

期待ミンコフスキー汎関数の摂動展開とその応用

栗木 哲 数理・推論研究系教授

本発表は、松原隆彦氏 (KEK) との共同研究 ([1], [2]) に基づきます。

1 確率場とミンコフスキー汎関数

ベクトルの添字を持つ確率変数 $X(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}^n$ を確率場という。ここでは等方的な確率場だけを考える。図1 (左) は次元 n が2のときの確率場 (平面データ) である。

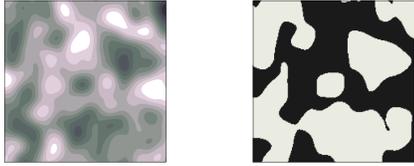


図1. 確率場の例 (左), そのエクスカージョン集合 (右)

確率場が閾値 x よりも大きい値をとる添字領域をエクスカージョン集合 T_x という (図1 (中央)). エクスカージョン集合 T_x のミンコフスキー汎関数 $\mathcal{M}_j(T_x)$ に基づくデータ解析を行う。

定義. 閉集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ のまわりの半径 ρ のチューブ領域の体積は, ρ の n 次多項式となる (スタイナーの公式). 多項式の ρ^j の係数を適当に基準化した量を M の j 次ミンコフスキー汎関数 $\mathcal{M}_j(M)$, 多項式の ρ^{n-j} の係数を適当に基準化した量を j 次リプシッツ・キリング曲率 $\mathcal{L}_j(M)$ という。

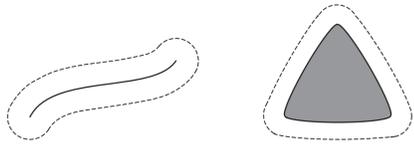


図2. 集合 M のまわりの半径 ρ のチューブ

2 ガウス性の検定と CMB データ

$\mathcal{M}_j(T_x)$ は分布形の検定として用いることができる。

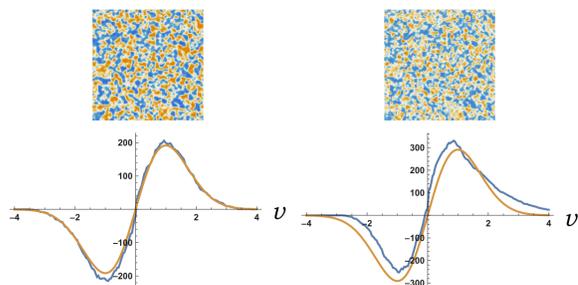


図3. ガウス確率場 (左) と非ガウス確率場 (右)

図4の宇宙マイクロ波背景放射は, 天空の全方位から観測されるマイクロ波で, 宇宙の温度ゆらぎを計測している. インフレーション理論により, 等方的ガウス場 $\varphi(t)$ の汎関数 (摂動展開) と考えられている:

$$X(t) = a_0 + a_1\varphi(t) + a_2\varphi^{(2)}(t) + a_3\varphi^{(3)}(t) + \dots, \quad t \in \mathbb{R}^3,$$

ただし $\varphi^{(j)}$ は φ の j 次形式。

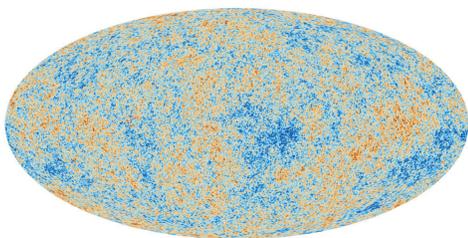


図4. 宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) <http://planck.cf.ac.uk/>

ミンコフスキー汎関数を使って, これがガウス確率場か, あるいはどのような非確率場かを同定し, それを初期宇宙モデルの選択に用いる。

3 弱非ガウスのもとでの期待ミンコフスキー汎関数

確率場 $X(t)$ の非ガウス性はキュムラント母関数で記述できる:

$$\begin{aligned} \log \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_T \theta(t) X(t) dt \right) \right] \\ = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \int_{T^k} \theta(t_1) \cdots \theta(t_k) \text{cum}(X(t_1), \dots, X(t_k)) dt_1 \cdots dt_k. \end{aligned}$$

