ま　え　が　き

情報化社会といわれる昨今，コンピュータを含めて統計解析の知識は，誰れでも必要欠くことのできないものとなってきています．いきなりむづかしい書物を読み，無味乾燥で難解な数式をいじりまわして，あたかもこれらの知識が備わっているかのように錯覚している人をよく見かけますが，統計解析（コンピュータによるものも含めて）の主な目的は，決してそのような難解な数式の運用ではなくて，われわれの身近かに存在するさまざまな現象やデータを単に人間の直観によるだけでなく，数学的道具を用いてより科学的に把握し，人間生活や社会生活に広く役立てていくことにあります．

この書物は，こうした統計解析の本質を少しでも理解していただければと考えて書かれたもので，統計解析そのものがわれわれの生活の中で，あるいは，われわれをとりまく社会・自然の中でどのように適用され，応用されているかを，身近な，しかも具体的な例をひきながら，その理論的な背景をできるだけやさしく解説したものです．したがって，特に高度の数学的知識が必要であるということでは決してなく，誰れでも知っている常識的知識さえあれば，十分に読みこなせ，しかもその応用技術を修得できうるように配慮してあります．しかしながら，本書を読まれる人たちが，更に，一歩すすんで高度の理論や数式を必要とされるような場合には，この書物を手がかりにどんどん専門的な書物へと読み進まれるよう期待します．簡単で容易だと思われる現象が，よくよく考えてみると非常に内容的に高度な数学的理論を生み出す材料であることも少なくないのです．

この書物では，以上述べたほかに次のような点にも留意しました．

・初心者からよく発せられる質問のうち，主なものについてはそのままの形で本文に採用し，理解を助けるように解答を与えている．

・初心者にはいくらかやっかいな数式，証明などは，本文中ではできるだけ省略したが，特に数学的厳密さを要求する人のために，巻末の補注にまとめて載せ，参考になるよう意を用いた．

最後に，この書物を書くにあたり，いろいろお力添えいただいた岡山理科大学一村稔氏に対し，また終始お世話いただいた柳沢茂八，渡辺侃治氏をはじめ森北出版社の方々に厚くお礼申し上げます．

1973 年 1 月

著　者

目　　次

第1章　データの記述と尺度化の方法

第2章　乱　　数

第3章　ランダムサンプルにもとづく推定

――統計的推定法の基礎――

第4章　上手なサンプルのとり方

第5章　統計的仮説検定の考え方と方法

第6章　確率モデルとシミュレーション

——コンピュータの統計的利用法——

第1章　データの記述と尺度化の方法

統計データを集める際に，人間の身長とか体重，製品の長さや重さのように数値化できるものと，意見とか好みのように数値化が困難なものがある．数値化されないとデータとして把握することはむづかしく，抽象的なものをうまく数値化することは，統計データの解析以前の問題として大切なことである．たとえば，眼がどのくらいよく見えるかという抽象的な事柄を，視力表を用いて 1.0 とか 1.2 とか数値化しているが，これは実にうまい方法だと思われる．数値化する場合に肝心なことは，その得られた数値によってその数値のつけられた対象物が，客観的に把握できなければならない．背がどれだけ高いかを，物指しを用いて何 cm にするかといった数値化の問題は，明らかに客観性を持っているが，リンゴがどのくらい好きかということを数値化する場合，どのようにして客観性を持つ数値が得られるか，その方法はきわめてむづかしい．それゆえ，一方ではこの数値化の方法の研究が進められることも大切であるが，この章では 1.6 節で簡単な数値化の例を示す以外はすでに数値化された統計データを取り扱うことにする．

1.1　データの代表値

人間とか物とかまたその集団に対して，統計データが得られたとき，そのデータの代表値として重要なものの一つに，よく使われる**平均値** (mean value) または**総計値** (total value) がある．たとえば，ある学校の一つのクラスの成績の総計点，平均点，ある町の全世帯の総収入，平均収入，ある地域における農作物の農薬の残留量の平均値，総計値などがそれにあたる．いまデータ N 個の値を $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$ とするとき総計値，平均値はそれぞれ次のように表わされる．

$$(1.1)\qquad T = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_N = \sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{(総計値)}$$

$$(1.2) \qquad \bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad (平均値)$$

データの数 N が大きいときは，データを適当な階級にまとめて表にして，さらに図に表わすとデータの様子がよくわかる．

例 1　次に示すデータは昭和 46 年度の某県全市における 161 の幼稚園の園児数である．

147	149	44	92	40	28	144	27	500	117	38	41
180	61	40	165	86	22	212	112	190	80	16	51
192	78	28	361	12	15	248	31	153	47	37	32
198	298	48	292	19	42	94	48	164	52	222	90
192	57	38	163	284	97	144	48	262	9	77	126
232	61	39	199	89	130	27	41	365	43	16	140
163	109	107	152	281	93	72	19	459	43	49	80
96	374	264	65	87	51	14	105	271	58	52	
118	66	85	101	37	44	180	66	186	35	11	
103	107	210	281	191	99	175	80	83	68	43	
278	61	116	145	71	182	74	241	218	23	27	
212	77	70	182	50	78	350	83	209	72	35	
248	66	245	267	29	40	45	65	166	19	35	
94	12	193	188	43	59	146	34	243	28	166	

次の表はこのデータを，幅 20 (人)からなる階級にわけて，その階級に属する幼稚園の数（度数）と，**階級値**（階級の中央値）を示したものである．

表 1.1　園児数にもとづく幼稚園の度数と累積度数

階級(人)	階級値	度　数	累積度数	階級(人)	階級値	度　数	累積度数
1～ 20	10.5	11	11	261～280	270.5	5	150
21～ 40	30.5	23	34	281～300	290.5	5	155
41～ 60	50.5	23	57	301～320	310.5	0	155
61～ 80	70.5	21	78	321～340	330.5	0	155
81～100	90.5	14	92	341～360	350.5	1	156
101～120	110.5	10	102	361～380	370.5	3	159
121～140	130.5	3	105	381～400	390.5	0	159
141～160	150.5	8	113	401～420	410.5	0	159
161～180	170.5	9	122	421～440	430.5	0	159
181～200	190.5	11	133	441～460	450.5	1	160
201～220	210.5	5	138	461～480	470.5	0	160
221～240	230.5	2	140	481～500	490.5	1	161
241～260	250.5	5	145	合　計		161	

このようにデータのとる値とその度数が示してある表を**度数分布表**といい，これに対応する柱状のグラフ（図 1.1）を**ヒストグラム**という．また表 1.1 の一番右の列に示すように，その階級までの度数を全部加えたものを**累積度数**といい，累積度数の示してある表を**累積度数分布表**という．

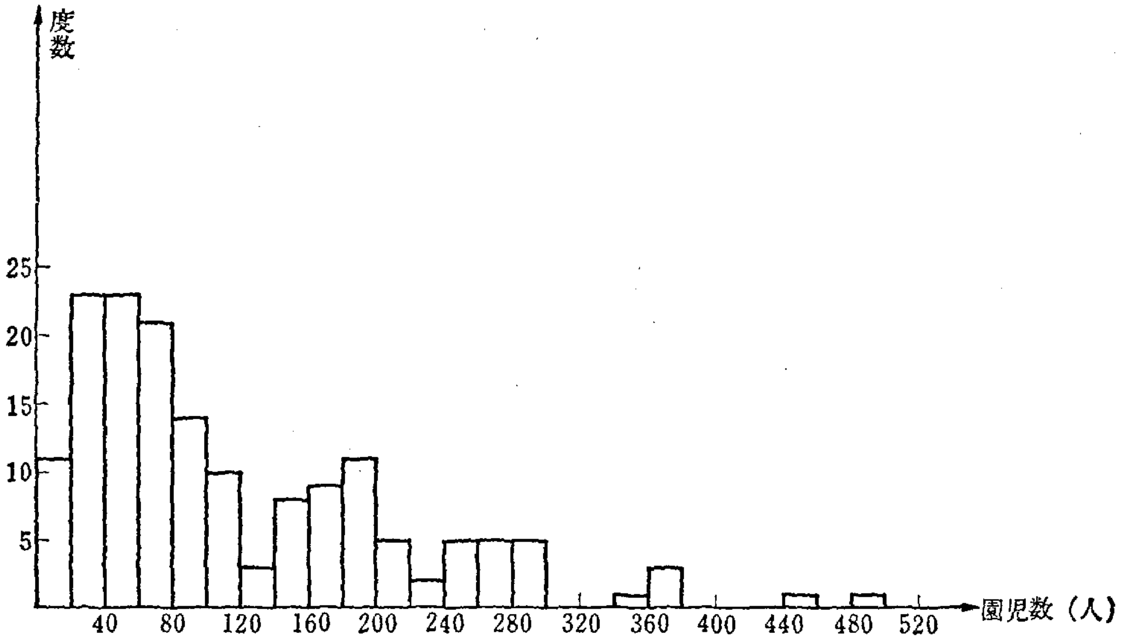


図 1.1 表 1.1 に対応するヒストグラム

さて，この場合の平均値は，次のようにして算出する．園児の数が 1 人～20 人の階級に属する幼稚園の数は 11 あって，その中には園児 12 人の幼稚園もあれば 19 人の幼稚園もある．しかし計算の便宜上 11 の幼稚園全部が階級値の 10.5 人と考える．以下の階級においても同様に考えて平均値を

$$(1.3)\quad \bar{x}=(10.5\text{人}\times 11+30.5\text{人}\times 23+\cdots\cdots+490.5\text{人}\times 1)\div 161\fallingdotseq 118\text{人}$$

とする．

一般に N 個のデータを k 個の階級にわけ，階級値 $m_1, m_2, \cdots\cdots, m_k$ がそれぞれ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_k(f_1+f_2+\cdots\cdots f_k=N)$ の度数をもつとき，平均値を次のように定義する．

平均値を次のように定義する．

$$(1.4)\quad \bar{x}=\frac{1}{N}(m_1\times f_1+m_2\times f_2+\cdots\cdots+m_k\times f_k)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} m_i f_i$$

この式 (*1.4*) で示す平均値は完全に式 (*1.2*) で示す $\bar{x}=\frac{1}{N}(x_1+\cdots\cdots+x_N)$ とは一致しないが非常に近い値を示し，データ処理上さしつかえないことが確かめられる．たとえば，例1で式 (*1.2*) による平均値は 117.9 で，式 (*1.4*) による平均値は 118.2 であり，その差は非常に小さい．

平均値（または総計値）は，データの代表値のうちで大切なものの一つであるが，どんな場合でも平均値（または総計値）で一つの集団を特徴づけることは好ましくない．たとえば，農作物の被害とか，台風の被害，農薬の残留量などの人体に対する害については，当然，過去に得られた資料の最大値でその対策をたてるべきである．このように最大値もまた大切な代表値の一つである．

データ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$ の**最大値**は，資料を次のように大きさの順に並べたとき，

(*1.5*)　$x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq \cdots\cdots \leqq x_{(N)}$

$x_{(N)}$ のことであり，**最小値**は $x_{(1)}$ のことである．

最大値の用いられる例は，公害データのほかにもいろいろある．走り幅とび，走り高とびなどの競技でも，6回飛んだときの記録を順序づけして，

$$x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq \cdots\cdots \leqq x_{(6)}$$

とすると，その人の評価として最大値 $x_{(6)}$ が代表値となる．

極言すれば，1回だけ良い記録をだせば，ほかは何でもよいということになる．この評価法が良いか悪いかについては，いろいろ議論があり，むしろ，平均値を用いた方が選手のためによいのではないかという意見もあろう．

式 (*1.5*) において，ちょうど中央にくる値のことを**中央値** (median)—または**中位数**とも呼ばれる—という．データ個数 N が奇数であるときは $\frac{N+1}{2}$ 番目の値が中央値で，N が偶数のときは $\frac{N}{2}$ 番目の値と $\frac{N}{2}+1$ 番目の値の算術平均を中央値とする．たとえば $N=5$ のとき

$$x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq x_{(3)} \leqq x_{(4)} \leqq x_{(5)}$$

において，中央値は $\frac{N+1}{2}=\frac{5+1}{2}=3$ 番目の値 $x_{(3)}$ である．

$N=6$ のとき

$$x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq x_{(3)} \leqq x_{(4)} \leqq x_{(5)} \leqq x_{(6)}$$

において，中央値は $\frac{1}{2}(x_{(3)}+x_{(4)})$ である．

この中央値が上手に利用されたおもしろい話（例 2）を紹介しよう．

例 2

25 頭の象の群をひきいる大サーカス団があり，あるとき興行のため海を渡ることになり，船に積む関係で 25 頭の象の全体の重さを測る必要が生じた．しかし，考えてみると，25 頭の象全部を 1 頭ずつ測るのは大変な労力である．ところが，このサーカス団の中に非常に機転のきく象使いがいて，次のような方法により，ただ 1 頭の象の重さだけ測って，全体の象の重さを算出した．

まず，25 頭の象を大きさの順に 1 列に並べ，大きい方からも小さい方からも 13 番目にあたる花子という名前の象の重さ（中央値）を測った．そして，その重さを 25 倍したものを全体の象の重さと考えた．花子という名の象の重さは，3.85 トンであったので，25 頭全部の重さを 3.85トン × 25 = 95.25トン と算出した．もちろん，この方法で得られた値は 25 頭の象全部を測定して得られる値とは正確には一致しないが，非常に近い値となることは直観的にもうなづけよう．この誤差は船に積む重量の算出としてはさしつかえないものである．

この算出方法がどの程度正確に全体の象の体重を推定するかを実際の例で示してみよう．あいにく象のデータを持ち合わせていないので，かわり

表 1.2 各クラスの体重 （単位: kg）

クラス A (34 名)	59.0	66.5	60.5	63.5	65.5	56.0	51.5	56.0	57.5	57.5	56.0	56.0
	53.5	54.0	59.5	70.5	54.5	55.0	47.5	57.0	61.0	53.0	52.5	53.0
	57.0	47.0	47.5	63.0	53.0	51.5	48.5	46.5	53.0	57.5		
クラス B (33 名)	50.5	57.0	60.0	55.0	51.0	53.5	51.5	56.5	52.0	60.5	62.0	56.5
	50.0	61.0	57.0	49.0	62.0	51.5	62.0	50.0	54.0	60.0	56.0	56.5
	59.0	67.0	45.5	51.0	60.0	50.0	54.0	51.5	51.5			
クラス C (30 名)	63.5	61.5	66.0	49.5	54.5	63.0	64.0	59.0	52.5	53.0	48.0	62.0
	48.0	55.5	62.0	53.5	57.5	57.0	49.0	74.5	60.0	50.5	58.0	59.5
	54.0	54.0	58.0	56.0	50.5	56.0						
クラス D (32 名)	57.0	53.5	57.5	54.5	57.0	62.5	50.0	50.5	50.0	56.0	60.5	67.0
	54.0	59.0	53.0	58.0	63.0	52.0	52.5	66.5	57.0	56.0	59.0	51.5
	57.0	55.0	53.5	54.5	54.5	54.0	66.0	58.5				

に人間の体重の場合を考えてみた．

表 1.2 に示すデータはある大学の K 学部の1年生の4つのクラスの男子学生の体重の実測値を示す．

この4つのクラスで象使いの算出の方法を用いて，各クラスとも，ただ1人だけの体重を測ってクラス全体の体重の総計値を計算してみる．

クラス A の中央値は偶数人なので，大きい方から 17 番目か 18 番目の学生の体重の平均値であるが，そのどちらか1人を測ることにする．この場合，どちらの学生の体重を測っても 56.0 kg となるので 56.0 kg × 34 = 1 904.0 kg をこのクラスの体重の総計値とみなす．実際，全部の学生の体重を測って合計すると資料より 1901.0 kg となり，その差はわずか 3 kg である．

他のクラスについても同様に計算してみると，

クラス B: 大きい方から 17 番目の学生の体重（中央値）を測る．その学生の体重は 55.0 kg，よつて 55.0 kg × 33 = 1 815.0 kg を総計値とみなす．

正確な総計値 = 1 824.5 kg

クラス C: 大きい方から 15 番目，または 16 番目の学生を測る．15 番目の学生を測ったとき，体重は 57.0 kg，よって 57.0 kg × 30 = 1 710.0 kg を総計値とみなす．16 番目の学生を測ったとき，体重は 56.0 kg，よって 56.0 kg × 30 = 1 680.0 kg を総計値とみなす．

正確な総計値 = 1 710.0 kg

クラス D: 大きい方から 16 番目，または 17 番目の学生を測る．どちらを測っても 56.0 kg，よって 56.0 kg × 32 = 1 792.0 kg を総計値とみなす．

正確な総計値 = 1 810.5 kg

これらの例において，中央値はその集団の平均値と非常に近い値であることがわかるであろう．ところが，いつでも中央値は平均値に近い値を示すかというと決してそうではない．例えば，[例 1] の幼稚園の園児数について考えてみると，データから中央値は 85 人と算出されるが，式 (*1.3*) に示すとおり平均値は 118 人で中央値とは大きく異なっている．すなわち，データの構造によって中央値は平均値に近くなったり，離れたりする．中央値と平均値が近い値を示す場合はヒストグラムが平均値をはさんで左右対称に近い場合で，両者の値が離れるのはヒストグラムが左右非対称の場合であることは直観的にもわかるであろう．

また，次のようなところにも中央値は利用されている．

例 3

特定の技術がいつ開発されるか? 1990 年の世界の総人口はいくらか? などの将来予測に関して最近話題になっている“デルファイ手法”というのがある．これは，いずれも甲乙のつけ難い専門家のグループ（n 人としよう）に同じ質問をして，n 人の解答の中央値でもってその質問に対する予測値とする．たとえば，アメリカ合衆国のランド研究所で150人の宇宙開発の専門家に対しておこなわれたものであるが,「人間の火星上陸と帰還はいつか?」という質問に対して，その解答の中央値は 1985 年となっている．よって予測値として 1985 年を採用する．この場合，人間の火星上陸が実現する時点（真の値）は，1985 年とはかなり異なるかも知れない．しかし，この 150 人の専門家のグループの半数の人の解答値よりも，中央値のほうが真の値に近いことは容易にわかる．中央値のもつこのような性質を利用したのが“デルファイ手法”である．

度数の最も多いデータの値のことを**最頻値**（mode）または流行値ともいい，流行，需要などのデータにおいて代表値として適当なことが多い．その他にもいろいろな代表値があり，次の例に示すものもその 1 つである．

例 4

体操競技では，1 人の演技に対して，5 人の審査員がそれぞれ点数をつける．そして，その演技者の評価として，5 人のデータのうち最大値と最小値を除いた残り 3 つの値の平均点で．得点を決めている．すなわち

$$x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq x_{(3)} \leqq x_{(4)} \leqq x_{(5)}$$

のとき代表値として次の値を用いる．

$$\frac{1}{3}(x_{(2)} + x_{(3)} + x_{(4)})$$

この例における代表値は，もちろん 5 人全部の点数を加えて 5 で割った値とは異なっている．この代表値の性質について，理論的にも興味をもつ人もあるが，要するに目的とするところは，1 部の審査員が特定の演技者に対して極端によい点をつけたり，悪い点をつけたりすることを避けるためであろう．この方法を，学校の生徒の 1 年間の成績の評価に使ったらどうであろうか．かりに，1 年間に 6 回テストをしていれば，そのうちの 1

番点数のよいものと最も点数の悪いものを除いて，残りの4つの値を平均する．理由は，実力はありながら風邪をひいたとか，その他の原因で極端に悪い点をとる場合があったり，また，問題にやまをかけていて，たまたまそれがあたり，1度だけ良い点をとる場合も考えられるからである．

このように，データの代表値は，その目的に応じて，平均値・総計値・中央値・最大値などのうちどれを用いるかを考えることが大切であることを強調したい．

1.2　データの“ばらつき”の尺度

——分散，標準偏差——

いま A 商店と B 商店でそれぞれ 10 個の卵を買い，重さを測ったら次のようであった．

A 商店　65 g，60 g，73 g，62 g，55 g，68 g，57 g，67 g，60 g，68 g

B 商店　63 g，65 g，61 g，62 g，63 g，60 g，64 g，66 g，64 g，66 g

このデータから卵の重さの平均値は

A 商店；　63.5 g

B 商店；　63.4 g

となるので両商店とも同じ種類の卵であるというと，とんだ間違いである．よくデータを見ると，A 商店の卵はかなり重さがまちまちで，B 商店の卵は重さがほぼそろっていることがわかる．このように平均値だけでそのデータを表わすと“ばらつき”の異なっているデータを判別することができないので，平均値からの“ばらつき”の度合を次のように考える．

平均値とそれぞれの値の差の2乗の和を考え，それを平均する意味で総個数 10 で割った値をこのデータの分散と呼び，分散の平方根を標準偏差と呼んでいる．この例では卵の重さのばらつきが大きいほど，分散・標準偏差の値は大きくなることは容易にわかろう．それでは A 商店，B 商店のデータをもとに実際に分散・標準偏差を求めてみると次のようになる．簡単のために単位は省略する．

$$\text{A 商店:}\quad \text{分散} = \frac{1}{10}\{(65-63.5)^2+(60-63.5)^2+\cdots\cdots+(68-63.5)^2\}$$

$$= 28.65$$

$$\text{標準偏差} = \sqrt{28.65} = 5.35$$

$$\text{B 商店:}\quad \text{分散} = \frac{1}{10}\{(63-63.4)^2+(65-63.4)^2+\cdots\cdots+(66-63.4)^2\}$$

$$=3.64$$

$$\text{標準偏差}=\sqrt{3.64}=1.91$$

一般的に N 個のデータ

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$$

があるとき，このデータの**分散** (variance), **標準偏差** (standard deviation) をそれぞれ次のように定義し，記号は σ^2, σ を用いて表わす. σ はシグマと読む.

$$(1.6)\quad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \quad (\text{分散})$$

$$(1.7)\quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} \quad (\text{標準偏差})$$

ただし，$\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ とする.

また次のような例を考えてみよう.

2人の薬剤師 A, B がいる. A は熟練者で B は未熟練者である. この2人が 10 g の薬の山を 10 枚の袋に 1 g ずつふりわける仕事をしている. もちろん人間のすることで正確に 1 g ずつ全部の袋にふりわけることは不可能で，どの袋も 1 g から多少ずれているのが普通である. 表 1.3, 図 1.2 は一定時間内に A と B が作った 100 袋について度数分布表とヒストグラムを示したものである. このとき両者の分散，標準偏差を求める.

前の卵の例と考え方は同じで，式(*1.4*)で示す平均値と階級値の差の2乗と度数の積の和を考え，それを平均する意味で総数で割った値を，度数分布表で表わされたデータの分散と呼び，その平方根を標準偏差と呼んでいる. A，B両者の分散，標準偏差を求めると次のようになる.

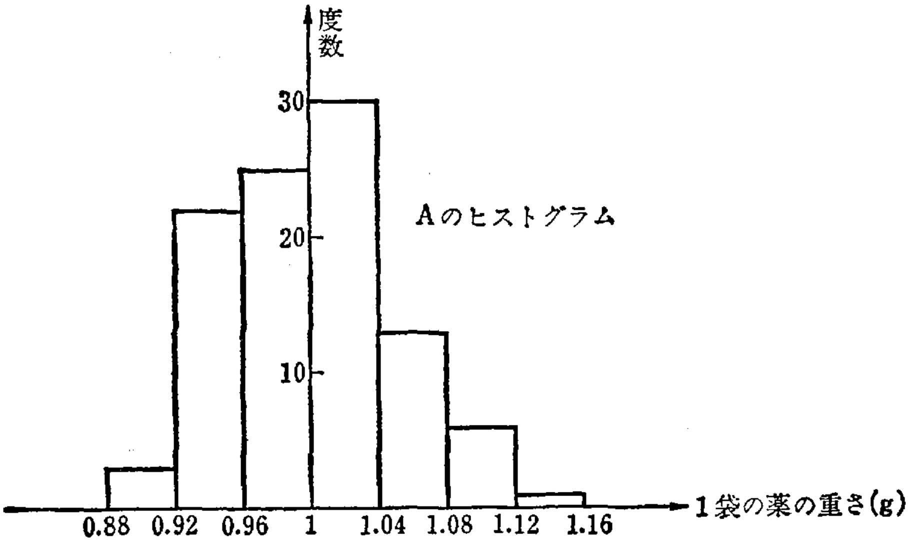
表 1.3　A，B の100袋における度数分布表

A の度数分布表

階級（単位: g）	階級値	度数
0.88〜0.92	0.90	3
0.92〜0.96	0.94	22
0.96〜1.00	0.98	25
1.00〜1.04	1.02	30
1.04〜1.08	1.06	13
10.8〜1.12	1.10	6
1.12〜1.16	1.14	1
合計		100

B の度数分布表

階級（単位: g）	階級値	度数
0.72〜0.76	0.74	1
0.76〜0.80	0.78	3
0.80〜0.84	0.82	4
0.84〜0.88	0.86	8
0.88〜0.92	0.90	13
0.92〜0.96	0.94	7
0.96〜1.00	0.98	16
1.00〜1.04	1.02	12
1.04〜1.08	1.06	12
1.08〜1.12	1.10	8
1.12〜1.16	1.14	7
1.16〜1.20	1.18	7
1.20〜1.24	1.22	2
合計		100



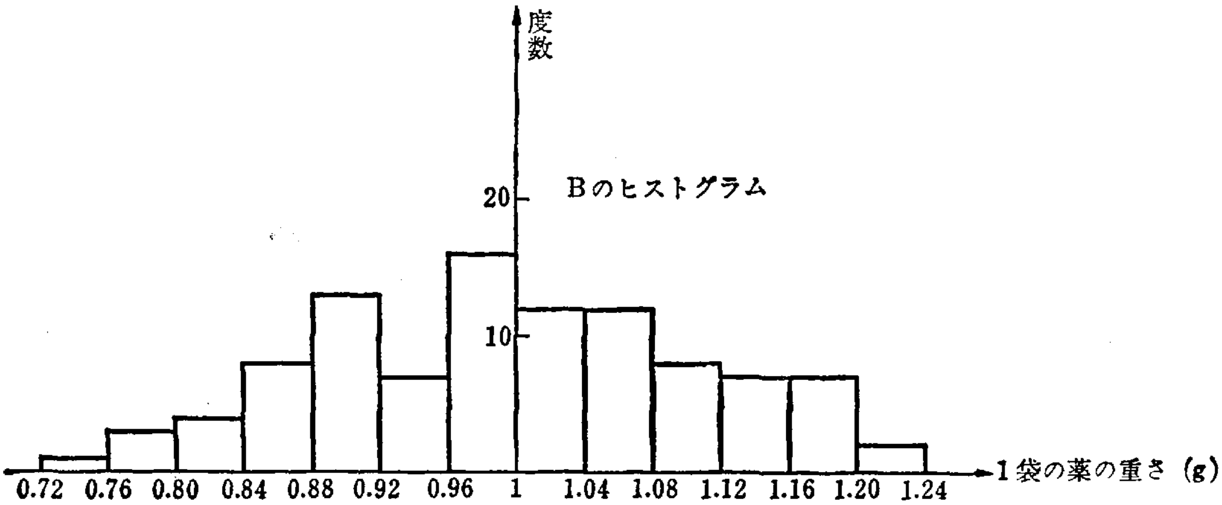


図 1.2　A と B のヒストグラム

簡単のために単位は省略する.

$$\text{A: 分散 } (\sigma^2) = \frac{1}{100}\{(0.90-1)^2\times 3+(0.94-1)^2\times 22+\cdots\cdots$$
$$+(1.14-1)^2\times 1\} = 0.002\,576$$

$$\text{標準偏差 } (\sigma) = 0.051$$

$$\text{B: 分散 } (\sigma^2) = \frac{1}{100}\{(0.74-1)^2\times 1+(0.78-1)^2\times 3+\cdots\cdots$$
$$+(1.22-1)^2\times 2\}$$
$$= 0.012\,496$$

$$\text{標準偏差 } (\sigma) = 0.112$$

表 1.4 度数分布表

階　級	階級値	度　数
$a_0\sim a_1$	m_1	f_1
$a_1\sim a_2$	m_2	f_2
$a_2\sim a_3$	m_3	f_3
⋮	⋮	⋮
$a_{k-1}\sim a_k$	m_k	f_k
	合　計	N

一般に，データが度数分布表（表 1.4）で与えられているとき

分散，標準偏差をそれぞれ次のように定義する.

$$(1.8)\quad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(m_i-\bar{x})^2 f_i \quad (\text{分散})$$

$$(1.9)\quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(m_i-\bar{x})^2 f_i} \quad (\text{標準偏差})$$

ただし　$\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} m_i f_i$ とする.

注 分散，標準偏差は次節の線形回帰直線のところで用いられるだけでなく，その概念は統計的推定法，検定法のところで非常に重要な役割をもつ.

分散・標準偏差のほかにデータの“ばらつき”の度合を表わすものとして，範囲というのがある. これは N 個のデータ $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_N$ を大きさの順に並べかえて

$$x_{(1)} \leqq x_{(2)} \leqq x_{(3)} \leqq \cdots\cdots \leqq x_{(N)}$$

とするとき，**範囲**を次のように定義する.

$$(1.10)\quad R = x_{(N)} - x_{(1)}$$

これはデータの最大値から最小値を引いた値であり，R の値が大きければデータのばらつきが大きく，R の値が小さければデータのばらつきは小さい

ことになる.

このほかにも，データの“ばらつき”の度合を表わすものとして，平均偏差，四分偏差などがあるが説明は省略する.

問　　題　1

1. 次に示す数値は，ある小学校の2年生の男子 15 人，女子 18 人の算数のテストの点数である．男子と女子の平均値，分散，標準偏差を求めよ.

男子: 61, 59, 66, 47, 51, 49, 63, 65, 52, 15, 50, 29, 53, 70, 55,

女子: 55, 65, 60, 55, 56, 64, 67, 57, 47, 57, 60, 50, 58, 64, 60, 52, 62, 60,

2. 1.1 節の例1の161校の幼稚園の園児数のデータから，分散，標準偏差を式 (*1.6*)，式 (*1.7*) を用いて求めよ.

1.3　データの線形（直線）傾向と予測

次のデータ（表1.5）は，Y 市の 10 個の区における昭和 46 年8月の世帯数 (x) と，家庭のごみの排出量 (y) を示すものである.

表 1.5　世帯数と家庭のごみの排出量

区の番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
世帯数 (x) (単位: 10000 世帯)	7.33	6.24	3.11	2.41	7.93	8.42	3.15	3.21	6.59	3.19
家庭のごみの排出量(y) (単位: 1 000 トン)	3.74	2.74	1.77	1.09	3.88	4.03	1.41	1.80	2.79	1.55

このデータを見て，統計マンである Y 市役所清掃局員甲は，次のようにして昭和 50 年8月の Y 市全体のごみの排出量を予測した.

（イ）　世帯数（x）と家庭のごみの排出量（y）との関係を相関図に描き，y の x への線形回帰直線

$$y = 0.46x - 0.096$$

を引いた（図 1.3).

（ロ）　図1.3より，x と y の関係は，正の相関が非常に強く世帯数がきまると，排出量 (y) は式 $y = 0.46x - 0.096$を用いて算出してさしつかえないと考えた．試みに表1.5より Y 市の世帯数は 51.58（万世帯）で，排出量は 24.80（千トン）である．もし前式を用いると $x = 51.58$ のとき

$$y = 0.46 \times 51.58 - 0.096 = 23.63$$
（千トン）

となり，実際の総排出量に近い値が得られる．

（ハ）昭和 50 年の全市の世帯数は 65.3（万世帯）と推定されているので，排出される家庭のごみの排出量を

$$y = 0.46 \times 65.3 - 0.096 = 29.94$$
（千トン）

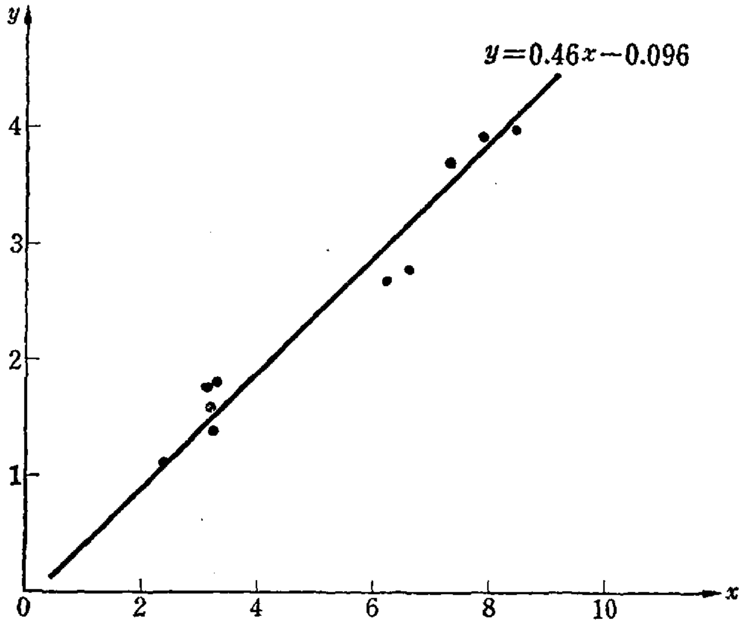


図 1.3 世帯数（x）と家庭のゴミの排出量（y）の相関図と線形回帰直線

から約 30 千トンと予測した．

他の月に対しても表1.5に相当する資料を用いて家庭のごみの昭和 50 年の排出量を予測した．この結果 Y 市の昭和 50 年の家庭のごみの排出量の予測値にもとづいて清掃車の台数，焼却場の規模などが見積もられた．清掃局員甲のこの方法は今まで人間の直感によって判断されていたことが，データにもとづいて科学的に取り扱われたという点で非常に注目された．

さて，清掃局員甲のおこなった統計解析の主眼となるところは，相関図を描き，世帯数と家庭のごみの排出量の関係が強い直線的関係であることを見つけたことと，その関係を示す式（線形回帰直線）を求めたことである．そこで相関図と線形回帰直線についての知識を述べておこう．

一般に N 組のデータ

$$(x_1,\ y_1)$$
$$(x_2,\ y_2)$$
$$\vdots$$
$$(x_N,\ y_N)$$

を平面上にプロットした図のことを**相関図**（correlation diagram）という．相関図において図1.3のように一方が増加すれば，他方も増加する線形傾向

(直線的な傾向)をもつときデータは正の相関があるといい，一方が増加すると他方は減少する線形傾向をもつときデータは負の相関があるという．正の相関も負の相関もないとき相関がないという．

次にデータが与えられたときに，そのデータの点を代表する直線をどのように決めたらよいかについて考えよう．これには最小二乗法の原理が用いられる．図1.4に示すように任意の直線 $y=ax+b$ を考え，各点から直線 $y=ax+b$ までの y 軸に平行な線にそっての距離($|d_i|$) の2乗の和

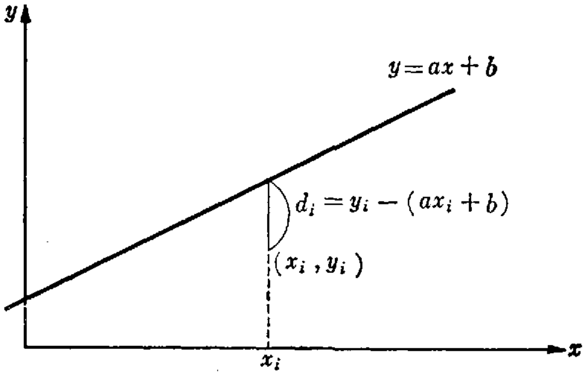


図 1.4

$$(1.11)\quad \sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

を最小にする a と b の値 ($\hat{a}$, $\hat{b}$ と書くことにする) を N 組のデータから決定する．これが**最小二乗法** (method of least squares) の原理である．

計算の結果は次のようになる．(補注 [1])

$$(1.12)\quad \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2},\quad \hat{b} = \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}\bar{x}$$

ただし　$\bar{x}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$, $\bar{y}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$ とする．

したがって直線の方程式は次のようになる．

$$(1.13)\quad y = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}(x-\bar{x}) + \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}(x-\bar{x}) + \bar{y}$$

ただし　$\sigma_x{}^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$　(x の分散)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

(σ_{xy} を x と y の**共分散** (covariance) という)

このようにして得られた直線のことを y の x への**線形回帰直線**（linear regression line of y on x）といい，方向係数 $\sigma_{xy}/\sigma_x{}^2$ を y の x への**線形回帰係数**（linear coefficient of regression of y on x）という．表1.5に対して y の x への線形回帰直線は式（*1.13*）より

$$y = 0.46x - 0.096$$

となり，これが清掃局員甲の用いた線形回帰直線である．

x の y への線形回帰直線も同様にして

$$x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y{}^2}(y - \bar{y}) + \bar{x}$$

と求まることは容易に理解できよう．

問　題 2

次のデータは昭和 38 年から昭和 46 年までの 9 年間の S 会社の 1 年間の利益と人件費の関係を示したものである．

昭和(年)	38	39	40	41	42	43	44	45	46
利　益(百万円)　x	67.6	77.1	92.1	113.7	151.4	181.3	212.3	241.5	265.0
人件費(百万円)　y	20.4	25.9	34.0	42.5	48.6	54.2	66.2	78.2	95.2

このデータにもとづいて相関図を描き，線形回帰直線を求めよ．また S 会社では昭和 47 年の利益を 3 億 5 千万円と見込んでいる．そのときの人件費はどの程度支払ってよいか．

1.4 データの線形傾向の度合いの尺度化

相関係数

前節で市役所清掃局の職員は，世帯数と家庭のごみの排出量の線形傾向の度合いが非常に強いということを相関図を画いてみつけているが，線形傾向の度合いがいかに強いか，または，弱いかということは，普通，線形回帰直線のまわりにデータの点が密集している度合いによって表わされる．線形回帰直線のまわりにデータの点が密集していれば（線形）関係が強いといい，線形回帰直線から離れていれば（線形）関係が弱いという．この度合いを尺度化したものが，次式で示す**相関係数**（correlation coefficient）と呼ばれるものである．

(1.14)　$\rho_{xy}=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}$

ただし　$\sigma_x{}^2=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$,　$\sigma_y{}^2=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2$,

(x の分散)　　　　(y の分散)

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

(x と y の共分散)

式 (1.14) において $-1\leqq\rho_{xy}\leqq 1$ なる関係があり，ρ_{xy} の値が1に近いほど，正の相関が強く（正の傾きをもつ線形回帰直線のまわりへのデータの点の密集度が高く），-1 に近いほど負の相関が強い（負の傾きを持つ線形回帰直線のまわりへのデータの点の密集度合いが高い）．また ρ_{xy} の値が0に近くなると線形回帰直線から離れたところにデータの点が群がっていることを意味する．これらの事実を確認するために図1.5において次のような量を考えてみよう．

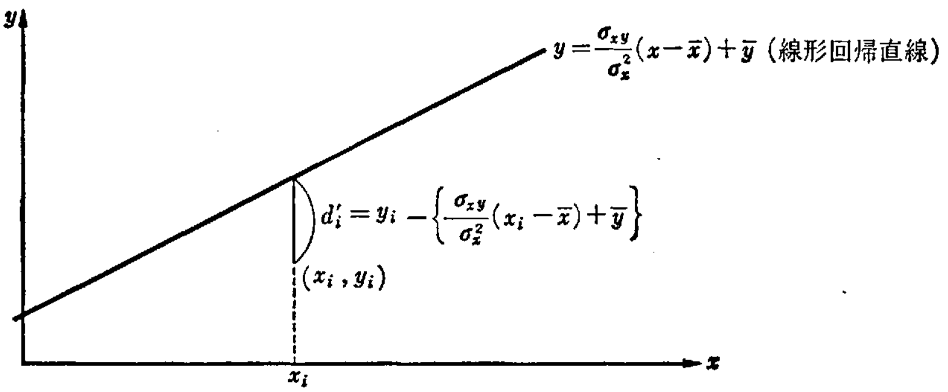


図 1.5

(1.15)　$\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}d_i'^2=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-\left\{\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}(x_i-\bar{x})+\bar{y}\right\}\right]^2$

この式を計算してみると次のようになる．

(1.16)　$\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}d_i'^2=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(y_i-\bar{y})-\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}(x_i-\bar{x})\right]^2$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2-\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

$$+\frac{\sigma_{xy}{}^2}{\sigma_x{}^4}\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$$

$$= \sigma_y{}^2\left\{1 - \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\right)^2\right\} = \sigma_y{}^2(1 - \rho_{xy}{}^2)$$

この式において，$\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i'^2 \geqq 0$ であるから，$\sigma_y{}^2(1-\rho_{xy}{}^2) \geqq 0$ とならなければならない．したがって

$$-1 \leqq \rho_{xy} \leqq 1$$

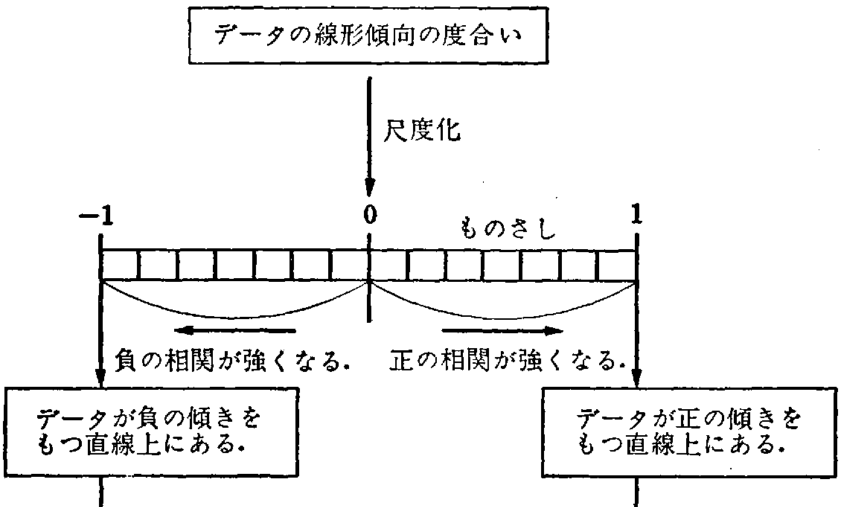
を導くことができる．

式 (*1.16*) から次のことは容易にわかるだろう．

(イ)　$\rho_{xy} = \pm 1$ のとき $\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i'^2 = 0$ となり，データの点は，すべて直線上にある．

(ロ)　ρ_{xy} が ± 1 から 0 に近づいていくに従って，$\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i'^2$ の値は大きくなり，データの点は線形回帰直線からだんだん離れてくる．したがって ρ_{xy} の値が 0 に近くなればなるほど，データの線形関係はなくなってくることがいえる．

