

# 逓減非線形レイリー方程式の3波相互作用モデル

菊地 和平 統計思考院 特任助教

## はじめに

超音波医療診断装置を用いることにより心臓の興奮収縮による微小な自励振動が直接観測可能になった [1]。その観測された現象を説明するモデルとして、複素Ginzburg-Landau方程式 (CGLE)の1次元の解のひとつであるBekki-Nozaki (BN) Hole解が適用可能であることが示された [2]。このことにより生体における非線形波動伝播が、物理的モデルを用いる事で説明できる可能性が示された。しかしながら、心筋などの自励振動による非線形波動の伝播を、CGLEのBN Hole解以外の物理モデルで説明できる可能性は残っている。そこで、BN Hole解が心臓の自励振動のモデルとして適切であるのか検証するために、生体を模した弾性体における基礎方程式系を用いてBN Hole解で現象を説明することが可能かどうかを調べる必要がある。本研究では表面波の伝播における非線形性に着目した研究を元にした先行研究を発展させた。具体的には、二次歪を考慮した等方的弾性体表面を伝播する非線形レイリー波に対し、多重スケール変換を用いて任意の高次における逓減非線形レイリー方程式 (Reductive nonlinear Rayleigh equation: RNRE) が導かれている [3]。戸次、香川、菊地はRNREにプラズマ波動における三波相互作用 [4] を適用することで非線形レイリー波がヤコビの楕円関数で表される (本発表の内容は、[5] に基づく、詳しくはそちらを参照のこと)。

## 構成方程式 (Greenの方法; Bland, 1969)

大変形が可能な等方性を持つ弾性体を取り扱う。波の伝播方向xと鉛直方向y、時間方向について無次元化する。形を持った弾性体を伝える表面波の方程式を導出するためにラグランジュ表示を用い、弾性体表面上で応力がゼロになる境界条件の下で、歪エネルギー密度を変分することにより非線形レイリー方程式が導出できる:

□ グリーンのひずみテンソル: 
$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

□ 2次元変位におけるラグランジアン表現: 
$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial X_j} T_{ij} + Jf_i, \quad BC: T_{12}(u_1, u_2) = T_{22}(u_1, u_2) = 0 (X_2 = 0) (\because n_2 T_{12} = 0)$$

□ Piola-Kirchhoffストレステンソル: 
$$T_{21} = \frac{\partial W}{\partial E_{21}} + \frac{\partial W}{\partial E_{21}} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial W}{\partial E_{11}} \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \quad T_{22} = \frac{\partial W}{\partial E_{22}} + \frac{\partial W}{\partial E_{22}} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial W}{\partial E_{12}} \frac{\partial u_2}{\partial X_1}$$
  

$$\frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \equiv \frac{\partial W}{\partial I_1} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} E_{ij} + 3 \frac{\partial W}{\partial I_3} E_{jk} E_{ki}$$

□ ひずみエネルギー密度: 
$$W(E_{ij}, I_1, I_2, I_3)$$

簡単な計算の後、非線形レイリー表面波の支配方程式を得る:

$$\begin{cases} \ddot{u} - r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r-1) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} F_1(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(u, v) \dots (1), \\ \ddot{v} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (r-1) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - r \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} G_1(u, v) + \frac{\partial}{\partial y} G_2(u, v) \dots (2), \end{cases}$$

(1)および(2): 非線形項!

## 多重尺度法:

非線形レイリー方程式に対して、伝播・鉛直、時間方向に対して微小パラメータを導入し、微小パラメータで伝播・鉛直方向の変位と非線形項について、フーリエ変換を行い、多重尺度展開を行う。

微小パラメータε:

$$\begin{cases} u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\ v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \varepsilon x, \\ \eta = \varepsilon y, \\ \tau = \varepsilon t, \end{cases}$$

変位uおよびvのフーリエ変換:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k, |k| y, \xi, \eta, \tau) e^{ik(x-\tau)} dk \\ v(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} i\sigma(k) B(k, |k| y, \xi, \eta, \tau) e^{ik(x-\tau)} dk \\ A &= \varepsilon A_1(k, |k| y, \xi, \eta, \tau) + \varepsilon^2 i A_2(k, |k| y, \xi, \eta, \tau) \\ B &= \varepsilon B_1(k, |k| y, \xi, \eta, \tau) + \varepsilon^2 i B_2(k, |k| y, \xi, \eta, \tau) \end{aligned}$$

