

非自己共役作用素をもつ放物型分布定数系のオブザーバ併合フィードバック安定化

筒井 良行 総合研究大学院大学 統計科学専攻 5年一貫制博士課程3年

概要

流体運動を記述する Navier-Stokes 方程式を、その定常流の周りで線形化すると、定常流からの変動が従う Stokes-Oseen 方程式が導かれる。この方程式に対して、フィードバック制御を加えて流れを安定化したい。現実的には、流域中の運動状態は空間上部分的にのみ観測可能であるから、状態フィードバックではなく、(観測から状態を推定する)オブザーバ併合フィードバックを追求するのが好ましい。

先行研究である Sakawa 1983 では、自己共役なシステム作用素を有する放物型無限次元システムを対象とした、減衰が遅い有限個の固有成分を推定するオブザーバに基づくフィードバックによる方法によって、制御スピルオーバー・観測スピルオーバーの影響に耐えつつ、システムを安定化できることが示された。本研究では Stokes-Oseen 方程式のように、システム作用素が非自己共役である場合への、当手法の拡張を行った。

安定化問題

Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$: d 次元有界領域, $d = 2, 3$, \mathcal{R} : Reynolds 数

$\mathbf{U}(x, t) \in \mathbb{R}^d, P(x, t) \in \mathbb{R}, ((x, t) \in \Omega \times (0, \infty))$: 流速と圧力

定常 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta \mathbf{U}_S - (\mathbf{U}_S \cdot \nabla) \mathbf{U}_S - \nabla P_S, \\ \nabla \cdot \mathbf{U}_S = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega$$

$\mathbf{U}_S(x) \in \mathbb{R}^d, P_S(x) \in \mathbb{R}, (x \in \Omega)$: 定常流の流速と圧力

Stokes-Oseen 方程式 (安定化の対象)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta \mathbf{u} - (\mathbf{U}_S \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_S - \nabla p, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

$(\mathbf{u}, p) \triangleq (\mathbf{U} - \mathbf{U}_S, P - P_S)$ (非線型項 $-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ は無視されている)

制御目的: Stokes-Oseen 方程式に制御入力項を加えて、指数的に $(\mathbf{u}, p) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) としたい;

$$\| \mathbf{u}(\cdot, t) \|, \| p(\cdot, t) \| \lesssim \exp(-\sigma t) \quad (\sigma > 0 : \text{given})$$

制御手法

Stokes-Oseen 方程式 (+ 制御入力項) と観測方程式を次の形にまとめる:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} + Bf, \\ y = C\mathbf{u} \end{cases} \quad \text{where} \quad Bf(x, t) \triangleq \sum_{k=1}^r b_k(x) f_k(t), \\ C\mathbf{u}(t) \triangleq (\langle \mathbf{u}(\cdot, t), c_1 \rangle, \dots, \langle \mathbf{u}(\cdot, t), c_p \rangle)^T$$

(Stokes-Oseen 方程式を含む) 放物型分布定数系と呼ばれる偏微分方程式のクラスにおいては、

- システム作用素 A の作用を固有成分の和に分解可能 (= 対角化可能);

$$A\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i \phi_i \quad \text{where} \quad \{(\lambda_i, \phi_i)\}_{i \in \mathbb{N}} : A \text{ の固有値問題の解,} \\ \{(\bar{\lambda}_i, \phi_i^*)\}_{i \in \mathbb{N}} : A \text{ の随伴 } A^* \text{ の固有値問題の解,} \\ u_i(t) \triangleq \langle \mathbf{u}(\cdot, t), \phi_i^* \rangle$$

(Sakawa 1983 では A は自己共役, 従って $\phi_i = \phi_i^*$)

- (各成分の時間的指数減衰度に対応する) 固有値 λ_i は, \mathbb{C} 上集積せず,

$$\{\lambda_i\}_i \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \lambda_0)| > \delta\} \quad \text{for some } \delta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \lambda_0 > 0$$

→ 目標減衰度 $-\sigma$ よりも遅い固有成分は高々有限個, 最初の l 個だけ!

方針(仮):

有限個の固有成分 $\{u_i\}_{i=1, \dots, l}$ のみを対象として安定化を施せば良さそう;
有限個の固有成分 $x_1(t) \triangleq (u_1(t), \dots, u_l(t))^T$:

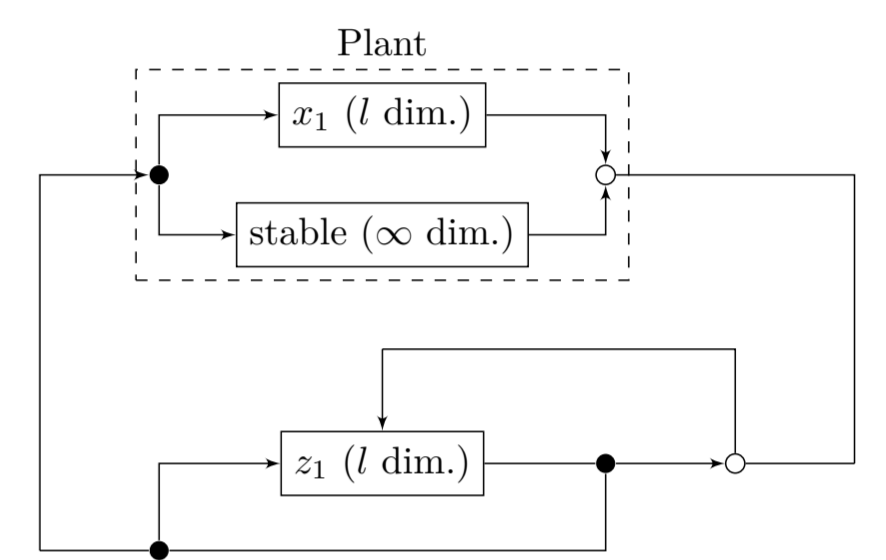
$$\frac{dx_1}{dt} = A_1 x_1 + B_1 f$$

(ただし, A_1, B_1 は A, B を有限次元空間に射影して得られる行列) を推定する l 次元オブザーバ z_1 :

$$\frac{dz_1}{dt} = A_1 z_1 + B_1 f + G(y - C_1 z_1)$$

をフィードバックする:

$$f = F z_1.$$



ここで, F, G は有限次元制御理論における極再配置に関する方法に基づき, 所望の安定性を達成するように設計。

スピルオーバーへの対処

上記の方針(仮)では, 以下によって所望の安定性が達成されない可能性がある;

制御スピルオーバー: 上記のフィードバック入力 f によって, 元から安定だった無限個の固有成分の安定性が悪化する効果。

観測スピルオーバー: 観測 $y = C\mathbf{u}$ には, x_1 だけではなく無限個の固有成分からの寄与が含まれることから, オブザーバの推定誤差 $z_1 - x_1$ が設計の狙い通りに減衰しない効果。

方針(改め)

元から安定な固有成分を幾つか推定して, オブザーバに入る信号 y における安定成分の寄与を軽減する;

$n > l$ として, $(n-l)$ 個の安定成分 $x_2(t) \triangleq (u_{l+1}(t), \dots, u_n(t))^T$;

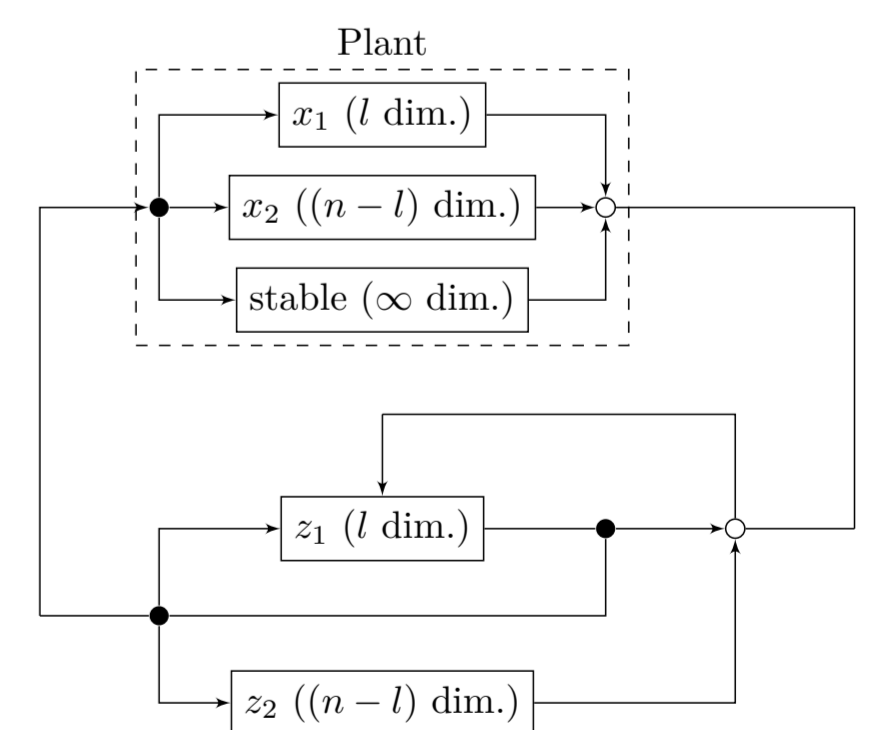
$$\frac{dx_2}{dt} = A_2 x_2 + B_2 f$$

を推定する $(n-l)$ 次元フィルタ z_2 :

$$\frac{dz_2}{dt} = A_2 z_2 + B_2 f$$

を導入し, オブザーバ z_1 を改める;

$$\frac{dz_1}{dt} = A_1 z_1 + B_1 f + G(y - C_1 z_1 - C_2 z_2)$$



Y. Sakawa, "Feedback Stabilization of Linear Diffusion Systems," SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 21, no. 5, pp. 667-676, Sep. 1983.