2020年10月27日　統計数理研究所　オープンハウス

システム制御理論の研究～統計科学と制御科学の接点

宮里　義彦　モデリング研究系　教授

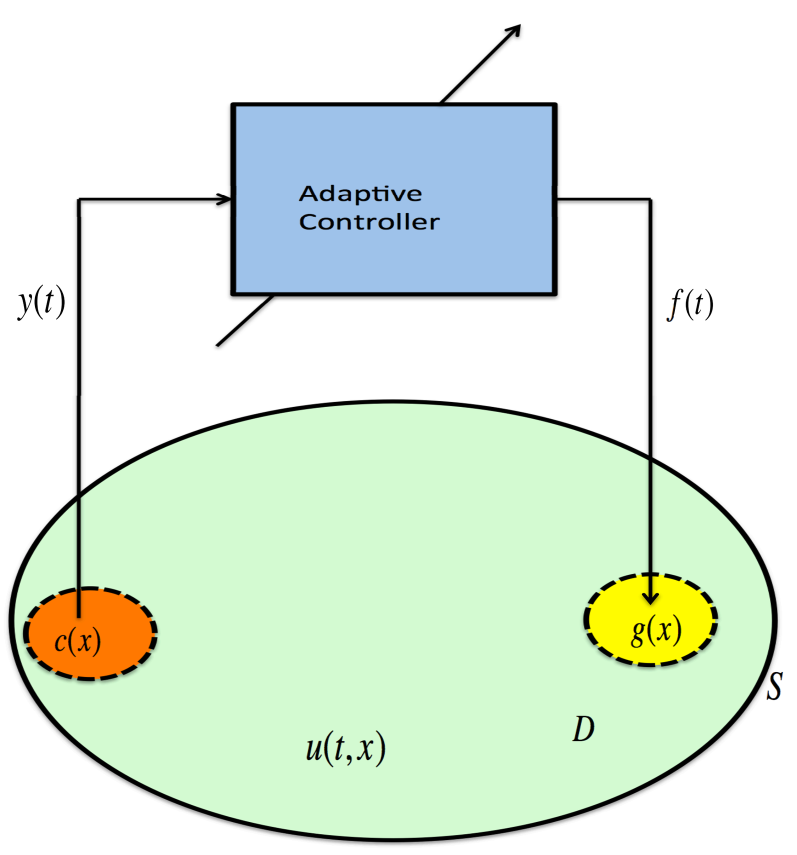
【分布定数系（無限次元系）の適応制御の研究】

適応制御は特に有限次元線形系を中心として長く研究が行われてきましたが，一方で分布定数系に対する適応制御については多くの研究成果が得られていません．分布定数系は無限次元系であるため有限次元の補償器では安定性の確保や制御目的の達成に困難さが生じますが，これに対処するために無限次元の補償器を用いた設計や，厳密な安定解析を伴う有限次元補償器を用いた構成法などについて研究を行っています．

一般に無限次元系に対して有限次元補償器で制御系を構成すると、制御や観測に当たって無視あるいは放置した高次元モードの影響で、フィードバック制御系が不安定化することがありますが（スピルオーバー現象）、これに対処するためにスピルオーバーの大きさを適切なノルムで上から評価し、逆最適化あるいは非線形ダンピングの考え方を適用して、非線形フィードバックを採用してスピルオーバーの影響を抑制し、無限次元モードまで含めて全体の系の安定化を保証します。

取り扱う分布定数系としては熱伝導や拡散現象のモデルとしての放物型分布定数系や、振動現象の物理的な波動のモデルとしての双曲型分布定数系がありますが、それらに非線形項が加わった分布定数系を含めることで、たとえばNavier-Stokes方程式で表される流体を制御する問題も取り扱うことを考えています。

以下に放物型分布定数系を対象として、適応制御としての問題設定（図1、表1）から始まって、無限次元補償器による制御系の構成法（表2）を、次に有限次元補償器による制御系の構成法（表3）を示し、さらに非線形項が追加された場合の有限次元補償器による制御系の構成法（表4）を示します（図2）。