式 (*1.14*) は，次のように -1 から 1 までの長さをもつものさしで，データの線形（直線）傾向の度合いを測っていることになる．



さて，前節の表 1.5 に示す Y 市の世帯数と家庭のごみの排出量の相関係数は

$$\rho_{xy} = 0.98$$

となる．この結果，相関図に描かなくても世帯数と排出量の間には，非常に強い線形関係があることがわかろう．

ここで，参考のために相関図と相関係数（ρ_{xy}）の値について例示しておこう．

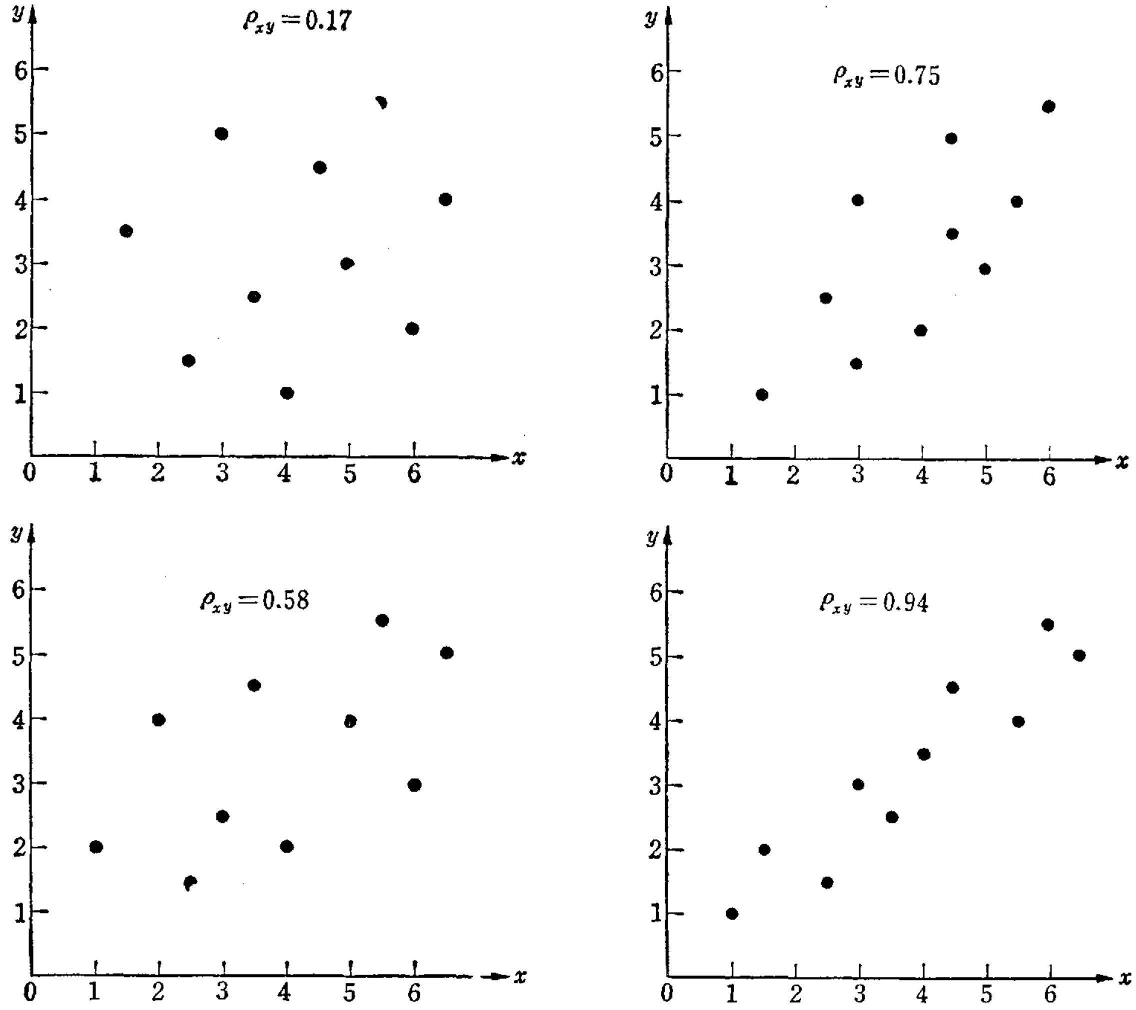


図 1.6　相関図と相関係数（ρ_{xy}）の値

〈**質問**〉 与えられたデータの相関係数が0に近いと線形関係がないということはわかりますが，他にどんな関係もないというのは誤りですね？

答　全くその通りです．よく相関係数が0に近いと関係がないという人をみかけますが，それは誤りです．たとえば，次のデータはある細菌の温度（x）と繁殖数（y）を示したものです．

x （°C）	1	2	3	4	5	6	7
y （単位時間の繁殖数）	2.0	2.4	4.4	5.0	9.2	10.2	11.6
x （°C）	8	9	10	11	12	13	14
y （単位時間の繁殖数）	12.0	11.2	10.4	8.0	7.0	2.0	0.4

このデータの相関図は図1.7のようになります．また相関係数 ρ_{xy} の値を式 (*1.14*) から求めてみると，

$$\rho_{xy} = 0.064$$

と非常に0に近いですね．したがって x と y の間には，線形関係（直線的傾向）はないといえます．しかし，他のどんな関係もないというのは誤りで，図1.7の相関図からわかるように温度と細菌の繁殖数の間には，8°C までは温度が高くなると，繁殖数は増加し，以後，温度が高くなると繁殖数は減少するという線形以外の大変強い関係があることがわかります．

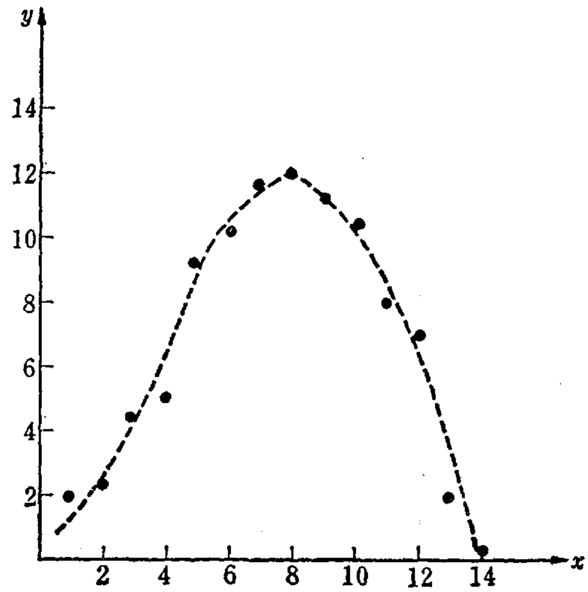


図 1.7 相 関 図

データが，x, y ともに 11 ページの表 1.4 のように階級ごとに整理されている場合，x, y の階級における階級値をそれぞれ

m_1, m_2, ……, m_k, m_1', m_2', …, m_l' とする．階級値が m_i, m_j' の階級に属するデータの数を f_{ij} で表わし，$\sum_{j=1}^{l} f_{ij} = f_{i\cdot}$, $\sum_{i=1}^{k} f_{ij} = f_{\cdot j}$ と表わすことにすれば表1.6ができる．この表のことを**相関表** (correlation table) という．N はデータの総数ある．

表 1.6 相 関 表

y \ x	m_1	m_2	…	m_i	…	m_k	計
m_1'	f_{11}	f_{21}	…	f_{i1}	…	f_{k1}	$f_{\cdot 1}$
m_2'	f_{12}	f_{22}	…	f_{i2}	…	f_{k2}	$f_{\cdot 2}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
m_j'	f_{1j}	f_{2j}	…	f_{ij}	…	f_{kj}	$f_{\cdot j}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
m_l'	f_{1l}	f_{2l}	…	f_{il}	…	f_{kl}	$f_{\cdot l}$
計	$f_{1\cdot}$	$f_{2\cdot}$	…	$f_{i\cdot}$	…	$f_{k\cdot}$	N

このとき，このデータの平均値，分散，標準偏差，相関係数，y の x への線形回帰直線を次のように表わす．

$$\text{平 均 値}\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f_{ij} m_i = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_{i\cdot} m_i \\ \bar{y} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f_{ij} m_j' = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{l} f_{\cdot j} m_j' \end{cases}$$

分　散
$$\begin{cases} \sigma_x{}^2 = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f_{ij}(m_i - \bar{x})^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_{i\cdot} m_i{}^2 - \bar{x}^2 \\ \sigma_y{}^2 = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f_{ij}(m_j' - \bar{y})^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{l} f_{\cdot j} m_j'^2 - \bar{y}^2 \end{cases}$$

標準偏差
$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \end{cases}$$

相関係数　$\rho_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

線形回帰直線　$y = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x{}^2}(x - \bar{x}) + \bar{y} = \rho_{xy}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) + \bar{y}$

ただし，
$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f_{ij}(m_i - \bar{x})(m_j' - \bar{y})$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f_{ij} m_i m_j' - \bar{x}\bar{y}$$

これらの式は一見やっかいそうに見えるが，相関表さえできれば，あとはコンピュータを使って容易に計算できるプログラムができているので，それを利用すればよい．

問　　題 3

次のデータは，K 小学校 4 年生男子 19 人の知能検査（x）と算数の学力検査（y）の偏差値を示すものである．このデータの相関図を描き，また両者の相関係数（ρ_{xy}）を求めよ．

知能検査（x）	62	64	59	42	52	63	59	48	66	48
算数の学力診断検査（y）	59	68	66	48	55	64	51	49	61	54
知能検査（x）	57	71	59	51	67	48	41	63	53	
算数の学力診断検査（y）	56	60	52	60	60	47	57	56	37	

この結果，この 19 人に関する限り，知能検査と算数の学力検査の成績の間に強い線形な関係があると言えるか．すなわち，知能検査の成績のよい生徒は算数の学力検査の成績がよいと言えるか．

1.5 順位相関係数

前節で取り扱った相関係数は，2つの対応する量と量との間の相関関係を尺度化したもので，ピアソンの相関係数とも呼ばれている．ところが実際の問題において，2つの変量をともに量的に表現することが困難で，単に順位だけなら測定しうる場合がある．このような場合，順位を用いて相関の度合いを尺度化することを考えなければならない．

スピアマンの順位相関係数

例 あるデパートで，A，B，C，D，E，F，Gの7種類の反物の柄，色について甲，乙2人に好きな順に順位をつけてもらったら次のようになった．

反　　物	A	B	C	D	E	F	G
甲の順位	2	4	1	7	3	5	6
乙の順位	5	4	7	3	6	2	1
差＝甲の順位－乙の順位	－3	0	－6	4	－3	3	5
差の2乗	9	0	36	16	9	9	25

この結果甲，乙2人の好みにどの程度の一致がみられるかを判断しよう．

一般に，反物の数が n のとき甲，乙の順位が次のようであったとする．

反　物	A_1	A_2 …… A_n
甲の順位	r_1	r_2 …… r_n
乙の順位	s_1	s_2 …… s_n

このとき甲と乙の順位の間の相関係数は式（*1.14*）より次のようになる．

$$\rho=\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})^2\sum_{i=1}^{n}(s_i-\bar{s})^2}},\quad \text{ただし}\quad \bar{r}=\bar{s}=\frac{n+1}{2}$$

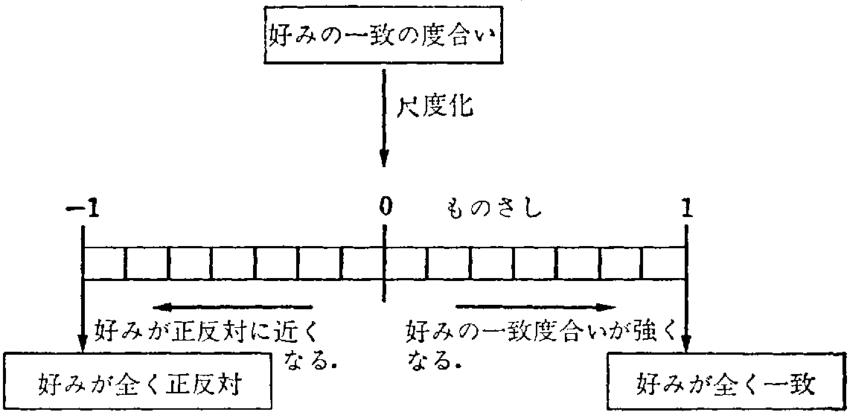
関係式：$\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})(s_i-\bar{s})=\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(r_i-s_i)^2,$

$$\sum_{i=1}^{n}(r_i-\bar{r})^2=\sum_{i=1}^{n}(s_i-\bar{s})^2=\frac{1}{12}(n^3-n)$$

を用いて上式を変形すると次式を得る．

$$(1.17)\qquad \rho=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n}(r_i-s_i)^2}{n^3-n}$$

これを**スピアマン**（Spearman）**の順位相関係数**と呼ぶ．好みの順位が全く同一ならば $\rho=1$，全く逆順位ならば $\rho=-1$ となることは相関係数の意味から容易にわかろう．したがって式（*1.17*）は次のように -1 から 1 までの長さをもつものさしで好みの一致の度合いを測っていることになる．



さて，甲，乙2人の7種類の反物の好みについては，式（*1.17*）から

$$\rho=1-\frac{6\times 104}{7^3-7}=-0.86$$

となり，甲，乙2人の好みの一致性がみられないばかりか，むしろ好みは正反対に近いことがわかる．

また，次のような別の尺度化の方法も考えられているので紹介しよう．

ケンドールの順位相関係数

たとえば，反物の例において，7種類から2種類選ぶすべての組合せは次のようである．

(A，B)	(B，C)	(C，E)	(E，F)
(A，C)	(B，D)	(C，F)	(E，G)
(A，D)	(B，E)	(C，G)	(F，G)
(A，E)	(B，F)	(D，E)	
(A，F)	(B，G)	(D，F)	
(A，G)	(C，D)	(D，G)	

まず A, B の 2 つの組を考え，甲，乙 2 人の A, B についている順位の値を比較する．甲は A が 2, B が 4 で，B の順位値の方が大きいが，乙は，A が 5, B が 4 で，A の順位値の方が大きい．

甲： A の順位値 < B の順位値

乙： A の 〃 > B の 〃

のように順位の大小関係が反対になっているとき，A, B の組に対して点数 -1 を与え，A, E の組のように

甲： A の順位値 < E の順位値

乙： A の 〃 < E の 〃

のように順位の大小関係が一致するとき，A, E の組に対して点数 $+1$ を与える．このようにして，すべての組に点数を与える．

一般に，反物の数が n のとき，同様にして，全体の組の数 $\frac{1}{2}n(n-1)$ に点数を与え，次のような相関係数を考える．

$$(1.18)\quad \tau=\frac{K-L}{\frac{1}{2}n(n-1)}=\frac{2K}{\frac{1}{2}n(n-1)}-1=1-\frac{2L}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

ただし，K は点数 $+1$ の数，L は点数 -1 の数

$$\left(K+L=\frac{1}{2}n(n-1)\right)$$

これを**ケンドール (Kendall) の順位相関係数**，またはケンドールの τ（タウ）係数と呼んでいる．好みの順位が全く同じなら $L=0$ となり $\tau=1$，好みの順位が全く逆順序なら $K=0$ となり $\tau=-1$ となることは式 (*1.18*) から容易にわかろう．

甲，乙 2 人の反物の好みについては，組合せと点数は次のようになる．

A, B -1	A, G -1	B, G -1	D, E -1	F, G -1
A, C -1	B, C -1	C, D -1	D, F $+1$	
A, D -1	B, D -1	C, E -1	D, G $+1$	
A, E $+1$	B, E -1	C, F -1	E, F -1	
A, F -1	B, F -1	C, G -1	E, G -1	

このとき，式 (*1.18*) から

$$\tau = \frac{3-18}{\frac{1}{2}\times 7\times 6} = -0.71$$

となり，スピアマンの順位相関係数の値 -0.86 とは異なっているが，-1 の方にかたよっているという同じ傾向を示し，好みは正反対に近いことがわかる．

以上，好みの一致性についてスピアマン，ケンドールの順位相関係数を述べたわけであるが，何も好みの一致性に限ったことはなく，これに類似するどのような問題にも適用できる．次節でも質問のところで，その1例を示している．

〈質問〉 スピアマン，ケンドールの順位相関のどちらを用いるかは，どのように使いわけしたらよいですか？

答　これは，どんな場合にスピアマンで，どんな場合にケンドールであるといった区別は特にありません．尺度化の方法が異なるだけで，どちらもほぼ同じ傾向を示します．たとえば，物の長さを測るのに単位が cm であるものさしを用いるか，単位が尺のものさしを用いるかといった区別と似ています．すなわち，順位相関係数の尺度化の意味をちゃんとわきまえていれば，どちらを用いても別にさしつかえありません．

問　　題　4

1. ある大学の学生食堂の日曜日から土曜日までの昼食の献立について，甲，乙2人の学生にその好みを聞いてみたら右表のようであった．

曜日	月	火	水	木	金	土
甲	3	5	1	6	2	4
乙	3	4	2	5	1	6

このとき，スピアマンの順位相関係数を求め，その結果この2人の学生の好みが一致しているかどうか判断せよ．

2. 1．においてケンドールの順位相関係数 τ を求めよ．

1.6　簡単な数値化の適用例

数値化の必要なことは，この章のはじめにも述べたが，最も簡単な数値化の例として，たとえば，次のように0と1の2つのタイプに分類するものがある．

- 銅貨投げて

  表が出れば 1

  裏が出れば 0

- 喫煙率の調査などで

  喫煙者を 1

  非喫煙者を 0

- 自転車に

  乗れる人を 1

  乗れない人を 0

自転車に乗れるといっても，上手な人もいれば下手な人もいるわけで，その上手さの度合いによってさらに1の中を，1，2，3 と詳しく分類することもできるが，この節では，0，1 の簡単な場合についてその適用例を述べる．

例 幼児の律動運動能力の発達の状態を調べるために，男女別に3歳児，4歳児，5歳児，6歳児のおのおの男児 15 名，女児 15 名に，13 種目についてテストをした．その種目（たとえば，かかとで前に歩く）の運動が

できれば 点数 1

できなければ 点数 0

を与える．このとき，幼児1人1人に満点を 13 点とする点数がつく．ここでは，3歳児，6歳児の結果をそれぞれ表 1.7，表 1.8 に示した．4歳児，5歳児の表は紙面の関係で省略した．

（4歳児，5歳児を含めた）これらの表において，各幼児の点数と人数の折れ線グラフを画いてみると図 1.8 のようになる．

この図をみると，3歳児・4歳児では，ほとんど運動能力に差はないが，5歳児・6歳児になってくると女児の方がはるかに点数の高い子が多く，女児の運動能力が男児にくらべてかなり早く発達することがわかる．このように簡単な数値化によっても，その発達の様子をはっきりつかむことができる．

表 1.7　律動運動能力テスト結果得点表　（3歳児）*

（男　児）

種目 ＼ 幼児番号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
かかとで歩く	前	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	後	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	横	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	自　転	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
横　と　び		0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
ホップ	前	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	横	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	後	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	自　転	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
横転	伸ばして	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
	縮めて	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
捻　転		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
歩いてバランス		0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
合計点数		6	5	4	3	3	3	3	2	2	1	1	1	1	0	0

（女　児）

種目 ＼ 幼児番号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
かかとで歩く	前	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	後	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	横	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	自　転	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
横　と　び		1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
ホップ	前	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	後	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	横	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	自　転	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
横転	伸ばして	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	縮めて	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
捻　転		1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
歩いてバランス		1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
合計点数		8	6	6	5	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	0

* 荒木恵美子“幼児の律動運動能力について”（日本体育学会誌．1972 年）より引用．

表 1.8 律動運動能力テスト結果得点表 （6歳児）*

（男 児）

種目 ＼ 幼児番号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
かかとで歩く	前	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	後	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
	横	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	自転	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
横とび		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
ホップ	前	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
	後	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
	横	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	自転	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
横転	伸ばして	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
	縮めて	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
捻転		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
歩いてバランス		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
合計点数		13	13	13	12	11	11	10	10	10	9	9	9	8	7	7

（女 児）

種目 ＼ 幼児番号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
かかとで歩く	前	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
	後	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	横	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	自転	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
横とび		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ホップ	前	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
	後	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
	横	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
	自転	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
横転	伸ばして	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	縮めて	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
捻転		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
歩いてバランス		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
合計点数		13	13	13	13	13	13	13	13	12	12	11	11	10	10	10

* 荒木恵美子“幼児の律動運動能力について”（日本体育学会誌，1972 年）より引用．

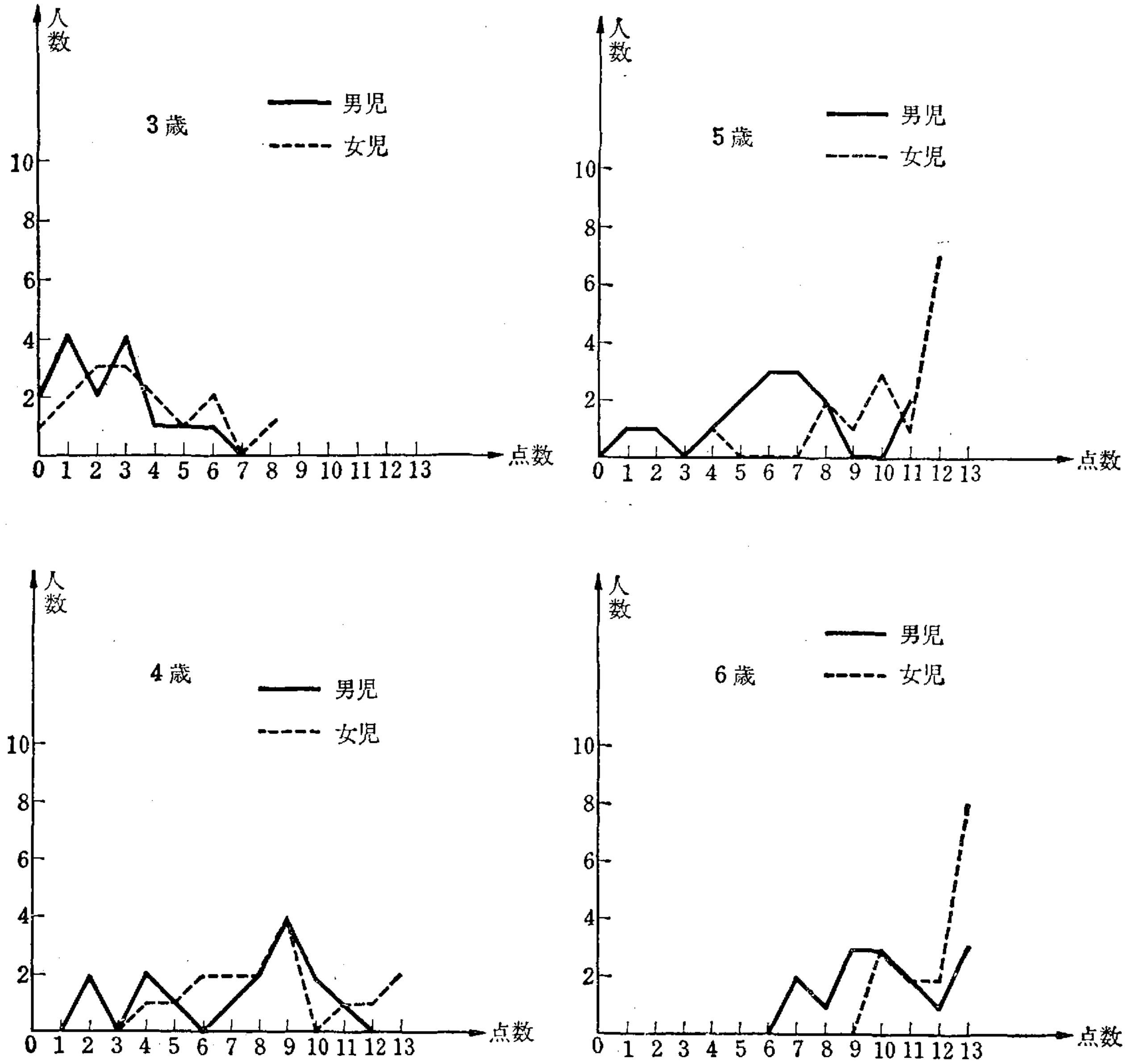


図 1.8　幼児の点数と人数

また表1.8において，たとえば男児の 13 種目の総合運動能力と横とび運動能力との相関が知りたいとする．このとき合計点数と横とびの点数で式(*1.14*)を用いて相関係数を計算することは好ましくない．なぜなら

幼児番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
総計点	13	13	13	12	11	11	10	10	10	9	9	9	8	7	7
横とびの点	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

となって，横とびの点数の方が幼児番号1番から 14 番まで，すべて1点となるからである．そこで横とびの方は 15 人の上手さを見て上手な順に順位をつける．また，総計点の方も全部の種目についての上手さで順位をつけるのが最も望ましいが，そうすることは大変であっても総計点の同じ幼児につ

いてその順位をつけることは，ずっと容易であろう．このようにして総計の順位と，横とびの順位をつけ，前節で述べた順位相関係数を用いればよい．

実際に順位をつけてもらったら次のようであった．

幼児番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
総計の順位	2	1	3	4	6	5	7	8	9	12	11	10	13	14	15
横とびの順位	3	2	4	1	7	6	8	5	12	10	9	11	14	13	15
差	−1	−1	−1	3	−1	−1	−1	3	−3	2	2	−1	−1	1	0
差の2乗	1	1	1	9	1	1	1	9	9	4	4	1	1	1	0

このデータから，式 (*1.17*) のスピアマンの順位相関係数を計算してみると

$$\rho=1-\frac{6\sum_{i=1}^{15}(r_i-s_i)^2}{n^3-n}=1-\frac{6\times 44}{15^3-15}=0.92$$

となって，総計の順位と横とびの順位には，かなりの一致性がみられ，相関が高いと判断できる．他の種目についても同様に考えることができることは明らかである．

この節では最も簡単な数値化を用いるデータの記述を示したにすぎないが，数値化の方法を工夫することとともに，それに応じた相関の尺度化を考えることは興味あることであろう．

1.7 時系列データと移動平均法

例 ある電子計算センターの4月，5月の日ごとの（日曜日は除く）計算機の使用時間を調べたら表1.9のようであった．

このように一定の時間的経過においてとらえられたデータの集合を**時系列** (time series) という．表1.9を折れ線グラフに描いてみると図1.9のようになる．このグラフを見ると，一目見ただけでは毎日の変動が大きくて2か月間を通しての傾向がつかみにくい．そこで毎日の変動のような短期変動，または偶然におこる変動を除去する方法として，**移動平均法** (moving average method) が考えられている．これは相連続するものの平均を系列にそって逐次計算しながら移動していく方法である．

短期変動とか偶然変動を除去する方法を**平滑化** (smoothing) という．こ

れは時系列のグラフを平滑（なめらか）にし，全体の変動の傾向を直観的につかみやすくするという利点がある．

表 1.9　計算機の使用時間

月日	4月											
	1日	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14
使用時間	2.7	8.0	8.7	9.2	3.7	8.0	7.7	7.8	8.0	7.9	4.3	9.5

月日	4月											
	15	17	18	19	20	21	22	24	25	26	27	28
使用時間	4.7	8.0	8.6	8.2	6.1	7.2	5.8	13.3	9.9	6.0	9.8	9.7

月日	5月											
	1日	2	4	6	8	9	10	11	12	13	15	16
使用時間	7.9	7.0	11.0	6.5	8.3	4.6	7.3	7.2	2.8	3.4	7.7	7.2

月日	5月												
	17	18	19	20	22	23	24	25	26	27	29	30	31
使用時間	8.0	4.8	6.7	3.2	7.1	6.9	7.5	4.7	9.0	4.7	6.8	6.9	7.9

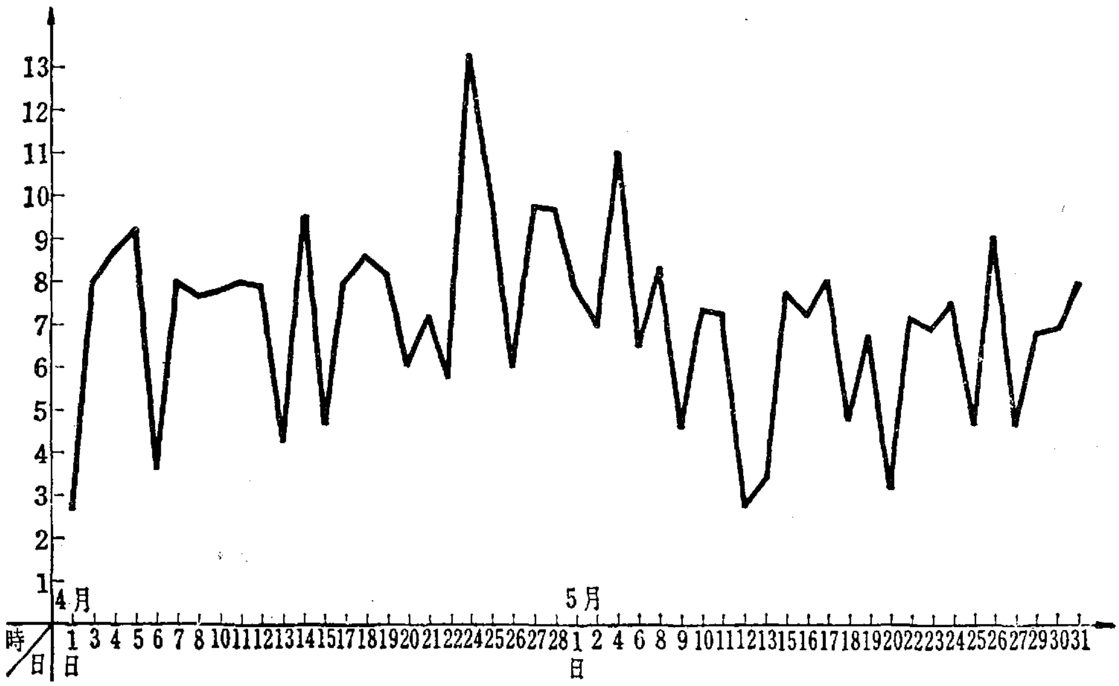


図 1.9　計算機の使用時間のグラフ

この例では，毎日の使用時間の系列は，2.7, 8.0, 8.7, …… であるが，時系列の項を一般的に，$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ で表わすとき，たとえば3項移

動平均の系列は，相連続する3項の平均を逐次とり，各平均値をその平均をとった3項の中央の値に対応させることにより得られる．すなわち

もとの系列	3項移動平均の系列
x_1	
x_2	$\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$
x_3	$\dfrac{x_2+x_3+x_4}{3}$
x_4	$\dfrac{x_3+x_4+x_5}{3}$
⋮	⋮

となる．

さて，表1.9について3項移動平均の系列は次のようになる．

6.5	6.7	6.4	8.6	4.6	7.2
8.6	7.2	8.8	8.2	6.1	6.4
7.2	6.2	9.7	8.6	7.6	7.1
7.0	7.4	9.7	6.5	6.7	6.1
6.5	7.1	8.6	6.7	6.5	6.8
7.8	8.3	8.5	6.4	4.9	6.1
7.8	7.6	9.1	5.8	5.7	7.2
7.9	7.2	8.2	4.5	5.7	

また6項移動平均の系列は次のようになる．

6.7	7.1	8.1	7.6	5.7	6.7
7.6	7.2	8.7	7.5	6.3	6.6
7.5	7.2	9.1	7.5	6.3	6.6
7.4	7.5	9.4	6.1	6.2	6.7
7.2	7.1	8.4	5.6	6.1	
7.3	7.3	8.6	5.5	6.0	
7.5	8.2	8.7	5.9	6.0	
7.0	8.4	8.4	6.1	6.4	

この6項移動平均の系列をグラフに描いてみると，図 1.10 のようになる．

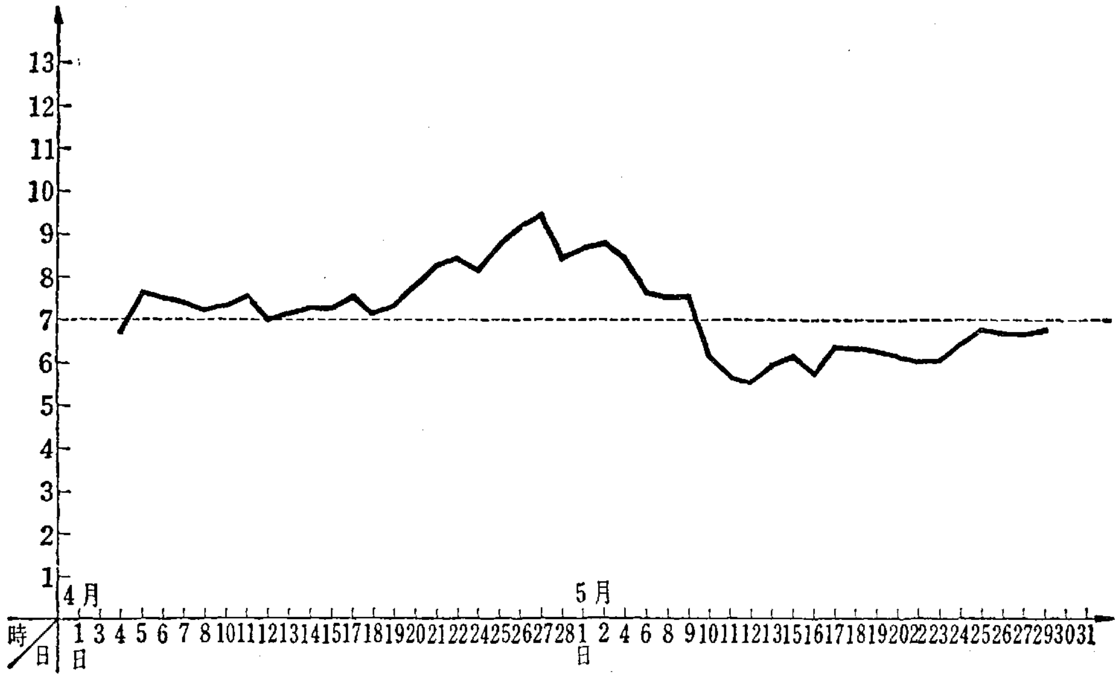


図 1.10 表 1.9 のデータについての6項移動平均

このグラフを見ると図1.9のグラフと比べて，2か月間の変動の傾向がずいぶんつかみやすい．7時間のところに点線を引いてみると，4月上旬の使用時間は平均7時間より少し多く，4月下旬になってだんだん増加する傾向にあり，4月下旬にピークが現われる．5月に入ると急に減少をはじめ中旬には7時間をかなり下まわる．しかし5月下旬になるとやや上向きの傾向を示すことがわかる．

このように移動平均法は，非常に短期の変動の大きい時系列データを平滑化することによって，直観的に全体の傾向がつかみやすくなるのでよく用いられる．移動平均の項の数は2項，3項のいずれでもよく，多くするほど結果はそれだけ平滑化されるが，目的に応じて適当な項の数を選択すればよい．

問 題 5

1. 表 1.9 に示すデータにおいて前ページに計算した3項移動平均の系列のグラフを描き，図 1.10 のグラフと比較してみよ．

2. 次のデータは 1878 年から 1957 年までのロサンゼルスの年間降雨量（単位：インチ）である．（ホーエル著 ELEMENTARY STATISTICS より引用）

21	19	21	11	15	8
17	22	15	20	14	11
19	8	14	15	18	7
6	13	24	6	18	14
11	12	5	8	27	25
14	14	18	9	12	4
40	5	10	19	20	14
11	9	17	19	31	12
17	11	23	9	7	14
16	12	17	8	23	13
21	13	23	13	17	
33	15	8	19	13	
13	12	17	11	16	
13	19	9	19	4	

このデータにおいて 3 項移動平均，5 項移動平均を求めグラフに示せ．

第2章　乱　　数

この章では，統計的推定・検定をおこなう際のサンプリングとかコンピュータによるシミュレーションなどの道具となる乱数について，その基本的概念・性質について解説する．

2.1　乱数とは何か

壺の中に $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, 9$ の 10 個の数字が書いてある等質・等大の球が入っているとしよう．この壺の中に手を入れて“がらがらまぜ”て1つの球を取り出し，その球に書かれている数字を記録する．次に，その球を壺にもどして，また，“がらがらまぜ”同じように1つの球を取り出し，その球に書かれてある数字を記録する．このような操作を繰り返して，つぎつぎに取り出した球の数字を記録してゆくとき，この記録された数の列は，次のような2つの性質をもっている．

性質 1　等確率性（等出現性）

上のような実験によって作られた数の列のうち，最初の n 回を観察して，この中で数字 i $(i=0, 1, 2, \cdots\cdots 9)$ の現われた個数を k_i とすると，相対頻度 $\dfrac{k_i}{n}(i=0, 1, 2, \cdots\cdots 9)$ は，n を大きくしてゆくと $\dfrac{1}{10}$ に近づく．これを極限の記号を用いて表わすと

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_i}{n}=\frac{1}{10}\quad(i=0, 1, 2, \cdots\cdots 9)$$

となる．

いいかえれば，これは，この壺の中の球を取り出す試行を多くすることによって得られる数の列の中に，0から9までの 10 個のどの数も，同じ割合で現われるということを意味する．このような性質を**等確率性（等出現性）**と呼ぶ．球を壺から取り出す実験において得られる数の列が，等確率性を持つ理由は，壺の中の 10 個の球の重さや，質，大きさなどが同じであるか

ら，“がらがらまぜ”て取り出すときに，どの球も同じチャンスでつかまるからである．もし，0と書いた球が他の球より大きかったりすると，その球がつかまりやすくなって，他の球より出現率が高くなるであろう．しかし，このようなことはないわけである．

たとえば，人間が紙の上に目をつむって0から9までの10個の数を思いつくままに書いたとき，誰でもこの数列の中には，0から9までの数が同じように現われると考えるだろうが，決してそうではない．実際ある人に書いてもらった結果を100個だけ書いてみると次のようになった．

8367230695	7396368516
4326605112	6502692356
7261034619	4658467681
3862467046	8645912673
6362591640	3685267469

この数列において，その頻度を調べるために，0から9までの現われる度数をヒストグラムに書いてみると，図2.1のようになる．

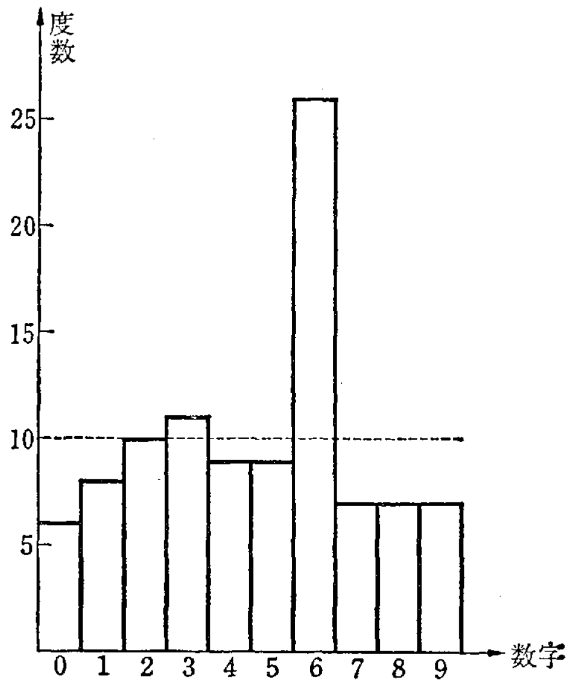


図 2.1　数字0から9までのヒストグラム

このヒストグラムから，この人は6という数字を，頻繁に書く性質があり，本人は無意識に書いているつもりでも，このように人によって書きやすい数字がある．つまり，このことは，だれが書いてもその書いた長い数の列の中に0から9までのどの数字も同じ頻度で現われるとは，必ずしもいえないことを意味する．この人に続けて長く書いてもらっても，数字6の現われる相対頻度は100個までと同様，$\frac{1}{10}$には近づかないことが確かめられた．もちろん，このような人ばかりではなくて，人によっては，0から9までどの数字もほぼ同じ頻度になる場合もある．とにかく，このように等質・等大の球を使うといった明確な条件を設定してある場合に比べて，この例は人間の性癖や，好みなどが関係するだけに，等確率性（等出現性）の保証はできないわけである．

性質 2　無規則性（無相関性，独立性）

0, 1, 2, ……, 9 の 10 個の数字が書いてある等質・等大の球が入っている壺から，“がらがらまぜ” て 1 つ取り出し，また元にもどして，“がらがらまぜ” て取り出す繰り返しの実験において，1 番目に取り出された球の数字が何であるかということと，2 番目に取り出された球の数字が何であるかということは，全く無関係なのである．3 番目，4 番目についても同様で一般に i 番目に取り出された球の数字は，j 番目（$j \neq i$）に取り出された球の数字とは無関係である．つまり，i 番目に出た数字が何であるかによって，j 番目に出る数字が決まってくるというようなことはないわけである．よって，このようにして作られた数の列には規則性がない．この性質を**無規則性**と呼んでいる．また，無規則に並んでいる各数の間には，相関がないという意味で**無相関性**とか**独立性**とか呼ばれることもある．

さて，一般に 0 から 9 までの 10 個の数の列において，性質 1（等確率性）と性質 2（無規則性）の 2 つの性質をもつ場合に，これを 0 から 9 までの 1 桁の数からなる**乱数列**，または単に**乱数**（random number）と呼ぶ．2 桁，3 桁の数からなる乱数も同様に定義される．

10 個の等質・等大の 0 から 9 までの数字を書いた球が入っている壺の中から “がらがらまぜ” て取り出す実験を繰り返し，その数字を記録した場合この記録された数字の列は，等確率性と無規則性の 2 つの性質を持っており，乱数とみなされる．

ところが

$$0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, \cdots\cdots$$

なる数の列を考えると，等確率性（等出現性）の性質は満足しているが，10 個目ごとに周期が現われ，明らかに並んでいる数の間に規則性が見られる．よって，このような数列は性質 1 は満足しているが，性質 2 を満足していないので乱数とはみなされない．

普通，サイコロといえば正六面体の各面に 1 から 6 までの数字が書いてあるものをいうわけであるが，このサイコロをころがす実験を繰り返して得られる，出る目の数の列は，等確率性（等出現性）と無規則性の両性質を持っ

ており，1から6までの数からなる乱数とみなされる．これは壺の中に1から6までの数字を書いた等質・等大の球を6個入れ“がらがらまぜ”て1つ取り出し，また元にもどして，“がらがらまぜ”て次の1つを取り出す実験を繰り返して得られる数の列と同様に考えられる．

【実験】 等質・等大の 10 個の球に0から9までの数字を書き，壺の中に入れて“がらがらまぜ”て取り出す実験をおこない，その結果を次に書いてみよう．

試行回数 (n) は 200 回とした

3 6 9 5 4 2 9 2 8 1	9 3 8 0 0 8 1 7 1 0
9 9 2 1 9 2 3 0 1 4	6 3 2 9 5 4 9 8 7 7
6 6 3 4 3 6 8 7 2 9	4 1 3 6 8 2 3 3 7 5
3 4 1 7 0 4 7 0 8 5	2 8 0 4 4 5 2 3 9 4
6 4 4 1 6 7 9 0 7 1	8 2 3 5 8 8 0 3 0 7
5 2 0 1 1 4 7 3 5 2	7 2 8 0 4 2 5 9 6 2
0 9 4 2 7 1 4 9 6 9	2 9 8 2 3 0 8 0 2 3
1 8 7 6 5 2 8 3 2 6	9 2 9 0 8 0 4 4 6 2
5 1 1 3 3 9 6 2 2 3	9 8 9 0 3 4 1 3 2 5
8 4 8 7 7 1 6 4 8 5	5 7 4 1 7 2 5 1 4 6

この 200 個の1桁の乱数において，はじめから順番に2桁の数をつくってみると表2.1のようになる．

もともと，

3, 6, 9, 5, 4, 2, 9, 2, 8, 1, ……

が0から9までの 10 個の数からなる乱数であるから，

36, 95, 42, 92, 81, ……

という2桁の数の系列は0から 99 までの100個の数からなる乱数となる．

表 2.1　00から99までの数字からなる乱数例

36,	95,	42,	92,	81,	93,	80,	08,	17,	10
99,	21,	92,	30,	14,	63,	29,	54,	98,	77
66,	34,	36,	87,	29,	41,	36,	82,	33,	75
34,	17,	04,	70,	85,	28,	04,	45,	23,	94
64,	41,	67,	90,	71,	82,	35,	88,	03,	07
52,	01,	14,	73,	52,	72,	80,	42,	59,	62
09,	42,	71,	49,	69,	29,	82,	30,	80,	23
18,	76,	52,	83,	26,	92,	90,	80,	44,	62
51,	13,	39,	62,	23,	98,	90,	34,	13,	25
84,	87,	71,	64,	85,	57,	41,	72,	51,	46

なぜなら，1桁の各数とも $\dfrac{1}{10}$ の確率（割合）で現われるので，2つを組み合わせると $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{100}$ の確率でどの2桁の数も現われることに

なり，性質1の等確率性（等出現性）が保証される．また並んでいる1桁の各数の間には規則性がないから2つ組み合わせても，その数の間には規則性がなく，性質2の無規則性の条件も満足している．

したがって2つずつ組にして得られる数列は0から99までの100個の数からなる乱数である．このようにして得られた乱数は，0から99までの数の記入してある100個の等質・等大の球を壺の中に入れて“がらがらまぜ”て1つ取り出し，その球に書いてある数を記録し，その球を壺の中に戻してまた“がらがらまぜ”て次の球を取り出し，その球に書いてある数を記録する操作を繰り返して得られたものと考えることもできる．

さらに実験に示す1桁の乱数において，はじめから3つずつを組にして考えた．

369, 542, 928, 193, 800, 817, 109, ……

という3桁の数の系列は2桁の場合と同様の理由で0から999までの1000個の数からなる乱数と考えられる．このようにいくらでも桁数を多くしてゆくことができるわけである．

さて，この3桁の乱数において，各数の前に小数点をつけた．

0.369, 0.542, 0.928, 0.193, 0.800, 0.817, 0.109, ……

なる数の系列を考えてみると，これは 0.000, 0.001, 0.002, ……, 0.998, 0.999 の 1000 個の数字からなる乱数と考えられ，これは区間 [0, 1] の中の離散的な点を値としてとる．しかし，少し荒っぽく考えると区間 [0, 1] 上の連続的な点からなる乱数と考えてもよかろう．この場合 1000 個以外の点は，1000 個の点の中で1番近い点で近似して考えればよかろう．

さらに桁数を多くして，たとえば前の実験ではじめから 10 個ずつの数を組にしてその各数の前に小数点をつけると，順次，

0.3695429281, 0.9380081710, 0.9921923014, 0.6329549877, ……

となり，区間 [0, 1] 上の連続的な点からなる乱数にきわめて近似する．こうなるとほぼ区間 [0, 1] 上の連続的な点からなる乱数とみなしてよい．

普通，我々はこの系列のことを区間 [0, 1] 上の**一様乱数**と呼んでいる．区間 [0, 1] 上の一様乱数の具体的な実験値としてはルーレットのゲーム（図2.2）を考えればよい．

ルーレットを回して，針のとまった位置を読み取る実験を繰り返して得られる数値を

$$u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_i, \cdots\cdots$$

とすると，これが，区間 [0, 1] 上の一様乱数となる．

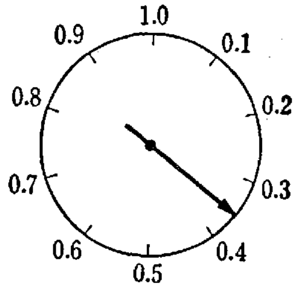


図 2.2　ルーレット

2.2　乱数の作り方

乱数を作る方法としては，コンピュータの発達していなかった時代には，前述したように壺の中に等質・等大の球を入れて“がらがらまぜ”て取り出す方法が主として用いられていた．たとえば，00, 01, ……, 99 の2桁の数からなる乱数の作り方として，00, 01, ……, 99 の100個の数を書いた等質・等大の球を壺に入れて“がらがらまぜ”て取り出し，その数を記録し，また元にもどして“がらがらまぜ”て取り出し，その数字を記録する方法を繰り返していた．何人もの人が，朝から晩までこのような実験をして，乱数の表をつくっていた話も聞いている．

このようにしてつくられた乱数表は，おもに，標本調査法におけるランダムサンプルの選択に使われていた．等確率性と無規則の両性質をもつ数の列のつくり方は，これが1番良い方法とされていた．サイコロを用いてつくった人もいるが，原理は同じである．

注　正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体からなるサイコロで，乱数をつくることができるので，これらのサイコロを乱数サイとも呼んでいる．

たとえば，0から9までの1桁の乱数をつくりたいときは，0から9までの数字を2つずつ書いてある正二十面体の乱数サイをころがす実験を繰り返して記録すればよい．また，0から 99 までの100個の2桁の数からなる乱数をつくりたいときは正二十面体の乱数サイを2個用いて，それぞれ0から9までの1桁の乱数をつくり，組み合わせればよい．

ところが，コンピュータが発達してくると，このように人力によらないでコンピュータにより，等出現性と無規則性をもつ数の列，いわゆる乱数を高速でつくる方法がないものかと考えられるようになり，次に述べるような方法が見つけられたのである．この方法を用いると大型のコンピュータは人間が何日も費やして作った乱数を，わずか数秒で作り出してしまう．

[方法 1]　平方採中法

この方法は，たとえば，6桁の任意の数 x_0 をとり，これを2乗して得られた数の中央の6桁を取り出して x_1 とし，また x_1 を2乗して得られた数の中央の6桁を取り出して x_2 とする操作を繰り返すものである.

