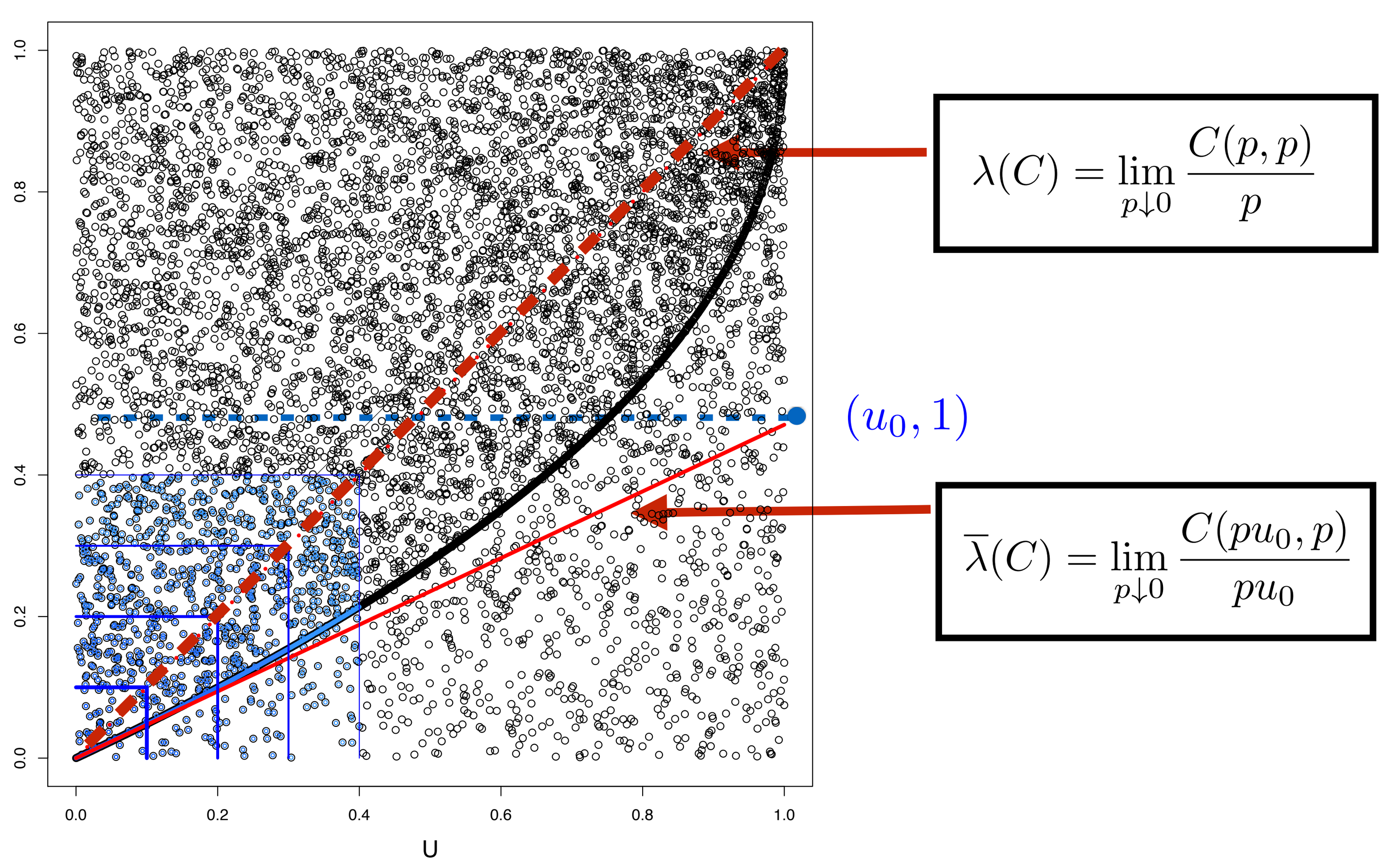
■ 従来の裾従属性係数とその問題点

ある接合関数 C 及び確率ベクトル $(U,V)\sim C$ に対し，従来の裾従属性尺度

$$\lambda(C)=\lim_{p\downarrow 0}\mathbb{P}(U\le p, V\le p\,|\,U\le p),$$

は**正方形** $[0,p]^2$ を以て裾の確率を定量化しているが，**長方形**を許すことで裾確率に関するより多くの情報が得られる．

例えば，以下の**Survival Marshall-Olkin copula**では，



$\lambda(C)=0.35,\quad \overline{\lambda}(C)=0.75$ である．

従来の裾従属性係数は，裾従属性を過小評価する危険がある

■ 裾共単調性尺度とその表現

C ：接合関数（コピュラ）

Π： 独立コピュラ

M： 共単調コピュラ

$\mathcal{M}$：[0,1] × [0,1] 上の確率測度の集合

に対し， μ- **Tail Concordance Measure (μ-TCM)**, $\mu\in\mathcal{M}$ を以下で定義する．

$$\lambda_\mu(C)=\lim_{p\downarrow 0}\frac{\int_{[0,1]^2}(C-\Pi)(pu,pv)\,\mathrm{d}\mu(u,v)}{\int_{[0,1]^2}(M-\Pi)(pu,pv)\,\mathrm{d}\mu(u,v)}$$
$$=\frac{\int_{[0,1]^2}\Lambda(u,v;C)\,\mathrm{d}\mu(u,v)}{\int_{[0,1]^2}M(u,v)\,\mathrm{d}\mu(u,v)}$$
