監修者の序

情報化時代はコンピュータが立役者であると見られている．これは，コンピュータのもつある特種な能力の偉大さの認識とコンピュータという「もの」が目に見えるせいでもあろう．立派な研究所といっても内容がわかるわけでないから門外漢には偉大な研究を包む立派な建物しか目にうつらないのと似ている．たしかに，コンピュータの能力は，ある一面では非常にすぐれ，これをわれわれがうまく利用するならば，現状でも相当のはたらきをするわけである．私は「相当な」という形容詞を用いたが，ある楽観論者は「コンピュートピア」を考え，無限の可能性をもつものとし「絶大な」という形容詞を冠するかも知れない．これらは趣味の問題かも知れないが，コンピュータを本当に活用し，不満足なところは不満足として改善を要求してゆく立場に立つならば『コンピュータよ，驕る勿れ』というところである．なにはともあれ，「コンピュータ」は現実的には大いに役立てなければ損である．「コンピュータ」はひとり歩きするものではない．ある能力を持たしめられた道具なのである．われわれは，これを心やすく用い，われわれの頭脳や手足の補助として，身体の延長として縦横に活用すべきである．眼鏡がわれわれの身体の一部になっているように用いるべきである．

「コンピュータ」はわれわれが用いるものである．これを用いるためには情報処理の方法論が根幹となるので，これに関する知識がなくては，有効にことを運ぶことはできない．この方法論は「もの」ではないので目にはつかず，この方法論によってうごかされた目に見える「ロボット」が「コンピュータ」なので，この活動が派手に宣伝されることになる．夢の話や雑薄な評論ですまなくなるのは，本当にコンピュータを使おうとするときである．このときになって初めて情報処理の方法論の重大さに気がついてくる．ここでちょっと注意したいのは，プログラマーがいれば計算機がうまく利用できると考える人がいるが，これは大きな誤解である．問題解決のために計算機の

プログラムを組むには，計算機言語の習得だけでなく現象を解析するための情報処理の方法論の習熟がなくてはならない．これはプログラム言語の習得とは別問題なのである．

ところが，情報処理の方法論を学ぼうとすると適切な本が殆んど見あたらない．たとえあったとしてもむつかしすぎる．情報処理の方法論では数学や統計学が重要なはたらきをするし，これがピタッとデータ解析の考え方やデータ解析そのものと結びついていなければならない．数学や統計学の本は数多くあるが，データ解析という立場からみるときわめてひ弱い．『論語読みの論語知らず』の感じがして，実際の役に立たない．こういうわけで，データ解析の立場——コンピュータによる情報処理——という立場から，必要な知識を基礎からしっかりわからせようとする講座をつくろうということが計画されたわけである．これはなかなかむつかしいことで，まず著者の人選から大変である．理論にも深く突込んだ人であること，実際問題も十分手がけてデータ解析の“ノー・ハウ”を心得た人であること，またコンピュータの能力も知り，これを十分使いこなした人であること等が必須の条件となる．しかも深いところを心得て，知っておくべき基本的内容を理解しやすい形にまとめあげうる人でなくてはならない．

幸い，このような著者を見出し得てこの講座が出来上がってきたわけである．基礎的な考え方や方法は実際た即してガッチリ書かれており，内容も理解しやすい．読者はたんに机上の知識としてではなく，みずからデータをいじりつつ情報処理の理論やコツを理解してほしいのである．この知識のもとに過不足なくコンピュータを使いこなしてほしいものである．さらにここで得られた基本的知識をますます演練し，きたえ上げ，磨き上げて猿回わしの名人になっていただきたいのである．ここで，はじめてコンピュータは情報処理の立役者となり，その偉力を本当に発揮することになろう．

昭和 45 年 6 月 10 日

林　知己夫

まえがき

現在，コンピュータは大型化され，多くの情報が短時間で処理されるようになってきた．しかし，複雑な自然現象，社会現象などの解明のためのコンピュータの活用は，まだ十分であるとはいえない．

この書物は特に物理学・工学・医学・OR などの分野で確率的に表現される現象に対して，“乱数列（乱数）を用いるシミュレーション”により，その現象を解明するための基礎的概念を解説したものである．

“そもそも乱数列とは何か”ということからはじめて，乱数列を用いるシミュレーションの必要性を論じたもので，次のような5つの章からなっている．

1章，2章，3章は，特に初心者のために乱数列の概念とつくり方，それに検定法について，例をあげてわかりやすく解説した．4章，5章は，この書物の主眼となる部分で各種の乱数列のつくり方とそのシミュレーションへの活用法を述べ，乱数列を用いるシミュレーションの必要性を強調した．

全般にわたって，注意すべきところ，少し難解な説明や証明の部分には補注を入れて示し，できるだけあいまいな点のないように心がけた．また，3章～5章を読むにあたっての予備知識を付録1に示した．したがって初心者におかれては，付録1を読んでのち3章に進まれたい．

最後に，いろいろと御教示をいただいた文部省統計数理研究所の林知己夫先生に対し，また終始お世話いただいた森北出版社の柳沢茂八氏に対して厚くお礼を申し上げたい．

著　者

目　　　次

1章　乱数列の概念と必要性

A. 乱数列の概念

1.1　乱数列とは何か

壺の中に 0, 1, 2, 3, ……, 9 の 10 個の数字が書いてある等質・等大の球が入っているとしよう．この壺の中に手を入れて“がらがらまぜ”て1つの球を取り出し，その球に書かれている数字を記録する．次にその球を壺に戻して，また“がらがらまぜ”同じように1つの球を取り出し，その球に書かれてある数字を記録する．

このような操作を繰り返して次々と取り出した球の数字を記録してゆくとき，この記録された数字の系列は次のような2つの性質をもっている．

性質 1.　等確率性（等出現性）　上のような実験によってつくられた数の系列のうち，最初の n 回を観察してこの中で数字 i ($i=1, 2, \cdots\cdots, 9$) の現われた個数を k_i とすると，相対頻度 $\dfrac{k_i}{n}$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, 9$) は，n を大きくしてゆくと $\dfrac{1}{10}$ に近づく．これを極限の記号を用いて表わすと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_i}{n}=\frac{1}{10}\qquad (i=0, 1, \cdots\cdots, 9)$$

となる．

いいかえれば，これは，この壺の中の球を取り出す試行を多くす

ることによって得られる数の系列の中に，0から9までの10個のどの数も同じ割合で現われるということである．

このような性質を**等確率性（等出現性）**と呼ぶ．

球を壺から取り出す実験において得られる数の系列が，等確率性を持つ理由は，壺の中の10個の球の重さや，質，大きさ等が同じであるから“がらがらまぜ”て取り出すときに，どの球も同じチャンスでつかまるからである．もし，0と書いてある球が他の球より大きかったりすると，その球がつかまりやすくなって他の球より出現率が高くなるであろう．しかし，このようなことはないわけである．

実験1.　等質・等大の10個の球に0から9までの数字を書き，壺の中に入れて“がらがらまぜ”て取り出す実験を行ない，その結果を次に書いてみよう．

試行回数 (n) は500回とした．

3695429281	9380081710
9921923014	6329549877
6634368729	4136823375
3417047085	2804452394
6441679071	8235880307
5201147352	7280425962
0942714969	2982308023
1876528326	9290804462
5113396223	9890341325
8487716485	5741725146

0251497263	4199218758
3829497116	8953051371
6609808949	6076280657
8794381543	6150118337
1850490284	7235620757
9289362040	3741067032
0982361050	9072350078
9248576508	8024646133
3979189433	7531571164
1580696362	7074525537
5279183831	9120506828
6600706919	3541566648
5287232644	3353532782
1447607216	1215153452
6962049699	0826084835

この実験で，等確率性（等出現性）をみるために，試行回数nとそのn個の系列の中に現われる0から9までの10個の数の相対頻度を調べ，表とグラフによって示した．ただし，グラフのほうは，簡単のために 0, 1, 2, 3, 4 の5つの数字だけについての相対頻度を書いたが，5, 6, 7, 8, 9 の5つの数字についても表1. 1から同様に考えることができる．

表1.1　試行回数 n および出現個数と相対頻度

（　）内が相対頻度

系列 n の中に現われる数字 / 試行回数 n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0 (0.00)	1 (0.10)	2 (0.20)	1 (0.10)	1 (0.10)	1 (0.10)	1 (0.10)	0 (0.00)	1 (0.10)	2 (0.20)
20	3 (0.15)	3 (0.15)	2 (0.10)	2 (0.10)	1 (0.05)	1 (0.05)	1 (0.05)	1 (0.05)	3 (0.15)	3 (0.15)
50	4 (0.08)	5 (0.10)	6 (0.12)	6 (0,12)	4 (0.08)	2 (0.04)	5 (0.10)	4 (0.08)	5 (0.10)	9 (0.18)
100	10 (0.10)	9 (0.09)	10 (0.10)	13 (0.13)	12 (0.12)	6 (0.06)	8 (0.08)	10 (0.10)	11 (0.11)	11 (0.11)
200	18 (0.09)	19 (0.095)	27 (0.135)	22 (0.11)	23 (0.115)	15 (0.075)	16 (0.08)	18 (0.09)	21 (0.105)	21 (0.105)
500	51 (0.102)	49 (0.098)	57 (0.114)	54 (0.108)	48 (0.096)	46 (0.092)	49 (0.098)	46 (0.092)	51 (0.102)	49 (0.098)

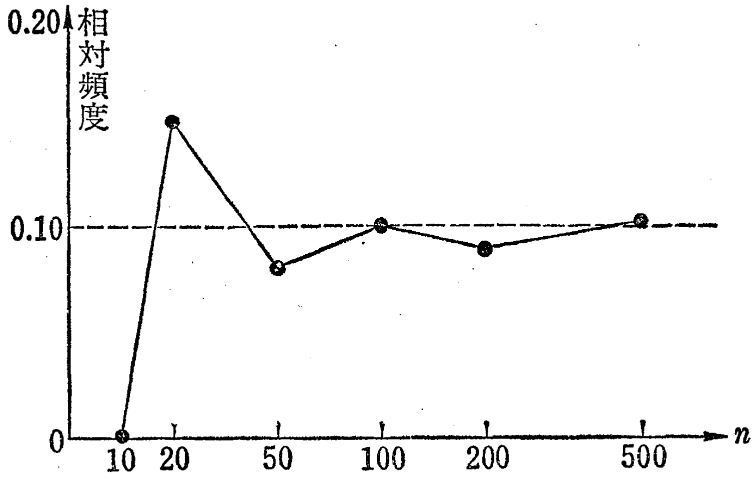


図1.1　試行回数 n の中の数字 0 の相対頻度

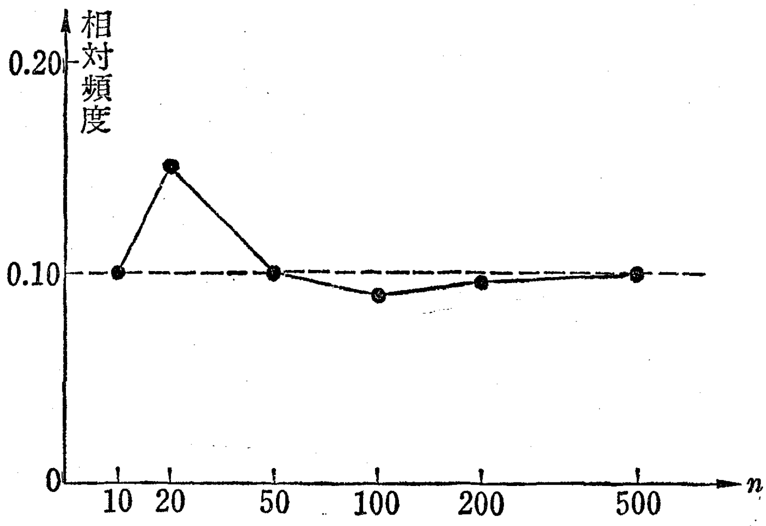


図 1.2　試行回数 n の中の数字 1 の相対頻度

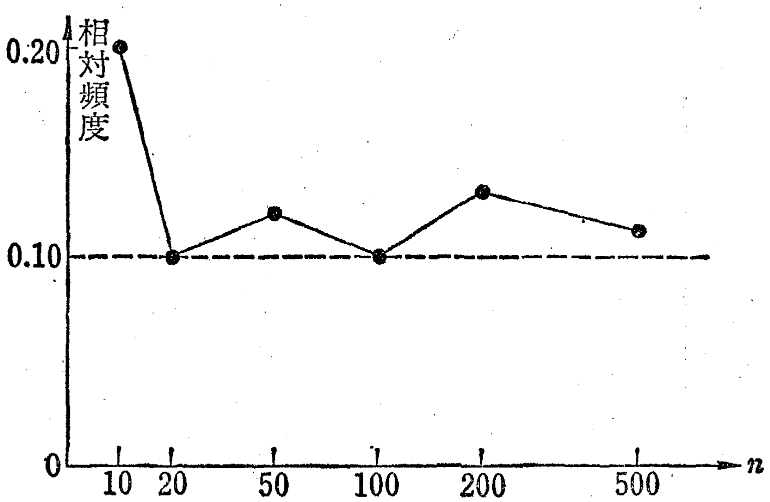


図 1.3　試行回数 n の中の数字 2 の相対頻度

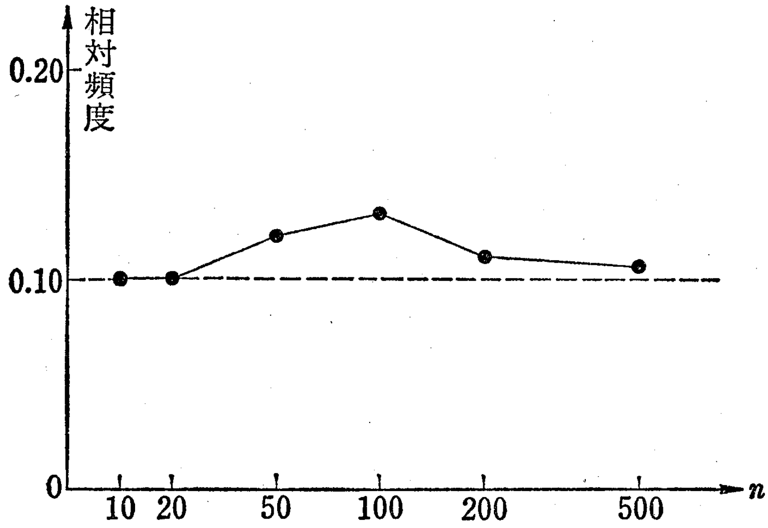


図 1.4　試行回数 n の中の数字 3 の相対頻度

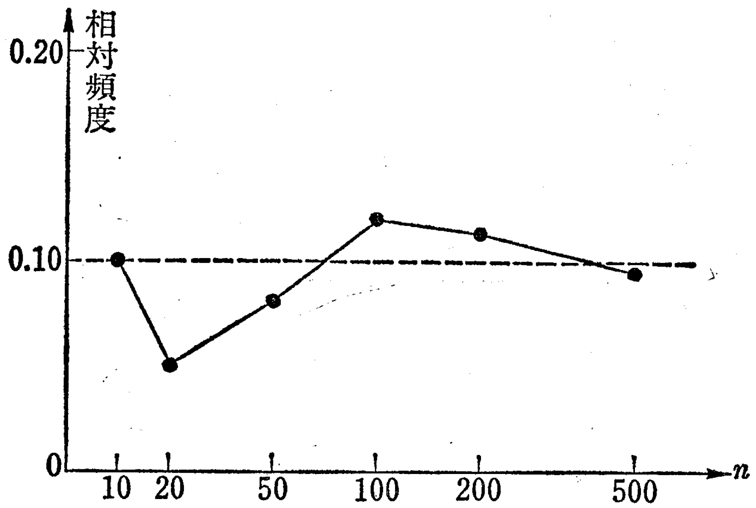


図 1.5　試行回数 n の中の数字 4 の相対頻度

これらの表とグラフから，試行回数 n が小さいところでは各数字の n の中に現われる相対頻度は $\dfrac{1}{10}$ から大きく離れていたり，ちょうど $\dfrac{1}{10}$ になっているところが偶然出てきても，n が小さいために相対頻度はかなり大きく変動していることがわかる．しかし，n がだんだん大きくなるにつれてその変動はだんだん小さくなり，相対

頻度は $\frac{1}{10}$ に近づいてゆく.

ここでは試行回数を 500 回として考えてみたが，これを 1 000 回，2 000 回と大きくしてゆくと，これらの相対頻度はますます $\frac{1}{10}$ に近づいてゆく. すなわち，グラフでいえば点線で示す位置にますます近づいてゆくわけである.