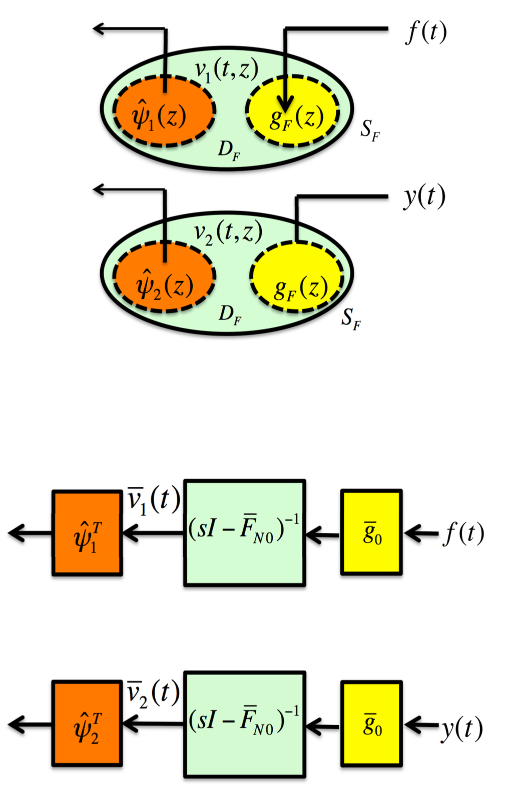


図1. 分布定数系の適応制御問題　　図2. 無限次元／有限次元／制御器

表 1. 分布定数系の適応制御の問題設定

制御対象　$(A,\, g,\, f,\, \alpha,\, u(t,x),\, h(z(t,x))$ は未知)
$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = Au(t,x) + g(x)f(t)\ \ (+g_2(x)h(z(t,x)))\quad (x \in D)$ $\alpha(\xi)u(t,\xi) + \{1-\alpha(\xi)\}\frac{\partial}{\partial \nu}u(t,\xi) = 0\quad (\xi \in S)$
出力（c は未知）
$y(t) = \int_D c(x)u(t,x)dx$
規範モデル（$\lambda_0(>0)$ は既知）
$\frac{d}{dt}y_M(t) = -\lambda_0 y_M(t) + r(t)$
前提条件（仮定）
$\theta_0 \equiv \int_D c(x)g(x)dx \neq 0$（相対次数＝1）で θ_0 の符号が既知 制御対象の入出力信号 $f(t),\, y(t)$ のみが測定可能
制御目的
$e(t) \equiv y_M(t) - y(t) \to 0$
A：楕円型偏微分作用素
$A = a(x)^{-1/2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a(x)^{1/2}a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] - q(x)$ $a(x) = \det\{a_{ij}(x)\}^{-1}$

表 2. 分布定数系の無限次元適応制御

制御則
$f(t) = \hat{\psi}_0(t)r(t) + \int_{D_F}\hat{\psi}_1(t,z)v_1(t,z)dz$ $\qquad + \int_{D_F}\hat{\psi}_2(t,z)v_2(t,z)dz + \hat{\psi}_3(t)y(t)$
状態変数フィルタ（無限次元）
$\frac{\partial}{\partial t}v_1(t,z) = Fv_1(t,z) + g_F(z)f(t)\quad (z \in D_F)$ $\frac{\partial}{\partial t}v_2(t,z) = Fv_2(t,z) + g_F(z)y(t)\quad (z \in D_F)$ $\alpha_F(\xi)v_i(t,\xi) + \{1-\alpha_F(\xi)\}\frac{\partial}{\partial \nu}v_i(t,\xi) = 0$ $\quad (\xi \in S_F,\ \ (i=1,2))$ $F = a_F(z)^{-1/2}\sum_{i,j=1}^{m_F}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[a_F(z)^{1/2}a_{Fij}(z)\frac{\partial}{\partial z_j}\right] - q_F(z)$
適応則（関数および定数パラメータの推定）
$\frac{d}{dt}\hat{\psi}_0(t) = \Gamma_0\,\mathrm{sign}(\theta_0)\,r(t)e(t)\quad (\Gamma_0 > 0)$ $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}_i(t,z) = \Gamma_i(z)\,\mathrm{sign}(\theta_0)\,v_i(t,z)e(t)\quad (\Gamma_i(z) > 0)$ $\quad (i=1,\,2;\quad z \in D_F)$ $\frac{d}{dt}\hat{\psi}_3(t) = \Gamma_3\,\mathrm{sign}(\theta_0)\,y(t)e(t)\quad (\Gamma_3 > 0)$ $e(t) = y_M(t) - y(t)$

