2021 年 6 月 18 日　統計数理研究所　オープンハウス

複合ポアソン和の劣指数的密度関数

志村　隆彰　数理・推論研究系　准教授

【極端事象】
確率統計で扱うランダムな現象を数値で表したとき、極めて大きい、或いは小さい場合（極端事象）が関心の対象になることがある。数学としての興味の対象は、そのランダムな現象を表す確率分布関数 $F(x)$ の x が極端に大きいとき（F の上端点 $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$（無限と有限の両方がありうる）に近いとき ）の挙動（遠方での挙動という）であり、現実の世界では、豪雨や巨大地震のような甚大災害に代表される、滅多に起こらないが、一旦起こると多大な影響を及ぼす現象が関心の対象になる。

【遠方での挙動の表す方法】
確率変数 X の分布（関数） $F(x) = Pr(X \le x)$ に対し、

$$\overline{F}(x) := 1 - F(x) = Pr(X > x)$$

を分布 F の裾（確率）(tail) という。裾は x の関数として、x 以上の事象が起こる確率を表し、以降、上限が無限の場合（すべての x に対して、$\overline{F}(x) > 0$ ）を考える。$\overline{F}(x)$ は $x \to \infty$ のとき 0 に近づくが、この収束の速さが速いとき、裾が軽い (light tail)、遅いとき、裾が重い (heavy tail) という。裾が軽い分布に従う現象では、極端に大きな事象が起こりにくく、裾が重い分布に従う現象では、極端に大きい事象が起こりやすい。コーシー分布のように裾がべきオーダーの分布は裾が重い、正規分布のように、任意の次数のモーメントに加え、任意の次数の指数モーメントを持つ (有限) 分布は裾が軽いということが一般的である。　さて、裾確率は確率分布の遠方での挙動を表す手段としてもっともよく用いられるが、分布が絶対連続である場合には、密度関数を使うことができる。この場合、絶対連続性を仮定するぶん、対象が限定される反面、より精密な挙動を捉えることができる利点がある。

【長い裾と劣指数的裾】
分布の遠方の性質に関する概念、長い裾 (long-tailed) と劣指数的 (subexponential) は、それぞれ次のように定義される（台は非負としておく）。

$$\text{任意の実数 } k \text{ に対し、} \lim_{x\to\infty} \overline{F}(x+k)/\overline{F}(x) = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} \overline{F * F}(x)/\overline{F}(x) = 2.$$

ここで、$*$ は分布の畳込み＝確率変数での独立和を表す。
パレート分布や片側安定分布は裾が長く、正規分布や指数分布の裾は長くない。一般に裾が長い分布は裾が重いといってよい。劣指数的であれば、裾が長いことが知られているが、普通にみられる多くの裾が長い分布は劣指数的である。
　こうした裾の性質は、漸近的に等しいなものに共通であることが知られている（関数　$f(x)$　と　$g(x)$　が漸近的に等しいとは、$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$ となるときをいい、$f(x) \sim g(x)$ であらわす）。

【無限分解可能分布とそのレヴィ測度の遠方での関係】
μ が無限分解可能分布とは、任意の自然数 n に対して、分布 μ_n で

$$\hat{\mu}(z) = (\hat{\mu}_n(z))^n$$

となるものがとれるときをいう。ここで、$\hat{\mu}(z)$ は μ の特性関数（フーリエ変換）である。正規分布、コーシー分布、複合ポアソン分布など多くの分布が無限分解可能である。正の台をもつものに限れば、その特性関数は、次のようにかける。

$$\widehat{\mu}(z) = \exp\left(\int_0^\infty (e^{izx} - 1)\nu(dx) + i\gamma_0 z\right),$$

ここで、 $\gamma_0 \in [0, \infty)$ で 測度 ν はレヴィ測度と呼ばれ、 $[0, \infty)$ 上の $\nu(\{0\}) = 0$ と $\int_0^\infty (1 \wedge x)\nu(dx) < \infty$. を満たす。
　無限分解可能分布とそのレヴィ測度の関係について、以下では、μ と ν の遠方 $(x \to \infty)$ での挙動の比較を考える。この問題では、劣指数性をもつ分布と関連した次の結果が有名である。

