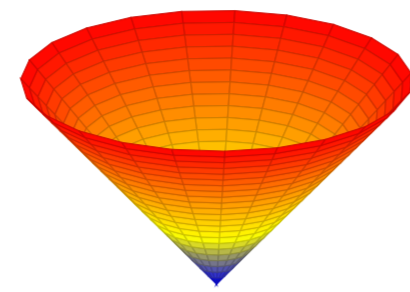
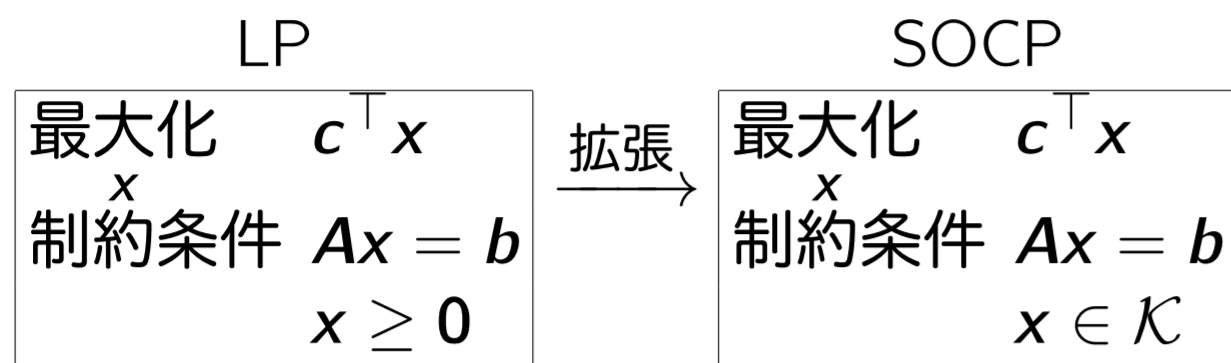