このときできる

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots$$

なる系列が6桁の数からなる乱数となる．すなわち，000000, 000001, 000002, ……, 999999 までの 1000000 個の6桁の数からなる乱数である.

たとえば，$x_0 = 753206$ と取り（普通，乱数表からもってくる)，これを2乗すると $x_0^2 = 567319278436$ となる．この数の中央の6桁 319278 を取り出し $x_1 = 319278$ とする．順次 $x_2 = 938441$, $x_3 = 671510$, …… となって，これは6桁の数からなる乱数となる．また，たとえば，00, 01, 02, ……, 99 の100個の数からなる2桁の乱数を得ようと思えば

表 2.2　平方採中法

	7 5 3 2 0 6	
5 6 7	3 1 9 2 7 8	4 3 6
1 0 1	9 3 8 4 4 1	2 8 4
8 8 0	6 7 1 5 1 0	4 8 1
4 5 0	9 2 5 6 8 0	1 0 0
8 5 6	8 8 3 4 6 2	4 0 0
	………………	
	………………	

$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ の前の2桁 75, 31, 93, 67, 92, 88, …… を取ればよいし，000, 001, 002, ……, 999 の数からなる3桁の乱数を作るためには，$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ 各数の前の3桁を順次とって

$$753,\ 319,\ 938,\ 671,\ 925,\ 883,\ \cdots\cdots$$

とすればよい．大型のコンピュータなら1回2乗する時間はわずかであり，何万個の乱数も非常に短時間で生成できるわけである．“がらがらまぜ”て壺の中から取り出して，乱数をつくった人々にとっては，この方法は驚異的なことであったに違いない.

この平方採中法を一般的にいうと，$2k$ 桁の任意の数を2乗して得られる $4k$ 桁の数字の中央に位する $2k$ 桁の数を取り出し，これをまた2乗して，という操作を繰り返して得られる数列が，$2k$ 桁の乱数とみなされる.

[方法 2]　乗算型合同法

レマー (Lehmer) によって 1949 年に提案された方法である.

この方法は，たとえば，

$$x_{n+1} \equiv 15x_n \pmod{10^6+1}^{(*)} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = 1 \quad (\text{初期値})$$

なる式を考える．この式の意味は x_n を 15 倍して，それを 10^6+1 で割った余りを x_{n+1} とするということで，これによって得られる整数 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ が 6 桁の乱数となる．

上式において計算してみると

$$\begin{aligned}
&x_0 = 1\\
&x_1 = 15\\
&x_2 \equiv 15 \times 15 \pmod{10^6+1},\ x_2 = 225\\
&x_3 \equiv 15 \times 225 \pmod{10^6+1},\ x_3 = 3375\\
&x_4 \equiv 15 \times 3375 \pmod{10^6+1},\ x_4 = 50625\\
&x_5 \equiv 15 \times 50625 \pmod{10^6+1},\ x_5 = 759375\\
&x_6 \equiv 15 \times 759375 \pmod{10^6+1},\ x_6 = 390614\\
&x_7 \equiv 15 \times 390614 \pmod{10^6+1},\ x_7 = 859205\\
&x_8 \equiv 15 \times 859205 \pmod{10^6+1},\ x_8 = 888063\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

となり，

1, 15, 225, 3375, 50625, 759375, 390614, 859205, 888063, ……

が 6 桁の数字からなる乱数であるが，はじめの 1, 15, 225, 3375, 50625, あたりは使わないで，その次の 759375 から使い

759375, 390614, 859205, 888063, ……

を 6 桁の乱数とすればよい．

この場合も 2 桁の乱数が必要なときは

7 5	9 3 7 5
3 9	0 6 1 4
8 5	9 2 0 5
8 8	8 0 6 3
⋮	⋮

(＊) mod はラテン語の modulus を略記したものである．$a \equiv b \pmod{m}$ は一般的には整数 a と整数 b を m で割った余りが等しいという意味であるが，ここでは漸化式として考えている．

のように前の2桁をとって

75, 39, 85, 88, ……

とすればよい．1桁，3桁，4桁，5桁の場合も同様に考えればよい．

この乗算型合同法を，もう少し一般的に述べると，次のようになる．

$$x_{n+1} \equiv ax_n \pmod{m} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$x_0 = b \quad (\text{初期値})$$

なる式を考える．この式の意味は前と同様に x_0 として初期値 b を与え，あとは ax_0 を m で割った余りを x_1 とし，さらに ax_1 を m で割った余りを x_2 とする．

このような操作できる数列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \cdots\cdots$$

が乱数となる．桁数は m の値によって決まる．

前の平方採中法もそうであるが，この方法においても，数列の中に周期が現われてきて，乱数の1つの性質である無規則性を失うことがある．

たとえば

$$x_{n+1} \equiv 3^5 x_n \pmod{10^3 + 1}$$

$$x_0 = 1$$

によってつくられる乱数は

1, 243, 991, 573, 100, 276, 1, 243, 991, 573, 100, 276,

1, 243, 991, 573, 100, ……

となって，6番目ごとに同じ数字が現われ，無規則性を失ってしまう．

したがって，周期に関する性質を調べ，周期をできるだけ長くするように a, m を定めてこの周期内で実際に使用すればよい．

平方採中法においては，この周期性についての解析が非常にむずかしく，現在でもまだはっきりしていないが，乗算型合同法においては，周期に関しての性質が数学的に明らかになっている．現在では平方採中法よりも，この乗算型合同法がよく使用されている原因はそこにある．この周期に関しての性質を述べておこう．

性質 1． $p \geqq 3$ のとき

$$x_{n+1} \equiv ax_n \pmod{2^p}$$
$$x_0 = b$$

によってつくられる乱数 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ の周期は

$$3, 5 \equiv a \pmod{8}$$
$$b = \text{奇数}$$

に対して，2^{p-2} となる．ただし，$3, 5 \equiv a \pmod{8}$ の意味は a が 8 で割って 3，または 5 が，余る数であることを意味する．

たとえば

$$a = 5^{13},\ \ p = 39$$

とすると，5^{13} を 8 で割ると余りが 5 となり $5 \equiv a \pmod{8}$ を満足していて周期は 2^{37} となることがわかる．

性質 2． $p \geqq 2$ のとき

$$x_{n+1} \equiv ax_n \pmod{5^p}$$
$$x_0 = b$$

によってつくられる乱数 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots$ の周期は

$$2,\ 3,\ 8,\ 12,\ 13,\ 17,\ 22,\ 23 \equiv a \pmod{25}$$

とすべての $0 \not\equiv b \pmod{5}$ に対して，$4 \times 5^{p-1}$ となる．

性質 3． $p > 3$ のとき

$$x_{n+1} \equiv ax_n \pmod{10^p}$$
$$x_0 = b$$

によってつくられる乱数 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots$ の周期は

$$3,\ 13,\ 27,\ 37,\ 53,\ 67,\ 77,\ 83,\ 117,\ 123,\ 133,$$
$$147,\ 163,\ 173,\ 187,\ 197 \equiv a \pmod{200}$$
$$1,\ 3,\ 7,\ 9 \equiv b \pmod{10}$$

に対して $5 \times 10^{p-2}$ となる．

たとえば，$a = 3^{19}$，$p = 20$ と考えれば条件

$$67 \equiv a \pmod{200}$$

を満足しているので，周期は 5×10^{18} となることがわかる．

例　$x_{n+1} \equiv 3^7 x_n \pmod{10^4}$

$$x_0 = 3$$

によって乱数を作り，$187 \equiv 3^7 \pmod{200}$ から周期は $5 \times 10^{4-2} = 500$ となることを確かめる．

解 この式によって作られる数列は次頁のようになる．

したがって500番目に周期が現われることがわかる．しかし実際用いる乱数は周期が 500 とか 1000 とかの短いものではなく，たとえば 5×18^{18} のような長いものを用いる．

[方法 3] 混合型合同法

この方法は，乗算型合同法を発展させたもので

$$x_{n+1} \equiv ax_n + c \pmod{m}$$
$$x_0 = b$$

によって乱数を生成するものである．

この式の意味は，a, b, c, m を前もって決めておいて，まず，$ax_0 + c = ab + c$ を m で割った余りを x_1 とし，さらに $ax_1 + c$ を m で割った余りを x_2 とする．順次，この方法で乱数

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots$$

をつくることができる．

この混合型合同法でつくった乱数は，明らかに最大限 m の周期をもつわけであるが，乗算型合同法のときと同様に，できるだけ周期が長くなるように a, b, c を定めることが必要である．この定め方は，次の性質を利用すればよい．

性質 1′.

$$x_{n+1} \equiv ax_n + c \pmod{2^p}$$
$$x_0 = b$$

によって，生成される乱数 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots$ の周期は

$$1 \equiv a \pmod{4}$$
$$1 \equiv c \pmod{2}$$

のとき 2^p である．また周期は初期値 b に無関係である．

たとえば，$a = 2^7 + 1$，$c = 1$，$m = 2^{35}$ と考えれば条件 $1 \equiv a \pmod{4}$ $1 \equiv c \pmod{2}$ を満足しており，周期は 2^{35} である．

6561	5523	3689	5227	8561	1523	1689
8907	8801	7843	1449	2907	0801	3848
9609	7787	2641	8963	7609	1787	4641
4883	0169	5867	2081	0883	8169	9867
9121	9603	1129	1147	1121	5603	9129
7627	1761	9123	8489	1627	3761	5123
0249	1307	2001	5443	8249	5307	4001
4563	8409	6187	3841	0563	6409	0187
9281	0483	0969	0267	1281	6483	8969
7547	6321	9203	3929	1547	8321	5203
5289	4027	6961	2723	3289	8027	8961
7043	7049	3707	5201	3043	5049	7707
3041	6163	7209	4587	5041	2163	5209
0667	8481	6083	1769	4667	0481	2083
8729	7947	3521	8803	6729	1947	5521
0323	0089	0427	2161	6323	8089	4427
6401	4643	3849	6107	8401	0643	1849
8987	4241	7763	6009	2987	6241	3763
4569	5067	7681	1683	2569	9067	9681
2403	1529	8347	0721	8403	9529	2347
5361	3923	4889	6827	7361	9923	2889
4507	9601	2243	0649	8507	1601	8243
6809	7387	5441	9363	4809	1387	7441
1283	5369	9467	6881	7283	3369	3467
5921	2003	4329	8747	7921	8003	2329
9227	0561	7523	9689	3227	2561	3523
9449	6907	2801	9843	7449	0907	4801
4963	5609	5787	6641	0963	3609	9787
4081	6883	6169	3867	6081	2883	4169
5147	3121	1603	7129	9147	5121	7603
6489	5627	5761	1123	4489	9627	7761
1443	6249	9307	6001	7443	4249	3307
5841	6563	4409	4187	7841	2563	2409
4267	3281	2483	6969	8267	5281	8483
1929	5547	0321	1203	9929	9547	2321
8723	1289	2027	0961	4723	9289	6027
7201	9043	3049	1707	9201	5043	1049
8587	7041	8163	3209	2587	9041	4163
9769	8667	2481	8083	7769	2667	4481
4803	4729	5947	7521	0803	2729	9947
4161	2323	6089	8427	6161	8323	4089
0107	0401	6643	9849	4107	2401	2643
4009	6987	8241	9763	2009	0987	0241
7683	0569	3067	1681	3683	8569	7067
2721	4403	7529	6347	4721	0403	5529
0827	9361	5923	889	4827	1361	1923
8649	2507	3601	4243	6649	6507	5601
5363	2809	5387	9441	1363	0809	9387
8881	3283	1369	7467	0881	9283	9369
2747	9921	4003	329	6747	1921	
7689	7227	4561	9523	5689	1227	6561←500 番目（周期が現われる）
5843	5449	4907	6801	1843	3449	8907
8641	6963	1609	3787	0641	2963	9609
7867	8081	8883	2169	1867	0081	4883
5129	3147	7121	3603	3129	7147	9121
7123	2489	3627	9761	3123	0489	7627
8001	3443	2249	7307	0001	9443	0249
8187	9841	8563	409	2187	1841	4563
4969	2267	7281	4483	2969	6267	9281
7203	7929	3547	4321	3203	5929	7547
2961	0723	7289	0027	4961	6723	5289
5707	1201	1043	9049	9707	3201	7043
1209	6587	1041	0163	9209	0587	3041
4083	5769	6667	6481	0083	3769	0667
9521	6803	0729	3947	1521	2803	8729
2427	8161	4323	2089	6427	0161	0323
7849	8107	4401	8643	5849	2107	6401
5763	0009	4987	2241	1763	8009	8987
3681	9683	6569	1067	5681	5683	4569
0347	6721	6403	3529	4347	8721	2403
8889	8827	3361	7923	6889	2827	5361
0243	4649	0507	7601	6243	2649	4507
1441	7363	8809	3387	3441	3363	6809
1467	2881	5283	7369	5467	4881	1283
8329	0747	3921	6003	6329	4747	5921

性質 2′.

$$x_{n+1} \equiv ax_n + c \pmod{10^p}$$
$$x_0 = b$$

によって作られる乱数 x_0, x_1, x_2, x_3, …… の周期は

$$1 \equiv a \pmod{20}$$
$$1,\ 3,\ 7,\ 9 \equiv c \pmod{10}$$

のとき，10^p であり，これは初期値 b の値に無関係である．

以上，コンピュータによる乱数のつくり方について，3つの方法を述べてきたわけであるが，実際つくる際には，数学的にその性質がかなりはっきりつかめている乗算型合同法か，混合型合同法を用いることをすすめたい．

さて壺の中から等質・等大の球を“がらがらまぜ”て取り出して，あるいは，サイコロを投げて乱数をつくっていた頃と比べ，こうしたコンピュータの高速演算を利用することにより，短時間に多くの乱数ができるようになると理論的に解明されないような社会現象・自然現象の解明，さらに標本調査法における精度の判定などに乱数が用いられるようになり，現在その貢献度もますます大きくなりつつある．

円周率 π は乱数か？

円周率 π の計算は，コンピュータがなかった頃，ルドルフ（Ludolph van Ceulen, 1539—1610）が円に内接する正方形から出発して順次辺数を2倍してゆく方法で，小数 35 位まで求めたことは有名な話である．彼はこの計算にほとんど一生を費やしている．当時ドイツでは円周率 π のことをルドルフの数とも呼んでいた．

その後 W. Shanks は次のような式を用いて小数第 707 位まで計算した．

$$\pi = 16\tan^{-1}\frac{1}{5} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239} \quad (\text{補注 [2]})$$

$$\text{ただし}\quad \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots$$

したがって

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left\{ \frac{16}{5^{2k+1}} - \frac{4}{239^{2k+1}} \right\} \quad \text{となる．}$$

この結果（707 位）は 1873 年からコンピュータの出現するまでの約 70 年間，π

の最も精密な値とされていたが，コンピュータが使用されるようになって，この結果の小数第 528 位以降の誤っていることが発見された．

現今の最も詳しい結果は著者の知る限りでは D. Shanks と J. W. Wrench の 2 人が

$$\pi = 24\tan^{-1}\frac{1}{8} + 8\tan^{-1}\frac{1}{57} + 4\tan^{-1}\frac{1}{239} \quad (\text{補注 [3]})$$

$$\text{ただし}\quad \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots$$

なる式を用いて，1961 年 7 月にコンピュータ IBM 7090 型により実に 8 時間 43 分の時間を費して求めた 10 万桁である．

その結果は，表にされているが，試みに小数第 1～200 位までと 99801～100000 位とを書いてみると次のようになる．

3.

1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510
5820974944	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679
8214808651	3282306647	0938446095	5058223172	5359408128
4811174502	8410270193	8521105559	6446229489	5493038196

. . . .

. . . .

8290463091	0359037842	9775726517	2087724474	0952267166
3060054697	1638794317	1196873484	6887381866	5675127929
8575016363	4113146275	3049901913	5646823804	3299706957
7015078933	7728658035	7127909137	6742080565	5493624646

さて果たして，この円周率 π の小数部分に現われる数の並び方には，等確率性（等出現性）があるのかないのか，また規則性があるのかないのか　いいかえれば，これは乱数であるのかないのかということは，非常に興味あることである．この問題は，一般的には与えられた数列が乱数であるかどうかの判定法と結びつくわけであるが，これについては第 5 章で詳しく述べる．円周率 π の小数部分における判定についても，そこで試みてみる

第3章　ランダムサンプルにもとづく推定

——統計的推定法の基礎——

3.1　サンプルの必要性

われわれの知識とか，態度や行動などは，大部分サンプルに基礎を置いている．日常生活においても，学問的研究においても，このことは真実である．対象とするものの全体を調べることが，大変な労力を要したり，また不可能な場合，対象全体から一部分を取り出し——これを**サンプル**（**標本**）と呼ぶ——取り出されたサンプルについて調べて対象全体を把握する方法を用いなければならない．サンプルを取り出す対象の中味が一様であれば，こんな事は問題にならない．というのは，この場合どんな種類のサンプルを取ってもほとんど同じ結果が得られるからである．たとえば，2, 3 滴の血液をとって健康の状態を調べる臨床検査においては，循環している血液はいつもよく混ざり合っており，1滴のサンプルは他のものと同じであるという仮定にもとづいている．しかし，我々が対象とするものの中には，しばしば中味が一様でないものがある．

- ある地域に1時間に降った雨量
- ある地域の空気の汚染度
- ある市の1日あたりの家庭のゴミの排出量
- ある県の県政に対する意見
- ある県の農作物の収獲高
- ある地域の人口

などにおいては，場所，地帯，個人などによって決っして中味は一様ではない．このようなときには，サンプルのとり方はきわめて重大で，信頼できるサンプルが確実に得られる手法を研究することが重要になってくる．最も基本的なサンプルのとり方は，対象全体をできるだけ代表するようなサンプル

をとることである．ある地域に1時間に降った雨量を知りたいときなど雨量は場所によってまちまちであるから，かりに非常にたくさん雨の降った場所だけをサンプルとして調べ，全体に引きのばすと，その地域に実際に降った雨量よりもずいぶん多く算出する結果になる．そこで全体をできるだけ代表するような場所をサンプルとして調べなければならない．

この要求に答えたのが次節で述べるランダムサンプルである．

3.2　母集団とランダムサンプル

母集団とサンプリング単位

そこからサンプルが選ばれる集合全体を**母集団**（population）という．母集団は，普通，有限個の**サンプリング単位**（**抽出単位**）からなり，このサンプリング単位が調査の目的に応じて明確である必要がある．

例 1.　日本人全体について何か調べたいとき，日本人全体が母集団であり，日本人1人1人がサンプリング単位である．

例 2.　ある工場でつくられた製品の不良率を調べたいとき，工場でつくられた製品全体が母集団であり，製品の1つ1つがサンプリング単位である．

例1，例2のように抽出単位がはっきりしていることもあるが，ときにはどのサンプリング単位を用いるのがよいか選択しなければならないことがある．ある町の人々からサンプルを抽出するとき，母集団はある町に住む人全体であるが，調査の目的に応じてサンプリング単位は“個人”とか“世帯”とか，“同じ地域に住む人”のように変わってくる．また農作物の調査においては，サンプリング単位は，1つの畑，1つの農場などのように自由に変えることができる．ある地域に1時間に降った雨量の調査などにおいては，母集団はある地域であるが，サンプリング単位をどのように考えるかはあいまいである．1つの方法としては，区画の中ではどの場所も雨量の等しいいくつかの区画に母集団を分割し，その1つ1つの区画をサンプリング単位と考えればよい．瀬戸内海などの汚染調査の場合なども，同様な考え方でサンプリング単位を構成すればよい．

ランダムサンプル

母集団のサンプリング単位を N 個とする．この母集団から大きさ n $(<N)$ のサンプルを取り出す組み合わせの数は，

$$\text{公式：}\ {}_N C_n = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!\ (N-n)!}$$

で与えられる．

実際のサンプルは，この組み合わせのうち，どれか1つになるわけであるが，どの組み合わせも“大きさ n のサンプル”として選ばれるチャンスがすべて等しくなるように選び出す方法を**ランダムサンプリング**（**無作為抽出法**）といい，実際に選ばれたサンプルを大きさ n の**ランダムサンプル**（**無作為標本**）という．

例　簡単にするために，母集団が A，B，C，D，E，F の6世帯をサンプリング単位としてもっているとしよう．このとき，大きさ3のサンプルは次の 20 通りである．

ABC	ACD	ADF	BCF	CDE
ABD	ACE	AEF	BDE	CDF
ABE	ACF	BCD	BDF	CEF
ABF	ADE	BCE	BEF	DEF

この 20 通りのサンプルを，等しい確率で選び出す方法をランダムサンプリングといい，実際に選ばれた1つのサンプルを大きさ3のランダムサンプルという．

ランダムサンプルの選び方

母集団のサンプリング単位に1から N までの番号をつける．次に1から N までの番号のついている N 個の等質・等大の球を壷の中に入れ，“がらがらまぜ”て n 個とり出し，とり出された球についている番号にあたる母集団のサンプリング単位を n 個のサンプルと指定すれば，これが大きさ n のランダムサンプルとなる．

前の例では

A に 1, B に 2, C に 3,

D に 4, E に 5, F に 6

なる番号を対応させ, 1, 2, 3, 4, 5, 6 が記入してある6個の等質・等大の球を壷の中に入れ“がらがらまぜ”て3個とり出す. とり出された3個の球に書いてある番号が 2, 5, 6 なら B, E, F がランダムサンプルとなる. すなわち6個から3個とり出す 20 通りの組み合わせのそれぞれが, $\frac{1}{20}$ の確率で現われることになる.

実際には, このような等質・等大の球と壷を用意するのは大変であるから, 前章で述べた方法でつくられる乱数（巻末付表 1）を用いる.

例　付表1の乱数表を用いて $N=60$ の母集団から大きさ8のランダムサンプルを選ぶ.

解　まず2桁の乱数を考える. 乱数表をはじめから2桁ずつ縦に読んで 34, 64, 06, 40, 79, 04, 45, 71, 95, 34, 44, 22, 13, 69, 01, 90, 35, 87, …… のうち 60 以下の数（00 は除く）をみつけ出し, それをサンプルと指定すればよい. この場合

34, 06, 40, 04, 45, 34, 44, 22

となるが, 34 は2度出てきているので1つ 34 を棄てて次の 13 を採用し,

34, 06, 40, 04, 45, 44, 22, 13

の番号に対応するサンプリング単位が, 大きさ8のランダムサンプルとなる.

なお, 2個以上のサンプルを取り出すとき, 1度取り出したものをもとにもどしてから2番目を取り出し, またもとにもどしてから3番目を取り出すといった方法を続けてゆくものを, **復元サンプリング**（**復元抽出法**）, 1度取り出したものはもとにもどさないで, 次を取り出すものを**非復元サンプリング**（**非復元抽出法**）といっているが, 普通の場合は非復元サンプリングがおこなわれる.

〈質問〉　たとえば, 1530 人の中から 50 人のランダムサンプルをとり出すとき, 巻末付表1の乱数表のはじめから4桁ずつ縦に読んで

3474	$\boxed{0455}$	4454
6480	4525	2291
$\boxed{0693}$	7155	$\boxed{1304}$
4034	9547	6935
7905	3461	⋮

から，1530 以下の番号をひろってゆくと，最初のサンプルは 693 番目の人，次のサンプルは 455 番目の人，その次は 1304 番目の人となりますが，他の多くの乱数は捨てることになり，ずいぶん無駄なことをしているようなのですが，こんな場合何かよい方法がありますか．

答　質問のとおり，このような場合にはずいぶんたくさんの乱数を使うにもかかわらず，サンプルは少ししかとれません．これをふせぐためには次のようにしたらよいでしょう．まず 4 桁の乱数を

①　0〜2000

②　2001〜4000

③　4001〜6000

④　6001〜8000

⑤　8001〜9999

と 5 つの部分に分けます．① に属するものは，そのままの数字を用い，0 と1531〜2000 までは捨てます．② に属するものは，その数から 2000 を引いた数字を用い，1531〜2000 までは捨てます．③ に属するものは，その数から 4000 を引いた数字を用い，1531〜2000 までは捨て，順次 ④，⑤ についてもその数から 6000，8000 を引いた数字を用い，1531〜2000 までは捨てます．そうしますとご質問の中の乱数 7905，9547 は捨てられますが，残りはすべてサンプルをとり出す乱数として使えます．すなわち，

1474	455	454	
480	525	291	
693	1155	1304	
34	*	935	ただし，*印は捨てたもの
*	1461	⋮	

となって，サンプルは 1474 番目の人，480 番目の人，693 番目の人，……

となります．このようにして50人選べば，これが1530人の中からの50人のランダムサンプルになることは乱数の性質から容易におわかりでしょう．

問　題　6

次に示す全国都道府県の中から，巻末付表1の乱数表を用いて大きさ25のランダムサンプルをとり出せ．

北海道	東　京	滋　賀	香　川
青　森	神奈川	京　都	愛　媛
岩　手	新　潟	大　阪	高　知
宮　城	富　山	兵　庫	福　岡
秋　田	石　川	奈　良	佐　賀
山　形	福　井	和歌山	長　崎
福　島	山　梨	鳥　取	熊　本
茨　城	長　野	島　根	大　分
栃　木	岐　阜	岡　山	宮　崎
群　馬	静　岡	広　島	鹿児島
埼　玉	愛　知	山　口	沖　縄
千　葉	三　重	徳　島	

3.3　ランダムサンプルによる推定方法

例　1250世帯からなるある農村地域において，米の平均生産高（世帯あたり）と総生産高を調べる必要が生じた．係官甲はこの目的のために，全世帯を調べるのは大変なので，住民票を用いて60世帯をランダムに選び，その世帯の生産高を調べたら次のようであった．（単位：千kg）

1.78	1.76	2.15	2.62	0.82	2.82	2.30	1.12	2.03	1.63
2.23	1.92	3.20	2.35	1.82	2.92	1.92	2.56	0.97	3.80
2.85	2.41	2.52	2.06	3.50	1.95	3.08	1.32	1.46	1.56
2.60	2.62	3.10	2.56	2.42	2.26	1.26	4.01	2.70	2.61
2.70	3.30	3.10	3.67	2.45	3.32	1.89	2.42	2.75	2.92
1.71	2.63	2.20	2.71	1.80	2.11	1.52	1.82	2.65	2.82

係官甲はこの 60 世帯のランダムサンプルの値から，1250 世帯の平均生産高（世帯あたり），総生産高を次のように算出した。

平均生産高の算出値（サンプル平均値）

$$= \frac{1}{60} \times (\overbrace{1.78 + 2.23 + 2.85 + \cdots\cdots + 2.82}^{60\text{ 世帯の和}}) = 2.37$$

総生産高の算出値（サンプル総計値 $\times \dfrac{1250}{60}$）

$$= \frac{1250}{60} \times (\overbrace{1.78 + 2.23 + 2.85 + \cdots\cdots + 2.82}^{60\text{ 世帯の和}}) = 2960$$

そして甲はこの農村地域の米の平均生産高（世帯あたり），総生産高は，2.37（千 kg），2960（千 kg）だと報告した．

さて，この係官甲の算出した値は 60 世帯のランダムサンプルにもとづくものであって，1250 世帯（母集団）を全部調べた値とは必ずしも一致しないことは容易にわかろう．係官甲のとり出したランダムサンプルは，サンプリング単位 1250 世帯をもつ母集団の中から 60 世帯を選ぶすべての選び方

$${}_{1250}C_{60} \text{ 通り}$$

のうちの 1 つであるにすぎない，とすると係官甲の算出した値と 1250 世帯（母集団）の真の平均生産高，総生産高との誤差がどの程度であるかが問題となる．その誤差を明確にする理論的背景について以下に考えてみよう．

推定したい値

母集団のサンプリング単位に 1 から N までの番号をつけ，対応する特性値を

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots\cdots,\ \theta_N$$

とする．われわれの推定したい値の主なものは，母集団平均値，母集団総計値，それに母集団分散で，一般に次のように書ける．

(3.1)　母集団平均値（μ と書く）

$$= \frac{1}{N}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots\cdots + \theta_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_i$$

$$(3.2)\quad 母集団総計値\ (\tau\ と書く) = \theta_1 + \theta_2 + \cdots\cdots + \theta_N = \sum_{i=1}^{N} \theta_i$$

$$(3.3)\quad 母集団分散\ (\sigma^2\ と書く) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \mu)^2$$

これらのほかにも推定したい値はいろいろある．例えば瀬戸内海の汚染度を調査するとき，瀬戸内海を N 個の区画に分けたとき，それらの区画の中で最も汚染度の高い場所の数値はいくらかという最大値の推定などもその1つであるが，ここでは式 (*3.1*)，(*3.2*)，(*3.3*) の3つのものに限定して考える．

〈**質問**〉 よく母集団の中で，ある属性を持つ比率を知りたいことがあるのですが，(たとえば製品の不良率，テレビの視聴率など)，これも推定したい値の主なものではないのですか．

答　もちろん，比率の推定は大変重要なものの1つです．あとの節でも述べますが，母集団比率の推定は，実は母集団平均値の推定に帰着されるのです．たとえば，ある工場でつくられた製品の不良率を推定したいとき，母集団は工場でつくられた製品全体であり，それらに1から N までの番号をつけます．θ_i は，i 番目の製品が良品ならば値0，不良品ならば値1を持つと考えれば，式 (*3.1*) は母集団の不良率を示していることはおわかりでしょう．このように，θ_i が値0か1の特別な値をとる場合を考えることによって，平均値の推定そのものになってしまいます．

推定量とその分散

N 個のサンプリング単位をもつ母集団から，大きさ n のランダムサンプルを非復元サンプリングでとり出し，それを

(変　量)　$X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_n$

(実現値)　$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$

と書くことにする．母集団の N 個のサンプリング単位 $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_N$ の中から n 個とるすべての組み合わせは ${}_NC_n = N!/n!(N-n)!$ 通りあり，大きさ n のサンプルはこの組み合わせのすべての場合を確率 $1/{}_NC_n$ でとる変量と考えることができるので，$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ と太文字で書き，実際，1

回の調査ではその $_NC_n$ 通りのどれか1つが現われるので，実現値として小文字 x_1, x_2, ……, x_n を用いることにした．特に X_1, X_2, ……, X_n のことを**サンプル変量**（**標本変量**）と呼んでいる．前の例では，係官甲のとり出した 60 世帯のランダムサンプル，1.78, 2.23, 2.85, ……, 2.82 は $n=60$ の場合で x_1, x_2, x_3, ……, x_{60} に対応する．

（イ） 母集団平均値（μ）と母集団総計値（τ）の推定量

μ, τ の推定量を次のように $\bar{X}_n$, T_n とする．

$$(3.4)\quad \bar{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad (\text{変量})$$

$$(3.4')\quad \bar{x}_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad (\text{実現値})$$

$$(3.5)\quad T_n=\frac{N}{n}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=N\bar{X}_n \quad (\text{変量})$$

$$(3.5')\quad t_n=\frac{N}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=N\bar{x}_n \quad (\text{実現値})$$

$\bar{X}_n$ のことを特に**サンプル平均変量**と呼んでいる．式 (3.4′) の $\bar{x}_n$, 式 (3.5′) の t_n が前記の係官甲の算出した平均生産高，総生産高に対応する．ここでは理解しやすいように次のような簡単な例で考える．

例 A, B, C, D, E, F の6世帯をサンプリング単位としてもっている母集団を考えよう．この6つから

① 大きさ2のランダムサンプル

② 大きさ3のランダムサンプル

をとり出し，母集団の6世帯の米の平均生産高（世帯あたり）を推定する．

解 母集団の6つのサンプリング単位の生産高は，あらかじめわからないわけであるが，かりに次のようだとする．簡単にするために単位(千 kg) は省略した．

A……0	D……2
B……1	E……3
C……1	F……5

ただし，世帯 A の0というのは，米を生産してないことを意味する．

$$母集団平均値\ (\mu) = 2$$
$$母集団分散\ (\sigma^2) = \frac{8}{3}$$

① 大きさ2のランダムサンプルの場合

サンプルは2つである．もしC世帯とF世帯が選ばれればこの2世帯の生産高を調べ，1(千kg)と5(千kg)を得るので，加えて2で割ったものを6世帯(母集団)の平均生産高の推定値とする．この場合3(千kg)となって母集団平均値$(\mu)=2$(千kg)に対し，1(千kg)の誤差を生ずる．しかし，2つのサンプルの実現値(情報)だけからするとこれ以外に方法はない．前の係官甲の報告した値は，この例では3(千kg)に対応するものである．そこで，このような推定方法を行なったとき，どの程度の誤差が生ずるかを考えてみよう．推定量としては式(*3.4*)を用いる．すなわち大きさ2のサンプル平均変量は次のようになる．

$$(3.6)\quad \bar{X}_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

$N=6$ から $n=2$ のとり方は ${}_6C_2=15$ 通りあり，$\bar{X}_2$ の実現値は表3.1のようになる．

表 3.1　大きさ2のサンプル

サンプル	X_1 の実現値	X_2 の実現値	$\bar{X}_2$ の実現値	サンプル	X_1 の実現値	X_2 の実現値	$\bar{X}_2$ の実現値
A, B	0 1	1 0	$\frac{1}{2}$	B, F	1 5	5 1	3
A, C	0 1	1 0	$\frac{1}{2}$	C, D	1 2	2 1	$\frac{3}{2}$
A, D	0 2	2 0	1	C, E	1 3	3 1	2
A, E	0 3	3 0	$\frac{3}{2}$	C, F	1 5	5 1	3
A, F	0 5	5 0	$\frac{5}{2}$	D, E	2 3	3 2	$\frac{5}{2}$
B, C	1 1	1 1	1	D, F	2 5	5 2	$\frac{7}{2}$
B, D	1 2	2 1	$\frac{3}{2}$	E, F	3 5	5 3	4
B, E	1 3	3 1	2				

表3.1において，X_1，X_2 の実現値については母集団からとり出す順序まで考えて，サンプリング単位が A，B の場合は，A，B か B，A となり，それに従って X_1，X_2 の実現値は 0，1 か 1，0 となる．そのとき $\bar{X}_2$ の実現値は $\frac{1}{2}$ となり，母集団平均値2との誤差は $\frac{3}{2}$ となる．

さて，表 3.1 の $\bar{X}_2$ の実現値とその確率を表とグラフにしてみると表3.2，図 3.1 のようになる．

表 3.2 $\bar{X}_2$ の実現値とその確率

$\bar{X}_2$ の実現値	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
確　　率	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

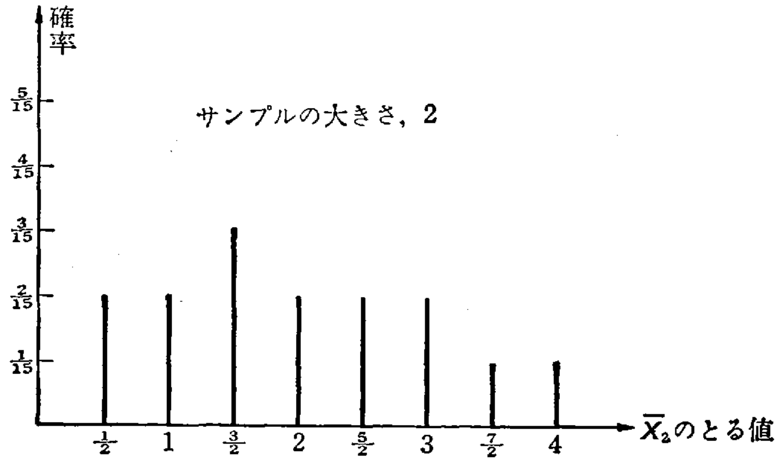


図 3.1 $\bar{X}_2$ のとる値とその確率

サンプル平均変量 $\bar{X}_2$ のように，とる値とその確率が示されているとき，$\bar{X}_2$ を**確率変数**といい，確率変数について定められた確率を**確率分布**という．もちろん，X_1，X_2 も確率変数である．確率変数，確率分布については，補注 [4] を参照していただきたい．

$\bar{X}_2$ の15通りの実現値の平均値（期待値），分散をそれぞれ $\mathrm{E}(\bar{X}_2)$，$\mathrm{V}(\bar{X}_2)$ と表わすことにすれば，表3.2より次のようになる．

$$\mathrm{E}(\bar{X}_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{15}+1\times\frac{2}{15}+\frac{3}{2}\times\frac{3}{15}+2\times\frac{2}{15}$$
$$+\frac{5}{2}\times\frac{2}{15}+3\times\frac{2}{15}+\frac{7}{2}\times\frac{1}{15}+4\times\frac{1}{15}=2$$

$$V(\bar{X}_2)=\left(\frac{1}{2}-2\right)^2\times\frac{2}{15}+(1-2)^2\times\frac{2}{15}$$
$$+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2\times\frac{3}{15}+(2-2)^2\times\frac{2}{15}+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2\times\frac{2}{15}$$
$$+(3-2)^2\times\frac{2}{15}+\left(\frac{7}{2}-2\right)^2\times\frac{1}{15}+(4-2)^2\times\frac{1}{15}$$
$$=\frac{16}{15}$$

②大きさ3のランダムサンプルの場合

$$(3.7)\quad \bar{X}_3=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$$

において，表3.2と図3.1に対応する表をつくってみると表3.3，図3.2のようになる．

表 3.3　$\bar{X}_3$ の実現値とその確率（$\bar{X}_3$ の確率分布）

$\bar{X}_3$ の実現値	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$
確　　率	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$