これで，この壺の中から球を取り出す実験において各数字の現われる等確率性（等出現性）が確認できたことになる.

実験 2. 人間が，紙の上に目をつむって 0 から 9 までの 10 個の数を思いつくままに書いたとき，誰でもこの数列の中には 0 から 9 までの数が同じように現われると考えるだろうが，本当にそうだろうか.

実際にある人に書いてもらった結果を 100 個だけ書いてみると次のようになった.

4615495059	4572359008
6752884519	1536540315
2575370682	2797015845
6525807167	2457058521
9201285793	5063508590

この数列において，数字 5 に注目してみよう. そしてその頻度を調べるために数字をはじめから 10 個ずつ区切っていくと図 1.6 のようになる.

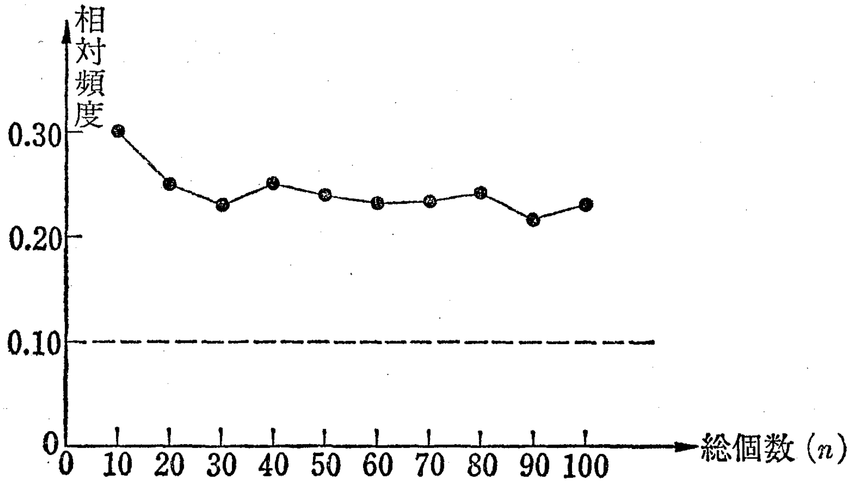


図1.6　数字5の相対頻度

このグラフから，この人は5という数字をひんぱんに書く性質があり，本人は無意識に書いているつもりでもこのように人によって書きやすい数字がある．つまり，このことは，だれが書いてもその書いた長い数の系列の中に，0から9までのどの数字も同じ頻度で現われるとは必ずしもいえないということを意味する．

簡単のために，この人の場合は100個で打ち切ったが，続けて長く書いてもらっても数字5の現われる相対頻度は100個までと同様0.10には近づかないことが確かめられた．もちろん，このような人ばかりはいなくて，人によっては，0から9までどの数字もほぼ同じ頻度になる場合もあろう．

とにかく，この実験2で示された数の系列は，等確率性（等質現性）を持っているとはいえない．このように等質・等大の球をつかうといった明確な条件の設定してある実験1の場合に比べて，実験2では人間の性癖や好みなどが関係するだけに等確率性(等出現性)の保証はできないわけである．

性質 2.　無規則性（無相関性，独立性）　前の実験 1 で，最初に壺から取り出した球の数字は 3 であり，2 番目に取り出した球の数字は 6 であった．この場合，2 番目に取り出された球は 1 番目にどの球が取り出されたかということには無関係に取り出される[1)]．すなわち，1 番目の数字が何であるかということと 2 番目の数字が何であるかということは全く無関係なのである．3 番目，4 番目についても同様で，一般に i 番目に取り出された球の数字は j 番目 $(j \neq i)$[2)] に取り出された球の数字とは無関係である．つまり，i 番目に出た数字が何であるかによって j 番目に出る数字がきまってくるというようなことはないわけである．

よって，実験 1 でつくられた数の系列には規則性がない．この性質を**無規則性**と呼んでいる．

また，無規則に並んでいる各数の間には相関がないという意味で**無相関性**とか**独立性**とか呼ばれることもある．

ここで，前の実験 1 で得られた数の系列が，この無規則性を持っていることを検証するために，規則性のある数の系列を例示して比較してみよう．いま，

$$0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, 0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9, \cdots\cdots$$

なる数の系列を考えると，等確率性（等出現性）の性質は満足しているが，明らかに並んでいる数の間に規則性が見られる．

補注 1.1　1 つの数の系列が与えられたとき，並んでいる数の間に規則性

1)　たとえば 1 番目に 3 が出ると 2 番目はそれよりも 1 つ小さい数字 2 が出るというような関係がない．仮りに 2 番目の数字は 1 番目の数字より 1 だけ小さいという関係があるとすると，5,4,……，とか 9,8,……，とかなって数の系列に規則性が現われてくる．

2)　i と j はどのようにとってもよく，すべての組合せについて考える．

があるかどうかを直感的に把握するためにはそれらの数を組として相関図を書いてみればよくわかる．以後相関図に書いて，規則・無規則性を確かめることにする．

この例で，まず並んでいる前後の数を順次2つずつ組として，はじめから20個目まで書いてみると，

(0,2)，(2,4)，(4,6)，(6,8)，(8,1)，(1,3)，(3,5)，
(5,7)，(7,9)，(9,0)，(0,2)，(2,4)，(4,6)，(6,8)，
(8,1)，(1,3)，(3,5)，(5,7)，(7,9)，

となり，これを直交座標の上に表わしてみると次のような相関図になる．

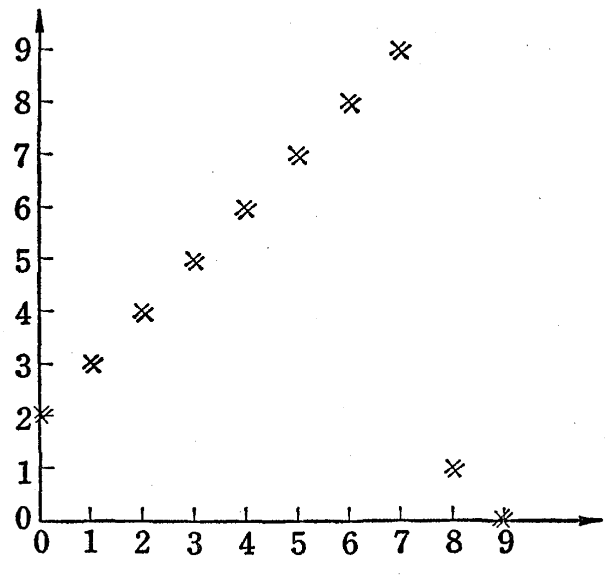


図 1.7　相関図（⋇は点が重なっている表示）

この相関図からも明らかに並んでいる前後の数の間には強い相関があることがわかる．よって，このような数列は無規則に並んでいるとはいえない．

ところが，実験1ではじめから20個考えると

3，6，9，5，4，2，9，2，8，1，9，3，8，0，0，8，
1，7，1，0，

となり，並んでいる前後の数を順次組にしてみると

$$(3,6),\ (6,9),\ (9,5),\ (5,4),\ (4,2),\ (2,9),\ (9,2),\ (2,8),$$
$$(8,1),\ (1,9),\ (9,3),\ (3,8),\ (8,0),\ (0,0),\ (0,8),\ (8,1),$$
$$(1,7),\ (7,1),\ (1,0).$$

となる．これを図1.7と同じように相関図に書いてみると次図のようになる．

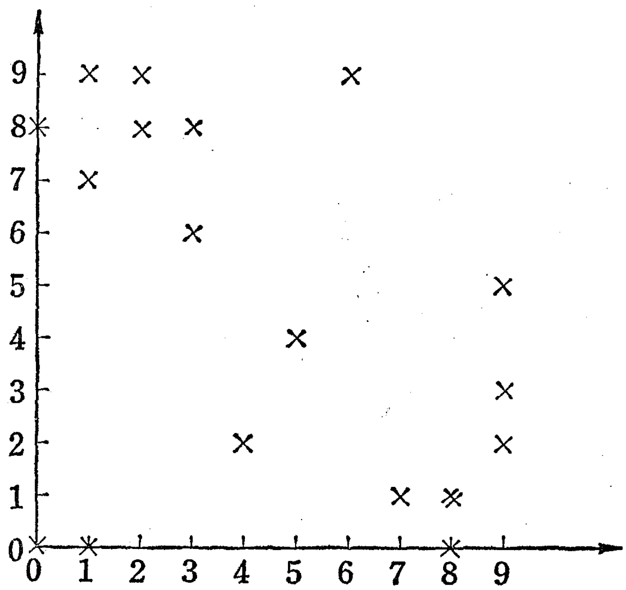


図1.8 相関図

この相関図から，並んでいる相互の数の間には何ら相関が認められないことがわかり，実験1に示す数の系列は，前後の数を組にして調べた結果だけでは無規則性が保証できる．いまは $n=20$ として考えたが，もっと多くとって相関図を書くと，よりはっきりと無相関性が確認できる．

しかし，並んでいる前後2つずつをとって相関図を書いてみた結果，無相関であることがわかっても，並んでいる前後の間の無規則性が保証できただけで，その数列が完全に無規則性をもっていると断言できない．前にも述べたように，一般に i 番目と j 番目が i と

j をどのようにとっても関係がないことが保証できなければならない.

たとえば

8, 1, 0, 5, 0, 2, 3, 8, 4, 7, 3, 6, 8, 2, 8, 2, 5,
0, 1, 0, 2, 4, 5, 4, 8, 4, 6, …….

という数の系列では前のように2つずつの各数前後の間では規則性は見られないかも知れないが，はじめから3の倍数（3番目，6番目，9番目,……）を取り出して書いてみると

0, 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, 6,……

となっており，明らかに規則性があることがわかる．相関図に表わしても規則性がはっきり認められる．ところが，前の実験1では3の倍数番目を15個取り出してみても

9, 2, 8, 3, 0, 7, 9, 1, 3, 4, 2, 4, 7, 6, 3.

となり，並んでいる順に数を2つずつ組にして書いてみると

(9, 2), (2, 8), (8, 3), (3, 0), (0, 7), (7, 9), (9, 1),
(1, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 4), (4, 7), (7, 6), (6, 3)

となり，相関図を書くと図1.9のようになり，この場合も無相関であることがわかり，3の倍数番目の間にも規則性は認められないことが検証できる．$n=15$ で打ち切らないで n を大きくしても同様に規則性は認められない.

このような例からもわかるように，数の系列の無規則性は，どのような数の選び方をしても（どのように i 番目と j 番目を選んでも）その選ばれた数の間に相関（規則性）がない場合にはじめていえる性質である.

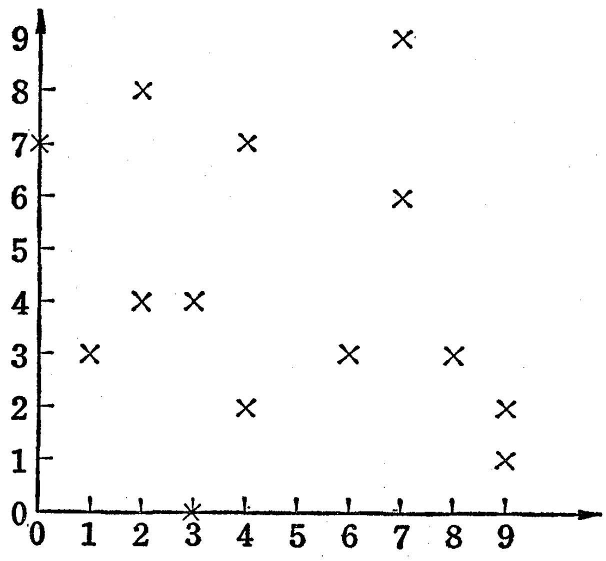


図1.9 相関図

一般に 0 から 9 まで 10 個の数の系列において，等確率性と無規則性との 2 つの性質を持つ場合に，これを 0 から 9 までの 10 個の数からなる**ランダム系列** (random sequence)，または**乱数列** (random number sequence) と呼んでいる[1].

10 個の等質・等大の 0 から 9 までの数字が入っている壺の中から“がらがらまぜ”て取り出す実験を繰り返し，その数を記録した場合，この記録された数の系列は前の実験 1 からもわかるように等確率性と無規則性の 2 つの性質を持っており，乱数列とみなされる.

補注 1.2 サイコロ投げと乱数列　普通サイコロといえば正六面体の各面に 1 から 6 までの数字が書いてあるものをいうわけであるが，このサイコロをころがす実験を繰り返して得られる出る目の数の系列は，等確率性（等出現性）と無規則性の両性質を持っており，1 から 6 までの数からなる乱数列とみなされる．これは壺の中に 1 から 6 までの数字を書いた等質・等大の球を 6 個入れ，“がらがらまぜ”て 1 つ取り出し，また元に戻して“がらがらまぜ”て次の 1 つを取り出す実験を繰り返して得られる数の系列と同等に考えられる.

1) 乱数列全体またはその一部分（個々の数も含む）を単に“**乱数** (random number)”と呼ぶこともある.

正六面体に限らず正四面体，正八面体，正十二面体，正二十面体のサイコロ[1]をころがす実験においても同様なことが考えられる．たとえば，正二十面体のサイコロ（各面に1から20までの数字が書いてある）を投げる実験を繰り返して得られる数の系列は1から20までの20個の数字からなる乱数列とみなされる．

このような正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体からなるサイコロで乱数列をつくることができるので，これらのサイコロを**乱数サイ**とも呼んでいる．

たとえば0から9までの10個の数からなる乱数列をつくりたいときは，1から12までの数字の書いてある正十二面体の乱数サイをころがす実験を繰り返して，もし10が出れば0と記録し，11，12が出た場合は記録しない．このようにしてできる数の系列は0から9までの10個の数からなる乱数列である（**1.4**節参照）．

また，00から99までの100個の数字からなる2桁の乱数列をつくりたいときは正十二面体の乱数サイを2個用いて，それぞれ0から9までの乱数列をつくり組み合わせればよい（次節参照）．

乱数サイをころがすことによって乱数列を生成することは，その乱数サイの面の数と同じ個数の球の入った壺から“がらがらまぜ”て球を取り出す試行を繰り返すことによって乱数列を生成することと同等に考えられる．これは，この補注のはじめに説明した正六面体のサイコロの場合と同様に考えればよい．

1.2　一様乱数列

次に，この0から9までの10個の数からなる乱数列において，はじめから順番に2桁の数をつくって考えてみよう．

前の実験1でつくった数列のはじめから200個までを2つずつ組にして100組の2桁の数をつくると表1.2のようになる．

---

1)　正六面体以外の正多面体においても，各面に1から面の数までの数字が書いてあるとき，これをサイコロと呼んでいる．

表1.2 00から99までの数字からなる乱数列

36,	95,	42,	92,	81,	93,	80,	08,	17,	10
99,	21,	92,	30,	14,	63,	29,	54,	98,	77
66,	34,	36,	87,	29,	41,	36,	82,	33,	75
34,	17,	04,	70,	85,	28,	04,	45,	23,	94
64,	41,	67,	90,	71,	82,	35,	88,	03,	07
52,	01,	14,	73,	52,	72,	80,	42,	59,	62
09,	42,	71,	49,	69,	29,	82,	30,	80,	23
18,	76,	52,	83,	26,	92,	90,	80,	44,	62
51,	13,	39,	62,	23,	98,	90,	34,	13,	25
84,	87,	71,	64,	85,	57,	41,	72,	51,	46

もともと,

$$3,\ 6,\ 9,\ 5,\ 4,\ 2,\ 9,\ 2,\ 8,\ 1,\cdots\cdots$$

が 0 から 9 までの 10 個の数からなる乱数列であるから,

$$36,\ 95,\ 42,\ 92,\ 81,\cdots\cdots \tag{1.1}$$

という 2 桁の数の系列は 00 から 99 までの 100 個の数からなる乱数列となる[1]. なぜなら, 1 桁の各数とも $\frac{1}{10}$ の確率（割合）で現われるので, 2 つを組み合わせると $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$ の確率でどの 2 桁の数も現われることになり, 性質 1 の等確率性(等出現性)が保証される. また並んでいる 1 桁の各数の間には相関（規則性）がないから 2 つ組み合わせても, その数の間には相関（規則性）がなく性質 2 の無規則性の条件も満足している.

したがって 2 つずつ組にして得られる数列は 00 から 99 までの 100 個の数からなる乱数列である.