$$=:\lambda_\mu(\Lambda)$$

ここで

$$\Lambda(u,v;C)=\lim_{p\downarrow 0}\frac{C(pu,pv)}{p}$$

は**Tail dependence function (TDF)**と呼ばれる．

μ-TCMは裾従属性の定量化のための自然な公理より導かれ，以下の表現を持つ．

$$\lambda_\mu(\Lambda)\propto\int_{(0,\frac{\pi}{2})}\Lambda(\cos\phi,\sin\phi)\mathrm{d}\mu_\phi(\phi)$$
$$\propto w_0\lambda(C)+w_1\int_{(0,1)}\Lambda(t,1)\mathrm{d}\mu_1(t)$$
$$+w_2\int_{(0,1)}\Lambda(1,t)\mathrm{d}\mu_2(t)$$

μ_ϕ,μ_1,μ_2 ：(0,π / 2)，(0,1)，(0,1)上の確率測度

$w_0,w_1,w_2\ge 0,\ w_0+w_1+w_2=1$

比例定数は $\lambda_\mu(M)=1$ となるように定める．

■ 裾共単調性尺度の極小値と極大値

$$\underline{\lambda}(\Lambda)=\inf_{\mu\in\mathcal{M}}\lambda_\mu(\Lambda)\quad\text{and}\quad\overline{\lambda}(\Lambda)=\sup_{\mu\in\mathcal{M}}\lambda_\mu(\Lambda)$$