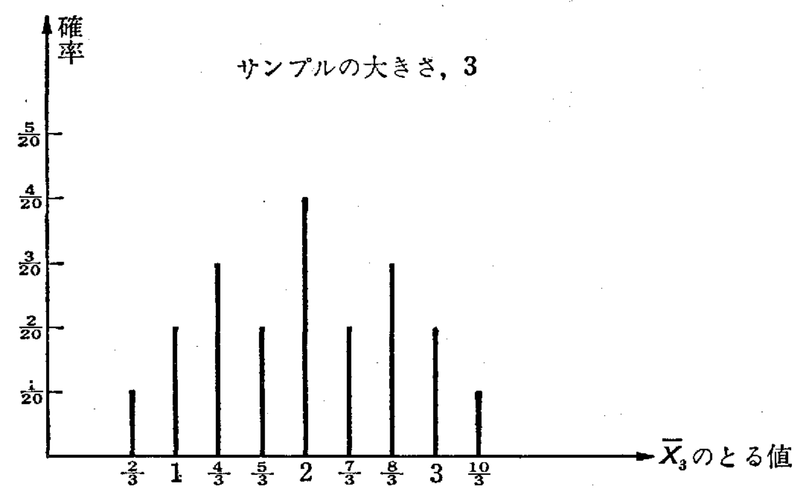


図 3.2　$\bar{X}_3$ の確率分布

表3.3より次の結果を得る．

$$E(\bar{X}_3)=2$$

$$V(\bar{X}_3)=\frac{8}{15}$$

図 3.1，図 3.2 より，サンプルの大きさ3のときの方が，サンプルの大

きさ2のときよりサンプル平均変量の実現値が，真の平均値2に近いところに多く現われることがわかるであろう．もちろん，サンプル平均変量の分散もサンプルの大きさ3のときの方が小さい．サンプル平均変量の分散が小さいほど，サンプル平均変量の実現値が，真の平均値μの近くに現われる確率が大きくなり，推定の精度は向上する．

一般に式 (*3.4*) において,次のようになることが証明される．(補注 [5])

$$(3.8) \quad \mathrm{E}(\bar{X}_n) = \mu$$

$$(3.9) \quad \mathrm{V}(\bar{X}_n) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

ただし，μ，σ^2 は母集団の平均値と分散である．6つの世帯をもつ母集団の例において，これらの式が成立することは，容易に確かめられる．

注 N が十分大きくnが N に比べて小さければ，式 (*3.9*) の $\dfrac{N-n}{N-1}$ は1とみなすことができる．この場合，サンプル平均変量の分散は，母集団の分散 (σ^2) のみに関係し，母集団の大きさ N には無関係になってくる．たとえば，$N=$ 1 000 000 の母集団から大きさ 200 のサンプルでも $N=100\,000$ の母集団から大きさ 200 のサンプルでも推定の精度は同じと考えられる．

また，母集団総計値τの推定量 T_n に対して次の結果は式 (*3.8*)，(*3.9*) から容易に導びくことができる．

$$(3.10) \quad \mathrm{E}(T_n) = \tau$$

$$(3.11) \quad \mathrm{V}(T_n) = \frac{N^2(N-n)}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

母集団平均値，総計値のように母集団のある特性値を推定しようとするとき，${}_NC_n$ 通りの大きさnのサンプルにもとづいて推定量を定め，その推定量の ${}_NC_n$ 通りの実現値の平均値 (期待値) をとったものが推定しようとしている母集団の特性値にちょうど等しくなる場合，その推定量のことを母集団特性値の**不偏推定量** (unbiased estimator) という．式 (*3.8*)，(*3.10*) の場合，平均値 (期待値) が μ，τ となるので $\bar{X}_n$ は μ の，T_n は τ の不偏推定量である．すなわち，$\bar{X}_n$，T_n の実現値は，ある場合には μ，τ のすぐ近くに，またある場合には μ，τ から少し離れたところに現われるが，${}_NC_n$ 通りのすべての組み合わせについて平均すると μ，τ に一致することを物語っ

ている．したがって前記の係官甲の報告した平均生産高 2.37 (千 kg)，総生産高 2960 (千 kg) はいずれも，母集団 (1250 世帯) の平均生産高，総生産高の不偏推定量の実現値であることがわかる．

(ロ)　母集団分散 (σ^2) の推定量

非復元サンプリングによる大きさ n のランダムサンプル $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ にもとづく σ^2 の不偏推定量は，次式で与えられる．

$$(3.12)\quad U_n{}^2 = \frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

$$\text{ただし，}\ \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$\mathrm{E}(U_n^2) = \sigma^2$ を導くことができる．(補注 [6])

(イ) の場合の例で $n=2$ の場合に上の事実を確かめてみよう．

$$U_2^2 = \frac{5}{6}\{(X_1 - \bar{X}_2)^2 + (X_2 - \bar{X}_2)^2\}$$

であるから次表を得る．

表 3.4　U_2^2 の実現値と確率 [U_2^2 の確率分布]

U_2^2の実現値	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{4}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{125}{12}$
確　　率	$\frac{1}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

したがって，次の式を得る．

$$\mathrm{E}(U_2^2) = 0\times\frac{1}{15} + \frac{5}{12}\times\frac{5}{15} + \frac{5}{3}\times\frac{4}{15} + \frac{15}{4}\times\frac{2}{15} + \frac{20}{3}\times\frac{2}{15} + \frac{125}{12}\times\frac{1}{15} = \frac{8}{3}$$

前記の係官甲の 60 世帯のランダムサンプルの値から 1250 世帯の母集団の分散 (未知) を推定してみよう．式 (3.12) の実現値は

$$(3.13)\quad U_{60}{}^2 = \frac{1250-1}{1250}\times\frac{1}{60-1}\{(1.78-2.37)^2 + (2.23-2.37)^2 + \cdots\cdots + (2.82-2.37)^2\} = 0.477$$

となり，この値は次に述べる推定の信頼区間を求めるときに必要となる．

信頼区間のつくり方

前記の係官甲の報告した 60 世帯のサンプルにもとづく米の平均生産高，総生産高は，1250 世帯の母集団の平均生産高，総生産高の不偏推定量の実現値であることがわかった．すなわち

$${}_{1250}C_{60} \text{ 通り}$$

のすべてにわたって，その平均値，総計値をさらに平均すれば母集団平均値，総計値に一致する．係官甲の報告した値は，実は，このような性質をもつ，${}_{1250}C_{60}$ 通りのうちのただ1通りの値にすぎない．しかし，われわれが知りたいのは，1250 世帯（母集団）の真の平均生産高，総生産高である．実際，60 世帯のランダムサンプルにもとづいて算出したサンプル平均値 2.37（千kg），総計値 2960（千 kg）が 1250 世帯（母集団）の平均生産高，総生産高をどの程度正確に表わしているかを明確にしなければならない．

統計マンである係官乙は，この目的のために係官甲の求めたサンプル平均値とサンプル総計値 $\times \dfrac{1250}{60}$，それに式（*3.13*）の値を用いて，次図に示すような区間を求めた（69 ページ参照）．

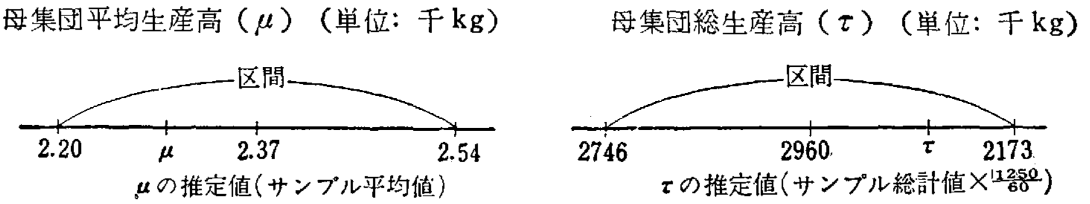


図 3.3 係官乙の求めた区間

そして，乙は，1250 世帯（母集団）の平均生産高，総生産高は確率 0.95 で，この区間の中にはいると係官甲の報告に説明を加えた．さらに乙は，“確率 0.95” という意味は，${}_{1250}C_{60}$ 通りのうち 95% にあたる ${}_{1250}C_{60} \times 0.95$ 通りのサンプルにおいては，同様にしてつくった区間の中に，μ，τ を含むが，係官甲のサンプルにもとづいて求めた図 3.3 に示す区間が μ，τ を必ず含むとは限らないと説明した．ただ，これくらい確率が高いと図 3.3 の区間の中に μ，τ を含むと考えてよいとも説明した．

さて，この統計マン乙はどんな理論的根拠にもとづいてこのような区間を

つくり，このような説明をしたのだろうか．この解答を得るためにまず次のような例を引用することからはじめる．

例　次の表に示すデータは，アメリカ合衆国 64 都市の 1930 年の人口 (単位: 千人) を示している．

表 3.5　1930 年における 64 市の人口　(単位: 千人)(*)

147	781	292	209	114	123	170	805
670	302	150	253	270	113	143	122
451	116	487	163	900	134	201	115
111	634	127	169	154	119	464	260
140	107	366	442	291	164	139	232
1238	317	291	328	822	260	195	284
130	272	288	459	100	308	143	214
364	255	578	253	573	163	183	400

総計値 (τ)=19 568 (千人)　　　分散 (σ^2)=51 629

いま，この 64 の都市をサンプリング単位にもつ母集団を考える．表 3.5 の値は調査員には全く知らされてないものとする．調査員は，この 64 の都市から 24 の都市をランダムに選び，サンプルにあたった都市の人口を調べ，母集団の総計値 (総人口) を式 ($3.5'$) の t_n を用いて推定した．母集団平均値の場合も同様に考えられるので，ここでは省略する．母集団からの大きさ 24 のランダムサンプルをとり出す，すべてのとり出し方は

$$ {}_{64}C_{24} = \frac{64!}{24!\ 40!} $$

となり，非常に大きい数となる．そこで，巻末付表1の乱数表を用いて表 3.5 の 64 市から大きさ 24 のランダムサンプルをとり出す実験を 50 回くり返し，

$$ T_{24} = \frac{64}{24}(X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_{24}) $$

の実現値の頻度分布を書いてみた(図 3.4)．たて軸の目盛の単位はヒストグラムの全部の面積がちょうど1になるようにした．

図 3.4 で近似している曲線は

平均値が　$\tau = 19568$ で，

分散が　$N^2 \times \dfrac{N-n}{N-1} \cdot \dfrac{\sigma^2}{n} = 64^2 \times \dfrac{64-24}{64-1} \times \dfrac{51629}{24} = 5594507$

(*) コクラン著　鈴木達三，高橋宏一，脇本和昌共訳 “サンプリングの理論と方法 1” (東京図書，1972 年) より引用

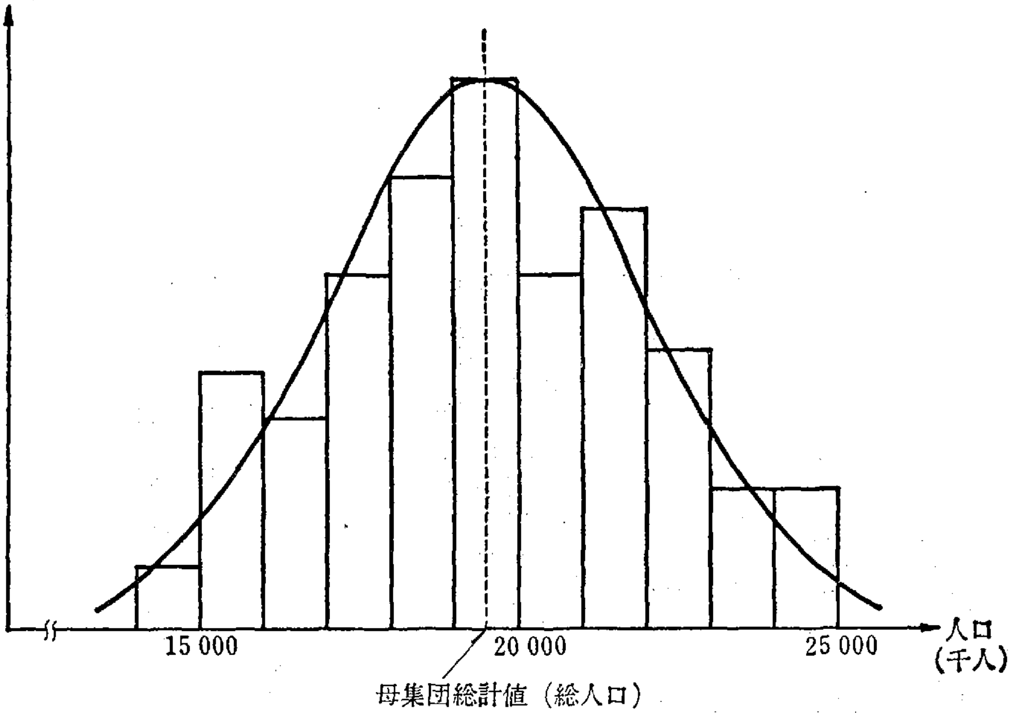


図 3.4 50 回の実験における T_{24} の実現値の頻度分布

をもつ正規分布 (normal distribution) である.

注 平均値 μ, 分散 σ^2 の正規分布曲線 (図 3.5) の方程式は, 次式で与えられる (補注〔4〕を参照).

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

ただし, π は円周率, e は自然対数の底である.

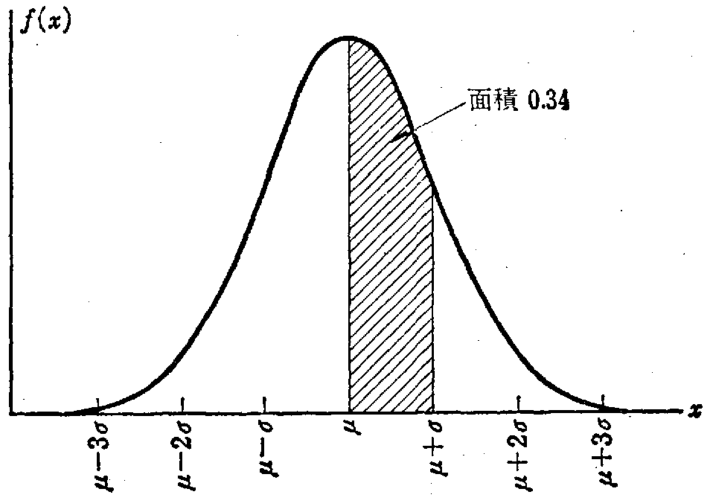


図 3.5 平均値 μ, 分散 σ^2 の正規分布曲線

正規分布曲線の下の全面積は 1 であり, 次のような幾何学的意味をもつことが数学的に証明できる.

(a) $\mu-\sigma$ と $\mu+\sigma$ の間の正規分布曲線の下の面積は, 全面積の 68% である. (1%未満を四捨五入)

(b) $\mu-2\sigma$ と $\mu+2\sigma$ の間の正規分布曲線の下の面積は, 全面積の 95% である. (1% 未満を四捨五入)

(c) $\mu-3\sigma$ と $\mu+3\sigma$ の間の正規分布曲線の下の面積は, 全面積の 99.7% である. (0.1% 未満を四捨五入)

正規分布曲線の形は, この曲線の分散によって完全に決まるということから, す

べての正規分布曲線はある簡単な変数変換によって，1つの標準的曲線に変えることができる．

$z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ とおくことによって前の式 $f(x)$ は

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$(-\infty<z<\infty)$$

となり，これは平均値0，分散1の**規準型正規分布** (standard normal distribution) と呼ばれるものである（図3.6）．たとえば，図 3.5 と図 3.6 の斜線の部分が対応する．図 3.6 の規準型正規分布曲線における確率は巻末付表3に示してある．

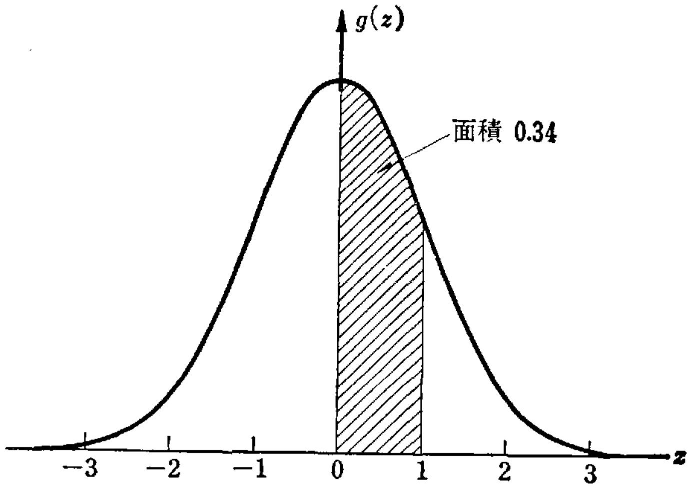


図 3.6　規準正規分布曲線（平均値0，分散1）

いま母集団の平均値，総計値をそれぞれ μ, τ とし分散を σ^2 とする．また母集団のサンプリング単位の大きさを N としよう．N がある程度大きく，サンプルの大きさ n が大きければ（目安として $n \geq 20$），母集団の頻度分布がどんな形をしていても，${}_NC_n$ 通りのすべてのサンプルにおける

$$\bar{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)$$

$$T_n=\frac{N}{n}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)$$

の実現値の頻度分布はそれぞれ

平均値が μ で，分散が $\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n}$

平均値が τ で，分散が $N^2\cdot\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n}$

である正規分布で近似できる．また

$$(3.14)\quad Z_n=\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n}}}$$

$$(3.15)\quad Z_n = \frac{T_n - \tau}{N\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n}}} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{この式は式 (3.14) の右辺の分子，分母}\\ \text{に } N \text{ を乗じて書きかえたものである}\end{array}\right)$$

の実現値の頻度分布はいずれも平均値が 0，分散 1 の基準型正規分布で近似できる．

この事実は理論的には**中心極限定理**として知られているが，厳密な証明はこの書物の程度を越えるので省略した．図 3.4 においては $N=64$ と小さいが，この事実が確かめられる．

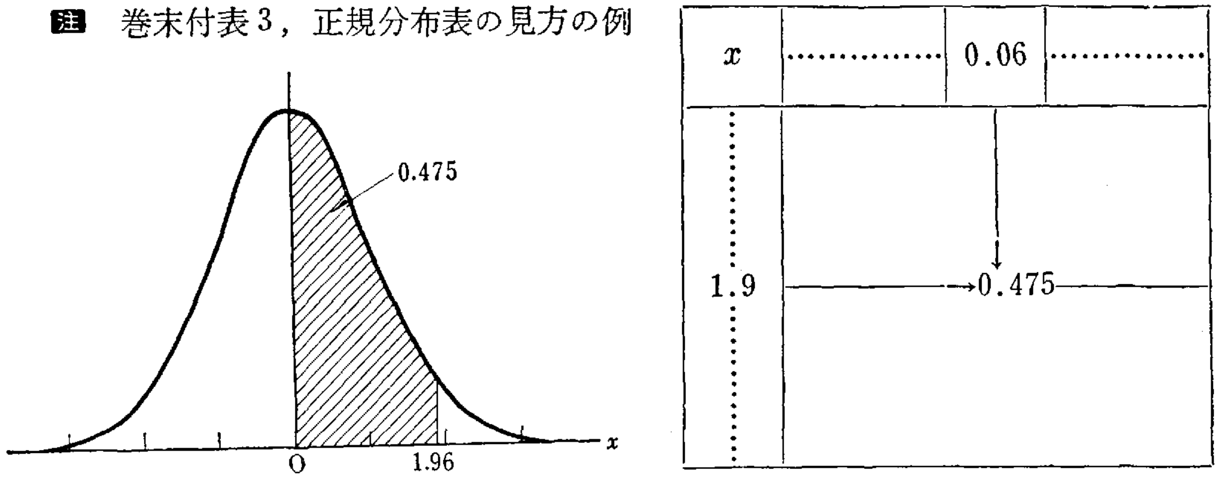
さて，巻末付表 3 から Z_n の実現値が

$$(-1.96,\ 1.96)$$

$$(-2.58,\ 2.58)$$

の区間にはいる確率はそれぞれ 0.95，0.99 である．

注　巻末付表 3，正規分布表の見方の例



上記のように表から読みとることによって $(-1.96,\ 1.96)$ の区間にはいる確率は $0.475\times 2=0.95$ となる．

一般に Z_n の実現値が区間

$$(-k_\alpha,\ k_\alpha)$$

にはいる確率を $(1-\alpha)$ とするとき，k_α のことを規準型正規分布の α **点**と呼んでいる．

$$\alpha = 0.05 \text{ のとき } k_\alpha = 1.96$$

$$\alpha = 0.01 \text{ のとき } k_\alpha = 2.58$$

は容易にわかろう．Z_n の実現値が区間 $(-k_\alpha,\ k_\alpha)$ の中にはいる確率は $1-\alpha$ であることから区間

$$(3.16)\quad \left(\bar{X}_n - k_\alpha \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}},\ \bar{X}_n + k_\alpha \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

$$(3.17)\quad \left(T_n - k_\alpha \times N \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}},\ T_n + k_\alpha \times N \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

に μ, τ が含まれる確率が $1-\alpha$ であることがわかる．この区間のことを**信頼度** $100\times(1-\alpha)\%$ の**信頼区間**と呼んでいる．α は普通 0.05, 0.01 が用いられ，したがって $k_\alpha = 1.96$, 2.58 が用いられる．簡単にするために $\alpha = 0.05 (k_\alpha = 1.96)$ を用いることにする．すなわち信頼度 95% の信頼区間を μ, τ についてサンプルの実現値（x_1, x_2, ……, x_n）を用いて表わすと

$$(3.18)\quad \left(\bar{x}_n - 1.96 \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}},\ \bar{x}_n + 1.96 \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

$$(3.19)\quad \left(t_n - 1.96 \times N \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}},\ t_n + 1.96 \times N \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

となる．ここで σ^2 は母集団分散で未知であるから式 (3.12) で示す不偏推定量の実現値（完全には σ^2 と一致しないが）

$$(3.20)\quad u_n^2 = \frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$$

を σ^2 に代入すると式 (3.18), (3.19) の信頼度 95% の信頼区間が求まる．次ページにその手順を示す．

さて，ここで図 3.3 (63 ページ) に示す係官乙の求めた 1250 世帯の米の世帯あたりの平均生産高，総生産高の信頼区間は実はこの手順に従って次ページのように算出したものである．乙の説明についてもこれで理解できよう．

信頼区間を求める手順

① ランダム・サンプル：

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$$

↓

② 計　算：

$$\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$t_n=\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$u_n{}^2=\frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2$$

↓

③ 信頼度：95％ の信頼区間

母集団平均値（μ）

$$\left(\bar{x}_n-1.96\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{u_n{}^2}{n}},\ \bar{x}_n+1.96\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{u_n{}^2}{n}}\right)$$

母集団総計値（τ）

$$\left(t_n-1.96\times N\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{u_n{}^2}{n}},\ t_n+1.96\times N\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{u_n{}^2}{n}}\right)$$

図 3.7　信頼区間を求める手順

乙の信頼区間の算出法

平均生産高 (μ)：$2.37\pm1.96\times\sqrt{\frac{1250-60}{1250-1}\times\frac{0.477}{60}}=2.37\pm0.17$

総生産高　(τ)：$2960\pm1250\times1.96\times\sqrt{\frac{1250-60}{1250-1}\times\frac{0.477}{60}}$

$$=2960\pm213$$

母集団の頻度分布が正規分布曲線で近似できるとき

この節では母集団の頻度分布がどんな形をしていてもよいという前提で話を進めてきた．また母集団平均値，総計値に対する信頼度 $100\times(1-\alpha)$％の信頼区間を作るとき母集団分散 σ^2 が未知のためにサンプルから得られる不偏推定量 $u_n{}^2$ を σ^2 の代用とした．そのためにサンプル数が小さいときは信頼区間にかなりの誤差を生ずる欠点がある．ところが過去のデータから特に母集団の頻度分布が正規分布曲線で近似できるときは次のように t 分布表

を用いることによって代入誤差なしに信頼区間を求めることができる．

母集団から大きさnのランダムサンプルをくり返し多数回とり出すと，

$$(3.21)\quad t=\frac{\bar{x}_n-\mu}{\sqrt{\frac{u_n{}^2}{n}}},\ \mu \text{ は母集団の平均値}$$

の値の頻度分布が**自由度 $n-1$ の t 分布**（補注［11］）と呼ばれる確率分布曲線で近似できることが知られている．t 分布曲線の確率は巻末付表5に与えられており，したがって式（3.21）により

$$-t_\alpha \leqq \frac{\bar{x}_n-\mu}{\sqrt{\frac{u_n{}^2}{n}}} \leqq t_\alpha$$

となる確率を $1-\alpha$ となるように t_α を t 分布表（付表5）より定めるとμ の信頼度 $100\times(1-\alpha)\%$ の信頼区間は次のようになる．

$$\boxed{(3.22)\quad \left(\bar{x}_n-t_\alpha\times\sqrt{\frac{u_n{}^2}{n}},\ \bar{x}_n+t_\alpha\times\sqrt{\frac{u_n{}^2}{n}}\right)}$$

いま信頼度 95% とすると t_α の値は

$n=5$ のとき $t_\alpha=2.78$
$n=10$ のとき $t_\alpha=2.26$
$n=15$ のとき $t_\alpha=2.14$
$n=20$ のとき $t_\alpha=2.09$
$n=30$ のとき $t_\alpha=2.05$
$n=120$ のとき $t_\alpha=1.98$
$n\to\infty$ のとき $t_\alpha\to1.96$

となってサンプル数が少し大きく（$n\geqq20$），N も n に比べて大きければ，前ページに示す手順で信頼区間を求めたものと式（3.22）で求めた信頼区間はほぼ同じとなることがわかり，この場合は前ページの手順で求めてもさしつかえないことがわかるだろう．しかし N がかなり大きくサンプル数が小さい（$n\leqq20$）ときは，前ページの手順では σ^2 のかわりに $u_n{}^2$ を用いることによって信頼区間の誤差が大きくなり，代入誤差のない式（3.22）が効力を発揮するわけである．

例　あるメーカーの製品である自動車の一定距離走ったときのタイヤの摩滅度の頻度分布は過去のデータから正規分布で近似できることが知られ

ている．いま製品の中から 12 個のタイヤをランダムに選び，その摩滅度(単位1/1000 インチ) を 1000 マイル走行後に調べたら，次のような値を得た．

11.9,	15.4,	14.5,	15.6,	18.2,	13.1
17.9,	16.2,	14.8,	13.4,	15.3,	12.7

この結果，このメーカーのタイヤの 1000 マイル走行後の摩滅度の信頼度 95％ の信頼区間を求めよ．

解 この場合，母集団は製品全体でその大きさは非常に大きいと考えてよい．自由度は $12-1=11$ なので巻末付表5の t 分布表より $t_\alpha = 2.20$ となる．したがって式 (3.22) より

$$\bar{x}_n \pm t_\alpha \times \sqrt{\frac{u_n{}^2}{12}} = 14.92 \pm 2.20 \times \sqrt{\frac{3.82}{12}}$$
$$= 14.92 \pm 1.24$$

となり，信頼度 95％ の摩滅度（単位 1/1000 インチ）の信頼区間は

$$(13.68,\quad 16.16)$$

となる．

問　　題 7

1． 10 m × 10 m の正方形の土地からなる実験場があり，たて，よこ，それぞれ 100 株ずつの総計 10000 株の稲株が植えてある．この実験場である時期に稲の葉に多くの病斑ができ，その病斑の総個数，また1株あたりの平均病斑数を知る必要が生じた．そこで，全体を調べるのは大変なので 10000 株から 50 株のランダムサンプルをとり出して1株ごとに病斑数をかぞえたら次のようであった．

35	35	40	47	41	47	48	39	65	60
46	22	52	50	49	53	62	36	24	38
33	28	71	48	49	45	38	48	52	52
31	51	35	56	56	57	42	43	34	43
44	41	58	41	37	50	55	63	42	40

このサンプルから 10000 株 (母集団) の平均病斑数，総病斑数の信頼度 95％ の信頼区間を求めよ．

2． ある地域の 15200 世帯から 80 世帯のランダムサンプルを選び，その世帯の人数を調べたら次のようであった．

5	4	4	3	6	4	3	1	3	3
3	2	4	3	5	2	4	4	4	1
4	2	2	3	5	2	4	3	5	2
7	5	2	4	3	7	2	3	3	4
4	2	6	5	4	4	2	3	1	5
2	4	2	3	5	2	3	3	5	4
3	2	4	4	6	3	3	3	5	3
3	5	4	5	4	5	3	4	4	4

このとき，15200 世帯（母集団）の総人数の信頼度 95 % の信頼区間を求めよ．

3． ある地域で 1 日の雨量（mm）を調べるために，その地域を 50000 の区画に分割し，その中から 30 区画をランダムに選んで測定したところ次の結果を得た．

12	11	13	11	9	10	14	15	10	12
10	11	10	8	9	13	11	13	6	10
11	11	9	10	9	12	12	10	10	13

このとき区画当りの平均雨量の信頼度 95 % の信頼区間を求めよ．

4． ある市の 15600 人の中学 1 年生男子の 1500 m 競走の記録の頻度分布は正規分布曲線で近似できることが過去のデータから知られている．この市の中学 1 年生男子から 13 人をランダムに選び 1500 m 競走の記録をとったところ

- サンプル平均値 $(\bar{x}_{13}) = 384.9$ 秒
- サンプルから求めた
  母集団分散の推定値 $(u_{13}{}^2) = (33.5\ 秒)^2$

を得た．このとき 1500 m 競走の記録における信頼度 95 % の信頼区間を求めよ．

3.4　母集団比率（p）の推定

母集団平均値（μ）の推定と同等とみなせるものに属性 A をもつ母集団比率（p）を推定する問題がある．

母集団のサンプリング単位を θ_1，θ_2，……，θ_N とするとき

$$\theta_i = \begin{cases} 1\ (\text{属性}\ A\ \text{をもつ}) \\ 0\ (\text{そうでない}) \end{cases} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

とすれば母集団比率は次のように表わすことができる．

$$(3.23)\quad p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_i$$

これは母集団平均値そのものであるから p を推定する問題は μ を推定す

る問題に帰着されることがわかる．母集団分散（σ^2）は次式で与えられる．

$$(3.24)\quad \sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i-p)^2=p(1-p)$$

推　定　量

母集団から大きさ n のランダムサンプルを X_1, X_2, ……, X_n とし，p の推定量を次のようにする．

$$(3.25)\quad \hat{P}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{l}{n}$$

ただし，l はサンプルの中の属性 A をもつものの個数

このとき，前節の式（3.8）と式（3.9）から次式を得る．

$$(3.26)\quad \mathrm{E}(\hat{P}_n)=p$$

$$(3.27)\quad \mathrm{V}(\hat{P}_n)=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{p(1-p)}{n}$$

信　頼　区　間

サンプルの大きさ n がある程度大きいとき（目安として $n\geqq 20$），信頼度 $100\times(1-\alpha)\%$ の信頼区間は前節の式（3.18）と同様に，変量 $\hat{P}_n$ の実現値を $\hat{p}_n$ とすると次のようになる．

$$(3.28)\quad \left(\hat{p}_n-k_\alpha\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{p(1-p)}{n}},\ \hat{p}_n+k_\alpha\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

ただし，k_α は平均値 0，分散 1 の正規分布の α 点とする．

p はもともと未知であるから推定量の実現値 $\hat{p}_n$ を代入して用いる．そのとき信頼度 $100\times(1-\alpha)\%$ の信頼区間は次のように表わされる．

$$(3.29)\quad \boxed{\left(\hat{p}_n-k_\alpha\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}},\ \hat{p}_n+k_\alpha\times\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}\right)}$$

ただし，$\hat{p}_n$ は大きさ n のサンプルにおける比率

例 1．20 歳以上の人口 10 万人のある市で 500 人のランダムサンプルをとり出し喫煙者を調べたら 230 人いた．この市の喫煙率，ならびに喫煙者数を信頼度 95 %，99 % で推定する．

解　母集団は 10 万人のサンプリング単位をもっており，それぞれの人に喫煙者であるかないかによって特性値 1 か 0 かが対応していると考えればよい．

$N=100000$，$\hat{p}_{500}=\dfrac{230}{500}=0.46$，信頼度 95 %，99 % のときの k_α の値はそれぞれ 1.96，2.58 であるから式 (*3.29*) より信頼度 95 % の信頼区間は

喫煙率	喫煙者数
(0.416，0.504)	(41600，50400)

となり，また信頼度 99 % の信頼区間は

喫煙率	喫煙者数
(0.403，0.517)	(40300，51700)

となる．

例 2．ある工場において製造された 10000 個の製品から 1000 個のランダムサンプルをとり出し，調べたら不良品が 35 個あった．このとき 10000 個の製品の不良率 p の信頼度 95 % の信頼区間を求める．

解　母集団は製造された 10000 個の製品と考えればよい．

$N=10000$，$\hat{p}_{1000}=\dfrac{35}{1000}=0.035$，信頼度 95 % のときの k_α の値は 1.96 であるから，式 (*3.29*) より信頼度 95 % の信頼区間は

(0.024，0.046)

となる．したがってこの製品の中の不良品の個数は約 240 個から 460 個の間であるといってよい．

〈質問〉　信頼区間をつくるとき普通，信頼度を 95 %，99 % とするというのですが 95 %，99 % という数字に何か意味があるのですか．

答　これは別に意味がありません．信頼度は目的に応じて 93.6 % にしても 98.5 % にしてもいっこうにかまいません．ただ巻末の付表に 95 %，99 % の信頼区間を求めるための数値が計算されているので 95 %，99 % を用いると便利でしょう．

問　題　8

人口 30 万人の都市でテレビのある番組の視聴率を調べるため 1000 人のランダムサンプルについて調べたら 80 人が見ていると答えた．この都市におけるこの番組の視聴率の信頼度 95 % の信頼区間を求めよ．

3.5　サンプル数はどのようにして決めるか

有権者 20 万人の都市で市長選挙が行なわれる．調査員甲は候補者 A の支持率が，信頼度 95 % で信頼区間の幅（信頼幅）が 0.05 以内，すなわち支持者数の誤差が ± 5000 人以内になるような調査を要求されている．ただし候補者 A の支持率は皆目見当がつかないとする．

調査員甲はこの要求に答えるべくまずサンプル数をいくらにするか決定しなければならない．そこで次のような解析をおこなった．

調査員甲の解析

信頼度 $100 \times (1 - \alpha)\%$ の信頼区間は前節の式 (*3.28*) で示され，信頼幅は次図のようになる．

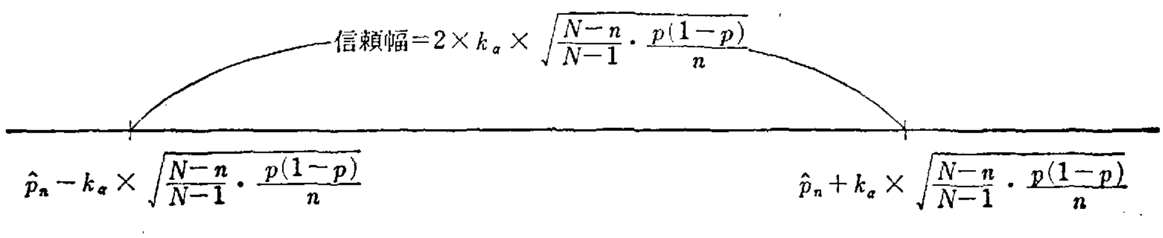


図 3.7　信頼度 $100\times(1-\alpha)\%$ の信頼幅

そこで信頼幅を L とすると，次式のように書ける．

$$L = 2 \times k_\alpha \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{p(1-p)}{n}}$$

この式から n を計算すると次式を得る．

$$(3.30)\quad n = \frac{N}{\dfrac{N-1}{p(1-p)}\left(\dfrac{L}{2k_\alpha}\right)^2 + 1}$$

この式にもとづいて n を決めるためには右辺に含まれる p がわからなければならない．しかし，いまの場合 p は皆目見当がつかないので p が如何なる

値をとるときでも不等式

$$p(1-p) \leqq 0.5 \times (1-0.5) = 0.25$$

が成立することを利用して式 (3.30) の $p(1-p)$ のかわりに 0.25 を代入すると次の不等式が得られる.

$$(3.31) \quad n \leqq \frac{N}{(N-1)\left(\dfrac{L}{k_\alpha}\right)^2 + 1}$$

よって, $N = 200000$, $L = 0.05$, $k_\alpha = 1.96$ を右辺に代入すると

$$n \leqq \frac{200000}{199999 \times \left(\dfrac{0.05}{1.96}\right)^2 + 1} = 1525$$

となり, サンプル数は 1525 あれば十分であることが求められる.

甲の解析でもわかる通り, 母集団比率 p を推定するとき

$$\text{人為的に} \left\{ \begin{array}{l} \text{信頼幅を決める} \\ \text{信頼度を決める} \end{array} \right\} \rightarrow \text{サンプル数が決まる.}$$

という関係は明らかである. この関係は母集団平均値の場合も同様であるが, 調査員甲の解析の中の式 (3.30) に対応する式が

$$(3.32) \quad n = \frac{N}{\dfrac{N-1}{\sigma^2}\left(\dfrac{L}{2k_\alpha}\right)^2 + 1}, \quad \text{ただし } \sigma^2 \text{ は母集団の分散}$$

となり, 比率 p の場合と異なって σ^2 の値が上から不等式でおさえられない. したがって σ^2 の値がわからないと n の値が決まらないといった不便さがある. そこで普通は n に比べて小さい n' のサンプルにもとづいて予備調査をおこない, σ^2 をあらかじめ推定して, その推定値を σ^2 に代入して n を求めている.

〈質問〉 調査員甲の解析の中でたとえばあらかじめ p の値が 0.2 よりも小さいということが調査員に情報としてわかっている場合はどうしますか.

答　支持率 (p) があらかじめ 0.2 を越えないとわかっているような場合は, この情報は非常に有用なわけです. すなわち式 (3.30) において $p(1-p)$ の値について

$$p(1-p) \leqq 0.2(1-0.2) = 0.16$$

という関係があり，$p(1-p)$ のかわりに 0.16 を代入します．

不等式は

$$n \leqq \frac{N}{\frac{25}{16}(N-1)\left(\frac{L}{k_\alpha}\right)^2 + 1}$$

となって求めるサンプル数は

$$n \leqq \frac{200000}{\frac{25}{16} \times 199999 \times \left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2 + 1} = 979$$

となるから約 980 あれば十分であることが算出できます．甲の場合の 1525 に比べてずいぶん少なくなりますね．したがって p が 0.2 以下であるという情報は非常に有効なわけです．

もう少し一般的に話しますと p の値と $p(1-p)$ の値は次表のようになります．

表 3.6 p と $p(1-p)$ の値

p の値	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$p(1-p)$ の値	0.09	0.16	0.21	0.24	0.25	0.24	0.21	0.16	0.09

この表から p が 0.5 のときが $p(1-p)$ の値は 0.25 となって 1 番大きくなり，他のどんな値に対しても 0.25 より小さいことがわかります．したがってサンプル数も $p=0.5$ のときが 1 番大きくなることが式 (3.30) からわかります．p が 0.5 から離れていくと $p(1-p)$ の値はだんだん小さくなり，サンプル数もだんだん小さくなります．調査員甲はこのような考えにもとづいて p の値が皆目わからないので，安全めに $p(1-p)$ の値が 1 番大きいときを用いたのです．

母集団平均値を推定するときのサンプル数の決定においても式 (3.32) において，もし母集団分散 σ^2 がある値 M より小さいことが過去のデータからわかっていれば

$$(3.33) \quad n \leqq \frac{N}{\frac{N-1}{M}\left(\frac{L}{2k_\alpha}\right)^2 + 1}$$

を用いてサンプル数を算出すればよいわけである.

例　ある大都市で憲法改正を望む人の比率についての調査をしようと思う. 信頼度95％で信頼幅0.02以内にするためにはサンプル数はいくらとすればよいか. また, もしあらかじめ改正を望む人の比率が 0.30 (30％) 以下だとわかっていればサンプル数はどの程度減少するか.

解　母集団の大きさ N が非常に大きいと考えられるので式 (3.30) の右辺の分子, 分母を N で割って $\dfrac{N-1}{N}$ を1, $\dfrac{1}{N}$ を0とみなすと

$$(3.34)\quad n \fallingdotseq 4p(1-p)\left(\frac{k_\alpha}{L}\right)^2$$

となり, 比率 (p) に対する情報がなければ $p(1-p)$ を 0.25 でおきかえた不等式

$$n \leqq \left(\frac{k_\alpha}{L}\right)^2$$

を用いると

$$n \leqq \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 = 9604$$

となり, サンプル数は約 9600 必要であることがわかる.

もし比率 (p) が 0.30 以下だとわかっていれば式 (3.34) の $p(1-p)$ を 0.21 でおきかえた不等式

$$n \leqq 4 \times 0.21 \times \left(\frac{k_\alpha}{L}\right)^2$$

を用いて

$$n \leqq 4 \times 0.21 \times \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 = 8067$$

となり, 約 **8100** と情報のない場合に比べて約 **1500** のサンプルの減少が見られる.

問　題　9

1.　15000世帯ある地域で子供が3人以上いる世帯の比率を推定したいとき, 信頼度 95％, 信頼幅 0.05 以内 (世帯数の誤差が ±375 以内) とするためにはサンプル数はいくらとすればよいか.

2.　前問において子供が4人以上の世帯の比率を推定したいとき, あらかじめ比率が 0.15 (15％) 以下だとわかっていればサンプル数はいくらとしたらよいか.