このようにして得られた乱数列は, 00 から 99 までの数の記入してある 100 個の等質・等大の球を壺の中に入れて“がらがらまぜ”

1) 00 から 99 までとは 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, ……, 99 の 100 個の数字の意味である.

て1つ取り出し，その球に書いてある数を記録し，その球を壷の中に戻してまた“がらがらまぜ”て次の球を取り出し，その球に書いてある数を記録する操作を繰り返して得られたものと考えることもできる.

さらに実験1に示す1桁の乱数列においてはじから3つずつを組にして考えた

369, 542, 928, 193, 800, 817, 109, ……　　(*1.2*)

という3桁の数の系列は2桁の場合と同様の理由で000から999までの 1000個の数からなる乱数列と考えられる．このようにいくらでも桁数を多くしてゆくことができるわけである.

さて式(*1.2*)で示す3桁の乱数列において，この各数の前に小数点をつけた

0.369, 0.542, 0.928, 0.193, 0.800, 0.817, 0.109, ……　　(*1.3*)

なる数の系列を考えてみると，これは 0.000, 0.001, 0.002, ……, 0.998, 0.999 の1000個の数字からなる乱数列と考えられ，これは区間 [0, 1] の中の離散的な点を値としてとる．しかし，少し荒っぽく考えると区間 [0, 1] 上の連続的な点からなる乱数列（補注1.3参照）と考えてもよかろう．この場合1000個以外の点は，1000個の点の中で1番近い点で近似して考えればよかろう.

さらに桁数を多くして，たとえば前の実験ではじめから 10 個ずつの数を組にしてその各数の前に小数点をつけると，順次

0.3695429281, 0.9380081710, 0.9921923014,
0.6329549877, ……　　(*1.4*)

となり，区間 [0, 1] 上の連続的な点からなる乱数列にきわめて近似

する．こうなるとほぼ区間 [0, 1] 上の連続的な点からなる乱数列とみなしてよい．

普通，我々はこの系列のことを区間 [0, 1] 上の**一様乱数列** (uniformly random number sequence) と呼んでいる．

補注 1.3 区間 [0, 1] 上の連続的な点からなる乱数列のことを区間 [0, 1] 上の一様乱数列と呼ぶことがわかったが，区間 [0, 1] 上の一様乱数列の具体的な実験値としては，巻末付録1のルーレットの例を参照していただきたい．すなわち，ルーレットをまわして針の止まった位置を読み取る実験を繰り返してその数の系列を

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \cdots\cdots,\ u_i, \cdots\cdots$$

とすると，これは区間 [0, 1] 上の一様乱数列である．

厳密には，一様乱数列とは区間 [0, 1] 上で一様分布(巻末付録1参照)をする独立な確率変数の系列の実現値である．

本書では，おもに，この一様乱数列を基礎において考えることにする．

B. 乱数列の必要性

1.3 標本調査法における利用

東京都に住んでいる人全体を母集団と考え，その母集団から n 人の標本を無作為（ランダム）に抽出したいとき，次のように乱数列を用いて抽出することができる．まず，東京都に住む人がかりに全部で N 人であるとするとき，その全部の人に1から N までの番号を対応させる．そして N 以下の乱数列をつくってその乱数列に対応する番号の人をはじめから n 人だけ標本として抽出する．

これは東京都に住む人の名前を N 個の等質・等大の球に書いて壺の中に入れ，“がらがらとよくまぜ”て取り出す操作を n 回繰り

返し，取り出した球に書かれている名前の人を標本として抽出することである．このように乱数列と対応されて抽出する(無作為抽出)ことがなぜ必要かというと，これは母集団の平均値などを，抽出した標本から推定するときにかたよりのない推定ができるからである．かたよりがないということは，大ざっぱにいうと，無作為に抽出した標本からの推定値は，母集団の平均値の近くに均等に現われるために，大きいほうにも小さいほうにもかたよらないのである(5章．補注5.1参照)．

1.4　乱数列を用いるシミュレーションの必要性

[1]　乱数列と実験　**1.1**節の補注1.2で述べたように，サイコロを投げて出た目の数を記録する実験を続けて得られる数の系列は，1から6までの6つの数からなる乱数列とみなされる．そこで逆にサイコロを投げる実験を実際にサイコロを投げる代わりに，既成の乱数列[1)]を用いて行なうことを考えてみよう．そのためには1から6までの6つの数からなる乱数列をつくればよい．このつくり方は次のようにいろいろな方法がある．

方法1　たとえば前の実験1より

3, 6, 9, 5, 4, 2, 9, 2, 8, 1, 9, 3, ……

なる1桁の乱数列において1, 2, 3, 4, 5, 6の6つの数以外は捨てて

3, 6, 5, 4, 2, 2, 1, 3, ……

のような数列をつくると，これが1から6までの6つの数からなる乱数列となる．この乱数列が等確率性(等出現性)と無規則性の2つ

1)　0から9までの10個の数からなる乱数列，または区間[0, 1]上の乱数列で乱数表になっている．

の性質を持っていることは容易に理解できよう．

方法 2.　式 (*1.3*) で示す区間 [0, 1] 上の一様乱数列とみなされる数列を用いてつくることを考える．そのためにはまず次のような対応を考える．

$$\left.\begin{array}{l} 0.100 \sim 0.199 \longleftrightarrow 1 \\ 0.200 \sim 0.299 \longleftrightarrow 2 \\ 0.300 \sim 0.399 \longleftrightarrow 3 \\ 0.400 \sim 0\ 499 \longleftrightarrow 4 \\ 0.500 \sim 0.599 \longleftrightarrow 5 \\ 0.600 \sim 0.699 \longleftrightarrow 6 \end{array}\right\} \qquad (1.5)$$

すなわち，区間 [0, 1] 上の乱数列でもし 0.100 ～ 0.199 の間の数が出れば 1，0.200 ～ 0.299 の間の数が出れば 2, ……, 0.600 ～ 0.699 の間の数が出れば 6 をそれぞれ対応させ，他の数は捨てる．式 (*1.3*) で最初の 0.369 は式 (*1.5*) の対応より 3 と記録する．次に 0.542 は式 (*1.5*) より 5 と記録する．次に 0.928 は捨て，0.193 をとり，式 (*1.5*) の対応より 1 と記録する．同様な操作で順次得られる

3,　5,　1, ……

なる系列は 1 から 6 までの 6 つの数からなる乱数列となる．

式 (*1.4*) の乱数列を使用する場合は

$$\left.\begin{array}{l} 0.1000000000 \sim 0.1999999999 \longleftrightarrow 1 \\ 0.2000000000 \sim 0.2999999999 \longleftrightarrow 2 \\ 0.3000000000 \sim 0.3999999999 \longleftrightarrow 3 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \vdots \\ 0.6000000000 \sim 0.6999999999 \longleftrightarrow 6 \end{array}\right\} \qquad (1.6)$$

なる対応を考えればよい．

方法 3　同じ式 (*1.3*) で示す乱数列を用いて方法 2 よりもっと効率をよくつくることを考えよう.[1] そのときは次のような対応を考えればよい.

$$\left.\begin{array}{l} 0 \sim \dfrac{1}{6} \longleftrightarrow 1 \\[2ex] \dfrac{1}{6} \sim \dfrac{2}{6} \longleftrightarrow 2 \\[2ex] \dfrac{2}{6} \sim \dfrac{3}{6} \longleftrightarrow 3 \\[2ex] \dfrac{3}{6} \sim \dfrac{4}{6} \longleftrightarrow 4 \\[2ex] \dfrac{4}{6} \sim \dfrac{5}{6} \longleftrightarrow 5 \\[2ex] \dfrac{5}{6} \sim 1 \longleftrightarrow 6 \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

この対応により, 式 (*1.3*) ではじめから $\dfrac{2}{6} < 0.369 < \dfrac{3}{6}$ であるから 3 と記録し, 次に $\dfrac{3}{6} < 0.542 < \dfrac{4}{6}$ であるから 4 と記録し, 次に $\dfrac{5}{6} < 0.928 < 1$ であるから 6 と記録し, 次に $\dfrac{1}{6} < 0.193 < \dfrac{2}{6}$ であるから 2 と記録し, 同様な操作で順次得られる

$$3,\ 4,\ 6,\ 2,\ \cdots\cdots$$

という系列は 1 から 6 までの数からなる乱数列となる. 式 (*1.4*) の乱数列を用いる場合も同様の対応を考えればよい.

補注 1.4　1 から 6 までの 6 つの数ではなく, たとえば 680 以下のすべての数字からなる乱数列を得たいときにも方法 1, 方法 2, 方法 3 を用いて同様につくることができる.

---

1) 乱数列を捨てないでつくることを考える.

ここでは方法1の例だけを示しておく．式(*1.2*)で示す3桁の乱数列を用い，はじめから 680 以下の数だけ採用し，それ以外は捨てればよい．すると

369, 542, 193, 109, ……

が得られ，これが 680 以下の3桁の数からなる乱数列である．

もしコンピュータの中で区間 [0, 1] 上の一様乱数列を非常に高速で生成することができれば，以上の方法2または方法3によって1から6までの6つの数の乱数列も高速で発生できる．このことはサイコロを投げて出る目の数を記録する実験が非常な高速度でコンピュータの中で出来ることを意味する．

このようにコンピュータの中で乱数列を用いて実験を行なうことを，**乱数列を用いるシミュレーション**と呼ぶ．

[2]　乱数列を用いるシミュレーションの必要性　　3本のクジのうちに当たりクジが1本あるとする(図1.10)．このクジを3人の人が順番に引くとき，何番目の人が1番得か．すなわち何番目に引く人が当たりクジを引く確率が1番大きいかという問題は現在でも我々が実生活のうえでよく遭遇する問題であろう．

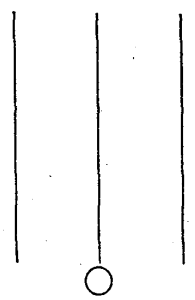


図1.10　クジ引き
(○印が当りクジ)

この場合，何番目にクジを引く人も当たりクジを引く確率は同じであるという計算は容易にできるが，確率の計算ができなかった頃には3人の人が順番に3本のクジを引く実験を何回となく繰り返して，実験回数が多くなったときに何番目に引く人も当たりクジを引く割合が等しくなるということを経験的に導くより他に方法はなかった．

たとえば，このクジ引きを乱数列を用いて行なうためにはどうすればよいだろうか．これについての詳細は，4章のランダム順列の

つくり方のところに述べてあるから参照されたい．

サイコロを2回投げて2回とも1の目が出たとき勝ちとなる賭と，銅貨を5回投げて全部表が出たとき勝ちとなる賭とは，同一の賭金で勝ったときの収入が同一である場合，どちらが有利であるかを考えてみよう．この場合もクジ引きの例と同様に確率の計算が十分発達していなかった頃には，人々はこの問題の答を得るために，確かに前の賭のほうが損だということを身にしみて知るまで両方の賭をきわめて多数回繰り返し実験[1]してみる以外に方法はなかったであろう．ところが，現在のように確率の計算が容易にできる場合には，サイコロも銅貨も正常であるとすると，

$$\text{サイコロの賭で勝つ確率} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\text{銅貨の賭で勝つ確率} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

となることは直ちにわかる．

この結果から，この差は $\frac{1}{288}$ という小さなものであるから，1度や2度この賭に加わる人にとっては，どちらに賭けても大差はない．しかしながら長いあいだ賭を経営する人にとっては，このわずかな差もはっきりした差となって現われてくる．

このような単純な問題でも確率論を知らない人にとってはとにかくクジ引きや賭を実際に多数回繰り返してみる以外に解答を得ることはできない．もし判断を誤ると，実際に繰り返しによって解がわ

---

1)　この実験を乱数列を用いて行なうことはこの節“[1] 乱数列と実験”のところで述べたと同様容易であるので読者に試みていただきたい．

かったときはすでにはっきりした損害をこおむったあとであるという不都合に遭遇する.

このような問題に対して困難を感じていた人々にとっては，確率論はきわめて有効な道具となったのである.

ところが現在でもなおかつ生物学，物理学，工学，OR などの分野において確率論的に表現された問題の数値解が必ずしも現在可能な解析的な方法によっては得られないような場合が多い. この場合，前のクジ引きや，賭の例のように確率の計算ができなくてサイコロとか銅貨を投げて多数回実験をしていた頃と同じように，乱数列を使ってコンピュータの中で実験を行なうシミュレーションにより近似解を得ようとするわけである. ここに乱数列を用いるシミュレーションの必要性が生じ，目的とする解の近似値を得るための有力な手段となる[1]. このためにはその基礎的な道具となる乱数列の生成がコンピュータの中で容易にできることが必要であり，**2** 章ではまず基本的な乱数列である一様乱数列のつくり方について，さらに **4** 章では一様乱数列からの変換による各種乱数列のつくり方について解説することにする.

1) 実際の問題については **5** 章で詳しく述べる.

2 章　一様乱数列のつくり方（コンピュータの利用）

前章でも述べたように，乱数列を用いたシミュレーションをコンピュータの中で行なうとき，多くの乱数列を短時間でつくる必要があるわけで，このために一定のプログラムに従う簡単な方法で一様乱数列をつくることが要求される．

この章ではこのつくり方について述べ，そのできた乱数列についての性質について解説した．

2.1 平方採中法

一様乱数のつくり方として古くから知られているものにフォン・ノイマン（Von Neumann）の考案した**平方採中法**（midsquare method）がある．

この方法は次のようにしてコンピュータの中で一様乱数列を生成させるわけである．たとえば6桁の数 x_0 をとり，これを2乗して得られた数の中央の6桁を取り出して x_1 とする．また x_1 を2乗して得られた数の中央の6桁を取り出して x_2 とする．このような操作を繰り返して得られた

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \cdots\cdots$$

なる系列が一様乱数列となる（表2.1参照）

表2.1 平方採中法

	.7 5 3 1 0 6	
5 6 7	.1 6 8 6 4 7	2 3 6
0 2 8	.4 4 1 8 1 0	6 0 9
1 9 5	.1 9 6 0 7 6	1 0 0
0 3 8	.4 4 5 7 9 7	7 7 6
1 9 8	.7 3 4 9 6 5	2 0 9
	………………	
	………………	

この表で $x_0 = 0.753\,106$ で，これを 2 乗すると
$x_0{}^2 = 0.567\,168\,647\,236$ となり，この数の中央の 6 桁 168 647 を取り出し，前に小数点をつけて $x_1 = 0.168647$ とする．順次
$x_2 = 0.441\,810$, $x_3 = 0.196\,076, \cdots\cdots$ となって
これが区間 $[0, 1]$ 上の一様乱数列とみなされる．最初もってくる数 x_0 は何桁でもよいが，コンピュータの桁数に合わせて，普通の乱数表からとってくればよい．

一般的にいうと $2k$ 桁の任意の数を 2 乗して得られる $4k$ 桁の数字の中央に位する $2k$ 個の数を取り出し，これをまた 2 乗して得られる $4k$ 桁の数字の中央に位する $2k$ 個の数を取り出し，これをまた 2 乗して，という操作を繰り返して得られる数列が $2k$ 桁の乱数列とみなされ，その各数の前に小数点をつければ，区間 $[0, 1]$ 上の一様乱数列とみなされる．

このようにして得られた数列の性質を調べてみると，ときどき乱数列とみなすことができないような数列が現われる．すなわち同じ数が続けて現われたり，数の系列に一定の間隔で周期が現われたりする．また，この平方採中法で発生した乱数列の性質をちゃんと調べることはたいへんむずかしい．

この方法はこのようにいろいろな難点を含んでいるので，現在ではあまり使用されていない．

2.2 乗算型合同法

平方採中法で発生させた系列にはいろいろな面で難点があり，これに変わってレーマー（Lehmar）が 1949 年に次のような**乗算型合同法**（multiplicative congruence method）を提案した．

これはたとえば

$$x_{n+1} \equiv 15\,x_n \ (\text{modulo } 10^6+1) \ (n=0,1,2,3,\cdots)$$
$$x_0 = 1 \ (\text{初期値}) \qquad (2.1)$$

なる式を考える．この式の意味は x_n を 15 倍してそれを 10^6+1 で割った余りを x_{n+1} とするということで，これによって得られる整数 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ が 10^6 桁の一様乱数列とみなされる．

式 (2.1) について少し計算してみると

$$x_0 = 1.$$
$$x_1 = 15.$$
$$x_2 \equiv 15 \times 15 \quad (\text{modulo } 10^6+1)$$
$$x_2 = 225.$$
$$x_3 \equiv 15 \times 225 \ (\text{modulo } 10^6+1)$$
$$x_3 = 3\,375.$$
$$x_4 \equiv 15 \times 3\,375 \ (\text{modulo } 10^6+1)$$
$$x_4 = 759\,375.$$
$$x_5 \equiv 15 \times 759\,375 \ (\text{modulo } 10^6+1)$$
$$x_5 = 390\,614.$$
$$\vdots$$

となり，

$$1,\ 15,\ 225,\ \underline{3\,375,}\ 759\,375,\ 390\,614,\ \cdots\cdots$$

が 10^6 桁の一様乱数列となるわけであるが，はじめの 1, 15, 225, 3 375 のあたりは使わないで，その次の 759 375 あたりから使うのがよい.

