2021年6月18日　統計数理研究所　オープンハウス

正定値対称行列値マルコフ連鎖モンテカルロ法

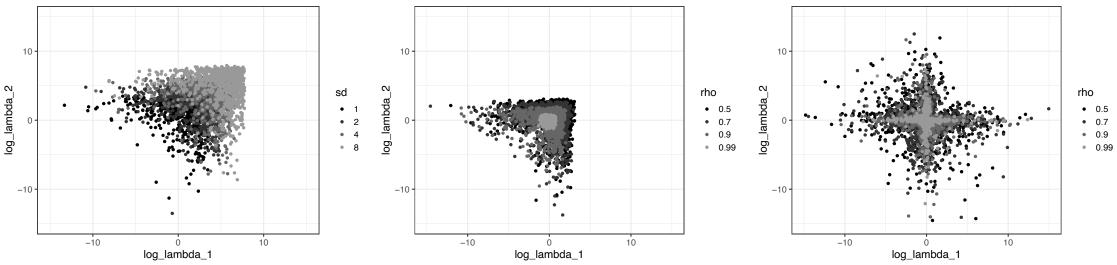
鎌谷　研吾　モデリング研究系　准教授

行列空間と位相

対称行列であって，固有値がすべて正のものを**正定値対称行列**という．$q \times q$の正定値対称行列値確率分布の近似計算のため，**正定値対称行列値マルコフ連鎖**を考えたい．正定値対称行列の空間は，行列の意味で対数を取ると，ちょうど対称行列の空間にうつる．その対称行列の空間の位相を，正定値対称行列の空間に引きもどすことで，正定値対称行列の空間での位相を定義できる．

行列値マルコフ連鎖

正定値対称行列値マルコフ連鎖は，$p \times q$行列値マルコフ連鎖を，行列の意味で二乗して作れる．いま，みっつのマルコフ連鎖を考えて，それぞれ単位行列を出発点として次の点を1000個生成した．その対数を取り，固有値の第一，第二成分の分布を表している．ここでは$p = q = 4$とした．一番左が$p \times q$行列値ランダムウォーク，真ん中が自己回帰過程，そして右があたらしく提案したマルコフ連鎖(Beskos and Kamatani, 2020)である．色の違いは調整変数の違いを表す．図の中心部分からのずれがあることから，$p \times q$行列値ランダムウォークは偏りのある増大分布を持つことが見える．いっぽうで，あたらしく提案したマルコフ連鎖は**きれいな原点対称性**があり，これが**正定値対称行列値ランダムウォーク**になっていることがわかる．



行列値確率過程への応用

あたらしく提案したマルコフ連鎖をもとに，**正定値対称行列値マルコフ連鎖モンテカルロ法**を構成できる．正定値対称行列の空間を動く**確率過程**$\mathrm{d}\Sigma_t = -(\Omega\Sigma_{t-} + \Sigma_{t-}\Omega^\top)\mathrm{d}t + \mathrm{d}L_t$を考える(Barndorff-Nielsen and Stelzer, 2007)．ただし，L_tは混合ポアソン過程で，増分は正定値対称行列とする．この正定値対称行列値確率過程は観測されず，$t = 0, 1, 2, \ldots, T$において$X_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_t)$が観測されるとしよう．このとき，とくに$\Omega$も正定値対称行列であると仮定し，事後分布を計算する．いまの正定値対称行列値マルコフ連鎖モンテカルロ法が使える．ただし，尤度すらかけないので，PMCMC法(Andrieu and Roberts, 2009)を援用することで事後分布の計算を行えた．

今後の展開

行列値マルコフ連鎖モンテカルロ法はまだ理論的にわからないことが多い．指数エルゴード性もまだ不明である．非対称なマルコフ連鎖モンテカルロ法との関係もある．今後の展開が期待される．

参考文献

Christophe Andrieu and Gareth O. Roberts. The pseudo-marginal approach for efficient Monte Carlo computations. *Ann. Statist.*, 37(2):697–725, 2009.

Ole Eiler Barndorff-Nielsen and Robert Stelzer. Positive-definite matrix processes of finite variation. *Probability and Mathematical Statistics-Wroclaw University*, 27(1):3, 2007.

Alexandros Beskos and Kengo Kamatani. MCMC Algorithms for Posteriors on Matrix Spaces. *arXiv e-prints*, art. arXiv:2008.02906, August 2020.