第4章　上手なサンプルのとり方

4.1　層別サンプリング

前章の 3.3 節の表 3.5 に示すアメリカ合衆国 64 の都市（母集団）の1930 年の人口の例において，24 のサンプルにより 1930 年の 64 都市の総人口を推定する問題を考えよう．

（イ）　調査員甲は，この 64 都市の 1930 年の総人口を推定するために，64 都市から 24 の都市をランダムに選び，そのサンプル平均を 64 倍したもので総人口を推定した．もちろん表3.5の値は調査員甲には前もってわかっていない．

推定値：　サンプル平均 $\times$ 64

（ロ）　調査員乙は，1920 年にこの 64 都市全部について調べたデータ（情

表 4.1　1920 年と 1930 年の 64 都市の人口（単位：千人）
（市の配列は 1920 年と 1930 年では同じ順序に並べてある）

1920 年のデータの値（調査員には既知）				1930 年のデータの値（調査員には未知）			
1グループ	2 グループ			1グループ	2 グループ		
797	314	172	121	900	364	209	113
773	298	172	120	822	317	183	115
748	296	163	119	781	328	163	123
734	258	162	118	805	302	253	154
588	256	161	118	670	288	232	140
577	243	159	116	1238	291	260	119
507	238	153	116	573	253	201	130
507	237	144	113	634	291	147	127
457	235	138	113	578	308	292	100
438	235	138	110	487	272	164	107
415	216	138	110	442	284	143	114
401	208	138	108	451	255	169	111
387	201	136	106	459	270	139	163
381	192	132	104	464	214	170	116
324	180	130	101	400	195	150	122
315	179	126	100	366	260	143	134

報）があることを知っていて，この 1920 年の人口でもって大きさの順に全部の都市を並べ，それに対応してはじめから 16 番目までの都市を第1のグループに，17番目から64番目までのものを第2のグループに分けた(表4.1)

そして第1のグループから 12 の都市を，第2のグループから 12 の都市をそれぞれランダムに選んで

推定値：{(第1グループのサンプル平均) × w_1 + (第2グループのサンプル平均) × w_2} × 64

ただし，$w_1 = \dfrac{16}{64}$(第1グループの比率)，$w_2 = \dfrac{48}{64}$(第2グループの比率)

を用いて総人口を推定した．

さて調査員甲の場合と乙の場合について，それぞれ ${}_{64}C_{24}$, ${}_{16}C_{12} \times {}_{48}C_{12}$ 通りのすべてのサンプルのとり方に対して，推定値を計算し，頻度分布に書いてみればよいが，これは大変な手数なので，甲・乙の場合ともに巻末の乱数表を用いて 50 回実験をくり返し，それぞれの推定値の頻度分布を書いてみた（図4.1）．甲の場合は図 3.4 をそのまま書いたものである．

図 4.1 から明らかに，母集団の過去のデータ（情報）を利用してサンプルのとり方を変えることにより同じサンプル数で推定の精度が向上することがわかる．調査員乙の方法は過去の情報を利用した上手なサンプルのとり方を示したものである．

一般に，サンプル数を固定したとき，なるべく推定の精度のよいサンプルのとり方（サンプリング）を開発することは大切なことである．この目的を達するために，調査員乙のように母集団を既存の資料からみて，類似の性質をもつグループ，すなわち，内部的に等質なグループに分割しておいて各グループから別々にランダムサンプルをとり出すのである．この各グループのことを**層**（stratum, strata）といい，母集団を層にわけることを**層別**（stratification）という．また層別してサンプルをとり出すことを**層別サンプリング**（stratified sampling）という．

いま大きさ N の母集団がある方法によって L 個の層に分けられているとし，第 i 層（$i = 1, 2, \cdots\cdots, L$）の大きさを N_i, その層の平均値を μ_i,

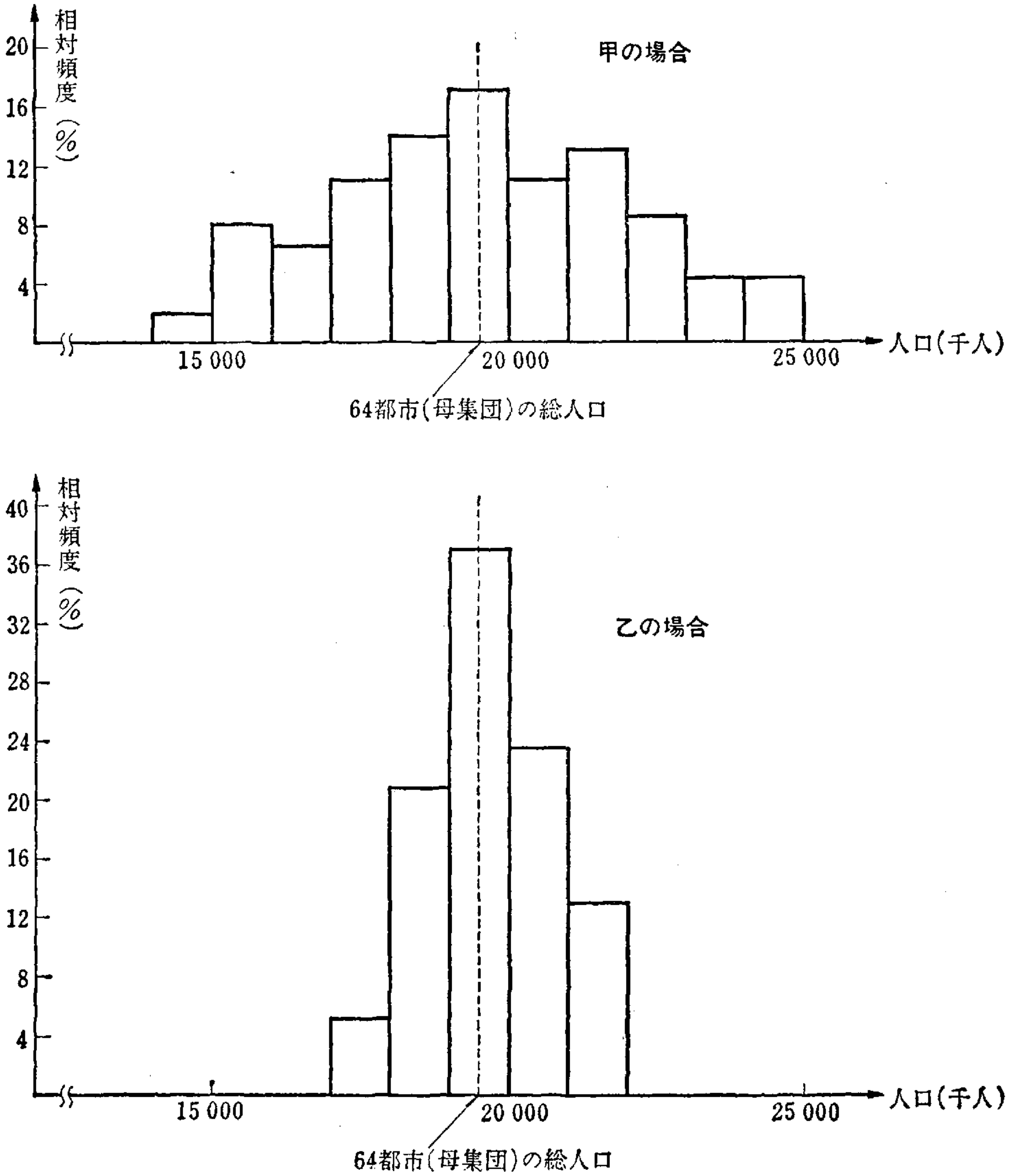


図 4.1　50 回の実験による甲と乙の頻度分布

分散を σ_i^2 で表わすことにする．また母集団全体についての平均値と分散をそれぞれ，μ, σ^2 とする．

第 i 層の特性値を $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \cdots\cdots, \theta_{iN_i}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, L)$ とすると

$$(4.1)\quad \mu_i=\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}\theta_{ij},\quad \sigma_i^2=\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}(\theta_{ij}-\mu_i)^2$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

と書ける．

さて，

$$N = \sum_{i=1}^{L} N_i$$

であるから

$$(4.2)\quad \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}\theta_{ij} = \sum_{i=1}^{L}\frac{N_i}{N}\mu_i = \sum_{i=1}^{L} w_i \mu_i$$

$\left(\text{ただし，} w_i = N_i/N \text{ は } i \text{ 層のウェイト（重み）とする．} \sum_{i=1}^{L} w_i = 1\right)$

$$(4.3)\quad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(\theta_{ij}-\mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{N_i}(\theta_{ij}-\mu_i+\mu_i-\mu)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L} N_i\left\{\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}(\theta_{ij}-\mu_i)^2\right\} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{L} N_i(\mu_i-\mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{L} w_i\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{L} w_i(\mu_i-\mu)^2$$

となり，式（*4.3*）における $\sum_{i=1}^{L} w_i\sigma_i^2$ は各層内の分散を w_i を重みとして加重平均したもので**層内分散**（within strata variance）といわれる．また同式の $\sum_{i=1}^{L} w_i(\mu_i-\mu)^2$ は層間の異質度を表わすもので**層間分散**（between strata variance）といわれる．

つぎに，第 i 層から n_i 個のランダムサンプル（確率変数表示）X_{i1}，X_{i2}，……，X_{in_i}（$i = 1$, 2, ……, L）をとりだし（図 4.2），全体で n 個のサン

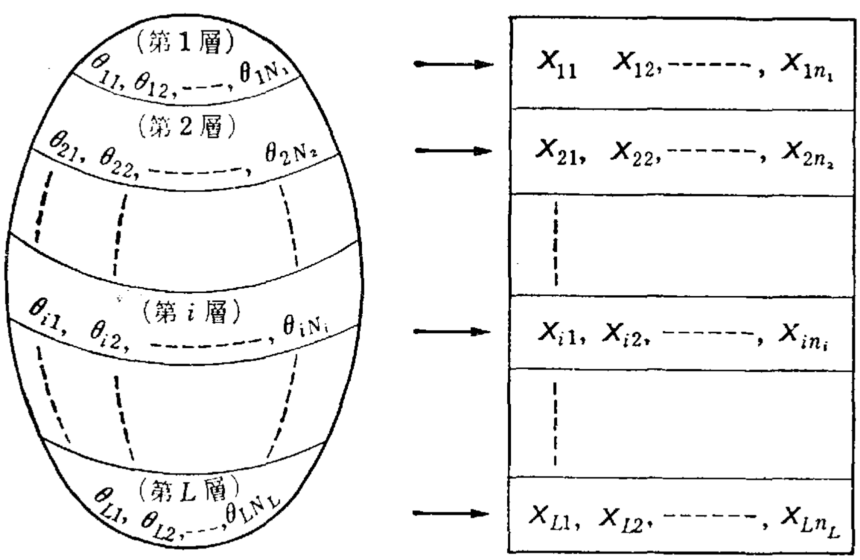


図 4.2　層別サンプリング

プルをとり出して母集団平均値 μ, 母集団総計値 τ を推定する問題を考えよう.

μ の推定量, τ の推定量をそれぞれ次のように考える.

$$(4.4)\quad \bar{X}_{n,s}=\sum_{i=1}^{L} w_i\bar{X}_i,\quad \bar{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

$$(4.5)\quad T_{n,s}=N\bar{X}_{n,s}$$

式 (4.2) より

$$\mathrm{E}(\bar{X}_{n,s})=\sum_{i=1}^{L} w_iE(\bar{X}_i)=\sum_{i=j}^{L} w_i\mu_i=\mu$$

$$\mathrm{E}(T_{n,s})=NE(\bar{X}_{n,s})=N\mu=\tau$$

となって, この両推定量は μ と τ の不偏推定量となる. 式 (4.5) の実現値が前記の調査員 乙 の用いた推定値である.

また, 推定量 $\bar{X}_{n,s}$, $T_{n,s}$ の分散は次のように計算できる (補注〔7〕)

$$(4.6)\quad \mathrm{V}(\bar{X}_{n,s})=\sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

$$(4.7)\quad \mathrm{V}(T_{n,s})=N^2\sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

注 1 母集団を層に分けて各層からランダムにサンプルをとり出すことを**層別ランダムサンプリング** (ランダムを略して**層別サンプリング**ともいう) と呼ぶのに対し, 第3章で述べた母集団全体からランダムにサンプルをとり出す場合を特に**単純ランダムサンプリング**と呼んで区別している.

注 2 層別サンプリングの場合の信頼度 $100\times(1-\alpha)\%$ の信頼区間は図 4.2 のサンプルの実現値を $x_{11}, x_{12}, \cdots\cdots, x_{1n_1}$; $x_{21}, x_{22}, \cdots\cdots, x_{2n_2}$; $\cdots\cdots$; $x_{i1}, x_{i2}, \cdots\cdots, x_{in_i}$; $\cdots\cdots$; $x_{L_1}, x_{L_2}, \cdots\cdots, x_{Ln_L}$

とし, $n_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$ が大きいとき, μ と τ に対して

$$\left(\bar{x}_{n,s}-k_\alpha\times\sqrt{\sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{u_i^2}{n_i}},\ \bar{x}_{n,s}+k_\alpha\times\sqrt{\sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{u_i^2}{n_i}}\right)$$

$$\left(t_{n,s}-k_\alpha\times N\times\sqrt{\sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{u_i^2}{n_i}},\right.$$

$$\left.t_{n,s}+k_\alpha\times N\times\sqrt{\sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{u_i^2}{n_i}}\right)$$

となる.

ただし　$\bar{x}_{n,s} = \sum_{i=1}^{L} w_i \bar{x}_i,\ \ \bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$

$$t_{n,s} = N\bar{x}_{n,s}$$

$$u_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

k_α は，平均値 0，分散 1 の規準型正規分布における α 点である．

前記の調査員甲の方法が単純ランダムサンプリングであり，調査員乙の方法が層別（ランダム）サンプリングである．図 4.1 は明らかに層別サンプリングの方が単純ランダムサンプリングよりも母集団総計値（τ）の推定量の分散が小さいことを示している．試みに調査員甲・乙の場合について推定量の分散，標準誤差を計算してみよう．

$$N = 64$$

$\sigma^2 = 51629$（母集団分散：表 4.1 の 1930 年のデータの分散）

$$n = 24$$

から式（*3.11*）により

$$甲の推定量の分散 = N^2 \times \frac{N-n}{N-1} \times \frac{\sigma^2}{n}$$

$$= 64^2 \times \frac{64-24}{64-1} \times \frac{51629}{24}$$

$$= 5594507$$

$$甲の標準誤差 = \sqrt{甲の推定量の分散} = 2365$$

また

$$N = 64,\ \ N_1 = 16,\ \ N_2 = 48$$

$$w_1^2 = \left(\frac{16}{64}\right)^2,\ \ w_2^2 = \left(\frac{48}{64}\right)^2$$

$$n_1 = 12,\quad n_2 = 12$$

$$\sigma_1^2 = 50478,\quad \sigma_2^2 = 5464$$

から式（*4.7*）より

乙の推定量の分散

$$= N^2 \times \left(w_1^2 \times \frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1} \times \frac{\sigma_1^2}{n_1} + w_2^2 \times \frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1} \times \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$= 64^2 \times \left\{ \left(\frac{16}{64}\right)^2 \times \frac{16-12}{16-1} \times \frac{50478}{12} + \left(\frac{48}{64}\right)^2 \times \frac{48-12}{48-1} \times \frac{5464}{12} \right\} = 1090720$$

$$\text{乙の標準誤差} = \sqrt{\text{乙の推定量の分散}} = 1044$$

各層へのサンプルの配分について

層とサンプル数nがあらかじめ定められているとき，各層へのサンプル数n_iの配分をどのようにすればよいかという問題が生じる．これは

$$n = \sum_{i=1}^{L} n_i \quad (n\text{ が一定})$$

の条件のもとで，母集団平均値（μ），母集団総計値（τ）の推定の精度をよくするように，サンプル数n_i（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L$）を定める問題であり，**比例配分法**（proportional allocation）というのがよく用いられる．これはi層からのサンプル数n_iを次のように定める配分法である．

$$(4.8) \quad n_i = \frac{N_i}{N} n = w_i n \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

n_iが整数をとらない場合は1番近い整数値をとればよい．式（4.8）を満足するとき式（4.4），式（4.5）は

$$(4.9) \quad \bar{X}_{n,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$(4.10) \quad T_{n,p} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

となって，全サンプルの和を計算して $\frac{1}{n}$, $\frac{N}{n}$ を掛ければよいから便利である．

さて，これらの推定量の分散と，単純ランダムサンプリングの場合の推定量 $\bar{X}_n$, T_n の分散と比較してみよう．

$$\frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \fallingdotseq 1 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

$$\frac{N-n}{N-1} \fallingdotseq 1$$

とみなすと，式（4.6)，式（4.7)，それに式（4.3）より

$$(4.11)\quad V(\bar{X}_n) - V(\bar{X}_{n,p}) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{L} w_i \sigma_i^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{L} w_i(\mu_i - \mu)^2 \geqq 0$$

$$(4.12)\quad V(T_n) - V(T_{n,p}) = \frac{N^2}{n}\sum_{i=1}^{L} w_i(\mu_i - \mu)^2 \geqq 0$$

となって，単純ランダムサンプリングに比べて，層別サンプリングの方が分散が小さくなることがわかる．この結果は，比例配分する限り，層別サンプリングは単純ランダムサンプリングに比べて推定の精度が向上することを示しており有用である．

この比例配分の場合が μ，τ の推定の精度の面でもっともよいかというと決してそうではなく，最もよい配分は**ネイマンの最適配分**（J. Neyman's optimum allocation）と呼ばれるもので，各層のサンプル数 n_i は次式で与えられる．これは式（4.6)，式（4.7）を最小にする n_i として求められている（補注〔8〕).

$$(4.13)\quad n_i = \frac{N_i\sqrt{\dfrac{N_i}{N_i - 1}}\,\sigma_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{L} N_j\sqrt{\dfrac{N_j}{N_j - 1}}\,\sigma_j}\, n \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

この式をみると，n_i を定めるのに各層の標準偏差 σ_i があらかじめ既知でなければならない．それゆえ，普通は比例配分の方がよく用いられる．

〈質問〉 式（4.13）は，どのようにサンプルを配分すればよいかを物語っているのですか，初心者に理解できるように説明して下さい．

答

わかりやすくするために $N_i - 1 \fallingdotseq N_i (i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$ とみなして式（4.13）を書きかえてみると

$$n_i = \frac{w_i \sigma_i}{\displaystyle\sum_{j=1}^{L} w_j \sigma_j}\, n \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

となりますね．この式をみると各層の比率 $\dfrac{N_i}{N} = w_i$ と標準偏差 $\sigma_i (i =$

1, 2, ……, L）の積に比例してサンプル数を定めればよいことを示しています．たとえば，もし各層の比率 w_i がすべて等しければ，層の標準偏差に比例してサンプルを配分すればよいことになります．標準偏差の大きい層ほど，サンプル数を大きくしてやればよいことになり，直観的にもうなずけると思います．

問　　題　10

サンプル数 $n=24$ のとき表 4.1 の 1920 年のデータにもとづいて，第1グループ（第1層），第2グループ（第2層）にネイマン配分法でサンプルを割り当てよ．また比例配分法で割り当てよ．両配分法のときの，母集団総計値（τ）の推定量の分散，標準誤差（分散の平方根）を式（*4.7*）を用いて計算し，比較せよ．

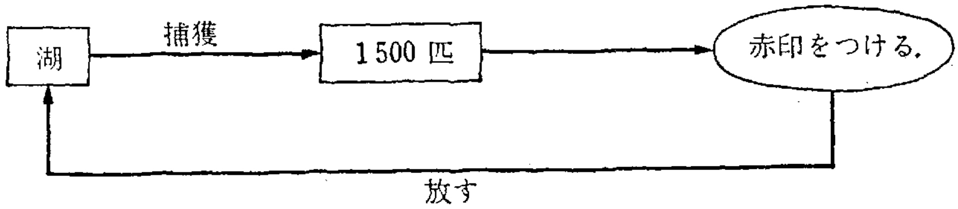
4.2　捕獲・再捕獲法

南氷洋のクジラの総数は何頭か？　ある湖の魚の総数は何匹か？　というような1つの母集団の総数推定の問題にわれわれはよく出くわす．一般にある地域または海域内に棲息する動物（魚，うさぎ，虫，ねずみ，鳥など）の総数を推定するためのサンプルのとり方は以前からいろいろな方法が考えられてきたが，最も基本的なものは次の例で示す**捕獲・再捕獲法**（capture and recapture）である．

例　ある湖で 1500 匹の魚をつかまえ，赤い目印をつけて放した．しばらく期間をおいて新たに 1000 匹の魚をつかまえたところ赤印のついたものが 100 匹いた．このときこの湖には何匹の魚がいると推定すればよいか．

[サンプルのとり方の手順]

手順 1　1500 匹を捕獲し，赤印をつけて放す．



手順 2　しばらくの期間をおいて新たに 1000 匹を捕獲したところ，そ

の中に赤印のついた魚が100匹いた.

手順2でしばらく期間をおくのは湖の中の魚がよくまじり合うためである.

解 この湖にいる魚の総数を N 匹（未知）とする．N 匹の中で赤印のついている魚が 1500 匹いるわけで，この湖の魚全体をサンプリング単位としてもつ母集団を考えれば母集団の赤印のついている魚の比率は

$$p = \frac{1500}{N}$$

と考えられる．この母集団から大きさ n のランダムサンプルが手順2でとり出されたとみなすと，母集団比率の推定の問題に帰着することができる，信頼度 95％ の p の範囲は3章の式（3.27）から次のように書ける．

$$\hat{p}_n - 1.96 \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}} \leqq p \leqq$$

$$\hat{p}_n + 1.96 \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}$$

ただし $\hat{p}_n$ はサンプルにおける比率とする．

この例の場合，$p = \dfrac{1500}{N}$，$\hat{p}_n = \dfrac{1}{10}$，$n = 1000$ であり，また $\dfrac{1500}{N} \fallingdotseq \dfrac{1}{10}$ とみなして $\dfrac{N-n}{N-1} \fallingdotseq \dfrac{14}{15}$ とおくと次式を得る．

$$\frac{1}{10} - 1.96 \times \sqrt{\frac{14}{15} \times \frac{0.1 \times 0.9}{1000}} \leqq \frac{1500}{N} \leqq$$

$$\frac{1}{10} + 1.96 \times \sqrt{\frac{14}{15} \times \frac{0.1 \times 0.9}{1000}}$$

この式を解いて信頼度 95％ の N の範囲を求めると

$$12716 \leqq N \leqq 18285$$

となり，この湖の中の魚の総数は 12716 匹より大きく 18285 匹より小さいと判断すればよい．

この問題は捕獲，再捕獲した魚をそれぞれ湖の中からのランダムサンプ

ルと考えれば，次のような壺の中の球の総数を推定する問題におきかえられる．

いま一つの壺の中に等質・等大の白い球が何個かはいっている．その個数を N (未知) とする．この N を推定する場合，全部とり出して数えることができれば問題はないが，湖の魚の例のようにそれはできないとする．そのとき，

（i） この壺から m 個の球をとり出し，赤印をつけて壺にもどす．(手順 1 に相当する)

（ii） “がらがらよくまぜ”て n 個の球をとり出し，その中で赤印のついているものを数えると l 個であった．(手順2に相当する)

そこで例で求めたと同じように3章の式 (*3.27*) から信頼度 $100 \times (1-\alpha)$ % の p の範囲は次式で与えられる．

$$(4.14) \quad \hat{p}_n - k_\alpha \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}} \leqq p \leqq \hat{p}_n + k_\alpha \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)}{n}}$$

この式において

$$p = \frac{m}{N}, \quad \hat{p}_n = \frac{l}{n} \quad (N \text{ は未知},\ m,\ n,\ l \text{ は既知}),$$

また $\dfrac{m}{N} \fallingdotseq \dfrac{l}{n}$ とみなして $\dfrac{N-n}{N-1} \fallingdotseq 1 - \dfrac{l}{m}$ とおくと信頼度 $100 \times (1-\alpha)$% の N の範囲は次式で与えられる．

$$(4.15) \quad \frac{m}{\dfrac{l}{n} + k_\alpha \times \sqrt{\left(1-\dfrac{l}{m}\right) \cdot \dfrac{\dfrac{l}{n}\left(1-\dfrac{l}{n}\right)}{n}}} \leqq N \leqq \frac{m}{\dfrac{l}{n} - k_\alpha \times \sqrt{\left(1-\dfrac{l}{m}\right) \cdot \dfrac{\dfrac{l}{n}\left(1-\dfrac{l}{n}\right)}{n}}}$$

信頼度 95 % と考える場合は $k_\alpha = 1.96$, 99 % と考える場合は $k_\alpha = 2.58$ とすればよい．

〈質問〉 鳥のようにつかまえて印をつけるのが困難なものについては，この捕獲，再捕獲法のほかに何かよい方法がありますか．

答 鳥の場合は，印を羽根などにつけると他の鳥が恐れたりしますので，足環をつけるわけですが，特に小さい鳥のような場合は，捕獲，再捕獲は大変な手数です．その場合，普通，**ライン・トランセクト法**（line transect 法）といって，鳥の棲息地域を歩いて，鳴声や観察によって総数をかぞえる方法がとられています．従来用いられているライン・トランセクト法は，ヤップ（Yapp）の方法と呼ばれ，気体分子が拡散運動をしているときの分子密度を測定する方法を鳥にあてはめたものです．いま，鳥の鳴声の聞こえる範囲を半径 R（m）の円と考え，調査員は調べようとする地域面積 S（m^2）の中を一定の速さ v（m/単位時間）ででたらめに歩きます．その間，単位時間に鳥の鳴き声を m 回聞いたとすれば，全地域面積 S（m^2）とその中に棲息する鳥の総数 N の間には次のような関係が成り立ちます．

$$\frac{N}{S}=\frac{m}{2Rv}$$

したがって，全地域面積 S の中に棲息する鳥の総数は，次のように推定されるわけです．

$$N=\frac{Sm}{2Rv}$$

問　　題 11

ある海域で，クジラの総数を推定するために，まず浮上している500頭のクジラに印をうちこんだ．そして，2週間の間をおいて再び浮上している500頭のクジラを調べたらそのうち100頭に印がついていた．このときこの海域のクジラの総数を信頼度 95％ で推定せよ．

（はじめに浮上していたクジラが手順1の捕獲に，再び浮上したクジラが手順2の再捕獲に相当すると考えて求めよ．）

第5章　統計的仮説検定の考え方と方法

5.1　仮説検定とは

いま，1つのサイコロを3回投げる実験を考えよう．もし3回とも1の目が出たとする．そのとき実験者は“これは偶然だ”とか“少しおかしいぞ”と考えるだろう．たとえ偶然だと考えた人も，もし10回投げ続けて10回とも1の目が出ると“これはおかしい”とサイコロが正常であることを疑うであろう．さて3回の実験ですべて1の目が出たとき，サイコロが正常かどうかを問題にしたとする．まずこのサイコロは正常だという仮説をたてる．1回目に出る目の数を X_1，2回目に出る目の数を X_2，3回目に出る目の数を X_3 と確率変数で表わすとき

$$(5.1)\quad Z = X_1 + X_2 + X_3$$

なる確率変数 Z を考えよう．このとき Z の確率分布表は表5.1のようになる．

表 5.1　Z の確率分布表

Z のとる値	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
その確率	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

この表からもわかるように，サイコロが正常であるという仮定のもとでは，すべての回に出る目の数が1である，すなわち $Z=3$ となる確率は 1/216 となる．したがって，同様な実験を216回くり返すとき平均1回起こる結果なのである．その結果がただ1回の実験で起こったのだから“あまりにも偶然だ”とか“おかしいぞ”と思うわけである．いいかえればサイコロが正常であるという仮説のもとで起こる確率が非常に小さい事象がただ1回の実験で起こったとき“あまりにも偶然だ”とか‘サイコロがおかしいのではないか”と考えサイコロが正常であるという仮説を疑うのである．

そこで一般的に1つの仮説（普通，H_0 で示す）をたて，この仮説のもと

で実験，調査をおこなう．そして得られた結果（サンプル）から作られる統計量 T の実現値を得る．この T は仮説 H_0 のもとでは1つの確率分布を持っており，その確率分布によって T の実現値の現われる確率がきまる．このとき T の実現値の現われる全領域のうち，確率 α で現われる領域をつくる．もしその領域に T の実現値が現われれば，仮説 H_0 のもとで確率 α で現われることが現実に起こったということになる．いま $\alpha=0.01$ とすると，1/100 の確率でしか起こらないことが1回の実験，調査で起こったということになり，この仮説 H_0 は認められないであろうと考えるわけである．すなわち仮説 H_0 を棄却するのである．普通はこの確率 α で T の実現値が現われる領域は図5.1のように両側（または片側）にとるのが普通である．図 5.1 においては T の頻度分布（確率分布）を連続分布曲線（密度関数）$f(x)$ で近似したものである．

T の実現値の現われる確率が α の領域を，**危険率 100 α % の棄却域**という．これは，もし T の実現値が棄却域に入って仮説 H_0 を棄てた場合に，その仮説 H_0 が正しいにもかかわらず棄却する確率が α となるわけであるから，これだけの危険をおかしているということからこのように呼ばれるわけである．このような手続きでおこなう検定のことを**統計的仮説検定**という．検定の対象となる仮説として H_0 のことを“**帰無仮説**”と呼んでいる．以後この書物でも，この言葉を用いることにする．

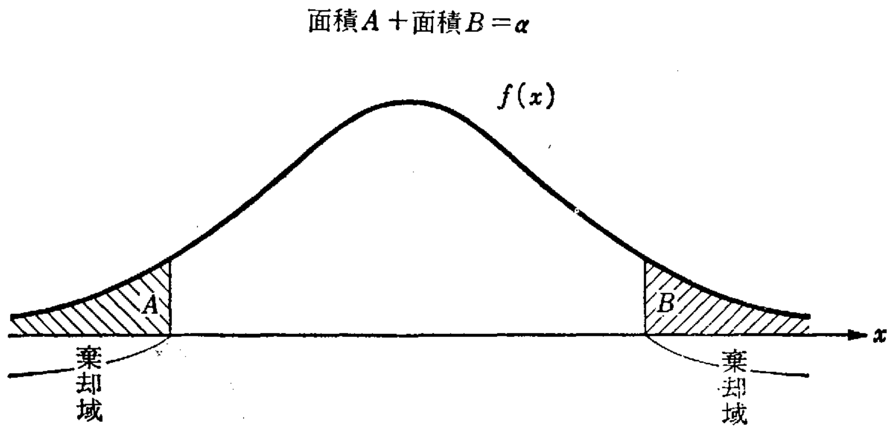


図 5.1　危険率 100 α % の棄却域

例　サイコロを3回投げる実験で，帰無仮説を“サイコロが正常であるとする”とき，式(5.1) にもとづき危険率5％以下の棄却域（片側）を作る．

解　いま式 (*5.1*) で示した Z の確率分布は，Z が実現値 z をとる確

率を $\mathrm{P}(\boldsymbol{Z}=z)$ と表わすと表 5.1 から

$$\mathrm{P}\{\boldsymbol{Z}=z\}=\begin{cases}1/216 & (z=3)\\ 3/216 & (z=4)\\ 6/216 & (z=5)\\ 10/216 & (z=6)\\ \vdots & \\ 10/216 & (z=15)\\ 6/216 & (z=16)\\ 3/216 & (z=17)\\ 1/216 & (z=18)\end{cases}$$

となり，危険率 4.6％（5％ 以下）(*)の棄却域は $z=3,\ z=4,\ z=5$ となる．すなわち

$$\mathrm{P}\{\boldsymbol{Z}=3\}+\mathrm{P}\{\boldsymbol{Z}=4\}+\mathrm{P}\{\boldsymbol{Z}=5\}=0.046<0.05$$

となる．だからサイコロを3回投げてもし，出た目の数の和が3か4か5なら危険率 4.6％ で仮説は棄却される．したがって，正常なサイコロとはみなされず，小さい目の出やすいサイコロではないかと疑う．

この場合，サイコロが正しくてもこの棄却域にはいる確率は 0.046 だけあるわけで，帰無仮説が正しくても棄却するという誤りを 0.05 以下の確率で犯していることになる．この 5％ のことをこれ以上危険率が大きくならない基準として**有意水準**と呼んでいる．(**) 普通，有意水準としては5％ 1％ が用いられる．また，仮説が棄却されるとき検定の結果は**有意**という．

さて，一般的に帰無仮説 H_0 が正しいにもかかわらずこれを棄却する誤りを H_0 に対する**第1種の誤り**という．第1種の誤りを犯す確率が危険率である．また H_0 が正しくないにもかかわらずこれを採択する誤りを**第2種の誤り**と呼んでいる．

〈質問〉 図 5.1 のように棄却域を両側または片側にとるのはどのような理由によるものですか．

(*) この場合，危険率が丁度 5％ となる棄却域は存在しない．

(**) この例の場合，**有意水準** 5％ **の棄却域**は $z=3,\ z=4,\ z=5$ となり，これは危険率 4.6％ の棄却域と一致する，

答　我々は第1種の誤りと第2種の誤りのどちらも犯さないように棄却域を作りたいわけですが，それは不可能ですね．そこで第1種の誤りを犯す確率を一定にしておいて第2種の誤りをできるだけ小さくする棄却域を作ることを考えるわけです．いま第1種の誤りを犯す確率を一定の α にしておくと棄却域は図5.2のように片側でも，両側でも，中央にでもどこにでも作ることができます．

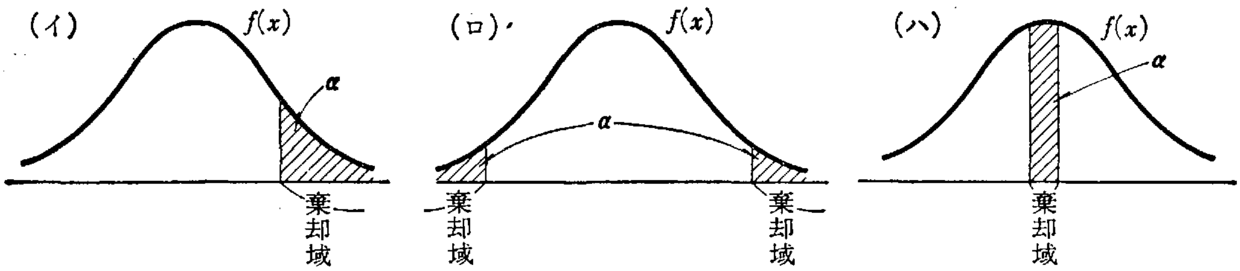


図 5.2　第1種の誤りを犯す確率 α の棄却域

次に帰無仮説 H_0 が正しくないとき，別の正しい仮説 H_1 を考えます(*)．たとえばサイコロの例ですと H_1 として

1 の目の出る確率　$\frac{1}{5}$

2 の　〃　$\frac{1}{5}$

3 の　〃　$\frac{1}{5}$

4 の　〃　$\frac{2}{15}$

5 の　〃　$\frac{2}{15}$

6 の　〃　$\frac{2}{15}$

なる仮説を考えることはできますね．一般に別の正しい仮説 H_1 のもとでの T の確率分布を連続曲線で近似したものを $g(x)$ で表わすことにします（図 5.3で点線で

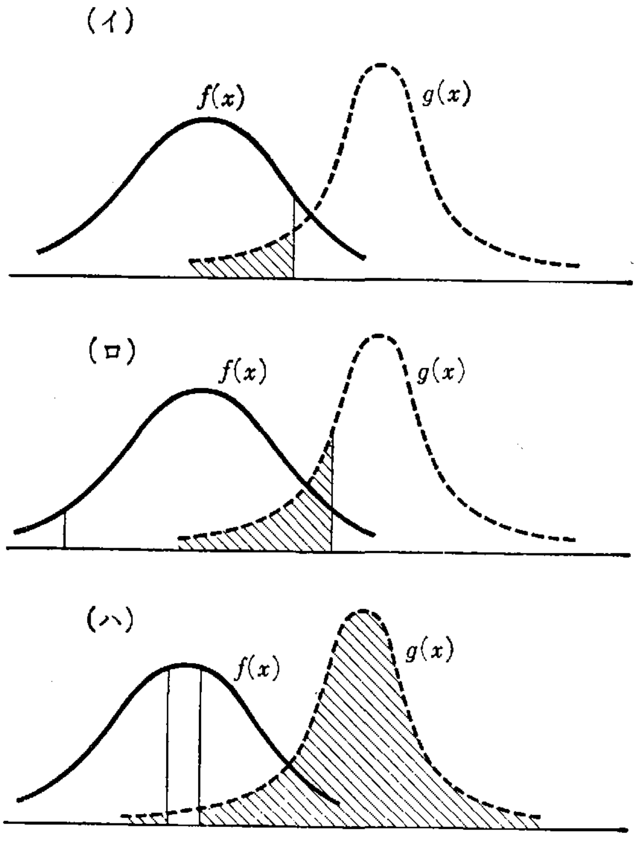


図 5.3　第2種の誤りを犯す確率
（斜線の部分）

(*)　H_1 を対立仮説と呼んでいる．

表わす). 図5.3で第1種の誤りを犯す確率 α を一定にしたいとき, 第2種の誤りを犯す確率が (イ) (ロ) (ハ) のどれが1番小さくなるか考えてみましょう. 図 5.2 の棄却域以外のところが仮説 H_1 を受け入れる領域ですから図 5.3 において斜線で示した部分が仮説 H_1 を受け入れる確率となるわけです. これが第2種の誤りの確率で (イ) (ロ) に比べ (ハ) が非常に大きいことがおわかりでしょう. したがって第2種の誤りを小さくするには棄却域は片側または両側にとることが好ましいわけです.

5.2 適合度検定法 (その 1)

10 円の銅貨を投げて表が出れば 1, 裏が出れば 0 と記入する実験を考えてみよう. いま A, B 2つの銅貨を100回ずつ投げた結果が次表のようであった.

表 5.2 A, B 2つの銅貨を投げた結果

A	B
1 0 0 1 0 1 1 1 0 1	0 1 0 0 0 1 0 1 1 0
0 1 0 1 1 0 0 1 1 0	1 0 0 0 0 1 0 1 1 0
0 1 1 1 0 1 0 1 0 1	0 1 0 1 0 0 0 1 1 0
0 0 1 1 0 0 0 1 0 1	1 1 0 1 0 1 0 0 0 0
1 0 1 1 0 0 1 1 0 1	0 1 0 0 1 1 0 1 0 0
0 0 0 1 0 1 1 1 0 1	1 1 0 0 0 1 0 0 0 1
1 0 1 1 1 0 0 0 1 1	1 0 1 1 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 1 1 0 1 0 0	1 1 0 0 0 0 0 0 1 0
1 0 0 1 1 0 1 0 1 1	0 1 0 0 1 0 0 1 0 0
0 1 1 0 1 0 1 1 1 0	0 0 1 0 0 0 0 1 0 1

この結果, この銅貨 A, B が正しい銅貨であるかどうか検定したい. そこでまず次のような帰無仮説をたてる.

帰無仮説: "表と裏の出現率が等しい"

この仮説のもとでは当然100回銅貨を投げたとき表と裏が 50 回ずつ出ることが期待される. この期待される値のことを**期待度数**と呼んでおり, 実際実験で得られた結果のことを**観測度数**と呼んでいる. 表5.2において観測度数は次のようになる.