もしこの各数の前に小数点をつけて

$$0.000001,\ 0.000015,\ 0.003375,\ 0.759375,\ 0.390614,\ \cdots\cdots$$

とすれば，これは区間 [0, 1] 上の一様乱数列となることは容易にわかろう.

この乗算型合同法をもう少し一般的に述べると，次のようになる.

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} \equiv a\,x_n \ (\text{modulo } m) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)^{1)} \\ x_0 = b \ (\text{初期値}) \end{array}\right. \tag{2.2}$$

なる式を考える．この式の意味は前と同様に x_0 として初期値 b を与え，あとは ax_0 を m で割った余りを x_1 とし，さらに ax_1 を m で割った余りを x_2 とし，さらに ax_2 を m で割った余りを x_3 とする．このような操作でできる数列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \cdots\cdots$$

が m 桁の一様乱数列となる.

この方法を使えばコンピュータの中で容易にしかも高速で一様乱数列が生成できるわけである.

しかしこの方法を用いてもやはりある間隔でもって系列の中に周期が現われてくる．周期が現われると乱数列の1つの性質である無規則性が失われるわけで，この周期をできるだけ長くするように a,

1) m はコンピュータの構造によって制限され，2 進計算では $m = 2^p$, 10 進計算では $m = 10^p$ となる.

m を定めて，この周期内で実際に使用するようにすればよい．

補注 2.1　乗算型合同法をはじめコンピュータで生成する乱数列の系列にはある間隔で周期が現われるので，これを**擬似乱数列**（pseudo random number sequence）と呼んでいる．実際はこの周期は非常に長いので周期内の数列を使用することによってこの欠陥を除去している．

この書物ではいちいち擬似乱数列といわないで，単に“**乱数列**”ということにする．

さて，この乗算型合同法で生成した乱数列については次のような周期に関しての性質があり，実際生成する場合に必要なので述べておく．

性質 1.　$p \geqq 3$ のとき

$$x_{n+1} \equiv a x_m \pmod{2^p}$$

$$x_0 = b$$

によって生成される乱数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ の最大周期は

$$a \equiv 3,\ 5 \pmod{8}^{1)}$$

$$b = \text{奇 数}$$

に対して 2^{p-2} となる．

1)　$a \equiv 3, 5$ (modulo 8) の意味は a が 8 で割って 3，または 5 余る数であることを意味する．たとえば $a = 11, 13, 19, 21$ などはこの条件を満足している．

例 1.[1] $x_0=b=1$ のとき表2.1のようになり，この場合，性質1が確かめられよう．

表2.1 生成される数列と周期

pの値	演算式	生成される数列	周期
3	$x_{n+1}\equiv x_n$	1, 1, 1, 1, 1, 1,……	1
	$x_{n+1}\equiv 3x_n$	1, 3, 1, 3, 1, 3,……	2
	$x_{n+1}\equiv 5x_n$	1, 5, 1, 5, 1, 5,……	2
	$x_{n+1}\equiv 7x_n$	1, 7, 1, 7, 1, 7,……	2
4	$x_{n+1}\equiv x_n$	1, 1, 1, 1, 1, 1,……	1
	$x_{n+1}\equiv 3x_n$	1, 3, 9, 11, 1, 3, 9, 11,……	4
	$x_{n+1}\equiv 5x_n$	1, 5, 9, 13, 1, 5, 9, 13,……	4
	$x_{n+1}\equiv 7x_n$	1, 7, 1, 7, 1, 7,……	2
	$x_{n+1}\equiv 9x_n$	1, 9, 1, 9, 1, 9,……	2
	$x_{n+1}\equiv 11x_n$	1, 11, 9, 3, 1, 11, 9, 3,……	4
	$x_{n+1}\equiv 13x_n$	1, 13, 9, 5, 1, 13, 9, 5,……	4
	$x_{n+1}\equiv 15x_n$	1, 15, 1, 15, 1, 15,……	2

性質 2. $p\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv a x_n \quad (\text{modulo } 5^p) \\ x_0 &= b \end{aligned} \tag{2.4}$$

によって生成される乱数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ の最大周期は

$a\equiv 2, 3, 8, 12, 13, 17, 22, 23$ (modulo 25) とすべての $b\not\equiv 0$ (modulo 5) に対して 4.5^{p-1} となる．

例 2. $p=2$, $x_0=b=1$ のときに表にしてみると表2.2のよう

1) この例題ではわかりやすいために非常に短い周期のものを取り上げたために乱数列といわないで単に数列と書いた．

表2.2　生成される数列と周期

pの値	演算式	生成される数列	周期
2	$x_{n+1}\equiv 2x_n$	1, 2, 4, 8, 16,……	20
	$x_{n+1}\equiv 3x_n$	1, 3, 9, 2, 6,……	20
	$x_{n+1}\equiv 7x_n$	1, 7, 24, 18, 1, 7, 24, 18,……	4
	$x_{n+1}\equiv 8x_n$	1, 8, 14, 12, 21,……	20
	$x_{n+1}\equiv 12x_n$	1, 12, 19, 3, 11,……	20
	$x_{n+1}\equiv 13x_n$	1, 13, 19, 22, 11,……	20
	$x_{n+1}\equiv 17x_n$	1, 17, 14, 13, 21,……	20
	$x_{n+1}\equiv 18x_n$	1, 18, 24, 7, 1, 18, 24, 7,……	4
	$x_{n+1}\equiv 22x_n$	1, 22, 9, 23, 6,……	20
	$x_{n+1}\equiv 23x_n$	1, 23, 4, 17, 16,……	20

になり，この場合，性質2が確かめられよう．

性質3.　$p>3$ のとき

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv a x_n \quad (\text{modulo } 10^p) \\ x_0 &= b \end{aligned}\right. \tag{2.5}$$

によって生成される乱数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ の最大周期は

$$a\equiv 3, 13, 27, 37, 53, 67, 77, 83, 117, 123, 133, 147,$$
$$163, 173, 187, 199 \quad (\text{modulo } 200)$$
$$b\equiv 1, 3, 7, 9 \quad (\text{modulo } 10)$$

に対して 5.10^{p-2} となる．

補注2.2　例1，例2では a の値，p の値が簡単な場合について述べたが，実際は a ならびに $2^p, 10^p$ の値としてかなり大きい数が使われる．

たとえば

性質1において $a=5^{13}$，$p=39$ と考えれば $2^p=2^{39}$ となり，この場合，周期は 2^{37} となることがわかる．

性質3において $a=3^{19}$，$p=20$ と考えれば $p=20$ のとき $10^p=10^{20}$ となり，この場合，周期は $5\cdot10^{18}$ となることがわかる．

2.3 混合型合同法

さらに乗算型合同法を発展させたものとして現在もっともよく使われているものに**混合型合同法** (mixed congruence method) がある．

これは，

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv ax_n + c \quad (\text{modulo } m) \\ x_0 &= b \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

によって一様乱数列を生成する方法であり，この式の意味は a, b, c, m を前もって決めておいて，まず $ax_0+c=ab+c$ を m で割った余りを x_1 とし，さらに ax_1+c を m で割った余りを x_2 とする．順次この方法で m 桁の一様乱数列

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \cdots\cdots$$

が生成できるというわけである．

前節の脚注でも述べたが，m はコンピュータの構造によって制限され，たとえば2進計算法では

$$m=2^p$$

と考え，10進計算法では

$$m=10^p$$

と考えなければならない．

もちろん a, b, c, x_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ は0から $m-1$ までの整数であることは容易にわかるであろう．

この方法で生成した一様乱数列の各数を m で割ったとき，

$$\frac{x_0}{m},\ \frac{x_1}{m},\ \frac{x_2}{m},\ \frac{x_3}{m},\ \cdots\cdots$$

は区間 [0, 1] 上の一様乱数列となる．

この混合型合同法で生成した乱数列は，明らかに最大限 m の周期をもつわけで，実際はそれより周期は短くなる．

たとえば式 (2.6) で $m=16,\ a=7,\ b=2,\ c=1$ とおくと

$$x_0=2,\ \ x_1=15,\ \ x_2=7,\ \ x_3=2,\ \ x_4=15,\ \ x_5=10,\cdots\cdots$$

となって，4番目には同じ数が現われ，周期は4となるわけである．

そこで乗算型合同法のときと同じように，式 (2.6) の a, b, c を定めるとき，できるだけ周期が長くなるようにすることが必要である．

この定め方は次のような性質を利用すればよい．

性質 1′.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv a x_n + c \quad (\text{modulo } 2^p) \\ x_0 &= b \end{aligned} \tag{2.7}$$

によって生成される乱数列，$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ の最大周期は

$$a \equiv 1 \quad (\text{modulo } 4)$$
$$c \equiv 1 \quad (\text{modulo } 2)$$

のとき，2^p である．また最大周期は初期値 b に無関係である．

この性質は式 (2.6) で $m=2^p$ とおいたとき，周期が m であることを意味しており，これ以上の長い周期のものをつくることはできないわけである．

例 1. $p=2,\ a=1,\ b=0,\ c=1$（性質 1′ の条件を満足している）として考えると式 (2.7) は

$$x_{n+1} \equiv x_n + 1 \quad (\text{modulo } 2^2)$$
$$x_0 = b = 0$$

となり，この式から

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 3,\ \ x_4 = 0,$$
$$x_5 = 1,\ \ x_6 = 2,\ \ x_7 = 3,\ \cdots\cdots$$

となって，周期は4 (最大周期) となる．

また，$p = 2,\ a = 1,\ b = 1,\ c = 1$ と b の値だけ変えてみると

$$x_{n+1} \equiv x_n + 1 \quad (\text{modulo } m = 2^2)$$
$$x_0 = b = 1$$

から

$$x_0 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 3,\ \ x_4 = 0,\ \ x_5 = 1,$$
$$x_6 = 2,\ \ x_7 = 3,\ \ x_8 = 0,\ \cdots\cdots$$

となって，やはり周期は4 (最大周期) となる．すなわち初期値 b の値が変わっても周期は変わらないわけである．

例 2. $p = 2,\ a = 5,\ b = 0,\ c = 3$ (性質 $1'$ の条件を満足している) とすると，式 (*2.7*) は

$$x_{n+1} \equiv 5x_n + 3 \quad (\text{modulo } 2^2)$$
$$x_0 = b = 0$$

となり，この式から

$$x_0 = 0,\ \ x_1 = 3,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = 0,$$
$$x_5 = 3,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 1,\ \cdots\cdots$$

となり，やはり周期は4 $(= m)$ となる．

性質 2′.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv a x_n + c \quad (\text{modulo } 10^p) \\ x_0 &= b \end{aligned} \qquad (2.8)$$

によって生成される数列 $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ の最大周期は

$$a \equiv 1 \quad (\text{modulo } 20)$$
$$c \equiv 1, 3, 7, 9 \quad (\text{modulo } 10)$$

のとき，10^p であり，これは初期値 b の値に無関係である．

例 3.　$p=1,\ a=1,\ b=0,\ c=1$（性質 2′ の条件を満足している）のとき，式 (2.8) は

$$x_{n+1} \equiv x_n + 1 \quad (\text{modulo } 10)$$
$$x_0 = b = 0$$

となり，この式から

$$x_0=0,\quad x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3,\quad x_4=4,\quad x_5=5,$$
$$x_6=6,\quad x_7=7,\quad x_8=8,\quad x_9=9,\quad x_{10}=0,\quad x_{11}=1,$$
$$x_{12}=2,\quad x_{13}=3,\quad x_{14}=4,\quad x_{15}=5,\quad x_{16}=6,\quad x_{17}=7,$$
$$x_{18}=8,\quad x_{19}=9,\quad x_{20}=0,\quad \cdots\cdots$$

となって，周期は 10（最大周期）となる．

補注 2.3　この例の場合もわかりやすいために a, b, c, p の値を簡単にして述べたが，実際は $a=2^7+1,\ b=1,\ c=1,\ m=2^{35}$ として

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv (2^7+1)x_n + 1 \quad (\text{modulo } 2^{35}) \\ x_0 &= b = 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

なる式とか，$a=101,\ b=1,\ c=1,\ m=10^{10}$ として

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\equiv 101x_n+1 \quad (\text{modulo } 10^{10}) \\ x_0 &= b = 1 \end{aligned} \tag{2.10}$$

なる式などが用いられている．

式 (2.9) においては最大周期を持つための条件

$$a \equiv 1 \ (\text{modulo } 4), \qquad c \equiv 1 \ (\text{modulo } 2)$$

を，また式 (2.10) においても最大周期をもつための条件

$$a \equiv 1 \ (\text{modulo } 20) \qquad c \equiv 1,\ 3,\ 7,\ 9 \ (\text{modulo } 10)$$

を満足することは明らかであり，よって式 (*2.9*) で生成した乱数列の周期は 2^{35} であり，式 (*2.10*) で生成した乱数列の周期は 10^{10} である.

2.4 物理現象の利用

たとえば原子核から出てくるガンマ線はポアソン分布に従うことを利用してポアソン乱数列[1] をつくり，それから一様乱数列をつくることができるわけである.

このほか，いろいろな物理現象の中に現われている特性を使って乱数列をつくる試みはよく行なわれており，合同法などに比べると周期がないのが特徴とされている．しかし一度現象がみだれると乱数列とみなせないような数列が現われる可能性があり，この物理乱数列を用いるときは次章の乱数列の検定をたえず行ないながら用いることが必要であろう.

---

1) ポアソン乱数列については「4章 4.2 節のポアソン乱数列のつくり方」を参照のこと.

3章　乱数列の検定

既成の乱数表および2章で述べたつくり方で生成した乱数列はほぼ乱数列の2つの性質（等確率性，無規則性）を満足しているわけであるが，時として乱数列の性質を極度にもたないようなものまで含むことがあり，念のために生成した乱数列の等確率性，無規則性について検証しておくことが必要である．この検証のためには統計的仮説検定の考え方を用いて行なうわけである．

この章では乱数列の等確率性（等出現性）と無規則性の2つについての代表的な検定法を述べる．

3.1　統計的検定の考え方

あるサイコロを3回続けて投げたところ，全部1の目が出たとする．そのとき，サイコロを投げた人は“これは偶然だ”と思うにちがいない．しかし，さらに続けて3回投げ，合計6回投げて全部1の目が出たときは“サイコロが正常である”ということに疑いを持つであろう．すなわち，もし“どの目の出る確率も等しい（正常なサイコロ)”ならば6回続けて1の目の出る確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^6=\frac{1}{46656}$ となって，同様な実験（サイコロを6回投げる）を46656回も繰り返し行なったときに平均的に1回起こることが，ただ1度の実験で起こったことになり“サイコロが正常である”という仮説に疑いをもち，その仮説を認めるわけにはいかないことになる．

一般的にいうとある仮説のもとで，非常に確率の小さい結果が，

ただ1度の実験で起こったとすると，その仮説を認めないと判断する．すなわち，その仮説を棄てるわけである．もっと厳密にいうと，ある仮説のもとで実験を行なって，起こる確率が α（習慣的に 0.05, 0.01 と考えられている）である結果の全体を考え，そのうちの1つがただ1回の実験で起こったとすると，仮説を認めず（仮説を棄てる），そうでない場合は仮説を認める（仮説を受け入れる）わけである．

この場合，かりに仮説を棄てたとすると，仮説が正しいにもかかわらず仮説を棄てる確率は α だけあるわけで，確率 α の危険を犯していることになる．

このような手続きにより仮説を棄てたり，受け入れたりする方法を**統計的仮説検定**（test of statistical hypothesis）という．また仮説が棄てられるか棄てられないかという立場から検定されるもので，この仮説のことを**帰無仮説**（null hyphothesis）といい，棄却される結果の全体を**棄却域**（critical region）という．また確率 α（100 α %）のことを**危険率**，または仮説を棄てる基準となるので**有意水準**（significance level）ともいう．