# 2 次錐最適化問題に対する適応的 LP-Newton 法

田中未来 数理・推論研究系 数理最適化グループ, 統計的機械学習研究センター 助教

## 1 2 次錐最適化問題 (SOCP)

線形最適化問題 (LP) の拡張

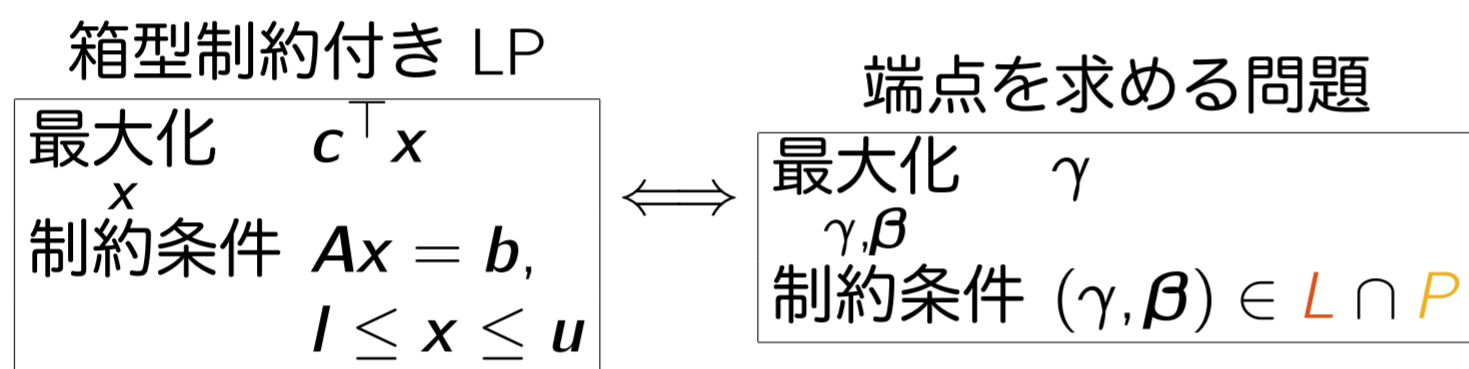


3次元の2次錐  $K^3$

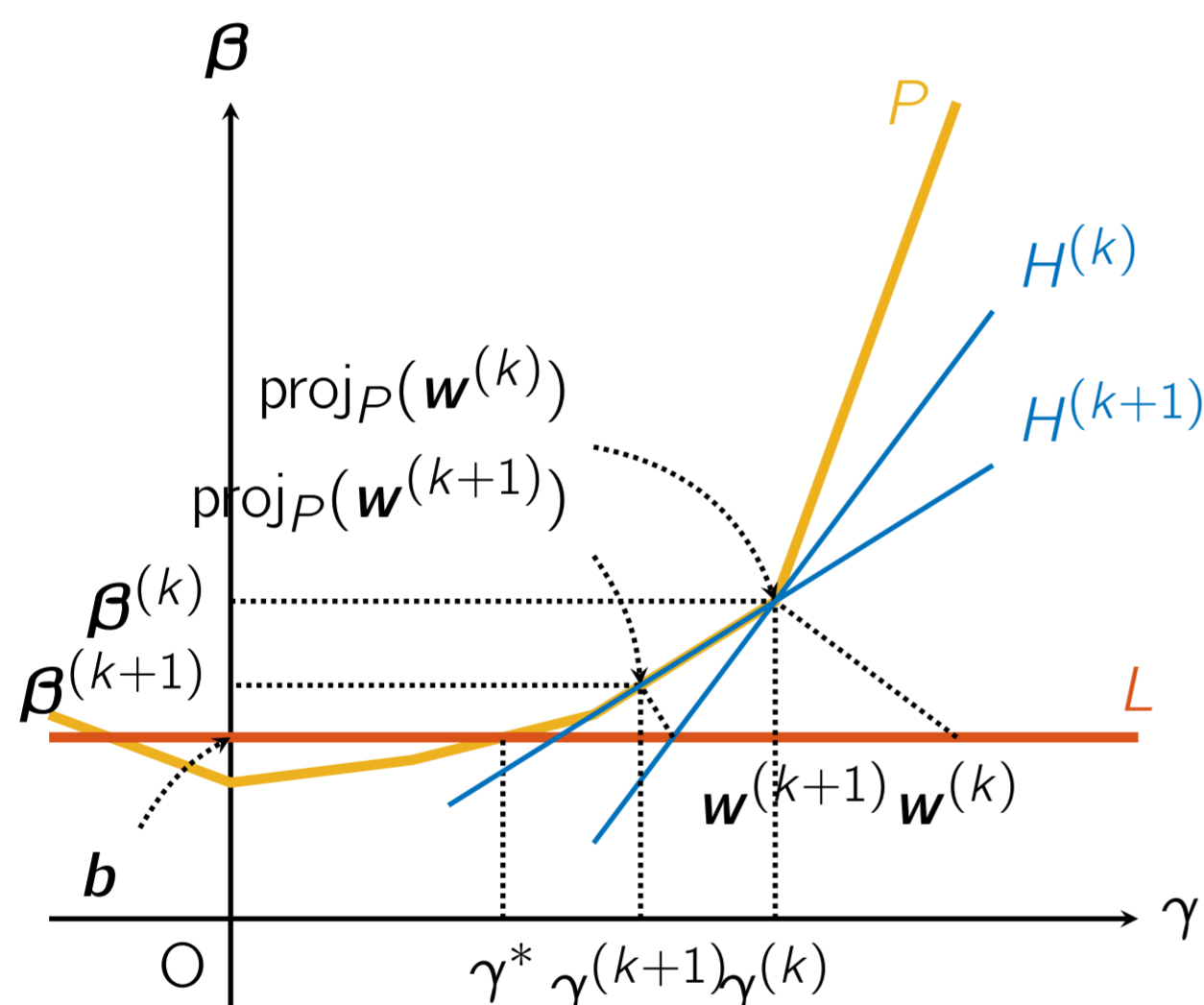
- $K := K^{n_1} \times \dots \times K^{n_p}$ :  $p$  個の 2 次錐の直積
- $K^n := \{(x_1, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} : x_1 \geq \|\bar{x}\|_2\}$ :  $n$  次元の 2 次錐
- “円錐切断っぽい” 非線形な制約条件を表現可能
- $n_1 = \dots = n_p = 1$  (i.e.,  $p = n$ ) とすれば (SOCP) = (LP)
- このポスターでは簡単のため  $p = 1$  とする ( $p \geq 2$  への拡張は容易)
- 多くの場合, 内点法を用いて効率よく解くことができる

## 2 線形最適化問題に対する LP-Newton 法

箱型制約付き LP を直線  $L$  と凸多面集合  $P$  の共通部分の端点を求める問題に等価変換して Newton 法のように解く方法 (Fujishige et al., 2009)