等方性確率場の場合の k 次キュムラント (k 点相関関数) は, k 点のペアワイズ距離の関数となる:

$$\text{cum}(X(t_1), \dots, X(t_k)) = \nu^{k-2} \kappa^{[k]} \left(\frac{1}{2} \|t_i - t_j\|_{i < j}^2 \right), \quad \nu \ll 1.$$

定理. $X(t)$ を上記のキュムラントを持つ平均0, 分散1の $T \subset \mathbb{R}^n$ 上の滑らかな確率場とする. 漸近展開可能なオーダー s の範囲で

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}_k(T_x)] = \sum_{d=0}^{n-k} \binom{k+d}{k} \mathcal{L}_{k+d}(T) \Xi_d(x) + o(\nu^s), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

ただし

$$\begin{aligned} \Xi_n(x) &= \gamma^{n/2} (2\pi)^{-n/2} \phi(x) \times \left(H_{n-1}(x) + \nu \Delta_{1,n}(x) + \nu^2 \Delta_{2,n}(x) + \dots \right), \\ \Delta_{1,n}(x) &= \frac{1}{2} \gamma^{-2} \kappa_{11} n(n-1) H_{n-2}(x) - \frac{1}{2} \gamma^{-1} \kappa_1 n H_n(x) + \frac{1}{6} \kappa_0 H_{n+2}(x), \end{aligned}$$

$\phi(x)$: $N(0, 1)$ の密度関数, $H_n(x)$: エルミート多項式, $\gamma = -\frac{d\kappa^{[2]}(x)}{dx} \Big|_{x=0}$, $\kappa_0 = \kappa^{[3]}(0, 0, 0)$, $\kappa_1 = \frac{d\kappa^{[3]}(x_{12}, 0, 0)}{dx_{12}} \Big|_{x_{12}=0}$, $\kappa_{11} = \frac{d^2\kappa^{[3]}(x_{12}, x_{13}, 0)}{dx_{12}dx_{13}} \Big|_{x_{12}=x_{13}=0}$, $\Delta_{2,n}(x)$ は [1] を参照。

本定理は, J. Taylor の Gaussian Kinematic Formula (GKF) の一つの一般化である。

4 シミュレーションデータとの比較 (Matsubara 2010)

CMBモデルの一例:

$$X(t) = \varphi(t) + f_{\text{NL}}(\varphi(t)^2 - \mathbb{E}[\varphi(t)^2]) + g_{\text{NL}}\varphi(t)^3.$$

ここで $\varphi(t)$ は Sachs-Wolfe モデルに従う平均0のガウス確率場. 非ガウス確率場 $X(t)$ にさらにガウシアンフィルタを適用する。

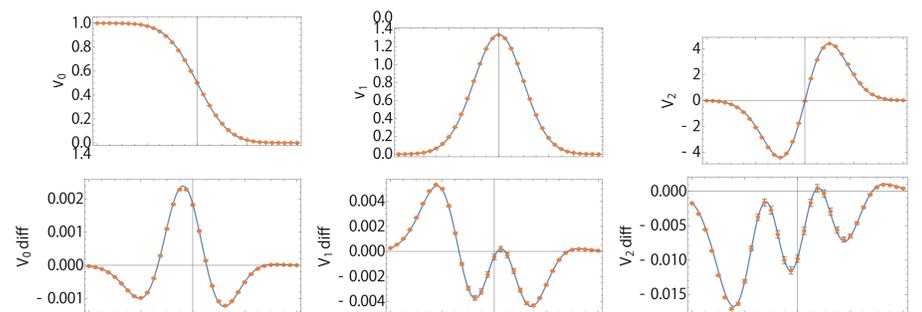


図5. ミンコフスキー汎関数のシミュレーション平均 (点プロット) と理論平均 (実線) 繰返し数100,000回, $\mathcal{M}_j(T_x)$, $j = 0$ (左), $j = 1$ (中央), $j = 2$ (右) 下段は摂動修正項 ($\Delta_{1,n}$ と $\Delta_{2,n}$ の寄与) だけをプロット

参考文献

- [1] Satoshi Kuriki and Takahiko Matsubara, "Perturbation of the expected Minkowski functional for weakly non-gaussian isotropic fields on a bounded domain", in preparation.
- [2] Takahiko Matsubara and Satoshi Kuriki, "Weakly non-Gaussian formula for the Minkowski functionals in general dimensions", in preparation.