棄却域は両側または片側に取るのが普通である．次に棄却域が両側の場合の例を示しておこう．

例　サイコロを3回投げて，出る目の和を見ることによってサイコロが正常であるかどうかを有意水準5%で検定したいとき，棄却域を求める．

解　“サイコロは正常である（どの目の出る確率も $\dfrac{1}{6}$ である）”という帰無仮説のもとで，3回投げたときの出る目の和の確率分布は次のようになる．

表3.1　出る目の和の確率分布表

出る目の和の値	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
その確率	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$
	○	○													○	○

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{棄却域}}$ (3, 4)　　$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{棄却域}}$ (17, 18)

この表より，有意水準5%の検定における棄却域は出る目の和の値が 3, 4, 17, 18 であることがわかる（表3.1で○印をつけておいた）．すなわち，この部分の確率を計算してみると 0.037 となり，5%（0.05）よりも小さくなっている．よって，もしサイコロを3回投げて，その出た目の和が 3, 4, 17, 18 であれば，仮説は有意水準5%で棄てられ，このサイコロは正常でないと判断するわけである．

3.2　等確率性（等出現性）の検定

[1]　度数検定

例 1.　区間 [0, 1] 上の乱数列が載せてある既成の乱数表（有効数字2桁）がある．この乱数表から200個の乱数を取り出し，等出現性の性質をもつかどうか検証する．

取り出された200個の乱数は次のようであった[1]．

0.28	0.48	0.48	0.60	0.78	0.23	0.07	0.50	0.62	0.48
0.67	0.18	0.08	0.03	0.66	0.90	0.16	0.49	0.86	0.33
0.75	0.51	0.44	0.54	0.48	0.35	0.30	0.01	0.31	0.21
0.08	0.67	0.46	0.23	0.57	0.57	0.90	0.13	0.61	0.84
0.78	0.59	0.41	0.02	0.27	0.91	0.34	0.26	0.54	0.60

1）　実際に検証する乱数の個数は 200 個よりも多いのが普通であるが，ここではわかりやすいために 200 個にした．個数の多い場合は例3に示した．

0.45	0.44	0.21	0.66	0.19	0.77	0.71	0.26	0.52	0.87
0.61	0.19	0.25	0.31	0.68	0.21	0.56	0.66	0.23	0.41
0.77	0.75	0.74	0.27	0.14	0.69	0.93	0.54	0.17	0.26
0.94	0.31	0.02	0.62	0.54	0.90	0.88	0.31	0.31	0.59
0.60	0.61	0.83	0.99	0.46	0.57	0.80	0.91	0.06	0.37
0.99	0.28	0.03	0.35	0.44	0.57	0.49	0.73	0.52	0.58
0.98	0.50	0.34	0.67	0.43	0.85	0.97	0.84	0.04	0.92
0.79	0.81	0.28	0.54	0.73	0.51	0.91	0.87	0.19	0.74
0.06	0.31	0.30	0.57	0.78	0.31	0.65	0.66	0.51	0.52
0.41	0.50	0.21	0.70	0.15	0.64	0.63	0.05	0.90	0.12
0.70	0.37	0.07	0.82	0.24	0.16	0.41	0.62	0.16	0.76
0.94	0.13	0.07	0.21	0.31	0.04	0.53	0.51	0.37	0.89
0.72	0.67	0.90	0.21	0.66	0.53	0.68	0.27	0.61	0.03
0.93	0.12	0.40	0.04	0.05	0.96	0.55	0.28	0.35	0.41
0.71	0.31	0.06	0.32	0.43	0.80	0.19	0.57	0.70	0.99

解 区間 [0, 1] を 10 個の等しい区間に分けて，200 個の乱数の各区間にはいる個数（度数）を調べてみると表 3.2 のようになる．

表 3.2 乱数の各区間での度数

区 間	0 ～ 0.09	0.10 ～ 0.19	0.20 ～ 0.29	0.30 ～ 0.39	0.40 ～ 0.49	0.50 ～ 0.59	0.60 ～ 0.69	0.70 ～ 0.79	0.80 ～ 0.89	0.90 ～ 0.99	合計
度 数	19	15	21	21	20	28	25	19	13	19	200

この表に示される度数の変化を目で見てはっきりさせるために図 3.1 のようなヒストグラムに書いてみる．

もし 200 個の乱数が区間 [0, 1] 上に等確率で現われるならば，各区間での出現度数は 20 個（図 3.1 で点線で示した）に近い値になるはずである．そこで各区間での実現度数の 20 個からの差がどれぐらいあるかを見て等出現性の性質をもっているかどうかを判定

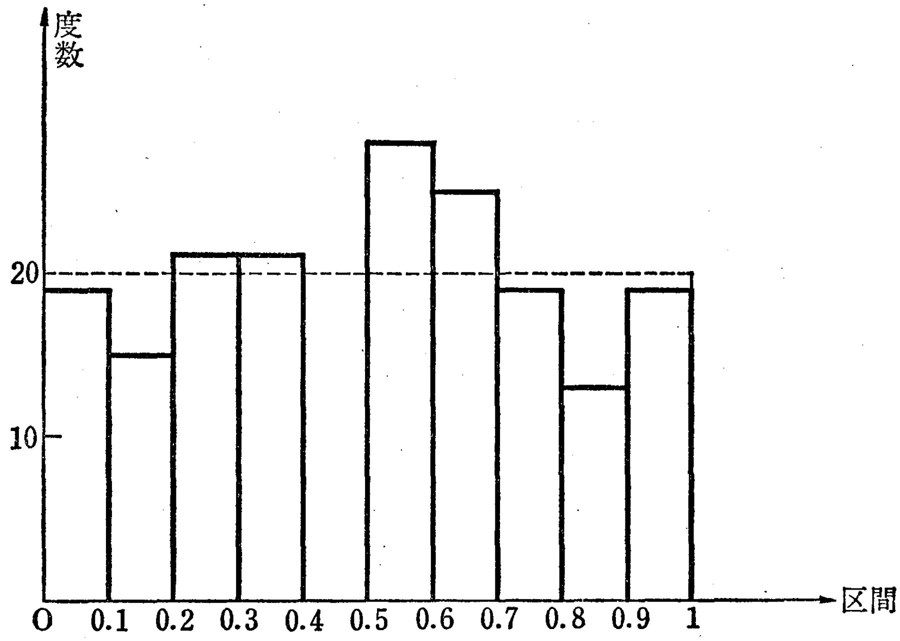


図 3.1 ヒストグラム

しようというわけである．もし区間 [0, 1] 上に等確率で現われるならば，各区間の度数は理論的に 20 個と考えればよく，この 20 個のことを理論度数を呼んでいる．

極端に実現度数が理論度数からはなれていれば，すなわち図 3.1 で示すヒストグラムにおいて点線の位置からの離れ具合が極端に大きいときは目で見るだけで，この乱数列は等確率性（等出現性）をもってないと判断すればよいが，実際はなかなか目で見るだけでは判断できない場合が多く，統計的検定手法にたよらざるを得ない．しかし統計的検定手法と言ってもただこの理論度数と実現度数の差の大小を数値的に処理し，その大きさによって等確率性(等出現性)を検定しているわけで目で見て判定するのと原理的には同じである．

[2]　統計的検定の手順　表 3.3 のように実現度数と理論度数の表を作り，各区間での値

$$\frac{(\text{実現度数}-\text{理論度数})^2}{\text{理論度数}}$$

を計算し，これを各区間にわたって加え，その値をSとしよう．Sの値は各区間での実現度数と理論度数の差が大きければ大きいほど大きくなる．よって，このSの値でもって等出現性を判定しようというわけである．

この目的のためにはSの値が値Aよりも大きくなれば乱数列の等出現性は認められなくて，値Aよりも小さければ等出現性は認められるという，そのような値Aを決めなければならない．

いま帰無仮説を 200 個の乱数が

“区間 $[0,1]$ の中に等確率で現われる”

とすれば，Sのとる値は理論度数がある程度大きいとき，自由度9のカイ2乗分布に従って現われることが知られている．自由度は区間の数より1だけ小さい数である．有意水準 95% の棄却域は付表5より区間

$$(16.919,\ \infty)$$

となり，値Aは 16.919 とすればよく，Sの値が 16.919 より大きければ棄却域に入り，有意水準 95% で帰無仮説は棄てられ，乱数列の等出現性は認められなくなる．

そこで次のような表をつくることによってSの値を実際に求めることができる．

実際，次の表より

$$S=8.40$$

となって，Sの値は 16.919 より小さいから帰無仮説は受け入れられ，この例の 200 個の乱数の区間 $[0,1]$ 上での等出現性は認めら

れることとなる．

表 3.3　実現度数と理論度数

区　　　間	0〜0.09	0.10〜0.19	0.20〜0.29	0.30〜0.39	0.40〜0.49	0.50〜0.59	0.60〜0.69	0.70〜0.79	0.80〜0.89	0.90〜0.99	合　計
実　現　度　数	19	15	21	21	20	28	25	19	13	19	200
理　論　度　数	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	200
$\dfrac{(\text{実現度数}-\text{理論度数})^2}{\text{理論度数}}$	0.05	1.25	0.05	0.05	0	3.20	1.25	0.05	2.45	0.05	8.40

例 2.　200 個の区間 [0,1] 上の乱数が次のように与えられている．この乱数の等確率性（等出現性）について検証する．

0.88	0.69	0.78	0.79	0.49	0.21	0.65	0.00	0.53	0.64
0.70	0.29	0.81	0.51	0.14	0.50	0.06	0.64	0.51	0.79
0.89	0.06	0.36	0.08	0.79	0.21	0.59	0.77	0.28	0.09
0.71	0.01	0.71	0.78	0.42	0.35	0.08	0.46	0.52	0.92
0.37	0.23	0.19	0.04	0.81	0.05	0.42	0.55	0.49	0.85
0.72	0.36	0.18	0.25	0.80	0.30	0.07	0.03	0.01	0.75
0.39	0.84	0.98	0.19	0.85	0.78	0.57	0.73	0.19	0.84
0.57	0.65	0.15	0.14	0.76	0.90	0.14	0.31	0.05	0.32
0.46	0.91	0.07	0.86	0.06	0.09	0.31	0.06	0.21	0.14
0.33	0.71	0.72	0.70	0.75	0.63	0.64	0.05	0.97	0.05
0.91	0.39	0.71	0.80	0.67	0.45	0.25	0.42	0.93	0.34
0.54	0.31	0.53	0.44	0.30	0.46	0.58	0.80	0.47	0.12
0.62	0.86	0.05	0.45	0.93	0.75	0.29	0.48	0.11	0.00
0.34	0.05	0.39	0.16	0.89	0.02	0.89	0.85	0.30	0.54
0.55	0.40	0.89	0.05	0.67	0.32	0.82	0.89	0.03	0.36

0.88	0.52	0.18	0.00	0.36	0.71	0.74	0.60	0.59	0.34
0.78	0.18	0.82	0.32	0.05	0.03	0.84	0.43	0.61	0.39
0.73	0.67	0.02	0.51	0.63	0.17	0.18	0.99	0.74	0.33
0.62	0.44	0.98	0.70	0.24	0.00	0.21	0.72	0.76	0.28
0.70	0.19	0.30	0.57	0.88	0.98	0.67	0.85	0.73	0.03

解 この例においても表 3.3 と同じような表を作ってみると表 3.4 のようになる．

表 3.4 実現度数と理論度数

区　間	0〜0.09	0.10〜0.19	0.20〜0.29	0.30〜0.39	0.40〜0.49	0.50〜0.59	0.60〜0.69	0.70〜0.79	0.80〜0.89	0.90〜0.99	合　計
実現度数	31	17	12	25	16	18	16	30	24	11	200
理論度数	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	200
$\dfrac{(\text{実現度数}-\text{理論度数})^2}{\text{理論度数}}$	6.05	0.45	3.20	1.25	0.80	0.20	0.80	5.00	0.80	4.05	22.60

この表から，例 1 の S に相当する値は，この例では 22.60 となり，有意水準 95 % の棄却域

$$(16.919,\ \infty)$$

に入っており，帰無仮説である乱数の

"区間 [0, 1] 上で等確率で現われる"

は棄てられ，したがって，ここにあげた 200 個の乱数の区間 [0, 1] 上での等出現性は保証されなくなる．

例 1，例 2 でおこなったような検定法を**度数検定**といって**カイ 2 乗検定法**が用いられる．この度数検定法は乱数列の等確率性（等出現性）の検定法として代表的なものであり，もう少し一般的に解説

しておこう.

いま，かりに図3.2のように区間 [0, 1] を l 個の部分区間に分割したとしよう(等間隔である必要はない).

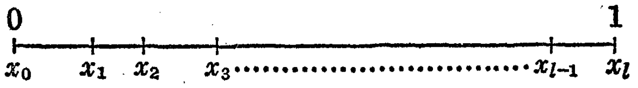


図 3.2　区間 [0,1] の分割

このとき，生成された N 個の乱数列のうち i 番目 ($i=1, 2, \cdots\cdots,$ l) の部分区間に現われる個数を $\boldsymbol{f}_i$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots, l$) としよう[1).

そのとき，もし帰無仮説を

“生成された乱数列が区間 [0, 1] の中に等確率で現われる”

と考えると，この仮説のもとでは i 番目の部分区間に入る個数は理論的に

$$F_i = N \times (x_i - x_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, l)$$

でなくてはならない. この F_i のことを前の例でも示したように理論度数と呼んでいる (表 3.5 参照).

表 3.5　各部分区間における実現度数と理論度数

区間 [0, 1] の分割	$0\sim x_1$	$x_1\sim x_2$	$x_2\sim x_3$	$x_3\sim x_4$	…………	$x_{l-2}\sim x_{l-1}$	$x_{l-1}\sim x_l$	計
実現度数	$\boldsymbol{f}_1$	$\boldsymbol{f}_2$	$\boldsymbol{f}_3$	$\boldsymbol{f}_4$	…………	$\boldsymbol{f}_{l-1}$	$\boldsymbol{f}_l$	N
理論度数	F_1	F_2	F_3	F_4	…………	F_{l-1}	F_l	N

$$\left(\sum_{i=1}^{l} \boldsymbol{f}_i = N, \quad \sum_{i=1}^{l} F_i = N\right)$$

このとき，各部分区間における理論度数と実現度数との差 $\boldsymbol{f}_i - F_i$

1)　$\boldsymbol{f}_i$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots, l$) を太文字で書いたのは，$N$ 個の乱数列をとってくるごとに変動する量であり，確率変数の意味である. 確率変数に関する詳細は巻末付録 1 を参照のこと.