銅貨 A $\begin{cases} 1 \text{ の観測度数} & 54 \\ 0 \text{ の　〃} & 46 \end{cases}$

銅貨 B $\begin{cases} 1 \text{ の観測度数} & 36 \\ 0 \text{ の　〃} & 64 \end{cases}$

この値をみただけで，銅貨 B の方は少し裏の出やすいゆがんだ銅貨ではないかと疑問を持つであろう．この疑問を確率的に裏ずけるための検定方式を考えたいわけである．すなわち，どれくらい小さい確率のものが実際に起こっているかを判断するわけである．いま，奇数が出れば 1，偶数が出れば 0 と記録する実験を 1 桁の 100 個の乱数を用いておこなうとちょうど正しい銅貨を 100 回投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 と記録する実験に相当する．このような実験を 200 回くりかえして

$$(5.2)\qquad \frac{(0\text{ の観測度数 }-50)^2}{50}+\frac{(1\text{ の観測度数 }-50)^2}{50}$$

の値の頻度分布を作ってみると図 5.4 のようになる．この頻度分布は次式で示す自由度 1 のカイ 2 乗分布（χ^2-分布とも書く）と呼ばれる曲線で近似されることが知られている．その事実を図 5.4 に示す．

$$(5.3)\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}\quad (0<x<\infty)$$

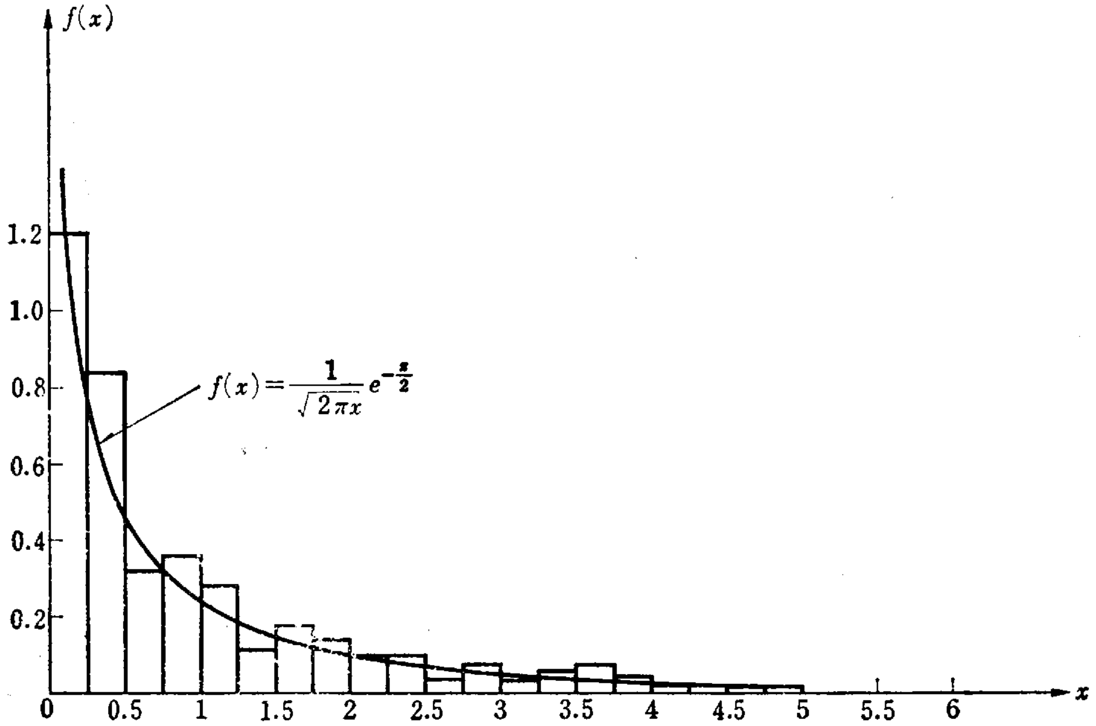


図 5.4　実験の結果の頻度分布とカイ 2 乗分布曲線の近似

式 (5.2) の値は観測度数がその期待値に完全に一致したときに 0 となり，期待値からの差が大きくなればなるほど大きくなる．したがって棄却域は右側の片側にとればよく，たとえば有意水準 5% としたときの棄却域(*)は巻末付表4より x が 3.84 より大きい領域となる．表 5.2 の銅貨 A と B の式 (5.2) の実現値は

A:　0.64

B:　7.84

となり，銅貨 B の方は棄却域にはいり，帰無仮説は棄却される（否定される）．有意水準を 1% としても棄却域は 6.63 より大きい領域となって，やはり銅貨 B の場合棄却域にはいることになる．このことは前節でも述べた通り，確率 $\frac{1}{100}$ 以下でしか起こらないことがただ1回の実験で起こったことになり，表と裏の出現率が等しいという帰無仮説は認められないと判断する．このことは，はじめに人間の直感で銅貨 B が少しゆがんでいるのではないかと疑ったことが確率的にも裏ずけられたという意味で有用であろう．

さて，一般に n 回の実験の起こりうる結果が $k+1$ 個の階級 C_1, C_2, ……, C_{k+1} に分類されていて，その階級の観測度数と期待度数が表 5.3 のようになっているとする．

表 5.3　階級の観測度数と期待度数

階　級	C_1, C_2 ……… C_{k+1}	計
観測度数	n_1, n_2 ……… n_{k+1}	n
期待度数	m_1, m_2 ……… m_{k+1}	n

このとき

$$(5.4)\quad \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$$

の値と自由度 k のカイ2乗分布表の棄却域とを用いることによって次のような帰無仮説を検定することができる．

帰無仮説: “n 回の実験の結果が階級 C_1, C_2, ……, C_{k+1} に確率 p_1, p_2, ……, p_{k+1} でふり分けられている.” ただし $m_i = np_i$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, k+1)$

(*) 前節の例の z（離散変量）と異なって，x は連続変量なので危険率 5% の棄却域と一致する．このような場合，この章では有意水準 5% の棄却域ということにする．

これは前の銅貨の例と同様で，n 回の実験を何回もくりかえし行なうと式 (5.4) の実現値の頻度分布が**自由度 k のカイ 2 乗分布**（χ^2-**分布**）と呼ばれる次式のような曲線（密度関数）で近似されることを利用したものである．ただし m_i ($i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k+1$) はある程度大きいとする（$m_i \geqq 10$ ぐらいならばよい）．

$$(5.5)\quad f_k(x)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \qquad (0<x<\infty)$$

ただし　$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$ はガンマ関数と呼ばれるものである．(補注 [9])

参考のために，k の値と $f_k(x)$ のグラフの略図を描いておく．(図 5.5)

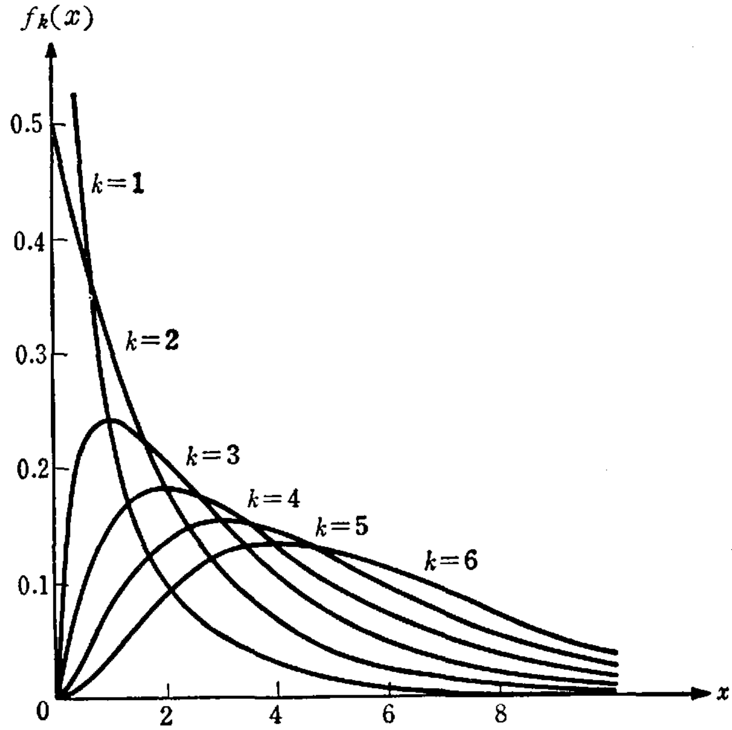


図 5.5　種々の自由度のカイ 2 乗分布曲線

例 1　サイコロを 60 回投げる実験において 1 から 6 までの出た目の観測度数と期待度数は表 5.4 のようであった．

この結果，このサイコロはどの目の出る確率も $\frac{1}{6}$ とみなしてよいか検定する．

解　表 5.4 を一目見ただけで誰しも 1 と 6 の目が出やすいと疑問をもつであろう．さて，これを確率的に仮説検定の立場から裏ずけてみよう．

表 5.4

サイコロの目 (i)	1	2	3	4	5	6	計
観 測 度 数 (n_i)	16	6	5	10	7	16	60
期 待 度 数 (m_i)	10	10	10	10	10	10	60

帰無仮説: “どの目の出る確率も $\frac{1}{6}$” とする．

表 5.4 から式 (*5.4*) は

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{(n_i-m_i)^2}{m_i}=\frac{(16-10)^2}{10}+\frac{(6-10)^2}{10}+\frac{(5-10)^2}{10}$$
$$+\frac{(10-10)^2}{10}+\frac{(7-10)^2}{10}$$
$$+\frac{(16-10)^2}{10}=12.2$$

となり，自由度は 5 であるから巻末付表 4 から有意水準 5％ の棄却域は 11.07 以上の領域となり，実現値は棄却域にはいっており，仮説は棄却される（否定される）．（図 5.6 参照）

いいかえれば確率 0.05 以下でしか起こらないことが 1 回の実験で起こったことになるわけで，仮説は認められないというわけである．

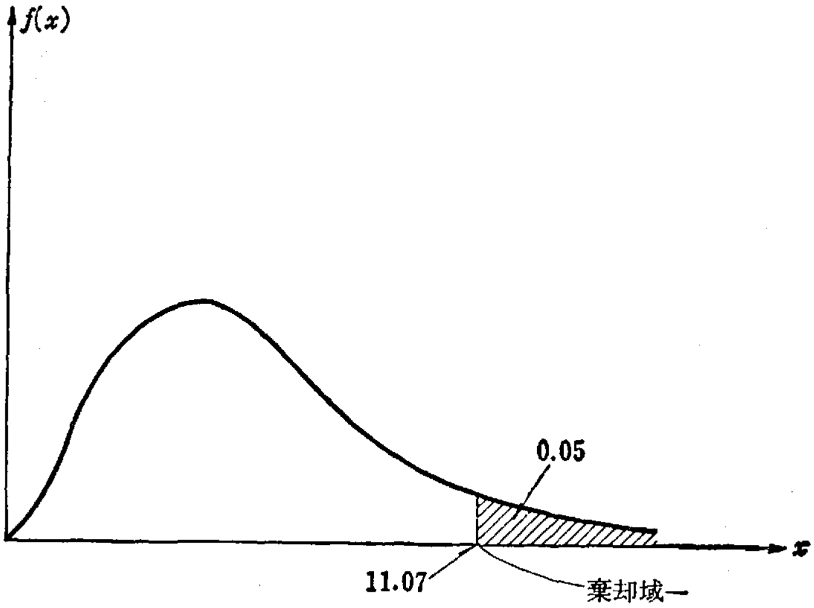


図 5.6　自由度 5 のカイ 2 乗分布曲線の有意水準 5％ の棄却域

例 2　第 2 章で述べた円周率 π の小数部分のはじめから 10000 個の数字に対して

帰無仮説: “0 から 9 までの数字の出現率は等しい”

を検定する．

解　いまはじめから 1000 個までの数を第 1 ブロック，1001 個から 2000 個までの数を第 2 ブロック，……，9001 個から 10000 個までの数を第 10 ブロックとする．そのときブロック j $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 10)$ に含まれる数字 i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9)$ の個数と式 (*5.4*) の値は，表 5.5 のようであった．

表 5.5　ブロック j に含まれる数字 i の個数と式 (5.4) の値

j \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum_{i=0}^{9}\frac{(n_i-m_i)^2}{m_i}$ の値
1	93	116	103	102	93	97	94	95	101	106	4.74
2	89	96	104	86	102	108	106	102	101	106	4.94
3	77	97	96	77	123	110	102	90	108	120	22.80
4	103	120	105	103	87	102	96	90	95	99	7.58
5	104	103	88	91	103	108	115	111	87	90	9.38
6	91	94	98	113	105	97	106	118	90	88	9.28
7	100	107	98	114	89	108	89	88	98	109	7.84
8	97	100	119	95	107	104	108	92	84	94	8.80
9	101	103	100	103	101	99	98	97	90	108	1.98
10	113	90	110	90	102	113	107	87	94	94	9.32

各ブロックとも自由度は9で，有意水準 5% の棄却域は，巻末付表4から16.92 より大きい領域となる．そこで表 5.5 を見ると第3ブロックの値が22.80 と極端に大きい．このブロックにおいては帰無仮説は認められず，0と3が少なく4と9が多く現われるという結果を得る．

例 3　ある町の，1月から6月までの自動車事故の件数は，

1月	2月	3月	4月	5月	6月
22	25	20	35	30	18

であった．この結果どの月も同じ割合で事故が起こると言えるか．

解

帰無仮説: “どの月も事故の発生率は同じであるとする”

このとき観測度数と期待度数は次表のようになる．

表 5.6

月 (i)	1	2	3	4	5	6	計
観測度数 (n_i)	22	25	20	35	30	18	150
期待度数 (m_i)	25	25	25	25	25	25	150

この表より式 (5.4) の値は

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{(n_i-m_i)^2}{m_i}=\frac{(22-25)^2}{25}+\frac{(25-25)^2}{25}+\frac{(20-25)^2}{25}$$
$$+\frac{(35-25)^2}{25}+\frac{(30-25)^2}{25}$$
$$+\frac{(18-25)^2}{25}=8.32$$

となる．巻末付表4の自由度5のカイ2乗分布表より有意水準 5% の棄却域は 11.07 より大きい領域となるので帰無仮説は棄却されない．したがって4月と5月が直感的には事故が多いように見えるが，これぐらいの数となる確率はあまり小さくないのでどの月も同じ割合で事故が起こっているとみなしてもさしつかえない．

〈質問〉 表5.2の1枚の銅貨投げにおいてたとえば

$$\underbrace{1\quad 1\quad 1\cdots\cdots\cdots 1}_{48\text{ 個}}\qquad\qquad \underbrace{0\quad 0\quad 0\cdots\cdots\cdots 0}_{52\text{ 個}}$$

というように1が続けて 48 個，0が続けて 52 個出た場合

帰無仮説: “表と裏の出現率は等しい”

は式（*5.4*）の実現値が棄却域にはいらないために棄却されない（否定されない）ですね．しかしこの場合明らかに，はじめは表が出るようにして途中から裏が出るように意識的に銅貨を曲げたか何か人為的なことが加わっていると思います．そこでこの並び方までも考慮した検定法についてはどのようにすればよいのですか．

答 銅貨投げの結果から，銅貨が正しいものであるかどうかを検定する場合は，表と裏の等出現性だけ調べたのでは駄目で，もう1つ並んでいる数の無規則性を調べなければなりません．質問は，この無規則性の検定法をたずねられており，大変大切な問題であると思います．

無規則性の検定にはいろいろありますが，よく用いられる代表的な方法である連の検定について述べておきましょう．

たとえば

A A B A A A A B A

とか

＋ － － ＋ － ＋ － － ＋ ＋

のように，相異なる2つの文字または記号の列があったとき，同じ文字または同じ記号のひと続きを**連**（run）といいます．またひと続きの個数を**連の長さ**といいます．はじめの文字の例では A の連が3つあって，その長さは 2, 4, 1, また B の連が2つあって，その長さはいずれも1です．あとの記号の例では長さ1の ＋ の連が3つ，長さ2の ＋ の連が1つ，

長さ2の − の連が2つ，長さ1の − の連が1つあることになります．

いま n 個のAとBの列においてAの個数を n_A，Bの個数を n_B としましょう．そのとき帰無仮説として

“n_A 個の A と n_B 個の B ($n_A+n_B=n$) の並び方が無規則である”

としますと，この帰無仮説のもとで得られる連の数の確率分布ができます．たとえば，$n_A=3$，$n_B=3$ のときすべての並び方と連の数は次表のようになります．

表 5.7　並び方と連の数

並	び	方				連の数
A	A	A	B	B	B	2
A	A	B	A	B	B	4
A	A	B	B	A	B	4
A	A	B	B	B	A	3
A	B	A	A	B	B	4
A	B	A	B	A	B	6
A	B	A	B	B	A	5
A	B	B	A	A	B	4
A	B	B	A	B	A	5
A	B	B	B	A	A	3
B	A	A	A	B	B	3
B	A	A	B	A	B	5
B	A	A	B	B	A	4
B	A	B	A	A	B	5
B	A	B	A	B	A	6
B	A	B	B	A	A	4
B	B	A	A	A	B	3
B	B	A	A	B	A	4
B	B	A	B	A	A	4
B	B	B	A	A	A	2

このとき，連の数の度数分布表は次のようになります．

表 5.8　連の数の度数分布表

連の数	2	3	4	5	6	計

$$平均値 = \frac{2n_A n_B}{n_A + n_B} + 1$$

$$分\quad散 = \frac{2n_A n_B(2n_A n_B - n_A - n_B)}{(n_A + n_B)^2(n_A + n_B - 1)}$$

なる正規分布曲線で近似できることが一般に知られています．したがって帰無仮説のもとでは

$$(5.6)\qquad \frac{連の数 - \left(\dfrac{2n_A n_B}{n_A + n_B} + 1\right)}{\sqrt{\dfrac{2n_A n_B(2n_A n_B - n_A - n_B)}{(n_A + n_B)^2(n_A + n_B - 1)}}}$$

の頻度分布は平均値 0，分散 1 の規準型正規分布曲線で近似することができます．したがって有意水準 5％ の棄却域

$$(-\infty,\ -1.96) \qquad (1.96,\ \infty)$$

に式 (*5.6*) の値がはいるかどうかを見ればよいことになります．たとえば，この節のはじめの銅貨投げの実験で銅貨 A について，この無規則性の検定を行なってみましょう．

帰無仮説: "54 個の 1 と 46 個の 0 の並び方が無規則である".

このとき，表 5.2 より連の数は 64 で

$n_A = 54$　（1 の個数）

$n_B = 46$　（0 の個数）

と考えればよいから式 (*5.6*) の値は 2.70 となり，これは有意水準 5％ の棄却域にはいってしまいます．

したがって表 5.2 の銅貨 A の実験結果の起る確率は 0.05 よりも小さく，小さい確率のものが 1 度の実験で起こったのですから帰無仮説は有意水準 5％ で認められないことになります．したがって表と裏の等出現性は認められても無規則性が認められなくなり，正常な銅貨であることが保証されなくなります．

もちろん質問の中の

$$\overbrace{1\ \ 1\ \ 1\cdots\cdots\cdots 1}^{48\ 個} \qquad\qquad \overbrace{0\ \ 0\ \ 0\cdots\cdots\cdots 0}^{52\ 個}$$

の場合は連の数が 2 で式 (*5.6*) の値が有意水準 5％ でも 1％ でも棄却

域にはいることは明らかでしょう.

無規則性の検定になるとなかなか人間の直感では判断することが困難となり，統計的仮説検定法の威力が認識できるわけです.

問　　題 12

1. メンデルはえんどうの交配実験において，次の表の結果を得た. 度数分布は理論的には 9：3：3：1 の割合になるべきものである. この実験の結果はこの理論によく適合しているといえるか.

表 5.9　えんどうの交配実験

種子の種類	円くて黄色	角ばって黄色	円くて緑色	角ばって緑色	計
観測度数	315	101	108	32	556

2. 第2章で述べた円周率 π の小数部分のはじめから 100 個の数字において 0から9までの数の出現率が等しいかどうかを有意水準 5% で検定せよ. 数字は第2章に示されているものを利用せよ.

3. 円周率 π の小数部分のはじめから 100 個の数字について0から4までをA, 5から9までを B とみなして連の検定を有意水準 5% で行なえ.

5.3　適合度検定法（その 2)―分割表

例 1　人口 15000 人の地域（母集団）でインフルエンザの予防注射の効果があるかどうかを調べるために 200 人をランダムに選び，インフルエンザにかかったかどうかと同時に，予防注射を受けたかどうかについて調べて，その結果（観測度数）を表 5.10 にまとめた. この表のことを 2×2 **分割表**という.

表 5.10　2×2 分割表

	インフルエンザにかかった人	インフルエンザにかからなかった人	計
予防注射を受けた人	35	45	80
予防注射を受けなかった人	80	40	120
	115	85	200

この表から見ると直感的には予防注射のききめはありそうだが，これを確率的に検定法の立場から吟味してみよう.

一般の母集団において2つの属性 B, C がそれぞれ2つの項目 B_1, B_2,

C_1, C_2 に分類されているとする．この母集団からの大きさ n のランダムサンプルにもとづき表 5.11 のような 2×2 分割表にその観測度数が示してある．

表 5.11　2×2 分割表

$B \backslash C$	C_1	C_2	計
B_1	a	b	$a+b$
B_2	c	d	$c+d$
計	$a+c$	$b+d$	n

このとき次のような帰無仮説をたてる．

帰無仮説：“属性 B と C は無関係である”

この帰無仮説のもとで，母集団から大きさ n のランダムサンプルを多数回くり返し

$$(5.7)\quad \frac{(a-\alpha)^2}{\alpha}+\frac{(b-\beta)^2}{\beta}+\frac{(c-\gamma)^2}{\gamma}+\frac{(d-\delta)^2}{\delta}$$

$$=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$\text{ただし，}\alpha=\frac{(a+c)(a+b)}{n},\quad \beta=\frac{(b+d)(a+b)}{n}$$

$$\gamma=\frac{(a+c)(c+d)}{n},\quad \delta=\frac{(b+d)(c+d)}{n}$$

の値を計算して，その頻度分布をつくると $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ がある程度大きければ（目安としてすべて 10 以上），この頻度分布は自由度 1 のカイ 2 乗分布で近似できることが知られている．そこで有意水準を定めると自由度 1 のカイ 2 乗分布表（巻末付表 4）より棄却域が定まり，式（5.7）の値が棄却域にはいるかどうかを調べれば帰無仮説が棄却される（否定される）かどうかがわかる．

さて，前の予防注射とインフルエンザの例にもどろう．

帰無仮説：“予防注射の有無とインフルエンザにかかったか，かからなかったかは無関係である”

表 5.10 より式（5.7）の値は

$$\frac{200\times(35\times40-45\times80)^2}{80\times120\times115\times85}=10.32$$

となってこれは自由度 1 のカイ 2 乗分布の有意水準 5% の棄却域 $(3.841, \infty)$ にはいり，帰無仮説が正しいとすると表 5.10 のような観測

度数となることは確率 0.05 以下でしか起こらないことになり，帰無仮説は認められないと判断する．このような意味で予防注射はききめがあると考えてよかろう．

表 5.11 において a, b, c, d のうちあまり大きくないもの (10 以下となるもの) があるときは，式 (5.7) の頻度分布の自由度1のカイ2乗分布への近似度が悪くなり，式 (5.7) に修正をほどこして次式の頻度分布が自由度1のカイ2乗分布で近似できることを利用しなければならない．

$$(5.8)\qquad \frac{n\left(ad-bc\pm\dfrac{n}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

ただし，複号 ± は分子の括弧内の絶対値が小さくなるようにする．これを**イェツ** (Yates) **の修正**と呼んでいる．

例 2　表 5.12 のような観測度数が得られたとする．

表 5.12

B \ C	C_1	C_2	計
B_1	80	5	85
B_2	100	15	115
計	180	20	200

このとき

帰無仮説：“属性 B と C は無関係である”

を有意水準 5% で検定する．

解　式 (5.8) より

$$\frac{n\left(ad-bc\pm\dfrac{n}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{200\times\left(80\times15-100\times5-\dfrac{200}{2}\right)^2}{85\times115\times180\times20}=2.05$$

となり，有意水準 5% の棄却域 (3.841, ∞) にはいらない．したがって帰無仮説が正しいと考えたとき観測度数が表 5.12 のようになることは妥当であると判断する．

属性 B の項目が k 個 ($k>2$)，C の項目が l 個 ($l>2$) のときも 2×2 分割表が $k\times l$ 分割表となるだけで適合度検定ができる（補注 [10]）．

問　題　13

ある県の中学1年生の男子300人をランダムに選び，家庭で牛乳を飲んでいるかいないかを尋ねると同時に身長を測定したら，次のような観測度数が得られた．

	148 cm 未満	148 cm 以上	計
牛乳を飲んでいる	65	105	170
牛乳を飲んでない	72	58	130
計	137	163	300

このとき

帰無仮説："牛乳を飲んでいるかいないかと身長の大小は無関係である"

を有意水準 5％ で検定せよ．その結果何がわかるか．

5.4　母集団の平均値に関する検定

例 1　ある県の市街地域の中学1年生の男子（母集団 A）の身長の頻度分布は過去のデータから平均値 146.7 cm の正規分布曲線で近似できることがわかっている．いまこの県の農村地域の中学1年生男子（母集団 B，身長の頻度分布は正規分布曲線で近似できる）から 30 人をランダムに選び，身長を測定した結果，サンプル平均値 143.2 cm，サンプルからの母集団 B の分散の推定値 $(7.63\ \mathrm{cm})^2$ を得た．この結果，農村地域の中学1年生男子の身長は市街地域の中学1年生男子に比べて劣っていると考えられるか．

解　農村地区の中学1年生男子の身長のサンプル平均値 143.2 cm とサンプル分散 $(7.63\ \mathrm{cm})^2$ から母集団 B の平均値の信頼度 95％ の信頼区間は第3章の式（*3.22*）より図 5.7 のようになる．

$$\bar{x}_n \pm t_\alpha \sqrt{\frac{u_n{}^2}{n}} = 143.2 \pm 2.05\sqrt{\frac{(7.63)^2}{30}}$$

$$= 143.2 \pm 2.9$$

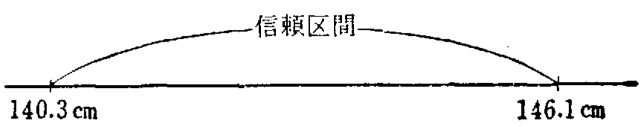


図 5.7　信頼度 95％ の信頼区間

この図から明らかなように母集団 A の平均値 146.7 cm を信頼区間の中に含んでない．このことから農村地域の中学1年生男子の

身長は市街地域に比べて劣っているといってよく，母集団 A と母集団 B の平均値の間に差が認められと考える.

これを検定の立場からは次のように考えるが，その意味するところはほとんど同じである.

帰無仮説: “母集団 A と母集団 B の平均値が等しい”.

のもとで，第3章の式 (*3.21*)

$$t=\frac{\bar{x}_n-146.7}{\sqrt{\frac{{u_n}^2}{n}}}$$

の頻度分布が自由度 $n-1$ の t 分布曲線で近似できることから，この例では

$$t=\frac{143.2-146.7}{\sqrt{\frac{(7.63)^2}{30}}}=-2.51$$

となり，この場合，自由度29だから有意水準5％の棄却域 $(-\infty,\ -2.05)$ $(2.05,\ \infty)$ にはいる．したがって帰無仮説が正しいとすると30人のランダムサンプルのサンプル平均値が143.2となる確率は0.05以下であることがわかり，仮説を否定するわけである．有意水準を1％とすると巻末付表5の t-分布表より棄却域は区間

$$(-\infty,\ -2.76)\qquad(2.76,\ \infty)$$

となり，この例では t の値は棄却域にはいらないので帰無仮説を否定することはできない．これは帰無仮説が正しいとすると，30人のランダムサンプルのサンプル平均値が143.2となる確率は0.01以下にはならないことを意味している．有意水準5％で棄却域にはいり，有意水準1％で棄却域にはいらないということは，帰無仮説が正しいときサンプル平均143.2となる確率が0.05より小さく0.01より大きいことを意味している.

注　$t^2=\frac{(\bar{x}_n-\mu)^2}{\frac{{u_n}^2}{n}}$ の頻度分布が自由度対 $[1, n-1]$ の F-分布曲線（補注[12]）で近似できることが知られており，巻末付表6の F-分布表を用いてもよい.

例 2　ある県の市部の12歳の男子（母集団 A）からランダムに選んだ30人の身長の平均値は149.5 cmであり，郡部の12歳の男子（母集団 B）

からランダムに選んだ 20 人の身長の平均値は 145.2 cm であった．

またサンプルからの母集団 A, B の分散の推定値はそれぞれ $(7.82\ \mathrm{cm})^2$, $(7.75\ \mathrm{cm})^2$ であった．もともと母集団 A, B の分散は等しいとみなしてよいことが過去のデータからわかっており，また2つの母集団の身長の頻度分布はいずれも正規分布曲線で近似できることもわかっている．このとき母集団 A と母集団 B の身長の平均値を等しいとみなしてよいか．

解 母集団 A, B の身長の頻度分布は正規分布曲線で近似できることから，3章の式 (*3.22*) と巻末 t-分布表より，母集団 A, B の平均値の信頼度 95% の信頼区間は図 5.8 のようになる．

$$母集団\ A:\quad 149.5 \pm 2.05 \times \sqrt{\frac{(7.82)^2}{30}} = 149.5 \pm 2.93$$

$$母集団\ B:\quad 145.2 \pm 2.09 \times \sqrt{\frac{(7.75)^2}{20}} = 145.2 \pm 3.62$$

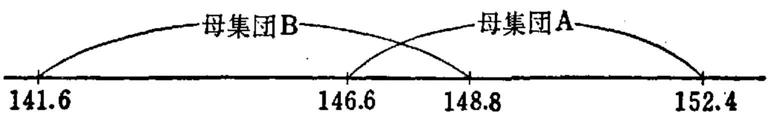


図 5.8 信頼度 95% の信頼区間

この図をみると，信頼区間に重複しているところがあり [区間 (146.6, 148.8)]，この区間に母集団 A, B の真の平均値がはいっている可能性がある．サンプル平均だけ

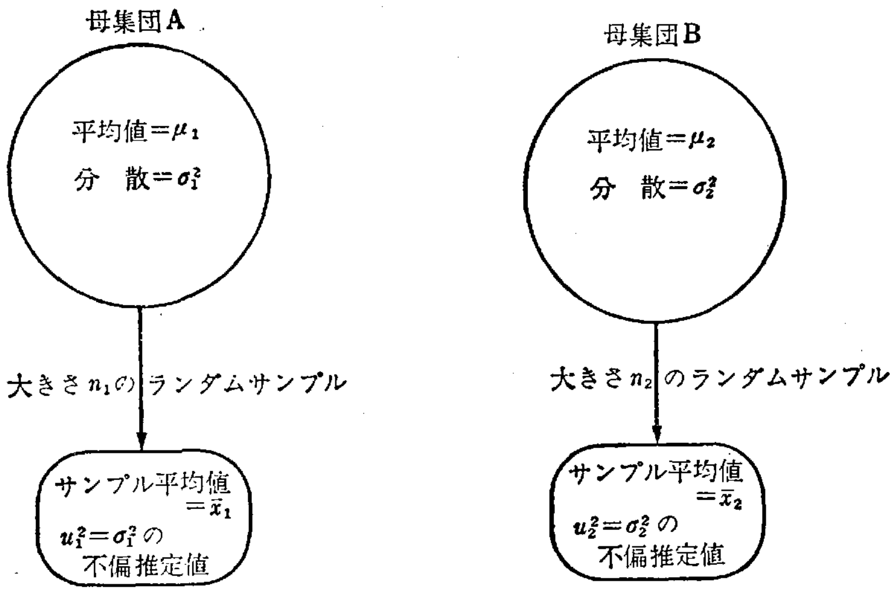


図 5.9 母集団とランダムサンプル

からは母集団 A の平均値の方が大きいように見えるが必ずしもそうはいえないことがわかろう．これを検定の立場から考えてみよう．まず，検定の手順を一般的に書いてみよう（図 5.9 参照）．

（母集団における仮定）

① 母集団 A，B の頻度分布が正規分布曲線で近似できる．

② $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ とみなせる．

（検定の手順）

（イ） 帰無仮説："$\mu_1=\mu_2$" をたてる．

（ロ） 帰無仮説のもとで

$$(5.9)\quad t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)u_1^2+(n_2-1)u_2^2}{n_1+n_2-2}\times\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}}$$

の頻度分布が自由度 n_1+n_2-2 の t-分布曲線（補注［11］）で近似できる．

（ハ） したがって t の値を母集団 A，B からのランダムサンプルの値から計算し，巻末付表5（t-分布表）からつくった有意水準 α％ の棄却域に t の値がはいるかどうかを見て，もしはいれば有意水準 α％ で仮説を否定する．

さて，この例の場合

$$t=\frac{149.5-145.2}{\sqrt{\dfrac{29\times7.82^2+19\times7.75^2}{48}\times\left(\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{20}\right)}}=1.91$$

となり，巻末付表5より有意水準 5％ の棄却域にはいらず仮説：$\mu_1=\mu_2$ は有意水準 5％ では否定できないことになる．

注 この場合も例1と同様

$$t^2=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2}{\dfrac{(n_1-1)u_1^2+(n_2-1)u_2^2}{n_1+n_2-2}\times\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)}$$

の頻度分布が自由度対［1，n_1+n_2-2］の F-分布曲線（補注［12］）で近似できることを利用して，巻末付表6の F-分布表を用いてもよい．

〈質問〉 例1，例2ともに母集団の頻度分布が正規分布曲線で近似できることを仮定しているのですが，正規分布曲線で近似できないとき，いい

かえれば母集団の頻度分布がどんな形をしているかわからないときの検定はどのようにすればよいのですか.

答 これは分布型によらない検定法（ノンパラメトリックな検定法）として,

メディアン検定

順位を用いる検定

ウィルコクソンの U 統計量を用いる検定

などが知られていますが, これらについては, たとえば巻末参考書 [9] を参照して下さい. ただ, p. 108 の例2においてサンプル数 n_1, n_2 が非常に大きければ母集団の頻度分布が正規分布曲線で近似できなくても, また $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ とみなすことができなくても, 中心極限定理によって $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ の頻度分布は, それぞれ平均値 μ_1, μ_2, 分散 $\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}$, $\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}$ の正規分布曲線で近似できますので

帰無仮説: "$\mu_1=\mu_2$"

のもとで

$$z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

の頻度分布が平均値 0, 分散 1 の正規分布曲線で近似できることを用いればよろしい. σ_1^2, σ_2^2 は未知なので u_1^2, u_2^2 を代入して, 実際には

$$z'=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{u_1^2}{n_1}+\dfrac{u_2^2}{n_2}}}$$

の頻度分布が平均値 0, 分散 1 の正規分布曲線で近似できることを利用するわけです. 多少の代入誤差ははいりますが, サンプルが大きければ無視できますので有意水準 5% の棄却域は, 巻末付表 2 の正規分布表から定まり, z' の値がこの棄却域にはいれば帰無仮説を否定するわけです.

問　　題 14

1. ある工場でつくった電球のうちから 18 個のランダムサンプルをとり出し寿命時間を測定したところ次の結果を得た.

1680	1780	1760	1800	1720	1830	1720	1760
1740	1790	1680	1590	1820	1660	1720	1750
1730	1760						

この工場でつくった電球の平均寿命が 1800 時間であるといっているが，これは認められか．ただしこの工場でつくった電球の寿命時間の頻度分布は正規分布曲線で近似できることがわかっているとする．

2．ある大学1年生の男子の中から 12 人を，2年生の男子の中から 10 人をランダムに選び，50 m 走の記録をとったところ次のようになった．

1年生男子（単位：秒）　6.9，7.7，7.3，7.2，7.8，7.6，7.3，6.8，7.4，7.3，7.6，7.7

2年生男子（単位：秒）　7.1，7.0，6.7，7.0，6.9，7.5，7.6，7.4，6.9，6.9

この結果，1年生の男子と2年生の男子の 50 m 走の平均値に有意水準 5 % で差があるといえるか．ただし1年生，2年生の 50 m 走の記録の頻度分布は過去のデータから正規分布曲線で近似できることがわかっており，また両者の分散は等しいと考えてよい．

5.5　2つの母集団の比率の差の検定

例　ある市においてテレビの視聴率調査を男女別に行なった．ある番組に対して男性は 200 人のランダムサンプルのうち，20 人が見ていると答えたのに対し，女性は 300 人のランダムサンプルのうち 25 人が見ていると答えた．このとき，男性と女性の視聴率に差があるかどうかを調べる．

解　前節の2つの母集団の平均値の差の検定と考え方は同じであるが，まず男性と女性（2つの母集団）の番組の視聴率 p_1，p_2 の信頼度 95 % の信頼区間を第3章の式（*3.29*）によりつくってみよう．（図 5.10），ただし母集団の大きさは非常に大きいと考え，式（*3.29*）で $\dfrac{N-n}{N-1} \fallingdotseq 1$ とみなしている．

$$\text{男性:}\quad \hat{p}_1 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}} = 0.1 \pm 0.042$$

$$\text{女性:}\quad \hat{p}_2 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = 0.083 \pm 0.031$$

ただし　$\hat{p}_1$，$\hat{p}_2$ は男性，女性のサンプル比率，n_1，n_2 は男性，女性のランダムサンプルの数

この図をみると男性と女性の視聴率の信頼区間に重複している部分が多く，サンプル比率だけから男性の方が視聴率が高いということはできない．これを検定の立場から考えてみよう．一般に p_1, p_2 を2つの母集団の比率とし，$\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ をそれぞれのサンプル比率とするとき検定の手順は次のようになる．

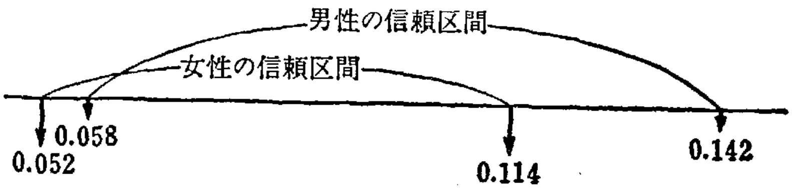


図 5.10　信頼度 95％ の視聴率の信頼区間

（イ）　帰無仮説：“$p_1 = p_2$” をたてる

（ロ）　帰無仮説のもとで，n_1，n_2 がある程度大きいとき

（目安として $n_1, n_2 \geqq 20$）

$$(5.10)\quad z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p}) \times \left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}},$$

$$\text{ただし}\quad \hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1},\quad \hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2},\quad \hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$$

の頻度分布が平均値0，分散1の正規分布曲線で近似できる．

（ハ）　したがって z の値を2つの母集団のランダムサンプルから計算し，巻末付表2（正規分布表）からつくった有意水準 α％ の棄却域に z の値がはいるかどうかを見て，もしはいれば有意水準 α％ で仮説を否定する．

さて，この例の場合に式（5.10）から

$$z = \frac{0.1 - 0.083}{\sqrt{\dfrac{45}{500} \times \left(1 - \dfrac{45}{500}\right) \times \left(\dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{300}\right)}} = 0.65$$

となる．有意水準 5％ の棄却域は巻末付表2の正規分布表より区間 $[-\infty,\ -1.96]$, $[1.96,\ \infty]$ となるから z の値はこの棄却域にはいらない．したがって帰無仮説は有意水準 5％ で否定することはできないと判断をくだすわけである．もちろん図 5.10 を見ただけで直感的にもこの事実はわかるであろう．

〈質問〉 有意水準を 5％ とか 1％ にする場合が多いのですが，5％，1％ を特に使うのは何か理由がありますか．

答　この章でもほとんど有意水準 5％ として考えてきましたが，これは信頼区間をつくるときの信頼度と同様で特別な理由はなく，伝統的な基準として使われているにすぎません．目的に応じて有意水準 4％，6％ などとしていっこうにかまいません．ただ，巻末付表に有意水準 5％，1％ については棄却域をつくるときの数値が示してあるので 5％，1％ を用いると便利でしょう．

問　　題 15

ある市の 2 つの地区 A，B の住民に対して市立図書館の利用度を調べるために，それぞれ 200 人，150 人のランダムサンプルを選び利用しているかどうかについてたずねたところ，A 地区は 200 人のうち 10 人が，B 地区は 150 人のうち 18 人が利用していると答えた．この結果，A 地区と B 地区の市立図書館の利用度に差があるといえるかどうか，有意水準 5％ で検定せよ．ただし，2 つの地区の住民の数はサンプルに比べて非常に大きいとする．

第6章　確率モデルとシミュレーション

——コンピュータの統計的利用法——

サイコロを2回投げて，2回とも1の目が出たとき勝ちとなる賭けと，銅貨を5回投げて全部表が出たとき勝ちとなる賭けとは，同一の賭け金で勝ったときの収入が同一である場合，どちらが有利であるかを考えてみよう．昔の人々はこの問題の答を得るために，確かに前の賭けのほうが損だということを身にしみて知るまで両方の賭けをきわめて多数回繰り返し実験してみる以外に方法はなかったであろう．ところが現在のように確率の計算が容易にできる場合には，サイコロも銅貨も正常であるとすると，

$$\text{サイコロの賭けで勝つ確率} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\text{銅貨の賭けで勝つ確率} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

となることはただちにわかる．この結果から，この差は $\frac{1}{288}$ という小さなものであるから，1度や2度この賭けに加わる人にとっては，どちらに賭けても大差はない．しかしながら，長い間賭けを経営する人にとっては，このわずかな差もはっきりした差となって現われてくる.(*)

このような単純な問題でも確率論を知らない人にとっては，とにかく賭けを実際に多数回繰り返してみる以外に解答を得ることはできない．もし判断を誤ると，実際に繰り返しによって解がわかったときは，すでにはっきりした損害をこうむったあとであるという不都合に遭遇する．このような問題に対して，困難を感じていた人々にとっては，確率論はきわめて有効な道具となったのである．

ところが，現在でもなおかつ社会学，教育学，工学，医学，物理学などの分野において，確率論的に表現された問題の数値解が，必ずしも現在可能な解析的な方法によっては得られないような場合が多い．この場合，賭けの例のように確率の計算ができなくて，サイコロとか銅貨を投げて，多数回実験

(*)　この例は，赤池弘次著“モンテカルロ法”科学基礎論研究 14 号（1959 年）より引用

をしていた頃と同じように，乱数を用いるコンピュータでのシミュレーションにより，近似解を得ようとするわけである．ここに，乱数を用いるシミュレーションの必要性が生じ，目的とする解の近似値を得るための有力な手段となる．そのためには，基礎的な道具となる乱数が，容易にコンピュータで生成されることが必要である．乱数の生成法については，すでに第2章で述べた．

例題 1　待ち行列

駅の切符売り場や，タクシー乗り場，また病院の薬局の窓口などに客が行列をつくっているのをよく見かける．この場合，関係者はできるだけ行列が長くならないように，切符売り場の窓口やタクシーの台数，または薬剤師の人数を増すことによって，客に対しての便宜をはかっているわけである．しかし，窓口をやたらにふやしたり，あるいはタクシーの台数，薬剤師の人数を多くすると，必要以上の経費がかかってしまう．そこで，関係者は客の不満がでないような最小限必要な窓口の個数，タクシーの台数，薬剤師の人数などを算出する必要がある．

ここでは，タクシー乗り場の例について考えてみる．

何台かのタクシーが1つの乗り場からお客を乗せて目的地に運び，またその乗り場に帰ってくる場合を考える．この場合，タクシーの台数が少ないと客の行列は長くなるし，あまり多すぎると客の行列はできないけれど，経営者にとっては無駄な経費がかかりすぎる．そこで，お客もあまり行列しなくて済むし，経営者も採算がとれるように適当なタクシーの台数を算出する必要が生じる，

(手順 1)　タクシー乗り場にやってくる客の時間間隔の調査

タクシー乗り場にやってくる客の時間間隔，すなわち1人の客がやってきて，次に客が来るまでの時間は，あるときは短かく，ある時は長い．しかし，この時間間隔は，乗り場によって，かなりきれいな法則性をもっていることが知られている．そこで，ある駅の1つのタクシー乗り場にやってきた200 人について調査してみると次のようであった（表 6.1，図 6.1），ただ

し，2人以上いっしょに乗車する場合は説明を簡単にするために1組として1人とかぞえた．

表 6.1　客200人の到着時間間隔の度数分布表

階　級（分）	階　級　値	度　数（人数）	累積度数の百分率（%）
0〜0.5	0.25	12	6
0.5〜1	0.75	10	11
1〜1.5	1.25	35	28.5
1.5〜2	1.75	60	58.5
2〜2.5	2.25	50	83.5
2.5〜3	2.75	20	93.5
3〜3.5	3.25	8	97.5
3.5〜4	3.75	5	100
計		200	

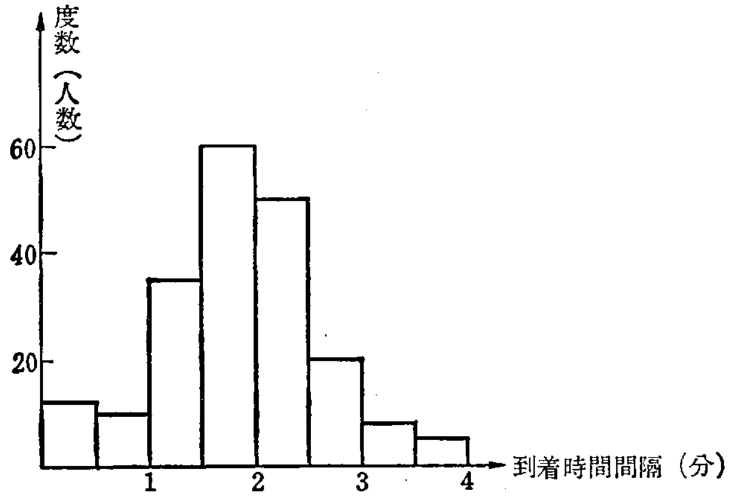


図 6.1　表 6.1 に対応するヒストグラム

表6.1によると，前の客がやって来てから0.5分以内にやってきた客は，200 人のうち 12 人で全体の 6% である．また 0.5〜1 分の間にやってきた客は，200 人のうち 10 人であり，全体の 5% である．順次 1〜1.5 分は 35 人で 17.5%，1.5〜2 分は 60 人で 30%…… となっている．（注．調査人数を多くしてもこの百分率の値は，200 人の場合とほとんど変わらない）．説明を簡単にするために，0〜0.5 分，0.5〜1 分…… の時間間隔の代表値として，その階級値 0.25 分，0.75 分…… を考えることにする．

（手順 2）　1台のタクシーが，乗り場でお客をのせて目的地に運び，帰って来るまでの時間の調査

1台のタクシーが，乗り場でお客をのせて目的地に運び，乗り場に帰って来る時間間隔（お客に対するサービス時間）を100台のタクシーについて調べてみると表6.2のようであった．

表6.2において，お客を乗せて目的地に運び，乗り場に帰って来るまでの時間が4〜8分のものが100台のうち2台（2％），8〜12分のものが100台のうち23台（23％）…… である．この場合も，説明を簡単にするために階級値を用いることにする．タクシーの台数をさらに多く調査しても，手順1の（注）と同じように考えられる．

表 6.2　タクシー100台のサービス時間の度数分布表

階級（分）	階級値	度数（車の台数）	累積度数の百分率（％）
4〜8	6	2	2
8〜12	10	23	25
12〜16	14	30	55
16〜20	18	20	75
20〜24	22	15	90
24〜28	26	5	95
28〜32	30	3	98
32〜36	34	1	99
36〜40	38	1	100
計		100	

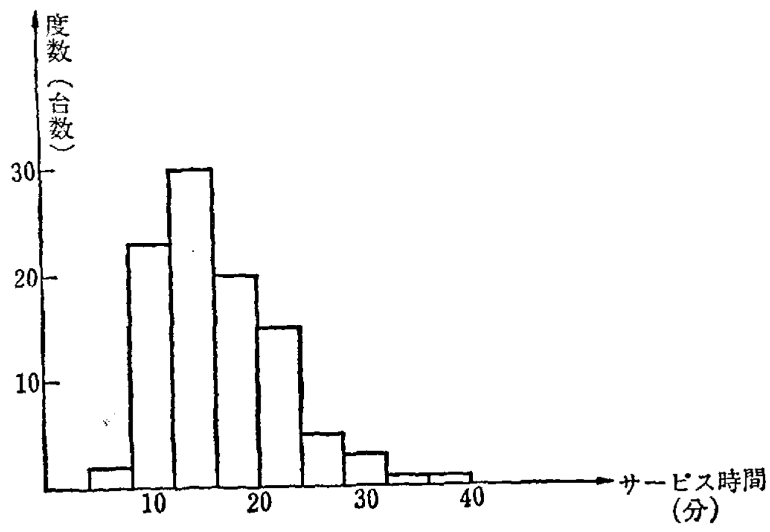


図 6.2　表6.2に対応するヒストグラム

さて，この2つの調査で乗り場にやって来るお客，およびタクシーのお客を目的地に運んで帰って来る時間の規則性がよくわかった．よって，この状

態をコンピュータで乱数を用いて再現してみることにする.

（手順 3）　乱数によるお客の到着の再現

時間間隔が表6.1における割合（%）をもつようにお客を到着させる. このためには, 2桁の乱数, たとえば

70, 46, 98, 51, 08, 31, 68, 84, 71, 12, 68, 39, 05, 13, 30, 56, 71, 49, 43, 28……

を用いると, 最初の乱数 70 に対応する時間間隔は, 70 が累積度数の百分率で 58.6〜83.5% の間に入っているので, 階級値 2.25 分である. これは, 最初の客が乗り場にやって来るのは, 基準時刻より 2.25 分過ぎたときであることを意味する. 次の乱数は 46 で, これは累積度数の百分率で 28.6〜58.5% の間にあり, 46 に対応する時間間隔は階級値 1.75 分である. これは, 最初の客が乗り場に到着してから, 次の客が乗り場に到着するまでの時間が 1.75 分であることを意味する. 順次このようにして, これらの乱数に対応する到着時間間隔は次表のようになる.