表面 (y = 0) で応力のない非線形の境界条件:

$$\begin{cases} T_{12} : B_1(u, v) \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} = -\frac{1}{c_t^2} [F_2(u, v)]_{y=0} \dots (3), \\ T_{22} : B_2(u, v) \equiv \left[ (r-2) \frac{\partial u}{\partial x} + r \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{y=0} = -\frac{1}{c_t^2} [G_2(u, v)]_{y=0} \dots (4), \end{cases}$$

非線形の応力0の境界条件から:

$$\begin{aligned} P \frac{\partial \gamma_k}{\partial \tau} + Q \frac{\partial \gamma_k}{\partial \xi} + P' I_\gamma(k) + Q' J_\gamma(k) \\ = - \sum_{i=1}^{10} \int_{I_i} \frac{p_2(r-1)}{(T_i + p_1)(T_i + p_2)} \left[ q \left\{ T_i + \frac{p_1(2-r)}{r q} \right\} R_i + p_2 \left\{ T_i + \frac{q}{p_1} \right\} S_i \right] dk'. \end{aligned}$$

$\gamma_k$ : 変位の複素振幅

## 逓減非線形レイリー方程式

方程式内の非線形項は畳み込みの場合分けにより12項あり、その畳み込みについて計算してまとめ直す (積分範囲0~kを積分核Hとし、k~∞を積分核Kとする) ことにより逓減非線形レイリー方程式 (Reductive nonlinear Rayleigh equation: RNRE) が導出される。

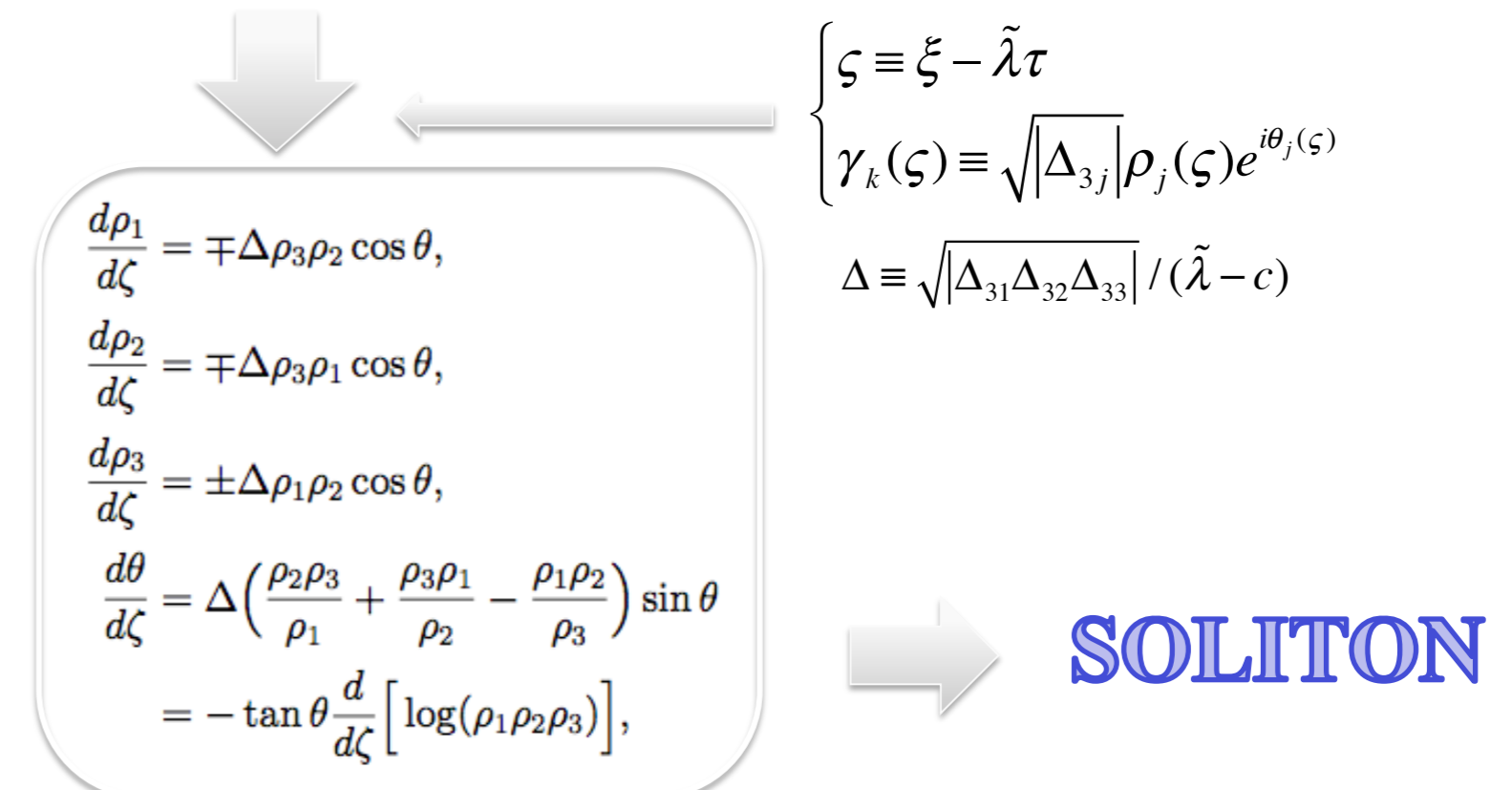
$$(\partial_\tau + c \partial_\xi) \gamma_k \approx - \sum_{k'=1}^k k'(k-k') H(k, k') \gamma_{k'} \gamma_{k-k'} + \sum_{k'=k+1}^m k'(k'-k) K(k, k') \gamma_k \gamma_{k'-k}^* \dots (RNRE).$$