の平方 $(f_i-F_i)^2$ の理論度数 F_i に対する比 $(f_i-F_i)^2/F_i$ の和，すなわち

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{l}\frac{(f_i-F_i)^2}{F_i} \tag{3.1}$$

を考えると[1]，これは f_i と F_i の差が大きければ χ^2 の実現値も大きくなり，χ^2 の実現値の大きさの程度によって帰無仮説を棄てるか受け入れるかを決めるわけである．

補注 3.1　χ^2 の確率分布は理論度数 F_i $(i=1,2,\cdots\cdots,l)$ が十分大きいとき次に示すような自由度 $l-1$ のカイ 2 乗分布に従って分布することが知られている．

カイ 2 乗分布の密度関数（自由度 $l-1$）は巻末付録 1 にも示すとおり

$$f_{l-1}(x)=\frac{1}{2^{\frac{l-1}{2}}\Gamma\left(\frac{l-1}{2}\right)}x^{\frac{l-1}{2}-1}\ e^{-\frac{x}{2}}\quad(x>0) \tag{3.2}$$

と書ける．ただし　$\Gamma\left(\frac{l-1}{2}\right)=\int_0^\infty x^{\frac{l-1}{2}-1}\ e^{-x}dx$　（ガンマ関数）

である．

この自由度 $l-1$ のカイ 2 乗分布は式 (3.2) からもわかるように自由度 $l-1$ がきまるとその形がきまるものである．

このカイ 2 乗分布において，0 と 1 の間の数を α とするとき

$$P\{\chi^2>\chi_0{}^2\}=\alpha^{2)} \tag{3.3}$$

となるような定数 $\chi_0{}^2$ を自由度 $l-1$ のカイ 2 乗分布の α 点といい，$\chi^2{}_{l-1}(\alpha)$ で表わす．式 (3.2) を用いて書くと，式 (3.3) は

$$\int_{\chi_0{}^2}^\infty f_{l-1}(x)dx=\alpha \tag{3.4}$$

と書ける．たとえば　$\alpha=0.05$，$l=4$ の場合，0.05 点は

---

1)　χ^2 もまた確率変数である．
2)　χ^2 が $\chi_0{}^2$ より大きい確率が α という意味．

$\chi_3^2(0.05)=7.815$ となり，図3.3において斜線の部分の面積が0.05に等しくなる．

一般に自由度が与えられたときの α 点については巻末付録の付表5に示しておいたのでそれを用いればよい．

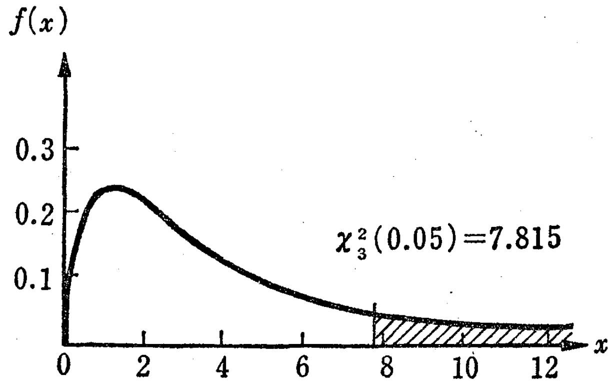


図3.3　カイ2乗分布の α 点 $\chi_{l-1}^2(\alpha)$
($l=4$,　$\alpha=0.05$)

さて帰無仮説のもとで，生成された乱数列より表3.5をつくり，式 (*3.1*) で示す χ^2 の実現値が求まると，この実現値が棄却域に入るかどうかを見ればよい．この場合の棄却域は図3.3で示すような斜線の部分で，有意水準（危険率）は $100\,\alpha\,\%$ となる．すなわち $\chi^2{}_{l-1}(\alpha)$ より大きい範囲が有意水準 $100\,\alpha\,\%$ の棄却域になるわけである．

よって，実現値 $\chi^2{}_{l-1}(\alpha)$ より大きければ帰無仮説は有意水準 $100\,\alpha\,\%$ で棄てられることになり，このときは生成された数列は等確率性（等出現性）は保証されなくて乱数列とみなすことはできないという判断を下すわけである[1]．

例3. 前章の式 (*2.2*) において $m=2^{29}$, $a=3^{17}=129\,140\,163$ と考える[2]．すなわち

$$x_{n+1}\equiv 3^{17}\,x_n \pmod{2^{29}}$$

$$x_0=0$$

として生成される乱数列，$x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$ を 2^{29} で割ったもの

1)　わかりやすくいえば，帰無仮説のもとで，式 (*3.1*) の χ^2 の実現値が $\chi^2{}_{l-1}(\alpha)$ より大きくなる確率は α（普通は 0.01, 0.05）と非常に小さい．その小さい確率で起こることが1回の実験で起こったのだから仮説を否定するわけである．

2)　ハマースレイ「モンテカルロ法」より引用．

$$\frac{x_0}{2^{29}},\ \frac{x_1}{2^{29}},\ \frac{x_2}{2^{29}},\ \cdots\cdots$$

が区間 [0, 1] 上で等確率で現われるかどうかを最初の 10 000 個をとって調べる.

解 図3.2で示す区間 [0, 1] の分割を25の等しい区間に分けて，その各区間に現われる個数を求めて表3.5に示す表をつくってみると次表のようになる.

表3.6 25の区間に現われる実現度数と理論度数 ($N=10\,000$)

区間 [0, 1] の分割	0.00〜0.04	0.04〜0.08	0.08〜0.12	0.12〜0.16	0.16〜0.20	0.20〜0.24	0.24〜0.28	0.28〜0.32	0.32〜0.36	0.36〜0.40	0.40〜0.44	0.44〜0.48	0.48〜0.52
実現度数（実現値）	392	423	386	396	425	386	400	393	416	363	411	389	385
理 論 度 数	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400

区間 [0, 1] の分割	0.52〜0.56	0.56〜0.60	0.60〜0.64	0.64〜0.68	0.68〜0.72	0.72〜0.76	0.76〜0.80	0.80〜0.84	0.84〜0.88	0.88〜0.92	0.92〜0.96	0.96〜1.00	計
実現度数（実現値）	363	441	437	387	385	399	416	396	406	405	415	385	10000
理 論 度 数	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	400	10000

式 (*3.1*) より

$$\chi^2 = 23.4$$

となり，$\chi^2_{24}(0.05) = 36.42$ であるから，帰無仮説

“生成される数列が区間 [0, 1] 上に等確率で現われる.”

は有意水準5％で受け入れられ，この数列は等確率で現われているといってよい．すなわち等確率性（等出現性）が保証されるわけである.

補注 3.2 区間 [0, 1] ではなくて1辺の長さが1である正方形 (2次元) の中で点列が等確率で現われるかどうかを調べるには，生成された隣り合う2数を1対と考えて

$$(x_0, x_1),\ (x_2, x_3),\ \cdots\cdots,\ (x_n, x_{n+1}),\ \cdots\cdots$$

のように区切り，この点列が正方形の中で等確率で現われるかどうかをカイ2乗検定法を用いて行なえばよい．

一般に，生成された数列の区切り方を3個ずつ，4個ずつ，と増すことによっていくらでも次元の高いところで検定することができる．

3.3 無規則性の検定

[1] 系列相関検定　1章でも述べたように乱数列の無規則性の検証のためには並んでいる乱数相互間の関係を見ればよい．

例 1. 既成の乱数表から取り出した 50 個の区間 [0, 1] 上の乱数において並んでいる前後の数の間の無規則性について検証する．乱数表から取り出した 50 個の乱数は次のようであった．

0.64	0.34	0.76	0.28	0.42	0.53	0.72	0.61	0.83	0.67
0.86	0.75	0.35	0.09	0.77	0.63	0.39	0.02	0.25	0.69
0.85	0.21	0.84	0.31	0.24	0.22	0.33	0.11	0.16	0.78
0.09	0.92	0.70	0.63	0.80	0.44	0.19	0.24	0.81	0.64
0.42	0.71	0.45	0.22	0.73	0.24	0.02	0.11	0.15	0.00

解　1章と同様に並んでいる前後の数を組にして書いてみると次のようになる．

(0.64, 0.34), (0.34, 0.76), (0.76, 0.28), (0.28, 0.42), (0.42, 0.53)
(0.53, 0.72), (0.72, 0.61), (0.61, 0.83), (0.83, 0.67), (0.67, 0.86)
(0.86, 0.75), (0.75, 0.35), (0.35, 0.09), (0.09, 0.77), (0.77, 0.63)
(0.63, 0.39), (0.39, 0.02), (0.02, 0.25), (0.25, 0.69), (0.69, 0.85)
(0.85, 0.21), (0.21, 0.84), (0.84, 0.31), (0.31, 0.24), (0.24, 0.22)
(0.22, 0.33), (0.33, 0.11), (0.11, 0.16), (0.16, 0.78), (0.78, 0.09)
(0.09, 0.92), (0.92, 0.70), (0.70, 0.63), (0.63, 0.80), (0.80, 0.44)

(0.44, 0.19), (0.19, 0.24), (0.24, 0.81), (0.81, 0.64), (0.64, 0.42)
(0.42, 0.71), (0.71, 0.45), (0.45, 0.22), (0.22, 0.73), (0.73, 0.24)
(0.24, 0.02), (0.02, 0.11), (0.11, 0.15), (0.15, 0.00), (0.00, 0.64)

この50組の各組において前の数を x 座標，後の数を y 座標に表わして相関図に書いてみると図 3.4 のようになる.

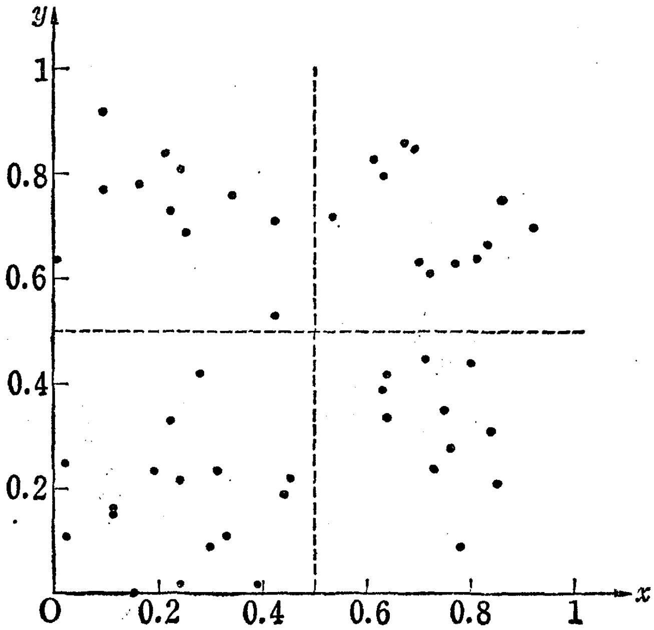


図 3.4 相　関　図

この相関図から見ると，この場合並んでいる前後の数の間には規則性は見られないことがわかろう．ところが，与えられた乱数列に対してすべてこのように相関図を書いていたのでは大変な手数であり，また点が図の上でかたよってきたときに，そのかたより具合を目で見るだけでは，規則性の有無を判定できない場合が多い.

そこで，よく知られている相関係数の考え方を使って，この規則性の有無を人間の直観によらないで判定することを考える.

そのためにはこの x と y の相関係数の大きさによって規則性があるか無いかを判定すればよい.

いま

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \cdots\cdots, (x_n, y_n)$$

が与えられたときに，x と y の相関係数（記号で r_{xy} と書く）は次式で定義される.

$$r_{xy}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \tag{3.5}$$

$$\left\{\text{ただし}\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \ \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right\}$$

この相関係数 r_{xy} は -1 と 1 の間の値をとり，-1 に近ければ負の相関，1 に近ければ正の相関，0 に近かければ相関がないと言われている．相関図との関係を示せば次図のようになる．

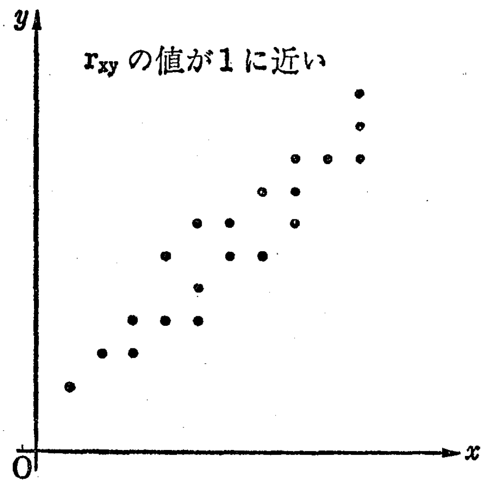


図 3.5　正の相関の場合

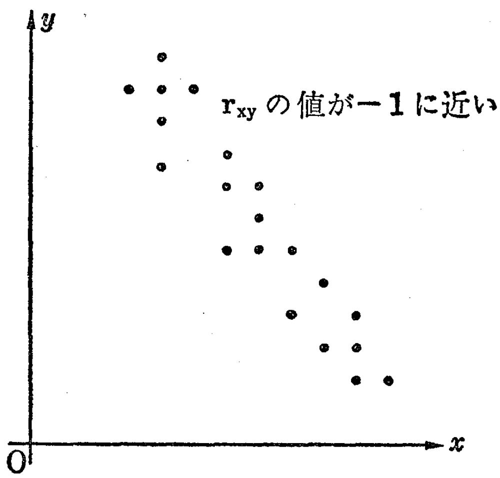


図 3.6　負の相関の場合

この図からわかるように，相関図において点のばらつきが x が大きくなると y も大きくなる傾向にあるとき（図 3.5）r_{xy} の値は 1 に近く正の相関があるといい，x が大きくなると y は小さくなる傾向にあるとき（図 3.6），r_{xy} の値は -1 に近く負の相関があるという．また，x が大きくなっても必ずしも y が大きくなると

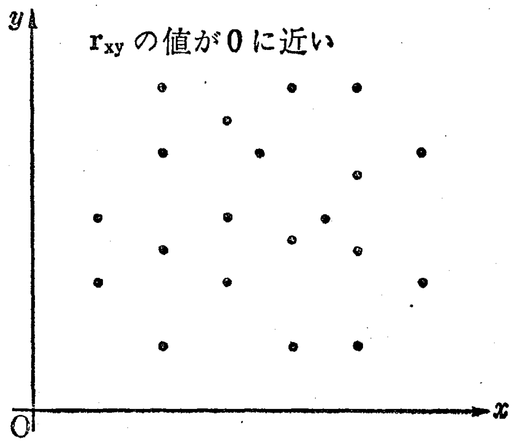


図 3.7　相関がない場合

は限らない．すなわちxの大小とyの大小の関係がないとき（図3.7）r_{xy}の値は0に近くなって，この場合xとyの間には相関がないという．

さて，この例の場合，このr_{xy}の値は式（3.5）より

$$r_{xy}=0.145$$

となり，かなり0に近いことがわかり，これぐらいなら50個の乱数の並び方の前後の関係はないと判断してよく，無規則性を保証するわけである[1]．しかし，これは前後の並び方の無規則性を保証したにすぎない．したがって次に並んでいる数の2つおき，3つおき，4つおきの関係を調べなければならない．まず1つおきの関係をみるためにはこの例では

$$(0.64,\ 0.76),\ (0.34,\ 0.28),\ (0.76,\ 0.42),\ (0.28,\ 0.53),$$
$$(0.42,\ 0.72),\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ (0.15,\ 0.64),\ (0.00,\ 0.34),$$

と50個の組をつくり，$r_{xy}{}^{(2)}$の値を式（3.5）を用いて求めればよい．$r_{xy}{}^{(2)}$の（2）は並んでいる乱数において2つずつずらせて組み合わせたという意味である．一般にk個おきの関係はk個ずつずらせて組にして$r_{xy}{}^{(k)}$の値（式（3.6）参照）を求めればよい．

いろいろなkについて$r_{xy}{}^{(k)}$の値を求め，すべて0に近ければ，乱数の無規則性は保証できるわけであるが，その手数はたいへんである．

例 2.　区間［0,1］上の既成の乱数表から例1と同様50個の乱数を次のように3つの部分にわたって取り出し$r_{xy}{}^{(1)}$の値を求め，既成の乱数表の$r_{xy}{}^{(1)}$の値がおよそどの程度になるかを調べる．

1）nが大きいとき，一般的には式（3.8）を用いて無規則性の検定を行なう．

[i]

0.31	0.73	0.11	0.96	0.87	0.30	0.21	0.43	0.32	0.88
0.45	0.36	0.30	0.82	0.71	0.04	0.05	0.54	0.05	0.17
0.13	0.38	0.88	0.63	0.01	0.62	0.92	0.01	0.99	0.37
0.63	0.89	0.30	0.83	0.71	0.90	0.28	0.36	0.26	0.55
0.98	0.88	0.63	0.50	0.16	0.16	0.06	0.20	0.84	0.97

[ii]

0.13	0.74	0.10	0.25	0.12	0.20	0.75	0.50	0.79	0.78
0.92	0.98	0.14	0.12	0.76	0.15	0.19	0.87	0.53	0.19
0.71	0.70	0.91	0.89	0.27	0.87	0.62	0.12	0.63	0.26
0.60	0.10	0.31	0.90	0.22	0.28	0.46	0.25	0.73	0.69
0.77	0.11	0.05	0.23	0.83	0.72	0.51	0.33	0.75	0.90

[iii]

0.45	0.97	0.42	0.53	0.60	0.82	0.17	0.67	0.71	0.78
0.13	0.12	0.86	0.62	0.92	0.69	0.70	0.52	0.32	0.38
0.73	0.92	0.10	0.27	0.33	0.88	0.66	0.93	0.07	0.19
0.03	0.18	0.68	0.54	0.53	0.01	0.59	0.68	0.87	0.43
0.36	0.29	0.05	0.29	0.59	0.00	0.24	0.13	0.95	0.31

•

[i] の場合　　$r_{xy}^{(1)}=0.053$

[ii] の場合　　$r_{xy}^{(1)}=0.047$

[iii] の場合　　$r_{xy}^{(1)}=0.110$

したがって既成の乱数表においては n が 50 だとだいたい -0.15 から 0.15 までの値を取ることがわかる．

一般的に n 個の乱数列

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots\cdots,\ x_n$$

があたえられているとき，k個ずらせた数の組

$$(x_1, x_{1+k}),\ (x_2, x_{2+k}), \cdots\cdots, (x_{n-1}, x_{k-1}),\ (x_n, x_k)$$

における相関係数 $r_{xy}{}^{(k)}$ は式（3.5）より次式であたえられる．

$$r_{xy}{}^{(k)} = \frac{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+k} - \bar{x}^2}{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{3.6}$$

$$\left\{\text{但し，}\ \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \ x_{n+k} = x_k\right\}$$