定理 1 ([1]) 次の 3 つは同値である。
(i) 無限分解可能分布 μ が劣指数的である。
(ii) レヴィ測度 ν を正規化した分布が劣指数的である。
(iii) μ と ν の裾が漸近的に等しい
（$\bar{\mu}(x) \sim \bar{\nu}(x)$: $\lim_{x\to\infty} \bar{\mu}(x)/\bar{\nu}(x) = 1$）。

　ランダムウオークで足し合わせる確率変数の数をポアソン分布に従う独立な確率変数にしたときの分布が複合ポアソン分布で、その特性関数は、 $\gamma_0 = 0$ で ν の全測度がポアソン分布の平均、ν を全測度で割って正規化した確率分布が複合される独立同分布確率変数列の共通分布になる。
　同様の問題を絶対連続なレヴィ測度を持つ複合ポアソン分布に対して考察する。準備として、密度関数に対する劣指数性等を定義する。

【定義：長い裾を持つ関数、密度関数、劣指数的確率密度】
(i) 実数上の非負可測関数 $g(x)$ が $\mathbf{L}$ に属するとは、
任意の $k \in \mathbf{R}$ に対して、$g(x+k) \sim g(x)$ となるときをいう。
　(ii) 実数上の確率密度関数 $g(x)$ が $\mathcal{L}_d$ に属するとは、
$g(x) \in \mathbf{L}$ のときをいう。
　(iii) 実数上の確率密度関数 $g(x)$ が $\mathcal{S}_d$ に属するとは、
$g(x) \in \mathcal{L}_d$ かつ $g^{2\otimes}(x) \sim 2g(x)$ となるときをいう.

　μ を絶対連続なレヴィ測度 ν をもつ $\mathbf{R}_+ := (0, \infty)$ 上の複合ポアソン分布とする。$\lambda := \nu((0, \infty)) \in (0, \infty)$ とおき、$\nu(dx) = \lambda\phi(x)dx$ とする。$t > 0$ に対し、複合ポアソン和の確率密度関数 $p^t(x)$ を次のように定める。

$$p^t(x) := (e^{\lambda t} - 1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \phi^{n\otimes}(x).$$

$p(x) := p^1(x)$ とする。このとき、

$$\mu^{t*}(dx) = e^{-\lambda t}\delta_0(dx) + (1 - e^{-\lambda t})p^t(x)dx.$$

　確率密度 $p(x)$ と確率密度 $\phi(x)$ に関する性質、すなわち以下の条件の関係性を考察する。

(a) $p(x) \in \mathcal{S}_d$.
(b) $\phi(x) \in \mathcal{S}_d$.
(c) $\phi(x) \in \mathcal{L}_d$ かつ $(1 - e^{-\lambda})p(x) \sim \lambda\phi(x)$.
(d) $\phi(x) \in \mathcal{L}_d$ かつ $p(x) \sim C\phi(x)$ となる $C > 0$ がある。

定理 2 ([2])
(i) (a) ならば (b) が成り立つ。
(ii) (c) と (d) は同値であり、(c) ならば (a) である。
(iii) $\int_0^\infty (\phi(x))^2 dx < \infty$ を仮定する。このとき、(b) ならば (c) が成り立つ。
　従って、仮定 $\int_0^\infty (\phi(x))^2 dx < \infty$ の元 (a)-(d) は全て同値である。

注意　仮定 $\int_0^\infty (\phi(x))^2 dx < \infty$ を満たさなければ、(b) を満たすが (c) とはならない場合がある。

　統計数理研究所では、以上の研究と関連した共同研究集会　「極値理論の工学への応用」と「無限分解可能過程に関連する諸問題」をそれぞれ夏と秋に開催しています。共同研究集会の情報は統数研ホームページのイベント欄及び次の発表者のホームページに掲載します。
　https://sites.google.com/view/takaakishimura

参考文献

[1] Subexponentiality and infinite divisibility, P. Embrechts, C.M. Goldie and N. Veraverbeke Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, (1979), 335-347.

[2] Subexponential densities of compound Poisson sums and the supremum of a random walk. Infinite divisibility and generalized subexponentiality, (with T. Watanabe(Univ. of Aizu)), to appear.