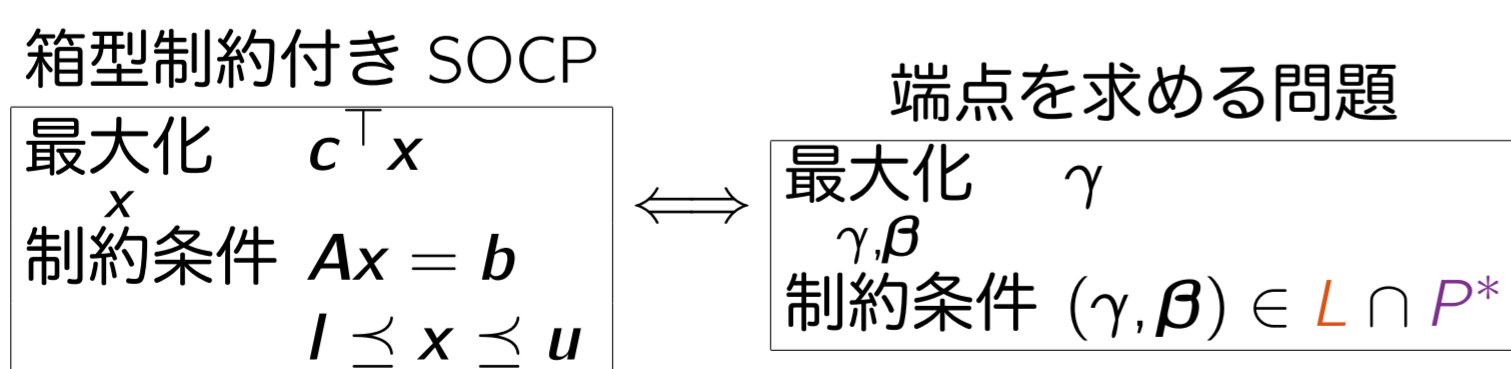
- $L := \{(\gamma, \beta) \in \mathbb{R}^{1+m} : \beta = b\}$ : 直線
- $P := \{(\gamma, \beta) \in \mathbb{R}^{1+m} : c^T x = \gamma, Ax = \beta, l \leq x \leq u\}$ : 凸多面集合



- 定理 (Fujishige et al., 2009): 有限回の反復で最適解を出力
- 実用上, 反復回数は極めて小さい (理論的な保証は未解決問題)
- $H^{(k)}$  と  $L$  の交点の計算は容易 ( $w^{(k)} - \text{proj}_P(w^{(k)}) \perp H^{(k)}$  なので)
- $P$  への射影には Wolfe (1976) のアルゴリズムを用いる (計算量不明)

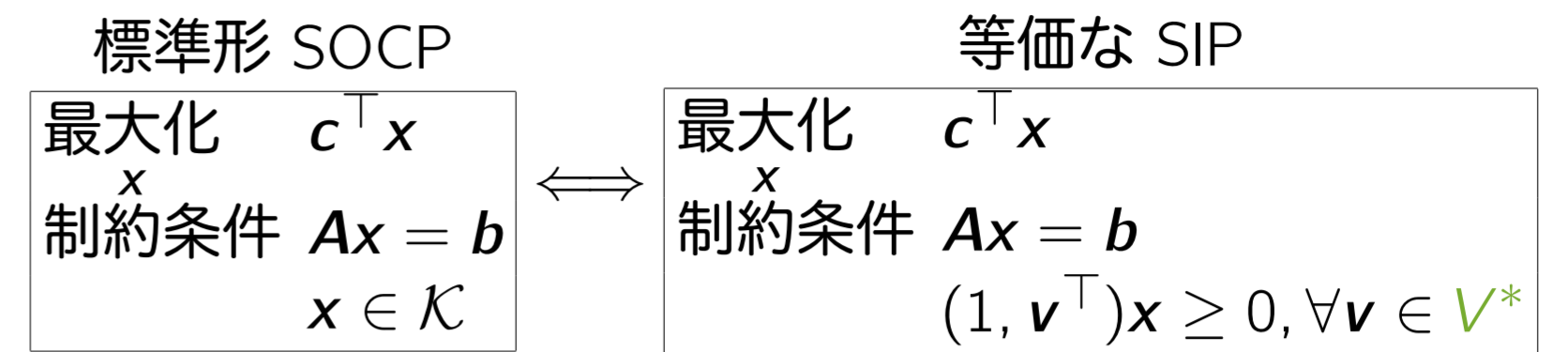
## 3 LP から SOCP へ

箱型制約付き SOCP への拡張 (Silvestri and Reinelt, 2017)