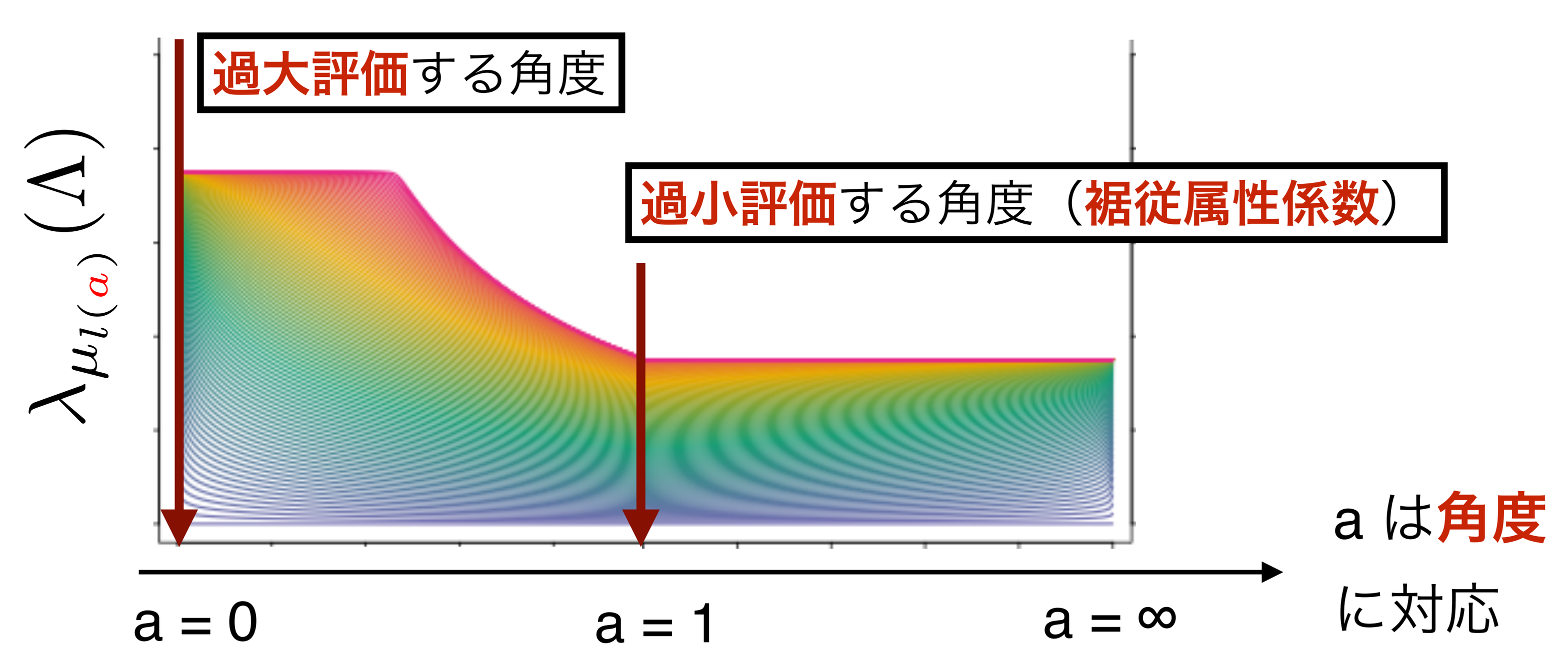
とすると，

$$\underline{\lambda}(\Lambda)=\lambda_{\mu_{l(1)}}(\Lambda)=\lambda(\Lambda)\quad\text{（従来の裾従属係数）}$$

$$\overline{\lambda}(\Lambda)=\sup_{a\in(0,\infty)}\lambda_{\mu_{l(a)}}(\Lambda)$$
$$=\lim_{a\to 0}\lambda_{\mu_{l(a)}}(\Lambda)\vee\lim_{a\to\infty}\lambda_{\mu_{l(a)}}(\Lambda)$$

ここで $\mu_{l(a)}$は傾きa，切片0の直線に重みが集中した確率測度

■ 例：Asymmetric survival Gumbel copula



- 非対称性のパラメーターを固定，**紫→赤**で**裾従属性が弱→強**
- **全ての角度に重みのあるμ-TCM**が裾従属性の定量化の上では好ましい．

例：**Tail Spearman's rho**：角度を一様に重み付けた場合に対応．

$$\lambda_S(\Lambda)=\int_0^1\left(\lambda_{\mu_{l(a)}}(\Lambda)+\lambda_{\mu_{l(1/a)}}(\Lambda)\right)\mathrm{d}a.$$

■ 参考文献

Koike, T., Kato, S., & Hofert, M. (2021). Tail concordance measures: A fair assessment of tail dependence. arXiv preprint arXiv:2101.12262.