表 6.3　乱数に対応する到着時間間隔

乱　　数	70	46	98	51	08	31	68	84	71	12
対応する到着時間間隔	2.25	1.75	3.75	1.75	0.75	1.75	2.25	2.75	2.25	1.25
乱　　数	68	39	05	13	30	56	71	49	43	28
対応する到着時間間隔	2.25	1.75	0.25	1.25	1.75	1.75	2.25	1.75	1.75	1.25

（手順 4）　タクシー台数が2台の場合のシミュレーション

タクシーの台数を2台とすると, お客の待ち行列の状態はどのようになるであろうか. まず, 2台のタクシーは乗り場にいてお客を待っているとする. そこへ, 手順3で述べたように最初の客が, 2.25 分経過してやって来てタクシー A に乗る. 次に, また 1.75 分後に第2の客がやって来てタクシー B に乗る. ここで, タクシー A, B は目的地まで客を運んで帰って来るのであるが, その帰って来るまでの時間（サービス時間）の分布は, 表 6.2 のようになるから手順3と同様に別の2組の乱数

タクシー A:　64, 34, 76, 28, 42……

タクシー B:　22, 36, 86, 93, 06……

を用いて，表6.2の累積度数の百分率からこれらの乱数に対応するサービス時間は，

	乱数		サービス時間		乱数		サービス時間
タクシー A:	64	⟷	18 分	タクシー B:	22	⟷	10 分
	34	⟷	14 分		36	⟷	14 分
	76	⟷	22 分		86	⟷	22 分
	28	⟷	14 分		93	⟷	26 分
	42	⟷	14 分		06	⟷	10 分
	⋮		⋮		⋮		⋮

となり．タクシー A は最初のお客を目的地に運んで帰って来るまでの時間は 18 分，それに対してタクシー B は 10 分である．よって，第3の客はタクシー B に乗ることになる．こうして，順次シミュレートしてみると図6.3 のようになる．

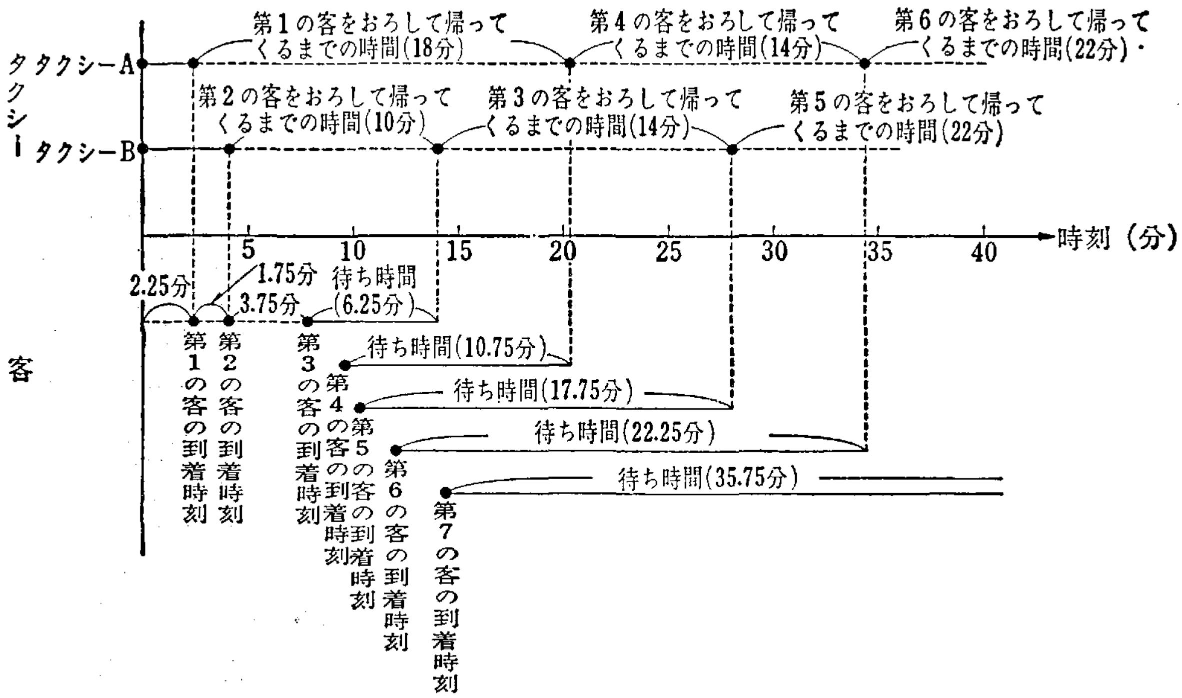


図 6.3　タクシーの台数2台のときのシミュレーション

この図からみると第3，第4，第5…… の客に対する待ち時間は，時刻が経過するとともに，ますます大きくなってくることがわかる．たとえば第6の客の待ち時間は約 22 分，第7の客は 30 分以上にもなっていることが

わかる．これは，明らかにタクシーの台数が少なすぎることを意味している．乱数をかえてはじめからやりなおしても，ほとんど同じ状態となることが確かめられる．

（手順 5）　タクシー台数を増したときのシミュレーション

たとえば，タクシー台数を6台にしてみると図 6.4 のようになる．ただし，お客の到着時間間隔は2台の場合と同じとする．もちろん，別の乱数を用いて変えてもかまわないが簡単のために同じとした．6台のタクシー A，B，C，D，E，F に対しては次の乱数を用いた．

	乱数		サービス時間		乱数		サービス時間
タクシー A:	63	⟷	18 分	タクシー B:	89	⟷	22 分
	41	⟷	14 分		17	⟷	10 分
	26	⟷	14 分		96	⟷	30 分
	09	⟷	10 分		07	⟷	10 分
	86	⟷	22 分		20	⟷	10 分
	⋮		⋮		⋮		⋮

	乱数		サービス時間		乱数		サービス時間
タクシー C:	24	⟷	10 分	タクシー D:	48	⟷	14 分
	51	⟷	14 分		96	⟷	30 分
	17	⟷	10 分		50	⟷	14 分
	50	⟷	14 分		56	⟷	18 分
	68	⟷	18 分		09	⟷	10 分
	⋮		⋮		⋮		⋮

	乱数		サービス時間		乱数		サービス時間
タクシー E:	23	⟷	10 分	タクシー F:	21	⟷	10 分
	89	⟷	22 分		08	⟷	10 分
	32	⟷	14 分		91	⟷	26 分
	06	⟷	10 分		24	⟷	10 分
	61	⟷	18 分		65	⟷	18 分
	⋮		⋮		⋮		⋮

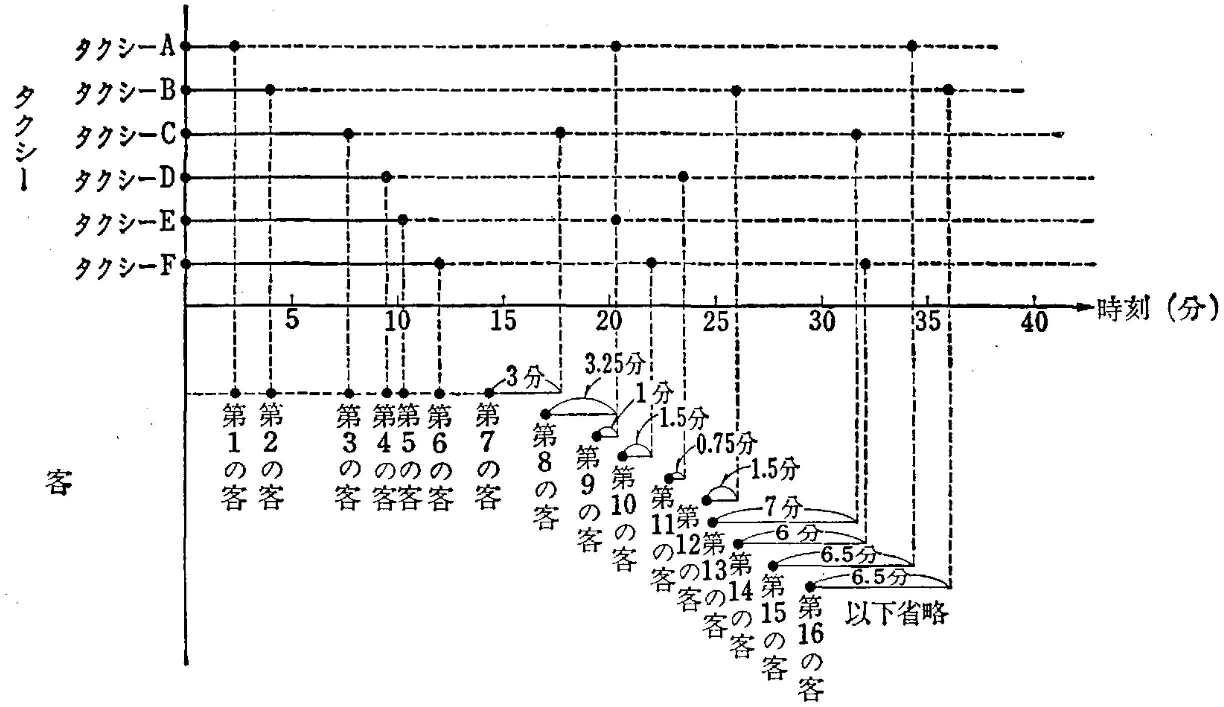


図 6.4　タクシーの台数6台のときのシミュレーション

この図より，6台ぐらいにするとお客の待ち時間も短かくなり，たとえば，第7の客はわずか3分待つだけである．その後の客の待ち時間も，かなり少なくて済むことがわかる．さらに，7台，8台と増すと，今度はタクシーのほうが乗り場で客を待って行列をつくることになる．乱数をかえてはじめからやりなおしても，ほとんど同じ状態となることが確かめられた．

いろいろな台数における1時間後，2時間後の客の待ち時間の様子がどのようになるかも，コンピュータで乱数を発生させながらシミュレーションを行なうことにより，短時間で把握できる．コンピュータは，こうした場合に非常に威力を発揮する．

以上の手順により，タクシーの最適台数を，シミュレーションによる客の待ち時間，行列の出来具合をみて決定すれば，人間の直観以上に合理的，科学的に求めることができる．

駅の切符売り場，病院の薬局の窓口の数，薬剤師の人数などを決定する場合にも，同じ手法を用いることができる．また，病院において，最初に医者の診察があり，次にレントゲン室で検査をうけ，というように順次2つの窓口があると考えられる場合，最初の窓口（医師の診察）で順番を待ち，それが終わって第2の窓口（レントゲン検査）でまた順番を待つ，といった複雑

なものでも，乱数を用いるシミュレーションにより，医師の人数を何人にすればよいとか，レントゲン機械の台数を何台にすればよいかなどを決定することができる．(図6.5参照)

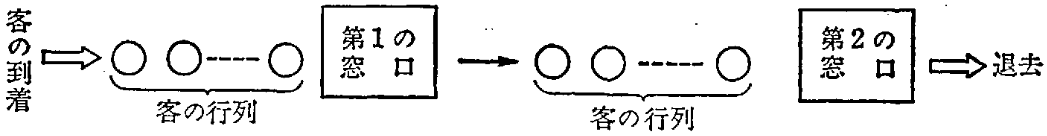


図 6.5　待ち行列系

第3の窓口，第4の窓口と，順次窓口があると考えられる場合も，考え方は同じである．

例題 2　銅貨投げと賭け

甲と乙の2人が銅貨投げの賭けをすることにしよう．もし表が出れば甲の勝ちで1円を乙からもらい，もし裏が出れば乙の勝ちで甲が乙に1円を支払う．この賭けをn回くり返して行ない，n回までに甲の得た総額をS_n円とする．このとき賭けの回数を横軸にとり，乱数を用いてこの賭けを実行してみよう．乱数の性質から1桁の乱数において偶数 (0, 2, 4, 6, 8) なら表が出たことにして甲の勝ち，奇数 (1, 3, 5, 7, 9) なら裏が出たことにして乙の勝ちとすればよいことがわかろう．このことから銅貨を用いなくても，乱数を用いることによってこのゲームは実行できるわけである．

いま，乱数をある乱数表から取り出すと

2, 6, 6, 9, 4, 8, 5, 3, 1, 8, 6, 5, 2, 7, 3, 0, 8, 7, 2, 4, 9,

7, 4, 2, 1, 3, 0, 8, 2, 0, 3, 4, 5, 3, 6, 9, 4, 2, 8, 7, ……

となっていた．最初2は偶数で表が出たことになり，第1回目は甲の勝ちで$S_1=1$，次も偶数で甲の勝ち，よって$S_2=2$，と順次回数を増してゆくと図6.6のようになる．

別の乱数を用いて少し長くやってみると図6.7のようになる．

図6.7をみると面白いことに気がつくであろう．1度甲がリードすると乙がリードするまでにかなりの回数を必要とすることである．最初乙がリードをうばい，局部的には上下をくり返しながら全体としては40回までは下がってゆきS_nの値は負の側にある．40回を過ぎると何らかの原因でS_nは増加する傾向を示し，49回目にはS_nは正の側になり，甲がはじめてリー

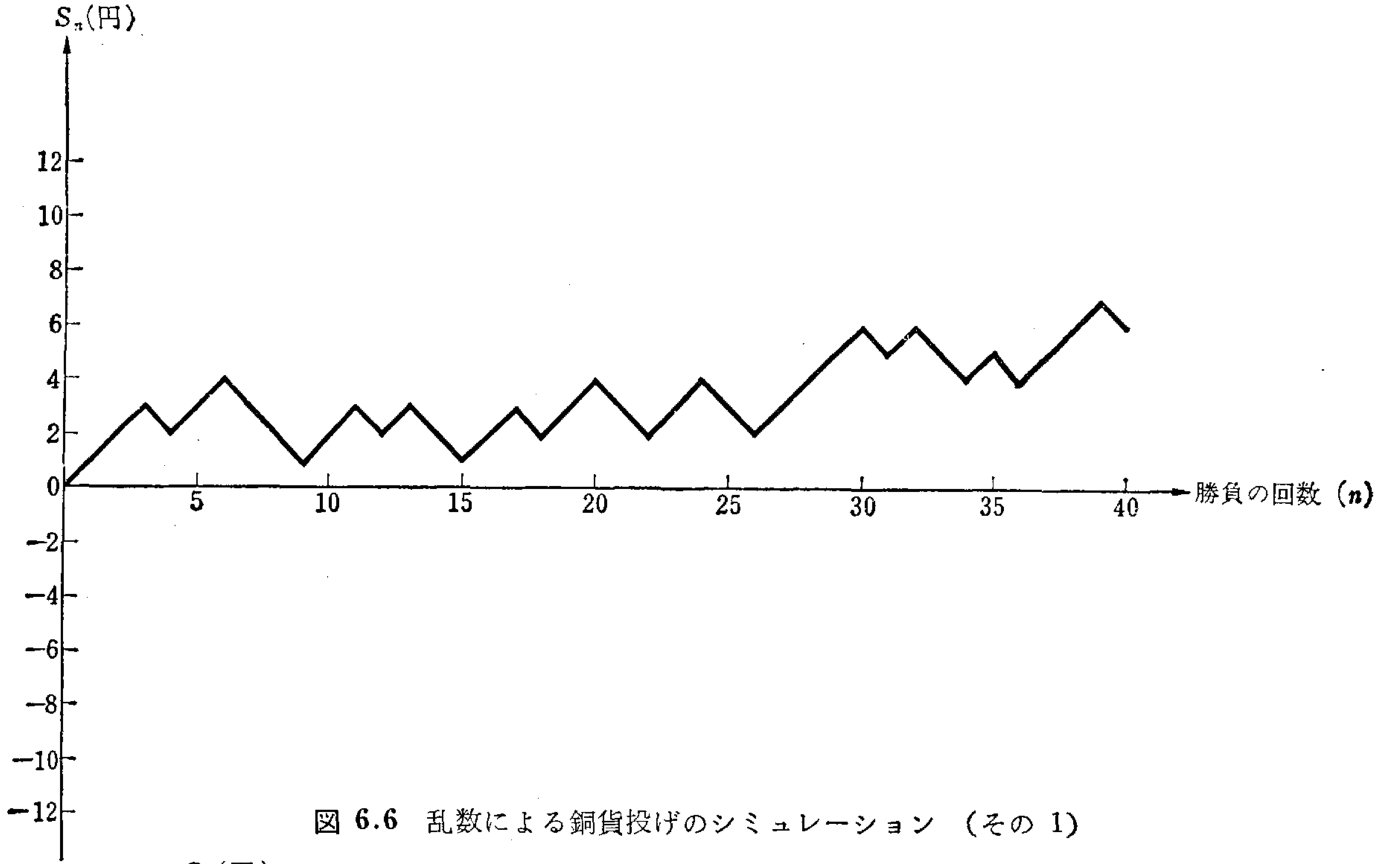


図 6.6　乱数による銅貨投げのシミュレーション　(その 1)

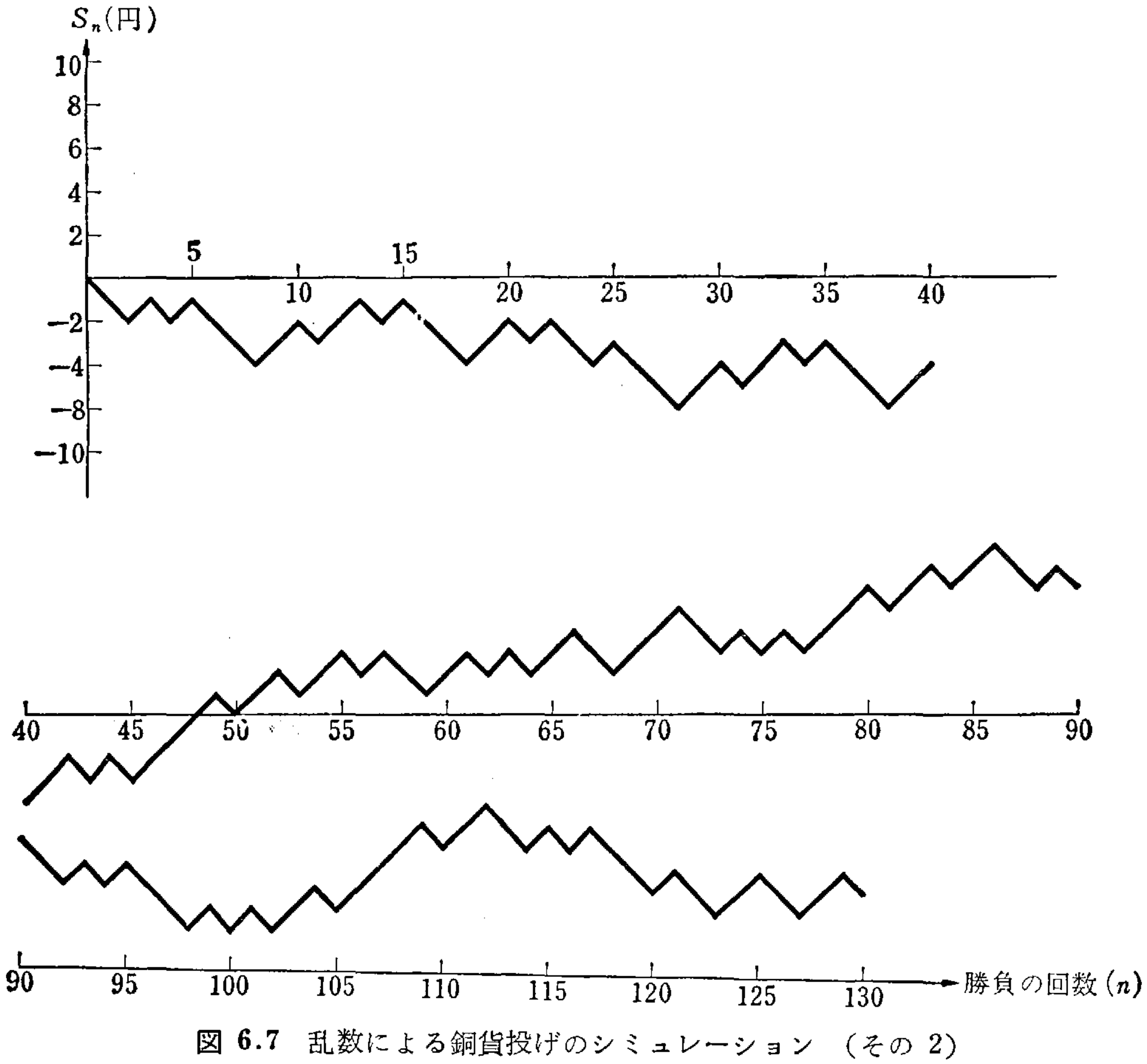


図 6.7　乱数による銅貨投げのシミュレーション　(その 2)

ドしたことを示す．その後だんだんと上がってゆき130回まで試みたが，依然として甲がリードを保ったままである．

このゲームを前回述べた乗算型合同法を用いてコンピュータで乱数をつくり，n の増加に伴う S_n の増減をXYプロッターを用いてグラフに描けば，$n=10000$ であろうと $n=50000$ であろうと非常に短時間で実行でき甲，乙のリードの様子がよくわかる．コンピュータを使用できる方は是非1度確かめていただきたい．

例題 3　ランダム・ウォーク

図6.8に示すように，1点Oにいる酔払いが，勝手気ままな方向に長さ l_1 だけ進み，点 p_1 にたどりつき，次にまた勝手気ままな方向に長さ l_2 だけ進み，点 p_2 にたどりついた．このような歩行を n 回くり返して点 p_n までたどりついたとする．いいかえれば，出発点Oからランダムな方向に長さ l_1 だけ歩き，次にまたランダムな方向に長さ l_2 だけ歩き，同様に各ステップにおいて方向だけがランダムに変わるように n ステップ歩くわけである．

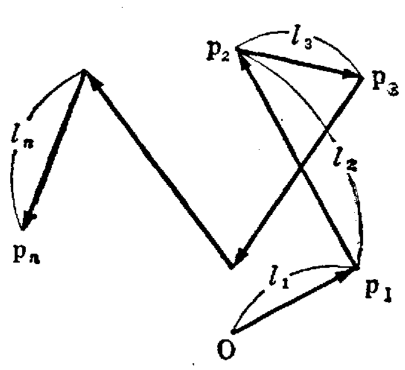


図 6.8　n ステップのランダム・ウォーク

このような運動の仕方を**ランダム・ウォーク**と呼んでいる．このモデルは分子の運動，煙突から出る煙の拡散など，いろいろの場面で適用することができる．

たとえば一定の長さ l の n ステップのランダム・ウォークにおいて出発点Oから1番遠く離れる距離はどれくらいだろうかという問題に対して，その確率分布を数式により解析的に計算することは非常にやっかいである．このような場合でも乱数を用いるコンピュータによるシミュレーションによって多数回実験をくり返し，容易にその近似解を求めることができる．また，XYプロッターによって図に描かせると，拡散の様子そのものがよくわかる．図6.9，図6.10は $l=1$，$n=25$ について2回実験を行なった結果である．ただし，進む方向をランダムに定めるために2桁の乱数を用い，乱数が50なら180°，25なら90°，65なら234°，というように2桁の乱数と角度

を対応させた．すなわち，進む方向の角度は基準線から

$$360^\circ \times \frac{\text{乱数の値}}{100}$$

として定めた．

図 6.9，図 6.10 において円の半径は 4 で中心は出発点Oである．

この図を見ると，25 ステップのランダム・ウォークにおいて出発点Oからの最大距離は図 6.9 では約 3.0，図 6.10 では約 3.4 となっている．思ったよりひろがらないものである．ここでは $n=25$ としたが，乱数をつぎつぎと発生させて n をどんどん大きくして，そのひろがりの様子がどのようになるかを調べることは，興味あることである．

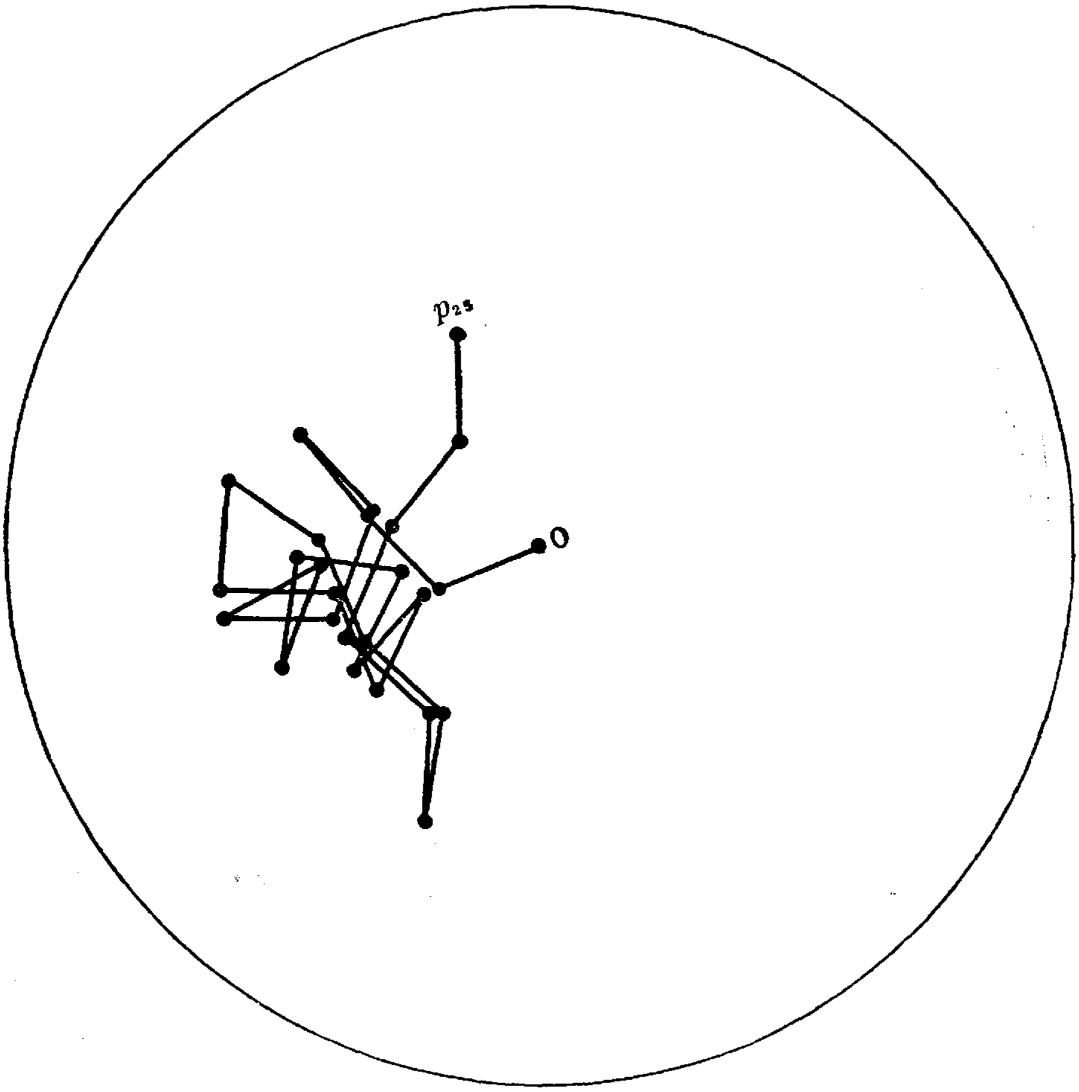


図 6.9　ランダム・ウォークのシミュレーション（その 1）
$l=1,\ n=25$

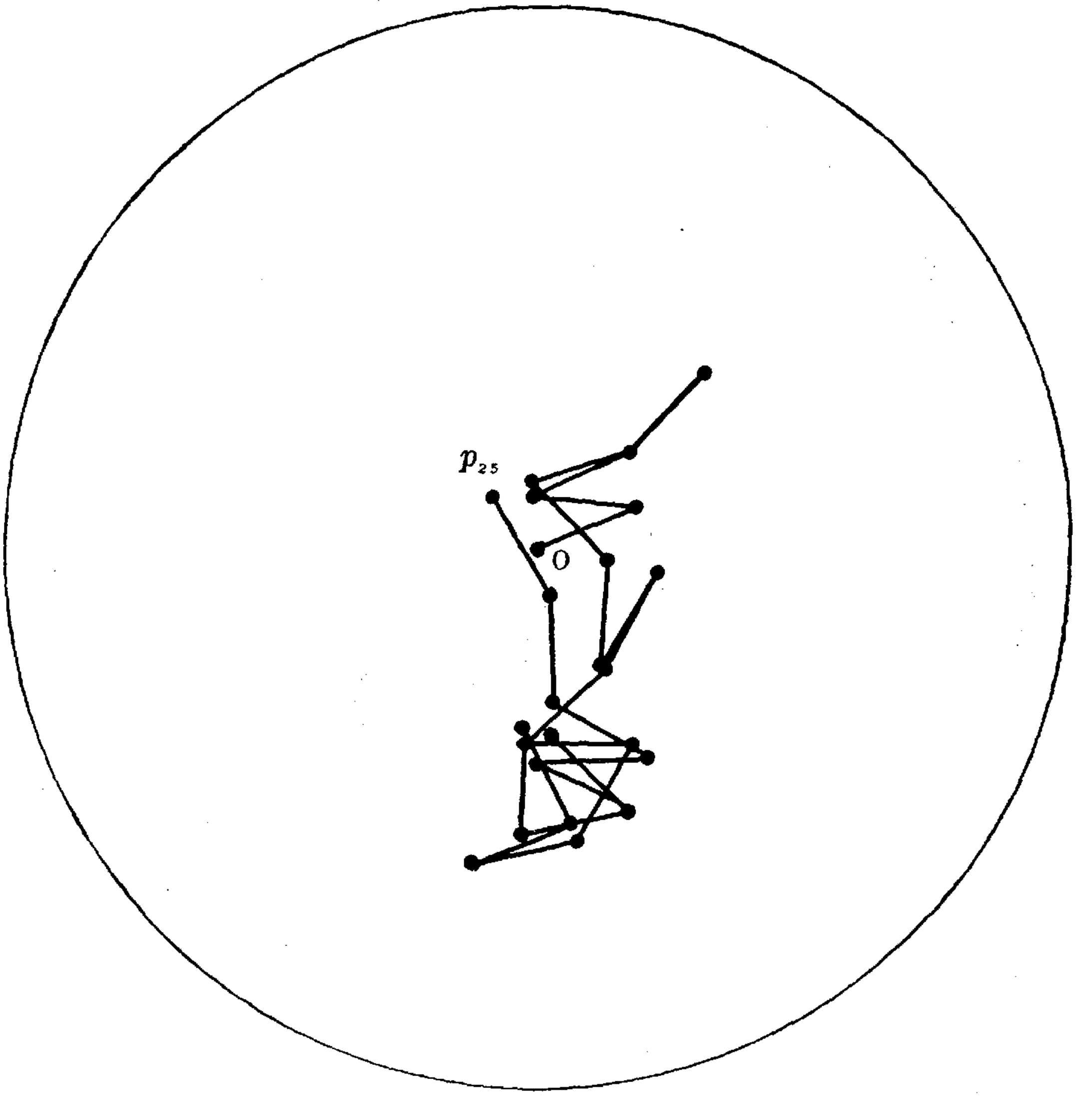


図 6.10　ランダム・ウォークのシミュレーション（その 2）
$l=1,\ n=25$

以上例 2，例 3 からもわかるように，数式を用いて解析的に取り扱うことが非常にやっかいなもの，また不可能なものについて，乱数を用いるシミュレーションはたいそう有力である．また XY プロッターなどを用いて実験結果を図式化することによって現象そのものが非常に直観的に把握できて便利であろう．

〈質問〉　ポアソン乱数，指数乱数，正規乱数などの既知の確率分布をもつ乱数をつくることがシミュレーションのために必要だと聞いているのですが，この理由について，またこれらの乱数の作り方について説明して下さい．

答　まず，ポアソン乱数の使用例と作り方について説明しましょう．ある会社 A の日中忙しいときの電話の単位時間における入呼数 k の確率は

驚くほど正確にポアソン分布

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

ただし，$\lambda\,(>0)$ は定数

に従っていることが知られています．たとえば会社 A で日中忙しいときに，1分間ごとの入呼数を100分間にわたって調べてみた結果の度数とその確率を表 6.4（イ）（ロ）に示しましょう．ポアソン分布においては平均値は

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$$

となることは容易に求められますので，表 6.4（ロ）から平均値を計算しますと

$$\begin{aligned}&0\times 0.06+1\times 0.12+2\times 0.24+3\times 0.22+4\times 0.16\\&\quad+5\times 0.11+6\times 0.06+7\times 0.02\\&\quad+8\times 0.01=3.03\fallingdotseq 3\end{aligned}$$

となり，表 6.4（ロ）を $\lambda=3$ のポアソン分布の確率（表 6.4（ハ））と比較してみますとほとんどその確率に差がないことが確かめられます．

表 6.4　入呼数の度数，確率とポアソン分布（λ＝3）の確率

	入呼数 (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	……	計
（イ）	会社 A の度数	6	12	24	22	16	11	6	2	1	0	……	100
（ロ）	会社 A の確率	0.06	0.12	0.24	0.22	0.16	0.11	0.06	0.02	0.01	0	……	1
（ハ）	λ＝3 のポアソン分布の確率	0.050	0.149	0.224	0.224	0.168	0.101	0.050	0.022	0.008	0.003	……	1

さて，この会社に電話のかかってくる状態を1分ごとに乱数を用いて再現するためには表 6.4（ハ）の確率をもって現われるような 0, 1, 2, …… の数の列をつくってやればよいことになります．この数の列をつくるためには，たとえば壷の中に1000個の球が入っており，その球のうち50個には 0，149 個には 1，224 個には 2，224 個には 3，168 個には 4，101 個には 5，50 個には 6，22 個には 7，8 個には 8，3 個には 9 という数字が書かれているとします．この壷から“がらがらまぜ”て1つとり出し，その球に書かれている数字を x_1，またもとに戻して“がらがらまぜ”て次

の球をとり出し，その球の数字を x_2, …… と順次このような操作をくり返し行なって得られる数

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \cdots\cdots$$

が $\lambda=3$ のポアソン乱数です．ただし，この実験では 10 以上の数が出てこない不合理がありますが，実際 10 以上の数字の現われる確率は非常に小さいので無視しているわけです．しかし，このような方法では非常に面倒ですので普通はコンピュータで0と1の間の一様乱数をつくり，それを変換してポアソン乱数をつくります．たとえば0と1の間の一様乱数として巻末付表1の乱数表の5桁の数字の前に小数点をつけた

0.34743
0.64802
0.06933
0.40345
0.79055
⋮

を用いるとしますと，これから

$$\sum_{k=0}^{x_1-1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}\leqq 0.34743\leqq\sum_{k=0}^{x_1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$$

$$\sum_{k=0}^{x_2-1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}\leqq 0.64802\leqq\sum_{k=0}^{x_2}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$$

$$\sum_{k=0}^{x_3-1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}\leqq 0.06933\leqq\sum_{k=0}^{x_3}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$$

$$\sum_{k=0}^{x_4-1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}\leqq 0.40345\leqq\sum_{k=0}^{x_4}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$$

$$\sum_{k=0}^{x_5-1}\frac{3^k}{k!}e^{-3}\leqq 0.79055\leqq\sum_{k=0}^{x_5}\frac{3^k}{k!}e^{-3}$$

$$\vdots$$

を満足する $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \cdots\cdots$ を求めてみますと，表 6.4 (ハ) から

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2\\
x_2 &= 4\\
x_3 &= 1\\
x_4 &= 2\\
x_5 &= 4\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

となります．これが $\lambda=3$ のときのポアソン乱数です．したがって会社Aでは基準時刻から最初の1分間の電話の入呼数は2回，次の1分間には4回，順次1回，2回，4回，…… となってゆきます．この会社でさらに入呼した電話の通話時間の分布を調べ，例題1と同様のシミュレーションを行なうことにより最適な，交換台の規模，交換手の人数などを決定することができます．一般のポアソン乱数のつくり方は，0と1の間の一様乱数を

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots$$

としますと，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{x_1-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} &\leqq u_1 \leqq \sum_{k=0}^{x_1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\
\sum_{k=0}^{x_2-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} &\leqq u_2 \leqq \sum_{k=0}^{x_2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\
\sum_{k=0}^{x_3-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} &\leqq u_3 \leqq \sum_{k=0}^{x_3}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

を満足する x_1，x_2，x_3，…… がポアソン乱数となります．

以上でポアソン乱数のシミュレーションでの必要性とそのつくり方についておわかりいただけたことと思います．

指数乱数，正規乱数も自然現象，社会現象の中に指数分布，正規分布とみなせるものが多々あり，シミュレーションに使う必要性があるわけです．ここでは0と1の間の一様乱数

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \cdots\cdots$$

からそのつくり方だけ簡単に述べておきましょう．

指数分布：　$f(x)=\alpha e^{-\alpha x}\quad(x\geqq 0)\quad \alpha(>0)$ は定数

正規分布（平均値0，分散1）：　$g(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\quad(-\infty<z<\infty)$

指数乱数の作り方

もとになる一様乱数	u_1	u_2	u_3	………
変　換　式	$x_1=-\dfrac{\log_e(1-u_1)}{\alpha}$	$x_2=-\dfrac{\log_e(1-u_2)}{\alpha}$	$x_3=-\dfrac{\log_e(1-u_3)}{\alpha}$	………
指　数　乱　数	x_1	x_2	x_3	………

正規乱数の作り方

もとになる一様乱数	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	………
変　換　式	$z_1=(-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}}\times\cos 2\pi u_2$ $z_2=(-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}}\times\sin 2\pi u_2$		$z_3=(-2\log_e u_3)^{\frac{1}{2}}\times\cos 2\pi u_4$ $z_4=(-2\log_e u_3)^{\frac{1}{2}}\times\sin 2\pi u_4$		$z_5=(-2\log_e u_5)^{\frac{1}{2}}\times\cos 2\pi u_6$ $z_6=(-2\log_e u_5)^{\frac{1}{2}}\times\sin 2\pi u_6$		………
正　規　乱　数 （平均値0，分散1）	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	………

補　注

［1］ $f(a,\ b)=\sum_{i=1}^{N}\{y_i-(ax_i+b)\}^2$ と考え，$f(a,\ b)$ を a と b で偏微分したものを0とおく，

$$\frac{\partial f(a,\ b)}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{N}\{y_i-(ax_i+b)\}x_i=0$$

$$\frac{\partial f(a,\ b)}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{N}\{y_i-(ax_i+b)\}=0$$

この連立1次方程式を解けば式（*1.12*）が得られる．

［2］ 微分積分学，三角関数の知識を必要とする．

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\{1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}\}dx$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots\cdots$$

この公式によって円周率 π の近似値を計算することができる．しかしこの級数は収束する速さがおそいので，次のような方法によっている．

$\tan^{-1}\frac{1}{5}=\alpha$ すなわち $\tan\alpha=\frac{1}{5}$ とおけば倍角公式，加法定理により

$$\tan 2\alpha=\frac{5}{12},\quad \tan 4\alpha=\frac{120}{119},$$

$$\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{239}$$

ゆえに次の式を得る．

$$\pi=16\tan^{-1}\frac{1}{5}-4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\left\{\frac{16}{5^{2k+1}}-\frac{4}{239^{2k+1}}\right\}$$

［3］ $2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\alpha$，$3\tan^{-1}\frac{1}{8}=\beta$，$\tan^{-1}\frac{1}{57}=\gamma$ とおくとき，$\tan\alpha=\frac{5}{12}$，$\tan\beta=\frac{191}{488}$，$\tan\gamma=\frac{1}{57}$ であるから，加法定理によって次式を得る．

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\tan(\alpha+\gamma)$$

$$2\pi=8\alpha+8\beta+8\gamma$$

補注［2］の結果から $8\alpha=4\tan^{-1}\frac{1}{239}+\pi$ となるから上式に代入すると

$$\pi=24\tan^{-1}\frac{1}{8}+8\tan^{-1}\frac{1}{57}+4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

を得る.

［4］ いま正常なサイコロを投げる実験を考えよう. そのときこの実験の結果(事象) としては出る目の数 X が考えられ, それは1から6までのいずれかの値をとる. すなわち, 1の目の出る事象 E_1, 2の目の出る事象 E_2, ……, 6の目の出る事象 E_6 が考えられ, 事象 E_i が起こるということは $X=i$ $(i=1,2,\cdots\cdots,6)$ ということと同等である. サイコロを投げる場合, どの目の出る可能性も等しいと考えることができ, E_1, E_2, ……, E_6 のどの事象の起こることも等しいと考えることができる. よって確率の定義からどの目の出る確率も 1/6 と考えることができる. いいかえれば X のとる値として1から6までが考えられて, その確率は 1/6 ということになる.

一般に X はいろいろな値をとる可能性をもっているという意味で**変数**(variable) とよぶこととする. その値をどの程度の確率でとるかによって変数 X のすべてのとる値に対して確率が示されているとき, このような変数 X のことを**確率変数** (random variable) とよんでいる. 確率変数について定められた確率をその**確率分布** (probability distribution) とよぶ. この確率分布には次のように離散型と連続型が考えられる.

離散型確率分布

サイコロの例のように確率変数 X のとりうる値が有限個のとびとびの値をとるばあい, または有限個でなく無限個のとびとびの値をとるばあい, その確率を

$$\mathrm{P}\{X=x_i\}=p_i,\quad \sum_i p_i=1 \quad (p_i>0)$$

で表わすことにすれば X の確率分布は p_i によって定められる.

たとえば, サイコロを投げる実験では

$$\mathrm{P}\{X=x\}=\frac{1}{6},\qquad (x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

と表わすことができる. このように確率変数 X のとりうる値が有限個または無限個のとびとびの値をとり, それぞれ確率が p_i によって定められるとき, 確率変数 X の確率分布は**離散型** (discrete type) であるという.