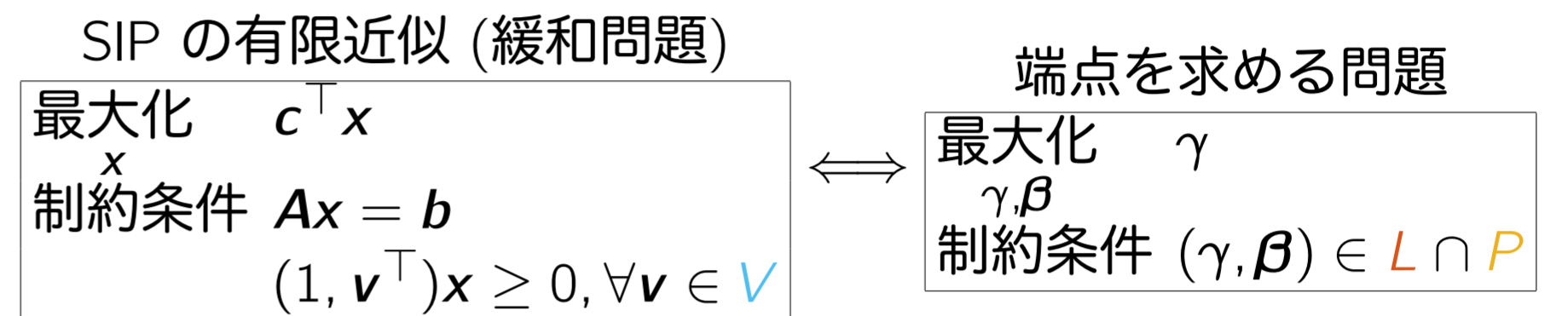


- $a \leq b \iff b - a \in K$
- $P^* := \{(\gamma, \beta) \in \mathbb{R}^{1+m} : c^T x = \gamma, Ax = \beta, l \leq x \leq u\}$
- $P^*$  は凸多面集合でないので  $P^*$  への射影はより困難
- $P^*$  への射影を計算するために Silvestri and Reinelt (2017) は Frank-Wolfe のアルゴリズムを提案しているが, 計算に時間がかかる

等価な半無限最適化問題を適応的に有限近似 (Okuno and Tanaka, 2019)



- $V^* := \{v \in \mathbb{R}^{n-1} : \|v\|_2 \leq 1\}$  は無限集合
- 有限集合  $V \subset V^*$  を用いて有限近似



$P := \{(\gamma, \beta) \in \mathbb{R}^{1+m} : c^T x = \gamma, Ax = \beta, (1, v^T)x^{(k)} \geq 0, \forall v \in V\}$  は凸多面集合なので,  $P$  への射影は比較的容易

