Navier-Stokes系に対するオブザーバに基づくlocal stabilizer

筒井 良行　総合研究大学院大学 統計科学専攻 5年一貫制博士課程5年

安定化問題

Navier-Stokes方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} &= \dfrac{1}{\mathcal{R}}\Delta \boldsymbol{U} - (\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{U} - \boldsymbol{\nabla}P, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U} &= 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty) \qquad \text{(NS)}$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^d$:$d$次元有界領域, $d=2,3$, $\mathcal{R}$:Reynolds数
$\boldsymbol{U}(x,t)\in\mathbb{R}^d$, $P(x,t)\in\mathbb{R}$, $((x,t)\in\Omega\times(0,\infty))$:流速と圧力

定常Navier-Stokes方程式

$$\begin{cases} \boldsymbol{0} &= \dfrac{1}{\mathcal{R}}\Delta \boldsymbol{U}_S - (\boldsymbol{U}_S\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{U}_S - \boldsymbol{\nabla}P_S, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U}_S &= 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega \qquad \text{(stNS)}$$

$\boldsymbol{U}_S(x)\in\mathbb{R}^d$, $P_S(x)\in\mathbb{R}$, $(x\in\Omega)$:定常流の流速と圧力

残差$(\boldsymbol{u},p) := (\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}_S,\ P-P_S)$ が従う方程式（安定化の対象）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} &= \dfrac{1}{\mathcal{R}}\Delta \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{U}_S\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{U}_S - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\nabla}p, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} &= 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty) \qquad \text{(NSres)}$$

cf. Stokes-Oseen方程式（(NSres)の線型化）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} &= \dfrac{1}{\mathcal{R}}\Delta \boldsymbol{u} - (\boldsymbol{U}_S\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{U}_S - \boldsymbol{\nabla}p, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} &= 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega\times(0,\infty) \qquad \text{(SO)}$$

(非線型項$-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}$が無視されている)

制御目的: (NSres) に制御入力項を加えて，指数関数的に $(\boldsymbol{u},p)\to 0\quad (t\to\infty)$ としたい;

$$\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|, \|p(\cdot,t)\| \lesssim \exp(-\gamma t) \qquad \text{where } \gamma>0 : \text{given}$$

制御手法

式(NSres)(+ 制御入力項) と観測方程式を次の形にまとめる：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) &= Au(t) + S(u(t)) + \sum_{k=1}^{r} b^k f^k(t), \\ y^k(t) &= \langle u(t), c^k\rangle \quad k=1,\dots,p \end{cases}$$

ここで，$A := \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1$で，$\mathcal{A}_0 u$は$-\mathcal{R}^{-1}\Delta\boldsymbol{u}$に，$\mathcal{A}_1 u$は$-(\boldsymbol{U}_S\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{U}_S$に，$S(u)$は$-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}$に相当し，$\|S(u)\|\lesssim\|u\|\|\mathcal{A}_0^{1/2}u\|$ を満たす.

状態の固有関数展開

- システム作用素Aの作用を固有成分の和に分解可能(≒対角化可能);

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i u_i \phi_i \quad \text{where } \begin{array}{l} \{(\lambda_i,\phi_i)\}_{i\in\mathbb{N}} : A\text{の固有値問題の解}, \\ \{(\bar{\lambda}_i,\phi_i^*)\}_{i\in\mathbb{N}} : A\text{の随伴}A^*\text{の固有値問題の解}, \\ u_i(t) := \langle u(t), \phi_i^*\rangle \in \mathbb{C} \end{array}$$

有限次元部分空間への射影$u\mapsto\sum_{i=1}^{n}u_i\phi_i$などによって，固有成分$u_i(t)$が従う常微分方程式を導出可能.

- (線型近似下における各固有成分の時間的指数減衰度に対応する)固有値λ_iは，$\mathbb{C}$上集積せず，その存在領域について次を満たす:

$$\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{\lambda\in\mathbb{C}\colon |\arg(\lambda-\lambda_0)|>\delta\} \quad \text{for some } \delta\in(\pi/2,\pi), \lambda_0>0$$