X のとる値	x_1 x_2 x_3………x_i………
その確率	p_1 p_2 p_3………p_i………

(離散型確率分布の例)

（1） 二項分布

何か実験を行なうとき毎回の試行においてある事象 E の起こる確率を p とするとき, n 回の試行において事象 E の起こる回数 X は確率変数で, その確率分布は

$$P\{X=x\}={}_nC_x\,p^x\,q^{n-x}$$
$$\begin{pmatrix} q=1-p \\ x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \end{pmatrix}$$

によって与えられる．この分布が**二項分布** (binominal distribution, ベルヌーイ Bernoulli 分布ともよばれている) である．明らかに関係式

$$\sum_{x=0}^{n} P\{X=x\}=\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x\,p^x\,q^{n-x}=(p+q)^n=1$$

が成立する．

（2） ポアソン分布

確率変数 X のとる値 x が 0, 1, 2, …… であるとき，確率分布

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda>0 \\ x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

を**ポアソン分布** (Poisson distribution) という．これは二項分布において $np=\lambda$ という条件のもとで n を限りなく大きくしたときの極限分布である．

連続型確率分布

確率変数のもう1つのばあいはとりうる値が連続的なある範囲全体になるばあいである．たとえば，ある実験結果の観測値は前のサイコロの例のようにいつでもあらかじめ定められたいくつかの点のみをとるとは限らない．確率変数 X のとる値が連続的であると考えられる場合に X の確率分布は**連続型** (continuous type) であるという．たとえばルーレットのゲームを考えてみよう．ルーレットには第2章の図2.2に示すように0から1までの数が刻まれている．いま1回の実験で針の示す位置を X で表わすと，X は0と1の間の値をとる確率変数で区間 $[0,1]$ のおのおのの数（実数）を同じ確率でとると考えられる．

区間 $[0,1]$ の実数の個数は無限個あるから，X が0と1の間の1点をとる確率は 0，すなわち，$P\{X=x\}=0$ でなければならない．このように連続型の場合は離散型のときと同じような型では表わすことができない．

そこで連続型の場合には X が区間 $[x,\ x+\Delta x]$ に入る確率を

$$P\{x\leqq X\leqq x+\Delta x\}$$

で表わすことにする．x と Δx を与えればこの値は計算できる．たとえばルーレットの例で $x=0.1$, $\Delta x=0.02$ とすれば

$$P\{0.1\leqq X\leqq 0.1+0.02\}=0.02$$

となる．

ところで

$$\frac{\mathrm{P}\{x \leqq X \leqq x+\Delta x\}}{\Delta x}$$

で示される値を考えると，これは点 x の近くでの単位長さ当たりの確率変数 X のとる確率の平均と考えることができる．たとえばルーレットの例では $x=0.1$, $\Delta x=0.02$ とするとこの式の値は1となる．

次に $\Delta x \to 0$ とする．すなわち Δx を限りなく小さくするとき（これを微分 dx で表わす）

$$f(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{P}\{x \leqq X \leqq x+\Delta x\}}{\Delta x}=\frac{\mathrm{P}\{x \leqq X \leqq x+dx\}}{dx}$$

または

$$\mathrm{P}\{x \leqq X \leqq x+dx\}=f(x)dx$$

なる $f(x)$ を考える．この $f(x)$ を点 x における**確率密度関数**（probability density function）とよぶ．連続な確率分布は，この密度関数 $f(x)$ を用いて表現することができる．X のとる値は $f(x)$ の値が大きいところでは確率が大きく，逆に $f(x)$ の値の小さいところではそのとる確率は小さくなる．

また，

$$\mathrm{P}\{a \leqq X \leqq b\}=\int_a^b f(x)\,dx$$

と表わすことができることは容易にわかろう．

（連続型確率分布の例）

（1）一様分布

密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} 0, & (x<a) \\ \dfrac{1}{b-a} & (a \leqq x \leqq b) \\ 0, & (b>x) \end{cases}$$

で表わされるような確率分布のことを**一様分布**（uniformly distribution），または**矩形分布**（rectangular distribution）という．

（2）正規分布

密度関数が

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<\mu<\infty, \ 0<\sigma^2$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

で表わされる確率分布のことを**正規分布**（normal distribution）という．これは

$x=\mu$ を対称軸として左右対称になっており，その広がりの程度は σ で表わされる．そこで，この分布はしばしば $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ と表わされる．N は normal distribution の頭文字をとったものである．特に，$\mu=0$, $\sigma=1$ のときを規準型正規分布とよんで $\mathrm{N}(0, 1)$ と表わす．

〔5〕 式 (3.8) の証明

$$\mathrm{E}(\bar{X}_n)=\frac{1}{{}_N C_n}\cdot\frac{1}{n}\sum(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)$$

ただし，和 $\sum$ はすべての ${}_N C_n$ 個のサンプルにわたってとられる．

この和を計算するためには母集団の1つのサンプリンク単位 θ_i が何通りのサンプルの中に出てくるかを調べればよい．θ_i を含んでいるサンプルでは残りの $n-1$ 個のサンプリング単位を母集団の $N-1$ 個の中から選ぶことができ，θ_i を含むサンプルの総数は

$${}_{N-1}C_{n-1}=\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}$$

となる．したがって

$$\sum(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)=\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}\;(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_N)$$

$$\therefore\quad \mathrm{E}(\bar{X}_n)=\frac{1}{{}_N C_n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}\;(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_N)$$

$$=\frac{1}{N}\;(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_N)=\mu$$

また次の公式によって証明できる．

公式　一般に n 個の確率変数 Z_1, Z_2, ……, Z_n に対して

$$\mathrm{E}(Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_n)=\mathrm{E}(Z_1)+\mathrm{E}(Z_2)+\cdots\cdots+\mathrm{E}(Z_n)$$

が成立する．

公式より

$$\mathrm{E}(\bar{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{N}\theta_j\,\mathrm{P}(X_i=\theta_j)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\theta_j\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{N-i+1}{N-i}\cdot\frac{1}{N-i+1}\right\}$$

$$=\mu,$$

ただし，$\mathrm{P}(X_i=\theta_j)$ は確率変数 X_i が θ_j をとる確率を示す．

式 (3.9) の証明

公式より，

$$
\begin{aligned}
V(\bar{X}_n) &= E\{(\bar{X}_n-\mu)^2\}\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i-\mu)^2+\sum_{i\neq j}^{n} E\{(X_i-\mu)(X_j-\mu)\}\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2+\sum_{i\neq j}^{n}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left((\theta_k-\mu)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{k\neq l}^{N}(\theta_l-\mu)\right)\right)\right\}\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2+\sum_{i\neq j}^{n}\left\{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}(\theta_k-\mu)\left(\sum_{k\neq l}^{N}\theta_l-(N-1)\mu\right)\right\}\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2+\sum_{i\neq j}^{n}\left\{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}(\theta_k-\mu)\left(N\mu-\theta_k-(N-1)\mu\right)\right\}\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left\{n\sigma^2+\sum_{i\neq j}^{n}\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right)\right\}\\
&= \frac{\sigma^2}{n}-\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{\sigma^2}{N-1}=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

〔6〕 公式 $E(Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_n)=E(Z_1)+E(Z_2)+\cdots\cdots+E(Z_n)$ より

$$
\begin{aligned}
E(U_n^2) &= \frac{N-1}{N} E\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)^2\right\}\\
&= \frac{N-1}{N}\left\{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i<j}^{n} E(X_i-X_j)^2\right\}\\
&= \frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i<j}^{n}\left\{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k<l}^{N}(\theta_k-\theta_l)^2\right\}\\
&= \frac{N-1}{N}\cdot\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i-\mu)^2\\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i-\mu)^2\\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

〔7〕

$$
\begin{aligned}
V(\bar{X}_{n,s}) &= E\{\bar{X}_{n,s}-\mu)^2\}\\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{L} w_i(\bar{X}_i-\mu_i)\right\}^2\\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{L} w_i^2(\bar{X}_i-\mu_i)^2+\sum_{i\neq j}^{L} w_i w_j(\bar{X}_i-\mu_i)(\bar{X}_j-\mu_j)\right\}\\
&= \sum_{i=1}^{L} w_i^2 E(\bar{X}_i-\mu_i)^2+\sum_{i\neq j}^{L} w_i w_j E\{(\bar{X}_i-\mu_i)(\bar{X}_j-\mu_j)\}\\
&= \sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{\sigma_i^2}{n_i}
\end{aligned}
$$

$$
V(T_{n,s})=N^2 E(\bar{X}_{n,s}-\mu)^2=N^2\sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{\sigma_i^2}{n_i}
$$

〔8〕 ラグランジュ (Lagrange) の乗数法を用いて解く

$$F(n_1,\ n_2,\ \cdots\cdots,\ n_L)=\sum_{i=1}^{L} w_i^2\cdot\frac{N_i-n_i}{N_i-1}\cdot\frac{\sigma_i^2}{n_i}+\lambda\left(\sum_{i=1}^{L} n_i-n\right)$$

（λ はある乗数，ラグランジュ乗数と呼ばれる）

とおいて

$$\frac{\partial F(n_1,\ n_2,\ \cdots\cdots,\ n_L)}{\partial n_i}=0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L)$$

を解くと式 (*4.13*) が得られる．

［9］ $k>0$ のとき積分 $\int_0^\infty e^{-x}x^{k-1}dx$ を k の関数として考えるとき，これを $\Gamma(k)$ で表わしガンマ関数と呼ぶ．ガンマ関数については次の関係式が成立する．

（i） $\Gamma(k)=(k-1)\Gamma(k-1)\quad (k>1)$

（ii） $\Gamma(k)=(k-1)!$

（iii） $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

［10］ 母集団の属性 B および C がそれぞれ個 k，l 個の項目 $B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots,\ B_k,\ C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots,\ C_l$ に分類されているとする．この母集団から大きさ n のランダムサンプルをとったとき，その観測度数を右表のような $k\times l$ 分割表で表わす．

表　$k\times l$ 分割表

B \ C	C_1	C_2	…………	C_l	計
B_1	n_{11}	n_{12}	…………	n_{1l}	$n_{1\cdot}$
B_2	n_{21}	n_{22}	…………	n_{2l}	$n_{2\cdot}$
⋮	⋮			⋮	⋮
B_k	n_{k1}	n_{k2}	…………	n_{kl}	$n_{k\cdot}$
計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	…………	$n_{\cdot l}$	n

このとき 2 つの属性 B, C が無関係であるという帰無仮説を立てると，この帰無仮説のもとで

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{(n_{ij}-m_{ij})^2}{m_{ij}}$$

$$\text{ただし}\quad m_{ij}=\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\quad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k \\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ l \end{pmatrix}$$

の頻度分布は m_{ij}, n_{ij} が十分大きければ，自由度 $(k-1)(l-1)$ のカイ 2 乗分布で近似できることが知られている．したがってこの結果と付表 4 のカイ 2 乗分布表を用いて仮説の検定を行なえばよい．

［11］ 自由度 n なる t-分布曲線の式は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad n>0\quad(-\infty<x<\infty)$$

で与えられる.

$$\text{ただし}\quad B\left(\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

（ベータ関数と呼ばれる）

[12]　自由度対 $[n_1,\ n_2]$ の F-分布曲線の式は

$$f(x)=\frac{1}{B\left(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}},\qquad (x>0)$$

で与えられる.

$$\text{ただし}\quad B\left(\frac{n_1}{2},\ \frac{n_2}{2}\right)=\int_0^1 x^{\frac{n_1}{2}-1}(1-x)^{\frac{n_2}{2}-1}\,dx$$

参 考 書

第1章

1. 佐藤良一郎，林知己夫，青山博次郎共著「統計理論入門」（新光閣書店，1964年）
2. オラフ・ヘルマー著，香山健一訳「社会工学の方法」（日本経済新聞社，1969年）
3. ホーエル著，浅井晃，村上正康共訳「初等統計学（改訂版）」（培風館，1970年）

第3章，第4章，第5章

4. 青山博次郎他"野鳥総数推定のための統計数理的方法"（統計数理研究所彙報 19巻2号，1972年）
5. 北川敏男，稲葉三男共著「統計学通論」（共立出版，1960年）
6. 西平重喜著「統計調査法」（培風館，1957年）
7. 増山元三郎著「デタラメの世界」（岩波新書，1969年）
8. 脇本和昌著「標本抽出論入門」（槇書店，1970年）
9. キャンベル著，石居進訳「生物系のための統計学入門」（培風館，1970年）
10. コクラン著，鈴木達三，高橋宏一，脇本和昌共訳「サンプリングの理論と方法 1」（東京図書，1972年）

第2章，第6章

11. 田中穣"円周率10万桁の統計"（数理科学，1964年）
12. 津田孝夫著「モンテカルロ法とシミュレーション」（培風館，1969年）
13. 牧野都治著「情報処理の数学」（森北出版，1970年）
14. 脇本和昌著「乱数の知識」（森北出版，1970年）
15. フェラー著，河田竜夫監訳「確率論とその応用（上）」（紀伊国屋書店，1960年）
16. Birger Jansson 著「Randon number generators」（Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1966年）

統計数値表，辞典

17. 統計数値表（日本規格協会，1972年）
18. A million random digits with 100,000 normal deviates. (Free Press Glencoe, 1955年)
19. 現代統計学大辞典（東洋経済新報社，1962年）
20. 近代統計学小辞典（春秋社，1968年）

問　題　解　答

第1章

問題 1　(12 頁)　1．男子：　平均値　52.3，分散　192.4，標準偏差　13.9
女子：　平均値　58.3，分散　26.53，標準偏差　5.15
2．分散　9043.2　標準偏差　95.1

問題 2　(15 頁)　線形回帰直線の式　$y=0.33x+0.081$，したがって利益　$x=350$ に対する y の値は **115.6** となり，約 116（百万円）の人件費を支払ってよい．

問題 3　(20 頁)　$y=0.46x+29.8$，$\rho_{xy}=0.53$．この結果 x と y の間には線形関係が強いとはいえない．

問題 4　(24 頁)　1．$\rho=0.77$．かなり好みに一致性がみられる．
2．$\tau=0.60$

第3章

問題 7　(71～72 頁)　1．平均病斑数の信頼区間　(42.5, 48.3)
総病斑数の信頼区間　(425 000, 483 000)
2．信頼区間　(50 021, 58 659)
3．信頼区間　(10.1, 11.5)
4．信頼区間　(364.6, 405.2)

問題 8　(75 頁)　信頼区間　(0.063, 0.097)＝(6.3％, 9.7％)

問題 9　(78 頁)　1．サンプル数　1394　とすれば十分
2．サンプル数　745

第4章

問題 10 (87 頁)　∘ ネイマン配分：　第1層のサンプル数 12，第2層のサンプル数 12，τ の推定量の分散，標準偏差はそれぞれ 1 090 724，1 044 となる．

∘ 比例配分：　第1層のサンプル数 6，第2層のサンプル数 18
このとき母集団総計値（τ）の推定量の分散，標準偏差はそれぞれ 1 882 239，1 372 となる．

問題 11 (90 頁)　$2\,161 \leqq N \leqq 2\,965$

第5章

問題 12 (104頁)　1.　$\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\frac{(n_i-m_i)^2}{m_i}=0.51$, 帰無仮説 9：3：3：1 は有意水準 5％ では棄却されない（否定できない）

問題 13 (107頁)　$\dfrac{300\times(65\times58-72\times105)^2}{170\times130\times137\times163}=8.73$, 帰無仮説は有意水準 5％ で棄却される（否定される）

問題 14 (111～112頁)　1．$t=\dfrac{\bar{x}_n-1\,800}{\sqrt{\dfrac{u_n{}^2}{n}}}=-4.38$ となり，帰無仮説"平均値は 1800 時間"は有意水準 5％ で否定される．

2．$t=2.15$ となり，帰無仮説"1年生男子，2年生男子の平均値は同じ"は有意水準 5％ で否定される．

問題 15 (114頁)　$z=-2.39$ となり，帰無仮説"利用度は同じ"は有意水準 5％ で否定され，B地区の方が利用度が高いといってよい．

付　　表

表 1 乱　数　表

34743	03484	25173	05982	14624	31653	17170	92785	35712	78632
64802	33567	82313	87631	03197	02438	12374	40329	18229	18642
06933	48154	80970	87976	04939	21233	20572	31013	62935	34149
40345	58387	72096	21355	51659	19003	75556	33905	33459	35130
79055	83141	63920	85516	75743	66317	45428	45940	42442	07608
04552	38860	24039	80949	51211	35411	40470	16070	05626	07460
45253	51024	53044	55039	71290	26484	70682	56255	86675	62770
71558	21692	84077	17814	33316	49494	31817	90127	39435	77434
95474	76468	12019	04274	01893	23930	88771	31142	65884	05809
34619	91898	28499	00279	35351	87736	83909	43736	19233	75234
44546	75524	68585	92302	18543	15479	58850	73802	10636	82735
22917	96024	04759	28948	52788	83577	02269	68632	23310	46261
13043	31433	47858	95068	74539	38529	57893	62987	13072	84227
69357	54593	21688	64216	85938	51742	12898	67957	16955	39960
01072	61679	80961	34029	56463	09594	11939	45644	47843	55781
90838	50179	42064	45997	71749	28666	24060	59438	05695	38136
35914	39441	90149	09737	61504	18946	26142	45600	75486	74103
87047	77284	12753	51777	64796	52452	06672	57548	84706	25453
93727	46613	48045	49685	28385	37200	98473	56808	86774	07305
57439	30362	54171	18495	57370	77691	28006	25318	39723	25299
28892	53633	33909	81674	91956	84531	60422	55574	31670	61059
95398	67381	21912	24873	26372	12044	43234	08503	86716	08095
28982	24589	88896	31137	87512	33216	29665	26014	02919	17639
31303	70209	42174	10757	98531	35725	68208	61239	26705	43916
08457	10085	35741	79416	72457	59502	46986	09051	70963	19759
97842	69095	25982	59982	92806	62853	39755	42550	31081	38860
53047	13486	69712	59354	91213	26293	18112	93831	01473	10798
40770	47013	63306	78651	45636	77509	28610	34307	68045	15107
52733	66251	69661	80092	50587	18535	19001	82179	12572	77589
41749	46502	18378	98685	10244	11760	21952	73985	68903	66934
10271	85184	46468	76373	60928	93696	97711	15818	31004	03263
98791	48848	68129	86947	42417	28778	14936	94099	90775	42001
30196	09295	47685	56768	29285	06272	98789	47188	35063	24158
99373	64343	92433	06388	65713	35386	43370	19254	55014	98621
27768	27552	42156	23239	46823	91077	06306	17756	84459	92513
67791	35910	56921	51976	78475	15336	92544	82601	17996	72268
64018	44004	08136	56129	77024	82650	18163	29158	33935	94262
79715	33859	10835	94936	02857	87486	70613	41909	80667	52176
20190	40737	82688	07099	65255	52767	65930	45861	32575	93731
82421	01208	49762	66360	00231	87540	88302	62686	38456	25872

12159	66144	58009	20681	98823	50979	01237	70152	13711	22772
30156	90519	77211	70110	93803	60135	22881	13423	30999	08379
59069	01722	54256	84591	65302	99257	92970	28924	36632	62275
45107	58081	37493	69330	94069	39544	14050	03476	25804	64247
99681	81295	06315	28212	45029	57701	96327	85436	33614	29070
27252	37875	53679	01889	35714	63534	63791	76342	47717	73684
93259	74585	11863	78985	03881	46567	93696	93521	54970	37607
84068	43759	75814	32261	12728	09636	22336	75629	01017	45503
68582	97054	28251	63787	57285	18854	35006	16343	51867	67979
60646	11298	19680	10087	66391	70853	24423	73007	74958	29020
97437	52922	80739	59178	50628	61017	51652	40915	94696	67843
05091	13446	45653	13684	66024	91410	51351	73916	87902	84759
95785	47544	66735	35754	11088	67310	19720	07104	27400	25414
53338	41942	65118	71236	01932	70343	25812	54044	91798	78018
82470	59407	13475	95872	16268	78436	39251	49350	92525	87941
87569	22661	55970	52623	35419	76660	42394	63210	62626	00581
22896	62237	39635	63725	10463	87944	92075	90914	30599	35671
02697	33230	64527	97210	41359	79399	13941	88378	68503	33609
50080	15652	37216	00679	02088	34138	13953	68939	05630	27653
20550	95151	60557	57449	77115	87372	02574	07851	22428	39189
75066	05581	75992	42904	64647	94354	45994	42538	45885	15983
47629	25696	89095	69406	96510	16529	83500	28590	49787	29822
05230	81041	22454	13277	45031	42235	96502	25567	23653	36707
92308	64073	55383	82831	97048	42983	06471	12350	49990	04809
24214	16765	02474	26487	60496	78222	43032	04276	70800	17378
08598	25768	58035	30568	72771	11672	67440	61852	39748	29907
63587	66113	46475	27620	38472	43379	76213	53557	56287	26130
77311	54845	95876	40294	24511	56510	72696	64162	34541	66882
70123	55987	13982	52693	01054	06674	58210	23316	86714	51862
33669	53766	52304	20665	94437	94907	95235	33170	98178	92246
21761	03284	37857	54316	62099	81392	23961	25261	08256	07830
92126	41619	86527	93782	40987	23578	54751	11343	36066	39260
52249	17824	24330	56800	12797	99715	86661	52217	81437	51487
47618	37962	86807	50168	11047	17353	79588	40096	38531	83230
33919	72416	32312	92006	77142	77889	16853	40574	61293	63243
17782	97414	76951	26865	89605	43987	13961	26507	36655	58649
82622	44359	49500	46690	67202	05567	86463	41694	98802	96205
22628	19707	03578	96305	79283	50052	63766	19093	24856	44216
89691	56334	05397	21305	17364	42916	71874	00731	20415	92247
49442	53099	06567	19302	57125	83107	77916	52305	69554	39107

13376	13525	42773	06210	27249	21677	31618	15522	50619	12109
85545	40990	27144	06784	81758	74735	87330	63034	93470	85035
64049	62815	80061	99963	82403	75261	74390	12908	44603	73536
68568	33519	43878	61717	41156	37491	62277	75353	42642	09929
80656	87694	92030	54032	14819	88150	95263	43141	17839	77082
54016	92704	06986	42199	92277	30871	77971	64075	02461	75530
71539	99676	53789	49201	07477	20852	84061	28354	84006	92466
55687	40257	29986	70463	39285	78563	75542	89512	66436	17710
98760	07064	93741	13192	90017	32455	09310	83995	89774	69982
59545	09790	22446	18248	92838	75015	23886	88938	71607	47623
80515	88953	17652	64693	83403	08404	00978	09456	60431	79066
81117	28474	03825	05564	47782	70170	21444	66674	84105	12371
93301	29964	14781	00471	09410	79959	13048	94571	49872	91080
21876	60343	24767	40523	81719	81141	20352	17202	97087	84913
36101	24555	24691	55314	17282	86203	07742	10967	80227	78435
29654	05268	26621	51286	01652	32499	01935	92320	09244	98334
67156	93151	11560	76932	78766	97737	70173	22848	61198	83201
48812	07692	96934	83919	53504	03566	41091	51477	37996	87887
73864	86418	90413	19727	33928	22958	18009	24719	04341	36512
59359	68814	74673	44694	81214	31882	50229	43257	30728	38266
28918	42344	18538	50848	17113	43212	13437	66905	09155	83648
45271	38945	95420	60714	54523	41284	81939	14482	21121	08328
33829	86076	09452	40702	14006	30104	51181	06850	98173	38577
44997	26849	79901	76981	68225	01494	38864	71460	89319	60154
82237	86534	27153	51543	64074	41350	05753	00264	59186	67117
93196	63695	44633	92409	85388	21072	05769	39043	77992	15800
56300	21779	96703	98158	39771	54903	91895	26359	22186	74595
74128	03792	21810	77911	13144	91648	80589	59049	68186	13107
69351	51212	05281	42220	00107	67190	93366	31315	35248	23027
22627	91572	24086	28027	98933	31229	23211	15624	98940	82331
82717	78674	21958	00186	86874	31009	74613	97950	28599	81511
75712	56352	61859	35814	03970	67973	57173	91634	76552	88446
65484	85108	49765	34574	81999	56637	70267	70384	66118	63641
52131	04919	20600	44303	42334	23121	12567	49861	40066	29154
06504	94015	91102	17295	73525	24957	47855	16530	05237	74161
41316	17184	62135	57595	13171	98844	41646	78863	25202	46094
30396	98447	83164	49150	24371	75859	71709	50313	22447	31487
16070	75724	06317	43550	26981	14090	39788	86931	71238	39379
42741	51296	00106	89205	57864	68934	98178	46570	41227	55493
65054	17778	53973	19860	27591	01120	90071	06282	20911	37416

05643	34613	24013	98831	17157	44089	07455	17057	08339	93997
15639	51284	71556	22605	41293	54854	39561	54608	41023	98345
66751	49644	53486	28244	20714	56030	39304	46235	97332	64539
42338	05509	68581	39400	85615	52314	83482	98501	02245	88990
73748	42631	58658	62243	82572	45211	37633	72030	30856	85183
97533	51120	32269	80131	82056	04828	54486	66134	88799	49496
32513	59280	17852	09297	30655	03999	36194	79732	47114	23919
36065	70959	11459	57358	01662	97116	29007	08786	14826	04896
40438	23565	50681	93772	54008	02783	91174	65533	52718	55255
33591	09049	35544	04269	39758	98970	79002	45066	02870	60012
22884	37587	58970	93451	00884	78210	48056	55438	98148	35384
00658	69357	76741	36831	90331	12629	70596	72091	53987	01477
75720	79839	41415	27579	41763	51799	82983	09141	60562	65725
80577	01771	61510	17099	28731	41426	18853	41523	14914	76661
10524	20900	65463	83680	05005	11611	64426	59065	06758	02892
93815	69447	75253	51915	97839	75427	90685	60352	96288	34248
81867	97119	93446	20862	46591	97677	42704	13718	44975	67145
64649	07689	16711	12169	15238	74106	60655	56289	74166	78561
55678	09210	52439	33355	57884	36791	00853	49969	74814	09270
38080	49460	48137	61589	42742	92035	21766	19435	92579	27683
22360	16332	05374	34471	61967	91266	38814	44728	32366	66196
40521	09057	00243	22245	07592	22078	73628	60902	41736	05113
19292	69862	59950	19609	70358	03622	64898	82220	69292	45166
79504	40078	06820	74314	50222	82339	51564	42885	50202	40313
64138	27983	84052	73818	15470	04914	24936	65514	56060	15017
56490	75689	70246	02188	46373	21486	28221	08155	23197	17092
26467	65708	87169	52162	38444	42004	78011	16909	94912	02460
48037	03246	73148	93973	82596	28739	86985	58144	65005	33167
13646	58293	11055	36702	38965	56042	80023	28169	04449	59266
38961	95851	81097	47071	55618	51796	71027	46690	08902	27467
74069	87734	66328	96380	35883	15910	17211	42358	14118	88787
93155	00861	47531	95925	19324	31497	88118	06283	84651	25709
23224	74317	05622	36478	07634	63114	27164	15467	03166	10765
79284	31960	50429	98444	99915	10488	79314	22904	94075	51249
20377	68019	41055	79458	01913	78996	17378	27284	47096	75931
10386	43403	79209	65679	75371	65250	92122	55911	97908	87311
09104	09820	57496	63450	73584	99354	85254	61105	59574	84289
07944	48624	05305	33996	07289	08004	40261	90150	52809	31367
67058	21255	60672	72823	72416	84196	01762	02728	24101	21949
85965	67992	59634	04891	21512	78936	27666	31118	54031	24841

78466	83326	96589	88727	72655	49682	82338	28583	01522	11248
78722	47603	03477	29528	63956	01255	29840	32370	18032	82051
06401	87397	72898	32441	88861	71803	55626	77847	29925	76106
04754	14489	87633	31761	99865	31488	49947	06060	05931	73822
97118	06774	95152	10133	52693	22480	50336	49502	68023	34380
71923	49313	05639	24175	79438	92151	57602	03590	33707	84956
78870	77328	65927	55525	67270	22907	55097	63177	82593	76606
61208	17172	59005	29000	38395	80367	34112	41866	08044	58292
05033	24214	74232	33769	06304	54676	70026	41957	40112	66451
95983	13391	30369	51035	17042	11729	88647	70541	36026	23113
19946	55448	75049	24541	43007	11975	31797	05373	45893	25665
03580	67206	09635	84612	62612	86724	77411	99415	58901	86160
56823	49819	20283	22272	00115	92007	24369	00543	05417	92251
39420	94211	58042	43184	60977	74801	32083	47944	00449	06550
87743	60156	38037	16201	35137	54513	06296	76414	18358	05313
59713	95710	05975	64982	79253	93876	25465	54780	79098	73594
09637	67080	49168	75290	50175	34312	34119	94216	84861	10457
33187	92523	69895	28284	77956	45877	30170	84658	84441	03926
06626	42682	91522	45955	23263	09764	26824	82936	16813	13878
11306	02732	34189	04228	58541	72573	89071	58066	67159	29633
45143	56545	94617	42752	31209	14380	81477	36952	44934	97435
97612	87175	22613	84175	96413	83336	12408	89318	41713	90669
77675	86529	99609	86719	39918	60274	54353	54497	29789	82928
44673	72789	63202	14313	07900	46733	21413	63627	48734	92174
52014	20620	37111	85653	07263	19894	89909	76415	57246	02621
97306	81682	97392	26391	47853	79804	91398	97534	25856	50761
02494	26664	28108	64086	82295	16601	74304	31669	08766	58975
19466	41795	31839	69797	78848	21703	97035	62442	06940	45024
59376	56975	13471	77481	43075	17114	62498	00257	19179	06277
41711	53892	51728	35369	58790	91707	80306	19257	18690	54749
16905	56193	59658	08718	06475	04278	45849	61937	77379	44459
03570	52556	11275	33338	23013	23012	41439	38181	76821	62329
66889	21313	09196	99960	96771	35635	13311	34967	70201	27090
34278	29013	50263	58380	61909	63486	78034	26814	07963	71372
78920	76056	98123	56854	18671	55195	52526	45895	58156	00604
33988	69407	58176	19422	38144	60149	61011	37366	90758	82566
60765	64642	89378	35128	79229	03475	88982	97545	54992	68528
48124	35571	82090	44512	29368	14791	54047	37084	48157	18652
75334	68448	13647	82344	10199	89709	92335	57549	29538	70921
10915	75457	77896	18204	89281	08352	83768	12136	34150	87462

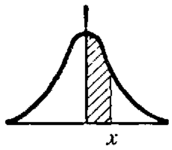
84357	25121	94918	51486	13434	37663	74799	04145	44546	33163
78619	90463	61741	64754	79313	44274	96587	93720	22795	18094
49472	27138	48894	39547	38356	73259	47849	29464	49702	53699
40381	43270	13919	52671	00178	17708	44358	61969	76589	32677
68242	68272	71519	08184	55800	20015	71126	63844	70618	17821
33064	53882	19778	42642	04293	67337	21933	99058	97429	78638
54484	19576	87797	04791	39049	86125	93030	94031	92484	20909
23315	14058	84899	09260	64472	32774	26930	68782	99184	51393
02057	87782	26762	88003	65274	12563	67880	94330	95079	20544
86293	00368	42522	19868	73137	41937	23696	84361	63916	52832
13980	28410	13928	59801	18097	24192	52799	78636	55671	93997
37733	69911	24290	94542	85912	84776	91263	80551	92162	58172
71973	99577	50568	04874	23744	98869	58727	45989	42135	02388
19992	18431	58235	47967	34287	91198	62765	77604	96945	97880
44011	43099	35247	39278	80532	21937	00626	14614	42651	06416
02943	65587	93648	71538	26263	36807	95930	56761	71148	11800
92872	87561	70710	68568	21713	89780	58545	27269	09229	13242
77341	98413	37243	57643	30290	84336	61953	62074	96231	03453
47718	91704	84418	67441	92145	04323	81992	40550	69692	53509
57240	45107	56166	83376	03746	27431	52129	67042	04001	02626
07999	27709	22292	28634	16609	83211	98245	79689	44640	51129
85551	30780	86239	33969	01881	72542	21028	54091	09809	94902
32086	67167	28407	10489	95535	50263	87396	29784	80123	50946
92089	03870	05961	31362	32544	87134	27278	09876	10384	60989
37950	46818	66864	19843	96658	05623	01483	37535	02599	43260
62954	86263	96345	90566	71459	79588	88282	30806	44904	04844
34771	72285	52257	41496	61725	51687	58873	42290	86952	13142
38156	66314	99626	34046	11140	65321	46526	33025	03492	06236
89297	65186	49962	81768	01356	54443	31515	82462	46019	82663
45927	35798	09155	38747	57669	08681	41413	28347	78919	80032
40570	84704	05094	81787	25318	36416	00968	41343	11441	97557
36258	74107	83335	67860	98738	00842	97112	37565	69096	16905
08890	62631	89062	76786	65670	74144	51482	66902	95495	65661
18862	40986	24967	64478	24762	94088	65169	63298	71837	66225
11509	48550	57975	79790	93752	31830	21265	04910	76226	73786
04436	56894	38059	46507	76027	99982	23464	50154	96990	03045
41844	69445	27560	60189	99491	15326	89247	43452	89145	28649
50441	15736	19542	99346	18367	98128	50356	30649	44313	86569
60577	16095	12464	03583	15893	86673	48034	28918	85183	92458
56618	84121	43262	58878	24560	68557	27560	35890	34463	71345

表 2 Poisson 分布表 $P\{X=x\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

x \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.223	.135	.082	.050
1	.090	.164	.222	.268	.303	.329	.348	.359	.366	.368	.335	.271	.205	.149
2	.005	.016	.033	.054	.076	.099	.122	.144	.165	.184	.251	.271	.257	.224
3	—	.001	.003	.007	.013	.020	.028	.038	.049	.061	.126	.180	.214	.224
4	—	—	—	.001	.002	.003	.005	.008	.011	.015	.047	.090	.134	.168
5	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.002	.003	.014	.036	.067	.101
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.004	.012	.028	.050
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.003	.010	.022
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.003	.008
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.003
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001

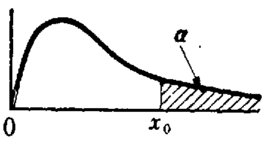
x \ λ	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	9.5	9.0	9.5	10.0
0	.030	.018	.011	.007	.004	.002	.002	.001	.001	—	—	—	—	—
1	.106	.073	.050	.034	.022	.015	.010	.006	.004	.003	.002	.001	.001	—
2	.185	.147	.112	.084	.062	.045	.032	.022	.016	.011	.007	.005	.003	.002
3	.216	.195	.169	.140	.113	.089	.069	.052	.039	.029	.021	.015	.011	.008
4	.189	.195	.190	.175	.156	.134	.112	.091	.073	.057	.044	.034	.025	.019
5	.132	.156	.171	.175	.171	.161	.145	.128	.109	.092	.075	.061	.048	.038
6	.077	.104	.128	.146	.157	.161	.157	.149	.137	.122	.107	.091	.076	.063
7	.039	.060	.082	.104	.123	.138	.146	.149	.146	.140	.129	.117	.104	.090
8	.017	.030	.046	.065	.085	.103	.119	.130	.137	.140	.138	.132	.123	.113
9	.007	.013	.023	.036	.052	.069	.086	.101	.114	.124	.130	.132	.130	.125
10	.002	.005	.010	.018	.029	.041	.056	.071	.086	.099	.110	.119	.124	.125
11	.001	.002	.004	.008	.014	.023	.033	.045	.059	.072	.085	.097	.107	.114
12	—	.001	.002	.003	.007	.011	.018	.026	.037	.048	.060	.073	.084	.095
13	—	—	.001	.001	.003	.005	.009	.014	.021	.030	.040	.050	.062	.073
14	—	—	—	—	.001	.002	.004	.007	.011	.017	.024	.032	.042	.052
15	—	—	—	—	—	.001	.002	.003	.006	.009	.014	.019	.027	.035
16	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.003	.005	.007	.011	.016	.022
17	—	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.002	.004	.006	.009	.013
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.002	.003	.005	.007
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.002	.004
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.002
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001

表 3 正規分布表 $x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3718	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4083	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4758	.4762	.4767
2.0	.4773	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4984	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993

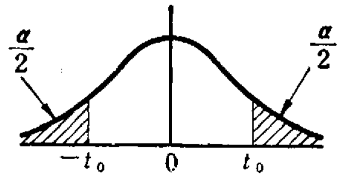
表 4　カイ 2 乗分布表　$P\{x \geqq x_0\} = \alpha \rightarrow x_0$



自由度	α									
k	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.003	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3
8	1.344	1.646	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

$n > 30$ ならば $t = \sqrt{2x} - \sqrt{2n-1}$ の分布は正規分布 N(0, 1) とみなしよい．

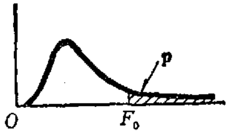
表 5 t-分布表 k, $P\{|x| \geqq t_0\} = \alpha \to t_0$



自由度 k	α 0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	自由度 k
1	1.00	2.41	6.31	12.7	25.5	63.7	127	1
2	.816	1.60	2.92	4.30	6.21	9.92	14.1	2
3	.765	1.42	2.35	3.18	4.18	5.84	7.45	3
4	.741	1.34	2.13	2.78	3.50	4.60	5.60	4
5	.727	1.30	2.01	2.57	3.16	4.03	4.77	5
6	.718	1.27	1.94	2.45	2.97	3.71	4.32	6
7	.711	1.25	1.89	2.36	2.84	3.50	4.03	7
8	.706	1.24	1.86	2.31	2.75	3.36	3.83	8
9	.703	1.23	1.83	2.26	2.68	3.25	3.69	9
10	.700	1.22	1.81	2.23	2.63	3.17	3.58	10
11	.697	1.21	1.80	2.20	2.59	3.11	3.50	11
12	.695	1.21	1.78	2.18	2.56	3.05	3.43	12
13	.694	1.20	1.77	2.16	2.53	3.01	3.37	13
14	.692	1.20	1.76	2.14	2.51	2.98	3.33	14
15	.691	1.20	1.75	2.13	2.49	2.95	3.29	15
16	.690	1.19	1.75	2.12	2.47	2.92	3.25	16
17	.689	1.19	1.74	2.11	2.46	2.90	3.22	17
18	.688	1.19	1.73	2.10	2.44	2.88	3.20	18
19	.688	1.19	1.73	2.09	2.43	2.86	3.17	19
20	.687	1.18	1.72	2.09	2.42	2.85	3.15	20
21	.686	1.18	1.72	2.08	2.41	2.83	3.14	21
22	.686	1.18	1.72	2.07	2.41	2.82	3.12	22
23	.685	1.18	1.71	2.07	2.40	2.81	3.10	23
24	.685	1.18	1.71	2.06	2.39	2.80	3.09	24
25	.684	1.18	1.71	2.06	2.38	2.79	3.08	25
26	.684	1.18	1.71	2.06	2.38	2.78	3.07	26
27	.684	1.18	1.70	2.05	2.37	2.77	3.06	27
28	.683	1.17	1.70	2.05	2.37	2.76	3.05	28
29	.683	1.17	1.70	2.05	2.36	2.76	3.04	29
30	.683	1.17	1.70	2.04	2.36	2.75	3.03	30
40	.681	1.17	1.68	2.02	2.33	2.70	2.97	40
60	.679	1.16	1.67	2.00	2.30	2.66	2.91	60
120	.677	1.16	1.66	1.98	2.27	2.62	2.86	120
∞	.674	1.15	1.64	1.96	2.24	2.58	2.81	∞

表 6 F-分 布 表 $P\{x \geqq F_0\} = p \rightarrow F_0$

$p = \begin{cases} 0.05 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 細字 \\ 0.01 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 太字 \end{cases}$



（自由度対 n_1, n_2 から上側確率 5％ および 1％ に対する F_0 の値を求める表）

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	60	120	∞
1	161.	200.	216.	225.	230.	234.	237.	239.	241.	242.	248.	250.	252.	253.	254.
	4052.	**5000.**	**5403.**	**5625.**	**5764.**	**5859.**	**5928.**	**5982.**	**6022.**	**6056.**	**6209.**	**6261.**	**6313.**	**6339.**	**6366.**
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5
	98.5	**99.0**	**99.2**	**99.2**	**99.3**	**99.3**	**99.4**	**99.4**	**99.4**	**99.4**	**99.4**	**99.5**	**99.5**	**99.5**	**99.5**
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.66	8.62	8.57	8.55	8.53
	34.1	**30.8**	**29.5**	**28.7**	**28.2**	**27.9**	**27.7**	**27.5**	**27.3**	**27.2**	**26.7**	**26.5**	**26.3**	**26.2**	**26.1**
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.80	5.75	5.69	5.66	5.63
	21.2	**18.0**	**16.7**	**16.0**	**15.5**	**15.2**	**15.0**	**14.8**	**14.7**	**14.5**	**14.0**	**13.8**	**13.7**	**13.6**	**13.5**
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.56	4.50	4.43	4.40	4.36
	16.3	**13.3**	**12.1**	**11.4**	**11.0**	**10.7**	**10.5**	**10.3**	**10.2**	**10.1**	**9.55**	**9.38**	**9.20**	**9.11**	**9.02**
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.87	3.81	3.74	3.70	3.67
	13.7	**10.9**	**9.78**	**9.15**	**8.75**	**8.47**	**8.26**	**8.10**	**7.98**	**7.87**	**7.40**	**7.23**	**7.06**	**6.97**	**6.88**
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.44	3.38	3.30	3.27	3.23
	12.2	**9.55**	**8.45**	**7.85**	**7.46**	**7.19**	**6.99**	**6.84**	**6.72**	**6.62**	**6.16**	**5.99**	**5.82**	**5.74**	**5.65**
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.15	3.08	3.01	2.97	2.93
	11.3	**8.65**	**7.59**	**7.01**	**6.63**	**6.37**	**6.18**	**6.03**	**5.91**	**5.81**	**5.36**	**5.20**	**5.03**	**4.95**	**4.86**
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	2.94	2.86	2.79	2.75	2.71
	10.6	**8.02**	**6.99**	**6.42**	**6.06**	**5.80**	**5.61**	**5.47**	**5.35**	**5.26**	**4.81**	**4.65**	**4.48**	**4.40**	**4.31**
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.77	2.70	2.62	2.58	2.54
	10.0	**7.56**	**6.55**	**5.99**	**5.64**	**5.39**	**5.20**	**5.06**	**4.94**	**4.85**	**4.41**	**4.25**	**4.08**	**4.00**	**3.91**
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.12	2.04	1.95	1.90	1.84
	8.10	**5.85**	**4.94**	**4.43**	**4.10**	**3.87**	**3.70**	**3.56**	**3.46**	**3.37**	**2.94**	**2.78**	**2.61**	**2.52**	**2.42**
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	1.93	1.84	1.74	1.68	1.62
	7.56	**5.39**	**4.51**	**4 02**	**3.70**	**3.47**	**3.30**	**3.17**	**3.07**	**2.98**	**2.55**	**2.39**	**2.21**	**2.11**	**2.01**
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.75	1.65	1.53	1.47	1.39
	7.08	**4.98**	**4.13**	**3.65**	**3.34**	**3.12**	**2.95**	**2.82**	**2.72**	**2.63**	**2.20**	**2.03**	**1.84**	**1.73**	**1.60**
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.66	1.55	1.43	1.35	1.25
	6.85	**4.79**	**3.95**	**3.48**	**3.17**	**2.96**	**2.79**	**2.66**	**2.56**	**2.47**	**2.03**	**1.86**	**1.66**	**1.53**	**1.38**
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.57	1.46	1.32	1.22	1.00
	6.63	**4.61**	**3.78**	**3.32**	**3.02**	**2.80**	**2.64**	**2.51**	**2.41**	**2.32**	**1.88**	**1.70**	**1.47**	**1.32**	**1.00**

索　　引

あ　行

か　行

さ　行

た　行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

ギリシャ文字一覧

A, α	アルファ	H, η	イータ	N, ν	ニュー	T, τ	タウ
B, β	ビータ	$\Theta, \theta, \vartheta$	テータ	Ξ, ξ	クシー	Υ, υ	ユプシロン
Γ, γ	ガンマ	I, ι	イオータ	O, o	オミクロン	Φ, φ, ϕ	ファイ
Δ, δ	デルタ	K, κ	カッパ	Π, π	パイ	X, χ	カイ
E, ε	エプシロン	Λ, λ	ラムダ	P, ρ	ロー	Ψ, ψ	プサイ
Z, ζ	ゼェータ	M, μ	ミュー	$\Sigma, \sigma, \varsigma$	シグマ	Ω, ω	オメガ