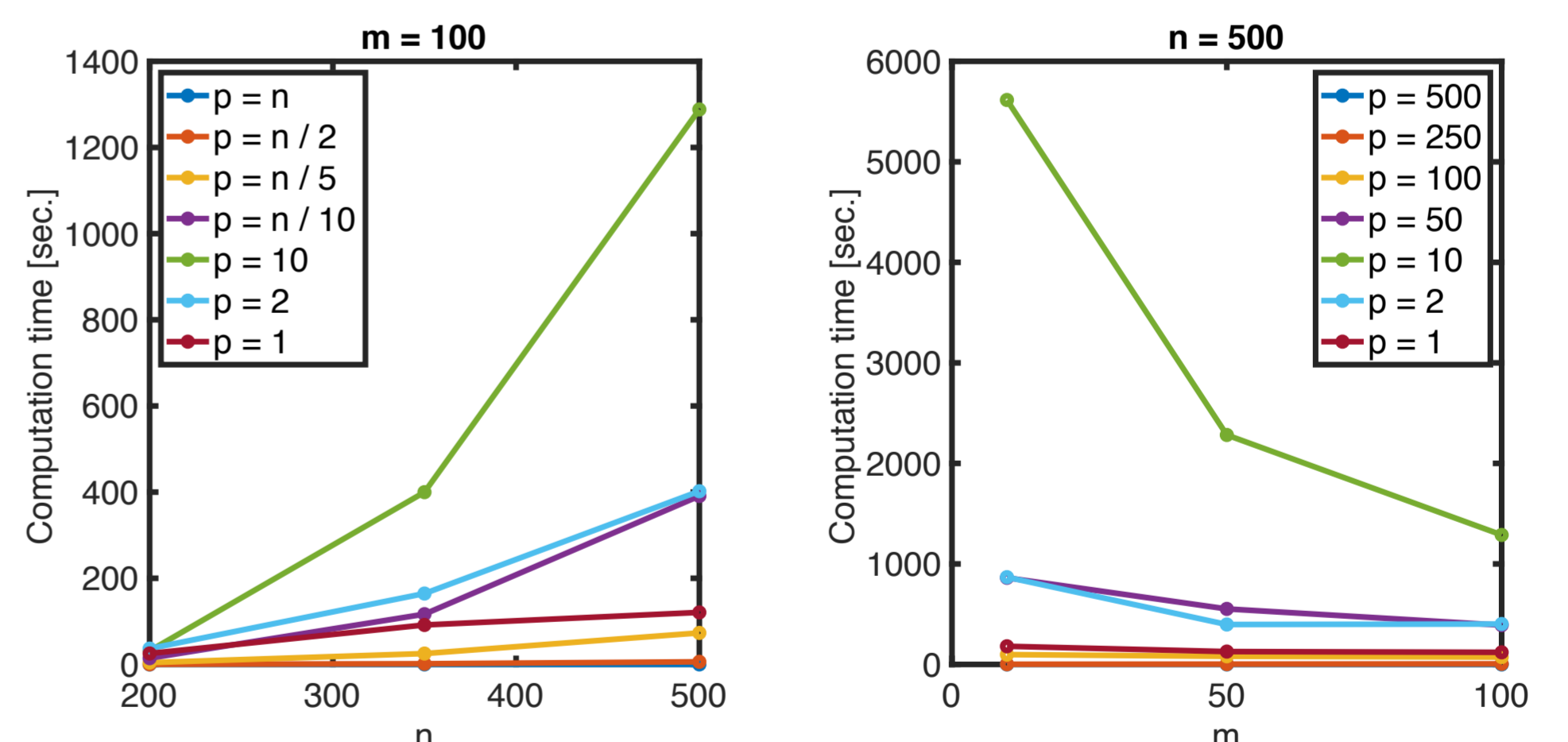
箱型制約付き LP 標準形 SOCP に対する適応的 LP-Newton 法

- 1:  $V^*$  の初期近似  $V^{(0)}$  を適切に生成する
- 2: 十分大きな  $\gamma^{(0)}$  を用いて  $w^{(0)} := (\gamma^{(0)}, b)$  とする
- 3: for  $k = 0, 1, \dots$  (収束するまで)
- 4: 現在の点  $w^{(k)}$  から  $V^{(k)}$  に対応する凸多面集合  $P^{(k)}$  への射影  $(\gamma^{(k)}, \beta^{(k)}) = \text{proj}_{P^{(k)}}(w^{(k)})$  を求め, 対応する  $x^{(k)}$  を求める
- 5:  $P^{(k)}$  の  $\text{proj}_{P^{(k)}}(w^{(k)})$  における支持超平面  $H^{(k)}$  と  $L$  との交点  $w^{(k+1)}$  を求める
- 6:  $v^{(k)} \in \text{argmin}_{v \in V^*} (1, v^T)x^{(k)}$  を計算する
- 7: if  $(1, v^{(k)})x^{(k)} < 0$  then  $\triangleright$  さもなくば  $x^{(k)} \in K$
- 8: 有限近似を  $V^{(k+1)} := V^{(k)} \cup \{v^{(k)}\}$  と更新する

定理 (Okuno and Tanaka, 2019): 最適解集合が非空かつコンパクトならば, 適応的 LP-Newton 法によって生成される点列  $\{x^{(k)}\}$  の任意の集積点は最適解

## 4 計算機実験

問題のサイズと計算時間の関係



内点法 (Tütüncü et al., 2003) との比較

問題のサイズ			計算時間 [秒]	
$m$	$n$	$(n_1, n_2, \dots, n_p)$	提案手法	内点法
1400	1500	(3, 3, ..., 3)	177.3	366.6
1700	1800	(3, 3, ..., 3)	260.4	638.4
2000	2100	(3, 3, ..., 3)	363.4	970.0

謝辞: 本研究は奥野貴之氏 (理研) との共同研究です。