表 3. 分布定数系の有限次元適応制御

制御則
$f(t) = \hat{p}(t)\left\{\hat{\Psi}(t)^{\mathsf{T}}\omega(t) + r(t)\right\} + v_1(t) \equiv \hat{p}(t)v_0(t) + v_1(t)$ $\omega(t) = [\bar{v}_1(t)^{\mathsf{T}},\, \bar{v}_2(t)^{\mathsf{T}},\, f_f(t),\, y(t)]^{\mathsf{T}}$ $v_1(t) = \{k_1 + k_2\|g_\alpha(t)\|^2\}e(t)\quad (k_1,\, k_2 > 0)$ $g_\alpha(t) = \left[\,|f_f(t)|,\, w_1(t),\, w_2(t),\, w_3(t)\,\right]^{\mathsf{T}}$
状態変数フィルタ（N 次元と1次元）
$\frac{d}{dt}\bar{v}_1(t) = \bar{F}_{N0}\bar{v}_1(t) + \bar{g}_0 f_f(t)$ $\frac{d}{dt}\bar{v}_2(t) = \bar{F}_{N0}\bar{v}_2(t) + \bar{g}_0 y(t)$ $(\bar{F}_{N0} \in \mathbf{R}^{N\times N},\ \bar{g}_0 \in \mathbf{R}^N)$：$N$ 次元の可制御対 $\frac{d}{dt}w_1(t) = -\tilde{\lambda}_N w_1(t) + |f_f(t)|$ $\frac{d}{dt}w_2(t) = -\lambda_f w_2(t) + w_1(t)$ $\frac{d}{dt}w_3(t) = -\lambda_f w_3(t) + |f_f(t)|$
適応則（定数パラメータ（ベクトル）の推定）
$\dot{\hat{\Psi}}(t) = \mathrm{Pr}\{\Gamma_1\omega(t)e(t)\}$ $\dot{\hat{p}}(t) = \mathrm{Pr}\{\Gamma_2\,\mathrm{sign}(\theta_0)\,v_0(t)e(t)\}$ $(\Gamma_1 = \Gamma_1^{\mathsf{T}} > 0,\quad \Gamma_2 > 0)$

表 4. 非線形分布定数系の有限次元適応制御

制御則
$f(t) = \hat{p}(t)\left\{\hat{\Psi}(t)^{\mathsf{T}}\omega(t) + r(t)\right\} + v_1(t) \equiv \hat{p}(t)v_0(t) + v_1(t)$ $\omega(t) = [\bar{v}_1(t)^{\mathsf{T}},\, \bar{v}_2(t)^{\mathsf{T}},\, f_f(t),\, y(t)]^{\mathsf{T}}$ $v_1(t) = \{k_1 + k_2\|g_\alpha(t)\|^2\}e(t)\quad (k_1,\, k_2 > 0)$ $g_\alpha(t) = \left[\,|f_f(t)|,\, w_1(t),\, w_2(t),\, w_3(t),\, w_4(t),\, w_5(t),\, w_6(t),\right.$ $\qquad\qquad \left. H(Z(t))\,\right]^{\mathsf{T}}$ $\|h(z(t,\cdot))\| \le h_0 H(Z(t))$
状態変数フィルタ（N 次元と1次元）
$\frac{d}{dt}w_1(t) = -\tilde{\lambda}_N w_1(t) + |f_f(t)|$ $\frac{d}{dt}w_2(t) = -\lambda_f w_2(t) + w_1(t)$ $\frac{d}{dt}w_3(t) = -\lambda_f w_3(t) + |f_f(t)|$ $\frac{d}{dt}w_4(t) = -\tilde{\lambda}_N w_4(t) + H(Z(t))$ $\frac{d}{dt}w_5(t) = -\lambda_f w_5(t) + w_4(t)$ $\frac{d}{dt}w_6(t) = -\lambda_f w_6(t) + H(Z(t))$
適応則（定数パラメータ（ベクトル）の推定）
$\dot{\hat{\Psi}}(t) = \mathrm{Pr}\{\Gamma_1\omega(t)e(t)\}$ $\dot{\hat{p}}(t) = \mathrm{Pr}\{\Gamma_2\,\mathrm{sign}(\theta_0)\,v_0(t)e(t)\}$ $(\Gamma_1 = \Gamma_1^{\mathsf{T}} > 0,\quad \Gamma_2 > 0)$