この $r_{xy}{}^{(k)}$ の値のことを系列相関係数と呼び，この値の大小によって乱数列の規則性の有無を検定する方法を**おくれ$\boldsymbol{k}$の系列相関検定**といって普通以下に述べるような統計的仮説検定の考えにもとずいておこなわれる．すなわち，$r_{xy}{}^{(k)}$ の値を求めて規則性の有無を判定する場合，$r_{xy}{}^{(k)}$ の値がどれくらいであれば乱数列の無規則性が保証されるかということがあいまいであるために次のような検定の手順が考えられる．

区間 $[0, 1]$ 上でのn個の乱数について，帰無仮説を

“乱数が無規則に並んでいる”

とすると，この帰無仮説のもとでは式（3.6）は $\bar{x} = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 = \dfrac{1}{12}$ とみなされるから $r_{xy}{}^{(k)}$ は次式ようになる．

$$r_{xy}{}^{(k)} = \frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+k} - 3 \tag{3.7}$$

さらに，式（3.7）において $r_{xy}{}^{(k)}$ を確率変数とみなすとnがかなり大きいとき漸近的に平均値が 0，分散が $\dfrac{13}{n}$ の正規分布にしたがうことが証明され，したがって確率変数

$$Z^{(k)}=\frac{\sqrt{n}\,r_{xy}{}^{(k)}}{\sqrt{13}} \tag{3.8}$$

は平均値が 0, 分散が1の正規分布にしたがうことがわかる．よって有意水準を定めると棄却域は付表4から求めることができる．

たとえば有意水準を 95% とすると棄却域は次の2つの区間となる．

$$(-\infty,\ -1.96),\qquad (1.96,\ \infty)$$

確率変数 $Z^{(k)}$ の実現値を求めた結果，この棄却域の中に入れば帰無仮説は棄てられ乱数列の無規則性は保証されなくなる．もし $Z^{(k)}$ の実現値が棄却域に入らなければ帰無仮説は受け入れられ，無規則性は保証される．

k の値を 1, 2, 3,…… と変えていったときどの値に対しても無規則性が保証できれば乱数列全体として無規則性が保証されるわけである．

この系列相関検定が無規則性の検定にはよく使わされるが，その他にも次のような検定法がある．

[2]　組合せ検定　　これは生成された数列の無規則性（数列の並び方の偶然性）の検証を行なう検定法の1つである．

たとえば，10桁の2進数 (0, 1の数字の10個の配列) が偶然に得られたという[1)]帰無仮説のもとで，その10桁の中に1の個数が k 個現われる確率は

---

1)　正常な銅貨を10回投げて表が出れば1，裏が出れば0と記録した数列を考えればよい．

$$P(X=k) = {}_{10}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad (k=0, 1, 2, \cdots\cdots, 10)$$

{ただし X は1の個数を確率変数で書いたものである}

となり，これを計算してみると表3.7のようになる．

いま，生成される0と1とからなる数列があり，この数列の現われ方の偶然性(無規則性)について，この数列から10 000個の数をとり10桁ずつ区切り1 000組の組をつくることによって検定することを考えよう．

表3.7 0,1の組合せ個数の理論確率

0の個数	1の個数	理論確率 ${}_{10}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
10	0	0.0010
9	1	0.0098
8	2	0.0439
7	3	0.1172
6	4	0.2051
5	5	0.2460
4	6	0.2051
3	7	0.1172
2	8	0.0439
1	9	0.0098
0	10	0.0010

まず各組の10桁の中の0と1の数を数える．そのとき表3.7に示す0と1の11個の組合せのどの場合かに属し，1 000組をどの場合に属するかによって頻度で記録することにする．全部1であれば0の個数が0で1の個数が10というところの頻度として記録される．この頻度で記録されたものが表3.5に示した実現度数と考えればよい．この場合，理論度数のほうは

$$1\,000 \times {}_{10}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \quad (k=0, 1, 2, \cdots\cdots, 10)$$

で計算されるので度数検定法のときと同じように表3.8のように書けてカイ2乗検定ができるわけである．

表3.8　10桁ずつの1000組に対する度数

k の 値	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	計
実現度数（実現値）	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	1000
理論度数	1	10	44	117	205	246	205	117	44	10	1	1000

この場合の帰無仮説は

"0と1の数字の並び方が偶然（無規則）である"

ということであり，表3.8から式(*3.1*)により χ^2 の実現値を求めてこれが自由度10のカイ2乗分布の有意水準 $100\alpha\%$ での棄却域（$\chi^2_{10}(\alpha)$ より大きい部分）に入るかどうかを調べればよい．

もし棄却域に入れば帰無伝説は棄てられ，並び方の偶然性は認められなくなり，したがって無規則性は否定されるわけである．

また，これは0, 1の2つの数からなる数列に限る必要はない．

たとえば区間[0, 1]上に現われる数列であれば，$\dfrac{1}{2}$より小さい数を0に対応させ，$\dfrac{1}{2}$より大きい数を1に対応させると，同様にこの数列の偶然性（無規則性）を検定することができる．もちろん10桁ずにつ区切らなくて5桁でも15桁でもよく，それに対応する表をつくればよいわけである．

1つ1つ区切り方を変えて検定してみるのがよいが，たいへんな手数であるから，10桁ぐらいで区切って検定し，その検定に受け入れられれば無規則性の条件が満たされていると判断するわけである．

[3]　連の検定　これは生成される数列の数字の並び方の偶然性（無規則性）の検証を行なう検定法の1つである．

たとえば，

$$A\,A\,B\,A\,A\,A\,A\,B\,A$$

とか

$$+\,-\,-\,+\,-\,+\,-\,-\,+\,+$$

のように，相異なる2つの文字または記号の列があったとき，同じ文字または記号のひと続きを**連** (run)という．またひと続きの個数を**連の長さ**という．はじめの文字の例では A の連が3つあって，その長さは2,4, 1であり，B の連が2つあって，その長さはいずれも1である．あとの記号の例では長さ1の $+$ の連が3つ,長さ2の $+$ の連が1つ，長さ2の $-$ の連が2つ，長さ1の $-$ の連が1つあることになる．

いま，区間 [0, 1] 上に現われる乱数列において $\frac{1}{2}$ より大きいものを A，小さいもを B で現わせば，生成される区間 [0, 1] 上の乱数列は A と B の系列として書くことができる．

たとえば

0.688, 0.467, 0.933, 0.725, 0.010, 0.216, 0.703, ……

なる数列に対応しては

A, B, A, A, B, B, A, ……

となるわけである．

このように，生成された区間 [0, 1] 上の乱数列を，A と B の系列に書き変えたとき，

“A と B の並び方が偶然（無規則）である”

という帰無仮説のもとで検定すれば，生成された区間 [0. 1] 上の乱数列の並び方のある種の偶然性（無規則性）について検定することができるわけである．そこで，この数列を n 個取り出して A の個数

を n_A, B の個数を n_B とする.

帰無仮説として

“n_A 個の A と n_B 個の $B\,(n_A+n_B=n)$ の並び方が

偶然（無規則）である”

を考えると，この帰無仮説のもとで得られる連の数 $\boldsymbol{K}$[1] は n が大きいとき

$$\left.\begin{aligned} \text{平均値} &= \frac{2n_A n_B}{n_A+n_B}+1, \\ \text{分　散} &= \frac{2n_A n_B(2n_A n_B-n_A-n_B)}{(n_A+n_B)^2(n_A+n_B-1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

なる正規分布に従うことが知られている.

したがって，帰無仮説のものとで，確率変数

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{K}-\left(\dfrac{2n_A n_B}{n_A+n_B}+1\right)}{\sqrt{\dfrac{2n_A n_B(2n_A n_B-n_A-n_B)}{(n_A+n_B)^2(n_A+n_B-1)}}} \tag{3.6}$$

は平均値 0, 分散 1 の正規分布に従って分布する. よって，与えられた A と B の系列から連の数を数えれば $\boldsymbol{K}$ の実現値が求まり，$\boldsymbol{Z}$ の実現値が求まる. よって，有意水準 $100\,\alpha\,\%$ で検定できるわけである.

たとえば $\boldsymbol{Z}$ の実現値が，もし 1.96 より大きいか，-1.96 より小さければ，有意水準 5％で帰無仮説は棄てられ，偶然性は認められない. また $\boldsymbol{Z}$ の実現値が 2.58 より大きいか，-2.58 より小さければ有意水準 1％で帰無仮説は棄てられ，同じく偶然性は認められなくなる.

1）度数検定のときと同様確率変数で表示した.

連の検定の別の方法として次のようなものもよく使われる.

一様乱数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots$

があるとき, 長さ r の**上昇の連**を

$$x_{n-1} > x_n < x_{n+1} < \cdots\cdots < x_{n+r} > x_{n+r+1}$$

のように乱数が続けて r 回単調増加する場合として定義する. **下降の連**の場合も同様に考えればよい. このとき, 乱数列の全長が n 個の乱数から成る場合, 長さ r の連 (上昇の連, 下降の連) が起こる頻度 F_r は

$$F_r = 2n \cdot \frac{r^2+3r+1}{(n+3)!} - 2 \cdot \frac{r^3+3r^2-r-4}{(r+3)!}$$

$$(r = 1, 2, \cdots\cdots, \ n-2)$$

となることが知られている.

そこで実際に与えられた n 個の乱数に対して長さ r の連の数をかぞえ F_r の値と比較して, その差でもって与えられた n 個の乱数が一様乱数列とみなせるかどうかを判定すればよい.

例 2. 乗算型合同法により生成した乱数列を検定した結果について紹介しよう. 前章の式 (*2.2*)

$$x_{n+1} \equiv a x_n \quad (\text{modulo } m) \qquad x_0 = b$$

によって生成された乱数列について, 次のような結果が得られている.

(i) $a = 5^{13}$, $m = 2^{39}$ のとき

度数検定の結果 (良好)[1)]

系列相関検定 (おくれ 1 と 3) (良好)

1) 良好という意味は検定に合格したという意味である. すなわち, [1], [2], [3] で述べたような帰無仮説は受け入れられたということである.

(ii)　$a=5^{11}$,　$m=2^{30}$ のとき

度数検定の結果　(良好)

組合せ検定の結果　(良好)

系列相関検定（おくれ 1）(良好)

(iii)　$a=23$,　$m=2^{31}-1$

度数検定の結果（不合格の部分あり）

上昇，下降の連の検定の結果（不合格，長さ 1 〜2 の連が少なく，長い連が出やすい）

例 3.　混合型合同法により生成した乱数列を検定した結果について紹介しよう．前章の式 (*2.6*)

$$x_{n+1} \equiv a x_n + c \quad (\text{modulo } m) \qquad x_0 = b$$

によって生成された数列について，次のような結果が得られている．

(i)　$a=2^7$,　$c=1$,　$m=2^{35}$ のとき

度数検定の結果　(良好)

上昇，下降の連の検定の結果　(良好)

(ii)　$a=2^7+1$,　$c=1$,　$m=2^{35}$ のとき

度数検定の結果（1 次元）(良　好)

度数検定の結果（2 次元）[1]（不合格）

補注 3.3　以上の例からわかるように 1 次元で等確率性（等出現性）が保証されても 2 次元で等確率性（等出現性）が保証されるとは限らない．

1 つの数列に対して，それが乱数列であることを保証するためにいろいろな検定を行なってすべて良好ならよいわけであるが．その手数はたいへんである．そこで普通はその乱数列の使用目的に対して必要な検定だけを行なって，その検定に合格すれば他の検定に合格するかどうかを確かめないでそのまま使っているわけである．

---

1)　補注 3.2 参照のこと．

4章　いろいろな乱数列のつくり方
(一様乱数列からの変換)

乱数列を用いるシミュレーションにおいては，実際の現象を1つの確率モデルによってコンピュータの中で再現し，所要の解を得るわけであるが，この確率モデルには，いろいろな種類があり，正規乱数列，ポアソン乱数列，指数乱数列などの各種確率分布をもつ乱数列が使用されることが多い．

そこで，この章では区間[0,1]上の乱数列(一様乱数列)から各種確率分布をもつ乱数列のつくり方について解説しよう．また球面上の乱数点列などの特殊な乱数列のつくり方についても解説した．

4.1　指数乱数列のつくり方

[1]　指数乱数列とは　普通確率密[illegible]数が

$$f(x)=\alpha e^{-\alpha x},\quad (x\geqq 0,\ \alpha>0) \tag{4.1}$$

で表わされるものを**指数分布**(exponential distribution)と呼んでいる．

グラフで描くと図4.1のように描ける．

この図からわかるように，指数分布はxの値が大きくなるに従って$f(x)$は小さくなる．これはxが大きいところほど，その確率が小

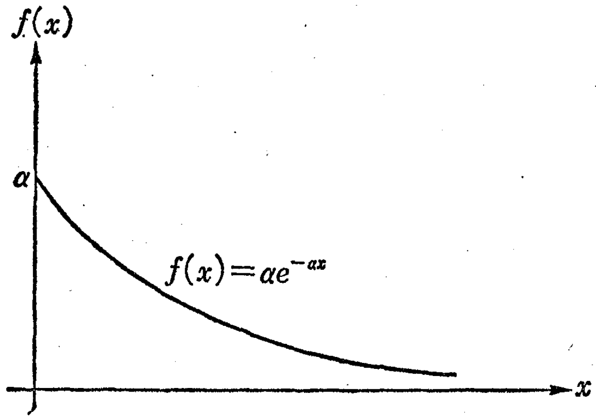


図 4.1　指数分布の密度関数

さくなることを示している.

指数乱数列とは，確率論的にいうと，式(*4.1*)で示す密度関数をもつ独立な確率変数の系列の実現値である.

わかりやすくいえば次のようになる.

いま壺の中に入っている等質・等大の多くの球を考え，その球に書いてある数字により頻度分布をつくってみると[1]，図4.2のように指数曲線で近似されるとする.

この壺から“がらがらまぜ”て1つの球を取り出し，その球に書いてある数字を記録する．そしてその球を壺に戻してまた“がらがらまぜ”て次の球を取り出し，その球に書いてある数字を記録する．このような操作を繰り返して得られる数列は指数乱数列とみなせる．いいかえれば指数分布をもつ独立な確率変数の実現値の系列とみなされるわけである.

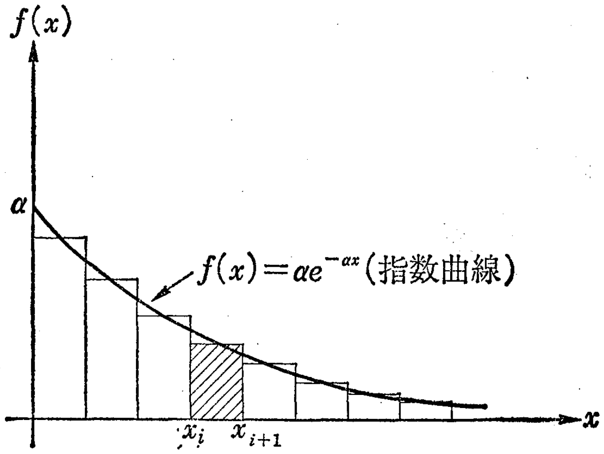


図4.2　壺の中の球の数字の頻度分布と指数曲線

図4.2からもわかるように指数乱数列においては $f(x)$ の大きいところに対応する x の値の頻度は大きく，$f(x)$ の小さいところに対応する x の値の頻度は小さい.

このように，ある確率分布をもつ確率変数の実現値の系列といっ

1)　球に書いてある数字を x 軸で表わし，x 軸を区間に分割して各区間に入る球の個数の頻度（その区間に入る球の数の球の総数に対する割合）を表わしたもの．区間 $[x_j, x_{i+1}]$ は非常に小さく考えればよい.

