

球面上のコーシー分布のパラメータ推定

加藤 昇吾 数理・推論研究系 准教授

はじめに

球面上のデータ

球面上のデータ ... それぞれの観測が単位球面 S^d 上の点として表されるデータ ($S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$).

例) 風向 ($d=1$), 星の方角 ($d=2$),
変換されたテキスト情報 ($d: \text{large}$) ($X \rightarrow X/\|X\|$).

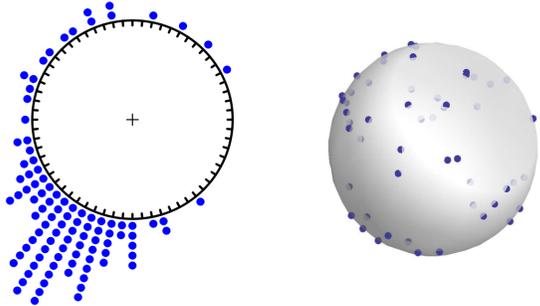


図1. (左) 1987年秋に記録された渡り鳥の移動方向のデータ ($d=1$),
(右) 赤色岩層の残留磁気の方向を記録したデータ ($d=2$).

研究の目的

球面上の確率分布で、最も多くの研究がなされてきたのは、**フォン・ミーゼス・フィッシャー分布 (vMF分布)** およびその拡張である。

vMF分布は、多くの扱いやすい性質を持つ一方、正規化定数が特殊関数を含むことや効率の良い乱数発生法が知られていない等の問題がある。

本研究では、これらの問題を克服する分布として、**球面上のコーシー分布を提案し、そのパラメータ推定を議論する。**

球面上のコーシー分布

分布の定義 [1]

球面 S^d 上の**コーシー分布**を、以下の確率密度関数で定義する：

$$f(x; \phi) = \frac{\Gamma\{(d+1)/2\}}{2\pi^{(d+1)/2}} \left(\frac{1 - \|\phi\|^2}{\|x - \phi\|^2} \right)^d, \quad x \in S^d. \quad (1)$$

ここで、 $\phi \in D^{d+1} = \{\psi \in \mathbb{R}^{d+1}; \|\psi\| < 1\}$, Γ はガンマ関数、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムをあらわす。

分布の性質

球面上のコーシー分布(1)について、以下が成り立つ：

- 球面上のコーシー分布(1)は、一山型で回転対称な分布である。
- パラメータ ϕ の向き ($\phi/\|\phi\|$) は分布の位置を調節し、ノルム ($\|\phi\|$) は分布の集中度を調整する。

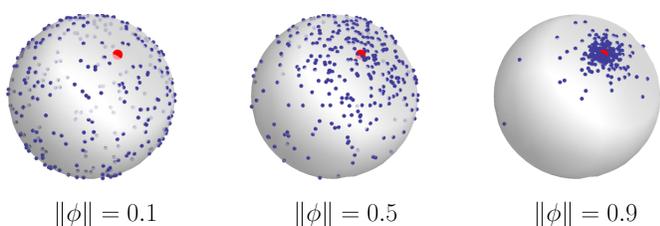


図2. S^2 上のコーシー分布からの疑似乱数のプロット。
 $\phi/\|\phi\|$ (●)を固定し、3つの $\|\phi\|$ の値を取っている。

以後、便利のため、確率ベクトル X が確率密度関数(1)を持つとき、 $X \sim C_d^*(\phi)$ と書くことにする。

定理

$\mathcal{M}_{R,\xi}(y)$ を以下のメビウス変換とする：

$$\mathcal{M}_{R,\xi}(y) = R \left\{ \frac{1 - \|\xi\|^2}{\|\tilde{y} + \xi\|^2} (\tilde{y} + \xi) + \xi \right\}, \quad y \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

ここに、 $\tilde{y} = y/\|y\|^2$, $\xi \in D^{d+1}$, R は $(d+1) \times (d+1)$ 回転行列。

このとき、以下が成り立つ：

$$X \sim C_d^*(\phi) \implies \mathcal{M}_{R,\xi}(X) \sim C_d^*(\mathcal{M}_{R,\xi}(\phi)).$$

この定理を応用することにより、球面上の一様乱数から、球面上のコーシー分布に従う乱数を棄却なく生成することが可能となる。

最尤推定

$X_1, \dots, X_n \sim i.i.d. C_d^*(\phi)$ とする。このとき、以下が成り立つ：

- スコア関数 $\partial\ell/\partial\phi$ とフィッシャー情報行列 \mathcal{I} は、

$$\frac{\partial\ell}{\partial\phi} = \frac{2d}{1 - \|\phi\|^2} \sum_{j=1}^n \mathcal{M}_{I, -\phi}(x_j), \quad \mathcal{I} = \frac{4d^2}{(1 - \|\phi\|^2)^2 (d+1)} I,$$

と簡潔に表現することができる。ただし、 I は $(d+1)$ 次の単位行列。

- ある (j, k) が存在して、 $X_j \neq X_k$ を満たすとき、**対数尤度関数 ℓ の任意の停留点は局所最大解**となる。

これらの結果を用いて、以下のアルゴリズムを提案する。

アルゴリズム：

- 初期値 ϕ_0 をとる。
- ϕ_1, \dots, ϕ_N を以下のように逐次的に計算する。 N は、 $\phi_N \simeq \phi_{N-1}$ となる値とする。

$$\phi_t = \phi_{t-1} + \frac{(d+1)(1 - \|\phi_{t-1}\|^2)}{2dn} \sum_{j=1}^n \mathcal{M}_{I, -\phi_{t-1}}(x_j), \quad t = 1, \dots, N.$$

- ϕ_N を ϕ の最尤推定値として記録する。

漸近有効推定

新たな推定量 $\hat{\phi}_{AE}$ を以下のように定義する：

$$\hat{\phi}_{AE} = \hat{\phi}_{MM} + \frac{d+1}{2dn} \sum_{j=1}^n \mathcal{M}_{I, -\hat{\phi}_{MM}}(X_j).$$

ここで、 $\hat{\phi}_{MM} = \eta_{1,d}^{-1}(\|\bar{X}\|) \bar{X}/\|\bar{X}\|$ はモーメント推定量を表し、

$$\eta_{1,d}(\rho) = \frac{1 + \rho^2}{2\rho} \left[1 - \frac{(1 + \rho)^2}{1 + \rho^2} F \left\{ 1, \frac{d}{2}; d; \frac{-4\rho}{(1 - \rho)^2} \right\} \right], \quad \bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j.$$

また、 F は超幾何関数。このとき、 $\hat{\phi}_{AE}$ は ϕ の漸近有効推定量となる。

参考文献

- [1] KATO, S. & MCCULLAGH, P. (2020). Some properties of a Cauchy family on the sphere derived from the Möbius transformations. *Bernoulli*, **26**, 3224–3248.