$$1 \leq k' \leq k \ll m \quad k+1 \leq k' \leq m$$

## 3波相互作用の観点からのソリトン

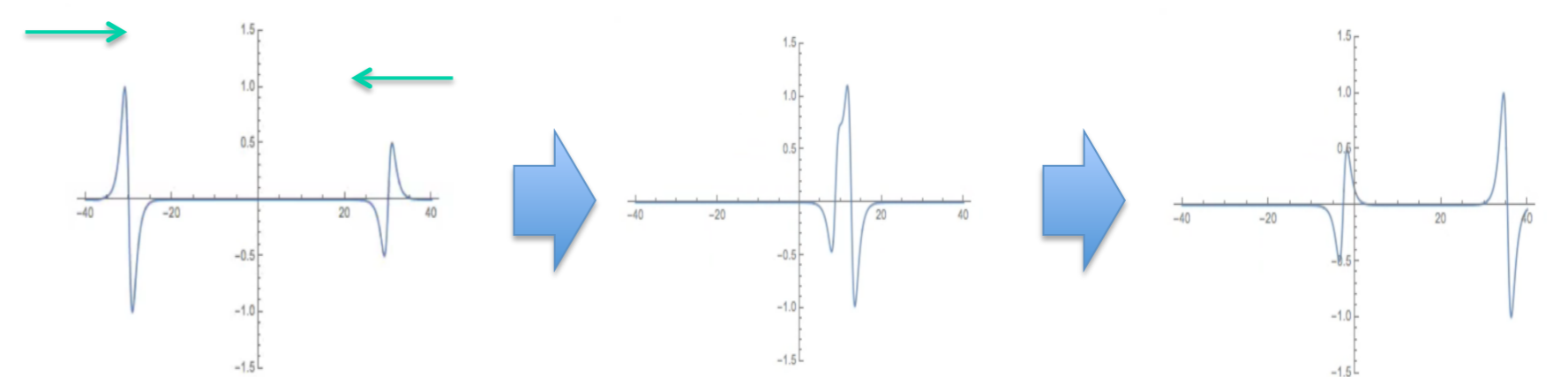
RNREにおいて3つの特定の波数の組 (基本波、k番目の高調波、(k-1)番目の高調波) が相互作用する三波相互作用モデルを適用すると4つの方程式 (3つの振幅方程式、1つの位相方程式) が得られる。そこから得られる4つの保存量により厳密解が導かれる。

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \tau} + v_g \frac{\partial \gamma_1}{\partial \xi} = \Delta_{31} \gamma_3 \gamma_2^* & \Delta_{31} = 6\mathcal{K}(1, 3), \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial \tau} + v_g \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi} = \Delta_{32} \gamma_3 \gamma_1^* & \Delta_{32} = 3\mathcal{K}(2, 3), \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial \tau} + v_g \frac{\partial \gamma_3}{\partial \xi} = -\Delta_{33} \gamma_2 \gamma_1 & \Delta_{33} = 2[\mathcal{H}(3, 1) + \mathcal{H}(3, 2)]. \end{cases}$$



## 厳密解の挙動

例えば得られた厳密解”速さの異なる二つのソリトンの正面衝突”は下図のように挙動する。



## References

[1] Kanai, *Ultrasound Med. Biol.* 35, 936 (2009).  
 [2] Bekki, Harada, and Kanai, *J. Phys. Soc. Jpn.* 81, 073801 (2012).  
 [3] Lardner, *Int. J. Eng. Sci.* 21, 1331 (1983).  
 [4] Sagdeev and Galeev, *Nonlinear Plasma Theory* (W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969).  
 [5] Bekki, Kagawa, and Kikuchi, *J. Phys. Soc. Jpn.* 88, 124001 (2019).