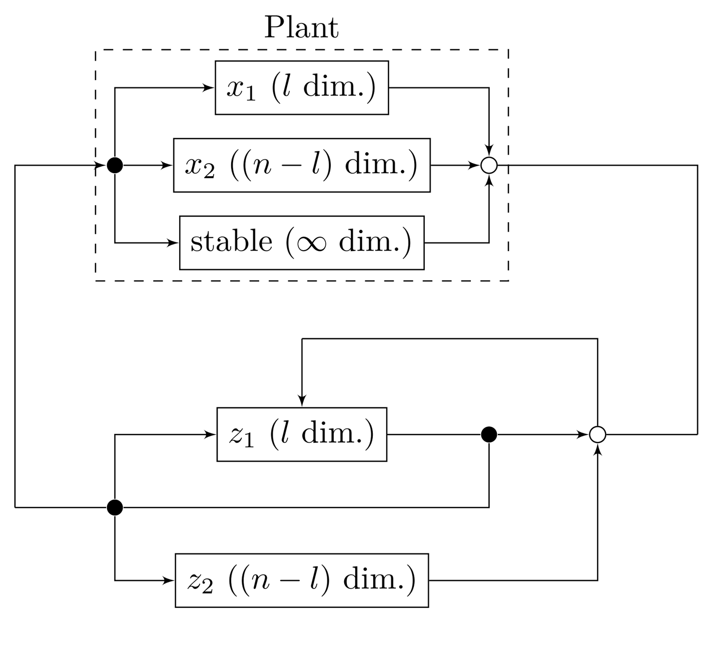
従って，目標減衰度$-\gamma$よりも減衰が遅い固有成分は高々有限個，最初のl個だけ！

設計方針

先行研究 [Tsutsui & Miyasato (2019)] において提案された，線型化された系(SO)に適用可能な有限次元オブザーバ併合フィードバックコントローラ:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= A_1 z_1 + B_1 f + G(y - C_1 z_1 - C_2 z_2), \\ \frac{dz_2}{dt} &= A_2 z_2 + B_2 f, \\ f &= F z_1 \end{aligned}$$

を，元の非線型系(NSres)に適用．ここに，$z_1(t)\in\mathbb{C}^l$, $z_2(t)\in\mathbb{C}^{n-l}$は，それぞれ状態の固有成分(を並べたベクトル)$x_1(t)\in\mathbb{C}^l$, $x_2(t)\in\mathbb{C}^{n-l}$を推定するように構成されている．



Lyapunov安定性解析

Lyapunov関数の候補として次の形を考える:

$$\begin{aligned} V(t) &= x_1(t)^{\top}\mathcal{P}_1 x_1(t) + \kappa_2 x_2(t)^{\top}\mathcal{P}_2 x_2(t) + \kappa_3\langle x_3(t), \mathcal{P}_3 x_3(t)\rangle \\ &\quad + \kappa_4 e_1(t)^{\top}\mathcal{P}_4 e_1(t) + \kappa_5 e_2(t)^{\top}\mathcal{P}_5 e_2(t) \end{aligned}$$

ただし，$x_3(t)$は，状態の元来より安定な無限次元成分で，$e_1(t) := z_1(t)-x_1(t)$, $e_2(t) := z_2(t)-x_2(t)$，$\mathcal{P}_1,\dots,\mathcal{P}_5\succ 0$, $\kappa_2,\dots,\kappa_5>0$. Vの時間微分を評価すると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) \le -2\gamma V(t) & \\ &- K_1(\|x_1(t)\|^2+\|x_2(t)\|^2+\|x_3(t)\|^2+\|e_1(t)\|^2+\|e_2(t)\|^2) \\ &+ \underbrace{K_{2,n}}_{\to 0 \text{ as } n\to\infty}(\|x_1(t)\|^2+\|e_1(t)\|^2) \\ &+ \underbrace{K_3\|S(u(t))\|^2 - K_1\|u(t)\|^2}_{\le \|u(t)\|^2(K_3\|\mathcal{A}_0^{1/2}u(t)\|^2 - K_1)} \end{aligned}$$

従って，もし

- nが十分大きく，(スピルオーバーの影響の抑制)
- $\left\|\mathcal{A}_0^{1/2}u(t)\right\| < \sqrt{K_1/K_3} \qquad \forall t\ge 0$

ならば，$dV/dt\le -2\gamma V$となり，制御目的が達成されることが示される.

課題

- $\mathcal{A}_0^{1/2}u$ (流速の空間偏微分)の大きさに関する仮定について

提案された設計方針と無撞着であるかどうかが明らかでない. (NS)の非線型項について成立する何らかの評価式と初期時刻における$\mathcal{A}_0^{1/2}u(0)$の小ささの仮定に置き換えることができれば望ましいが……

Tsutsui, Y., and Miyasato, Y. (2019), “Observer-based feedback stabilization of distributed parameter systems of parabolic type with non-self-adjoint operators,” in *2019 12th Asian Control Conference (ASCC)*, IEEE, pp. 746–749.