た場合，その確率分布が連続であるときは，区間 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, 1; 2, \cdots\cdots]$ を非常に小さくして頻度分布で近似した壷の中の球のモデルとみなして，その壷から“がらがらまぜ”て取り出したものと考えれば具体的イメージをもつであろう．他の連続分布をもつ場合でも同様である．

[2] 指数乱数列のつくり方　指数乱数列を区間 [0, 1] 上の一様乱数列を用いてつくる方法にはいろいろある．ここでは，そのおもなものについてその方法を述べるが，実際に指数乱数列を生成したいときは．そのうちのどの方法でもよいが，コンピュータの構造によく合ったものを使用するのがよかろう．

区間 [0, 1] 上の一様乱数列を

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots,\ u_i,\ \cdots\cdots \tag{4.2}$$

で表わすことにしよう．

(i) 逆関数法　指数分布の分布関数は式 (*4.1*) より

$$F(y)=\int_0^y f(x)\,dx=\int_0^y \alpha e^{-\alpha x}\,dx=1-e^{-\alpha y} \tag{4.3}$$

となるから，区間 [0, 1] 上の一様乱数列を 1 つとり

$$u_1=F(y_1)=1-e^{-\alpha y_1} \tag{4.4}$$

なる等式を解いて y_1 を求めると，次のようになる．

式 (*4.4*) より

$$1-u_1=e^{-\alpha y_1}$$

となるから両辺の対数をとって

$$\log_e(1-u_1)=-\alpha y_1$$

となり，これを解くと

$$y_1 = -\frac{1}{\alpha}\log_e(1-u_1) \qquad (4.5)$$

となる．

式 (4.5) によって，u_1 から変換された y_1 は指数分布に従って分布する乱数列の1つと考えることができる．$u_2, u_3, \cdots\cdots, u_i, \cdots\cdots$ に対しても同様にして表4.1のような対応がつく．

表4.1　一様乱数列から指数乱数列の生成

もとになる一様乱数列	u_1	u_2	u_3	………	u_i	……
変換式	$y_1=-\frac{1}{\alpha}\times\log_e(1-u_1)$	$y_2=-\frac{1}{\alpha}\times\log_e(1-u_2)$	$y_3=-\frac{1}{\alpha}\times\log_e(1-u_3)$	………	$y_i=-\frac{1}{\alpha}\times\log_e(1-u_i)$	……
生成される指数乱数列	y_1	y_2	y_3	………	y_i	……

この表からわかるようにコンピュータの中でlogの計算をする必要があるわけで，log の計算が非常に遅い機種ではこの方法は適さない．

以上が最も簡単な分布関数を利用する逆関数法である．一般にこの方法によって生成するためには，分布関数の逆関数が容易に計算できることが必要であろう．

次に式 (4.1) において $\alpha=1$ の場合の特殊な生成法について述べよう．

(ii)　マーセイリア (Marsaglia) の方法

$$\left.\begin{aligned} P(n=k) &= \frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{k!} \qquad (k=1, 2, 3, \cdots\cdots) \\ P(m=l) &= (e-1)e^{-(l+1)} \qquad (l=0, 1, 2, \cdots\cdots) \end{aligned}\right\} \qquad (4.6)$$

なる確率分布をもつ確率変数 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ の実現値の系列(式(4.6)の確率分布をもつ乱数列)を

$$\left.\begin{array}{l} n_1,\quad n_2,\ \cdots\cdots,\ n_i,\ \cdots\cdots \\ m_1,\ m_2,\ \cdots\cdots,\ m_i,\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

とする.

補注 4.1　$n_1, n_2, \cdots\cdots, n_i, \cdots\cdots; m_1, m_2, \cdots\cdots, m_i, \cdots\cdots$ の系列のつくり方は次のようにすればよい.

式(4.2)に示すのとは別な区間[0, 1]上の一様乱数列を2組考え

$$\begin{array}{l} v_1,\quad v_2,\quad \cdots\cdots,\ v_i,\quad \cdots\cdots \\ v_1',\ v_2',\ \cdots\cdots,\ v_i',\ \cdots\cdots \end{array}$$

{ただし，この2組の乱数列は独立とする}

とする．まず v_1, v_1' をもってきて

$$\sum_{k=1}^{n_1-1}\frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{k!}\leqq v_1<\sum_{k=1}^{n_1}\frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{k!}$$

$$\sum_{l=1}^{m_1-1}(e-1)\,e^{-(l+1)}\leqq v_1'<\sum_{l=1}^{m_1}(e-1)\,e^{-(l+1)}$$

なる n_1, m_1 を求め，次に v_2, v_2' をもってきて

$$\sum_{k=1}^{n_2-1}\frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{k!}\leqq v_2<\sum_{k=1}^{n_2}\frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{k!}$$

$$\sum_{l=1}^{m_2-1}(e-1)\,e^{-(l+1)}\leqq v_2'<\sum_{l=1}^{m_2}(e-1)\,e^{-(l+1)}$$

なる n_2, m_2 を求め，同様な手順で次々と $n_3, m_3; n_4, m_4; \cdots\cdots$ を求めると，この

$$\begin{array}{l} n_1,\quad n_2,\quad \cdots\cdots,\ n_i,\ \cdots\cdots \\ m_1,\ m_2,\ \cdots\cdots,\ m_i,\ \cdots\cdots \end{array}$$

なる系列が，確率変数 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ の実現値の系列となり，式(4.6)で示す確率分布をもつ乱数列となる.

このとき $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_i\cdots\cdots$ と $m_1, m_2\ \cdots\cdots, m_i, \cdots\cdots$ の乱数列と,

式 (4.2) で示す $u_1, u_2 \cdots\cdots, u_i \cdots\cdots$ の乱数列とを用いて，次のような手順で指数乱数列を生成することができる.

まず，n_1; m_1; $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_i \cdots\cdots$ より

$$x_1 = m_1 + \min(u_1, u_2 \cdots\cdots, u_{n_1})^{1)}$$

なる x_1 を求める．次に n_2; m_2; $u_{n_1+1} = u_1^{(2)}$，$u_{n_1+2} = u_2^{(2)}$，$u_{n_1+3} = u_3^{(2)}$ $\cdots\cdots u_{n_1+n_2} = u_{n_2}^{(2)}$ より

$$x_2 = m_2 + \min(u_2^{(2)}), u_2^{(2)}, \cdots\cdots, u_{n_2}^{(2)})$$

なる x_2 を求める．順次，同様な手順で $x_3, x_4 \cdots\cdots$ を求めると

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots$$

が求める指数乱数列となる.

表4.1と同様に対応を示しておくと表4.2のようになる.

表4.2　指数乱数列の生成

n, m の乱数列と一様乱数列	n_1, m_1 $u_1, u_2, \cdots, u_{n1}$	n_2, m_2 $u_1^{(2)}, u_2^{(2)} \cdots, u_{n_2}^{(2)}$	n_3, m_3 $u_1^{(3)}, u_2^{(3)} \cdots, u_{n_2}^{(3)}$	n_4, m_4 $u_1^{(4)}, u_2^{(4)}, \cdots u_{n_3}^{(4)}$	……
変換式	$x_1 = m_1$ $+\min(u_1, u_2,$ $\cdots, u_{n_1})$	$x_2 = m_2$ $+\min(u_1^{(2)},$ $u_2^{(2)}, \cdots, u_{n_2}^{(2)}$	$x_3 = m_3$ $+\min(u_2^{(3)},$ $u_2^{(3)}, \cdots, u_{n_3}^{(3)}$	$x_4 = m_4$ $\min + (x_1^{(4)},$ $u_2^{(4)}, \cdots, u_{n_4}^{(4)}$	……
生成される指数乱数列	x_1	x_2	x_3	x_4	……

ただし，式 (4.2) の一様乱数列に対して

$$\left\{\begin{array}{llll}
u_1^{(2)} = u_{n_1+1} & u_1^{(3)} = u_{n_1+n_2+1} & u_1^{(4)} = u_{n_1+n_2+n_3+1} & \cdots\cdots \\
u_2^{(2)} = u_{n_1+2} & u_2^{(3)} = u_{n_1+n_2+2} & u_2^{(4)} = u_{n_1+n_2+n_3+2} & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
u_{n_2}^{(2)} = u_{n_1+n_2} & u_{n_3}^{(3)} = u_{n_1+n_2+n_3} & u_{n_4}^{(4)} = u_{n_1+n_2+n_3+n_4} & \cdots\cdots
\end{array}\right\}$$

とする

1) $\min(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{n_1})$ は $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{n_1}$ の中で最小値のものの値を示す.

補注 4.2　確率変数 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ のとる値とその確率を示しておくと

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{P}\{\boldsymbol{m}=0\}=0.63 & \mathrm{P}\{\boldsymbol{n}=1\}=0.58 \\
\mathrm{P}\{\boldsymbol{m}=1\}=0.23 & \mathrm{P}\{\boldsymbol{n}=2\}=0.29 \\
\mathrm{P}\{\boldsymbol{m}=2\}=0.09 & \mathrm{P}\{\boldsymbol{u}=3\}=0.10 \\
\mathrm{P}\{\boldsymbol{m}=3\}=0.03 & \mathrm{P}\{\boldsymbol{n}=4\}=0.02 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

となり，$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ の平均値を $\mathrm{E}(\boldsymbol{m})$, $\mathrm{E}(\boldsymbol{n})$ で表わせば

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{m})=\frac{1}{e-1}\sim 0.58$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{n})=\frac{e}{e-1}\sim 1.58$$

となる．よって，$m_1, m_2, m_3, \cdots\cdots, m_i\cdots\cdots$ の平均値は 0.58, $n_1, n_2, \cdots\cdots, n_i$ ……の平均値は 1.58 となるから

$$\begin{array}{l}
\min\,(u_1,\quad u_2,\quad \cdots\cdots,\ u_{n_1}) \\
\min\,(u_1^{(1)},\ u_2^{(2)},\ \cdots\cdots,\ u_{n_2}^{(2)}) \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}$$

において（　）の中の一様乱数列の個数は 1～2 個ぐらいとなって，せいぜい 2 個，3 個ぐらいの最小値を求めればよいから，大小の比較の早いコンピュータに対してはこの方法は有効であろう．

一方，$\boldsymbol{m}$ の平均値は 0.58 であるから

$$\sum_{l=1}^{m_i-1}(e-1)\,e^{(l+1)} \leqq v_i' < \sum_{l=1}^{m_i}(e-1)\,e^{-(l+1)}, \quad (i=1, 2, \cdots\cdots)$$

において和 ($\sum$) の回数が平均 1 回以下であることがわかり，これもあまり苦にはならない．

補注 4.3　このような手法で，生成される乱数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ が指数乱数列となる理由を少しむずかしくなるが示しておこう．

そのためには，確率変数 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ に対し，一様乱数列を確率変数で表わして

$$\boldsymbol{U}_1,\ \ \boldsymbol{U}_2,\ \ \cdots\cdots,\ \ \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{n}}$$

とする．そのとき

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{m}+\min(\boldsymbol{U}_1,\ \boldsymbol{U}_2,\cdots\cdots,\ \boldsymbol{U}_n)$$

なる確率変数 $\boldsymbol{X}$ が指数分布をもつ確率変数であることを示せばよい．すなわち

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X}\leqq y)=1-e^{-y},\quad (y>0)$$

なることを示せばよい．

式 (4.6) より

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\boldsymbol{X}\leqq y)&=\mathrm{P}(\boldsymbol{X}\leqq k+\theta)^{1)}\\&=\sum_{l=0}^{k-1}\mathrm{P}(\boldsymbol{m}=l)+\mathrm{P}\{\boldsymbol{m}=k,\ \min(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_n)\leqq\theta\}\\&=(e-1)\sum_{l=0}^{k-1}e^{-(l+1)}+(e-1)e^{-(k+1)}\left\{1-\frac{1}{e-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(1-\theta)^j}{j!}\right\}\\&=1-e^{-(k+\theta)}=1-e^{-y}\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{X}$ が指数分布をもつことがわかる．

(iii)　フォン・ノイマン (Von Neumann) の方法　　区間 [0, 1] 上の一様乱数列を前と同様

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots,\ u_i,\ \cdots\cdots$$

と考え，もし

$$u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots>u_k,\quad u_k\leqq u_{k+1}\qquad(4.8)$$

のとき，k が偶数なら，これら $k+1$ 個の数は棄ててしまい，別の一様乱数列

$$u_1^{(2)},\ u_2^{(2)}\cdots\cdots,\ u_k^{(2)},\ \cdots\cdots$$

を用いて同様のことを試みる．すなわち

$$u_1^{(2)}>u_2^{(2)}>u_3^{(2)}>\cdots\cdots>u_l^{(2)},\quad u_l^{(2)}\leqq u_{l+1}^{(2)}\qquad(4.9)$$

のとき，l が偶数なら，またこれら $l+1$ 個の数は棄ててしまい，別

1)　k を正の整数，θ を $0\leqq\theta\leqq1$ なる実数と考えて $y=k+\theta$ と考えたものである．

の一様乱数列を用いて同様の手順を繰り返す．

もし，式 (4.8) において k が奇数なら u_1 を最初の乱数として採用する．もし，式 (4.8) で k が偶数で棄てられ，式 (4.9) で l が奇数となれば $u_1^{(2)}$ を採用するが，そのときは最初の乱数として $u_1^{(2)}+1$ とする．$+1$ は棄てられた回数を示す．

もし，式 (4.8) で棄てられ，さらに式 (4.9) でも棄てられ，その次で採用されたとすると，そのときは $u_1^{(3)}+2$ とする．2 は棄てられた回数を示す．

同様な手順で順次得られる数列は指数乱数列となることがフォン・ノイマンによって示されている．このように棄てたり採用したりする方法を**棄却法** (rejection method) と呼んでいる．

例 1　棄却法による指数乱数列の生成

いま，区間 [0, 1] 上の一様乱数列 $(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_i, \cdots\cdots)$ を

0.64, 0.34, 0.76, 0.28, 0.42, 0.53, 0.72, 0.83, 0.67
0.55, 0.23, 0.88, 0.33, 0.78, 0.50, 0.87, 0.60, 0.70, 0.78
0.13, 0.12, 0.86, 0.62, 0.92, ……

と考えるとき，棄却法により指数乱数列を生成する．

解　式 (4.8) より　$u_1=0.64$,　$u_2=0.34$,　$u_3=0.76$　と考え

$$u_1=0.64>u_2=0.34, \qquad u_2=0.34<u_3=0.76$$

となるから，このときは u_2 の 2 が偶数だから，これら 3 つの数は棄てる．

次に $u_1^{(2)}=0.28$,　$u_2^{(2)}=0.42$ と考えると

$$u_1^{(2)}=0.28<u_2^{(2)}=0.42$$

となり，$u_1^{(2)}$ の 1 は奇数だから $u_1^{(2)}=0.28$ を採用し，棄却回数 1 回だから 1 を加えて　$x_1=0.28+1=1.28$

とする．

次にまた新たに，一様乱数列から $u_1=0.53$,　$u_2=0.72$ と考えると

$$u_1=5.53<u_2=0.72$$

となり，この場合 u_1 の 1 は奇数だから

$$x_2=0.53\quad（棄却回数 0 だから 0.53 のままである）$$

となる．

次にまた新たに $u_1=0.83,\ u_2=0.67,\ u_3=0.55,\ u_4=0.23\ \ u_5=0.88$ と考えると

$$u_1=0.83>u_2=0.67>u_3=0.55>u_4=0.23,$$
$$u_4=0.23<u_5=0.88$$

となり，u_4 の 4 は偶数だから，これらの数は棄てる．続けて

$$u_1^{(2)}=0.33<u_2^{(2)}=0.78$$

となり，$u_1^{(2)}$ の 1 は奇数だから 0.33 を採用し，棄却回数 1 回だから

$$x_3=0.33+1=1.33$$

とする．以下同様に

$u_1=0.50<u_2=0.87,$　　奇数だから採用

$x_4=0.50$

$u_1=0.60<u_2=0.70,$　　奇数だから採用

$x_5=0.60$

$u_1=0.78<u_2=0.13<u_3=0.12,\quad u_3=0.12<u_4=0.86,$

$x_6=0.78$　　奇数だから採用

このようにして順次得られる数列

$$x_1=1.28,\ x_2=0.53,\ x_3=1.33,\ x_4=0.50,\ x_5=0.60,\ \cdots\cdots$$

は式 (*4.1*) において $\alpha=1$ の場合の指数乱数列となる．

補注 4.4　棄却法についてもう少し詳しく述べておこう．

この方法は 1951 年フォン・ノイマンによって提案されたかなり有用な技法であり，次のようなものである．

いま密度関数 $f(x)$ があるとき，この $f(x)$ に従う乱数列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots$$

を生成したいとする．このとき $f(x)$ とは別な密度関数 $h(x)$ によって

$$f(x)=k\,g(x)\,h(x)$$

{ただし，k は任意の定数，$g(x)$ は x の全領域で有限な最大値 M をもつ関数とする}

と表わすことができたとする．このとき密度関数 $h(x)$ に従う乱数列を

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots\cdots \quad (\text{一般的に } y \text{ と書く})$$

とし，これと独立な区間 $[0,1]$ 上の一様乱数列を

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots \quad (\text{一般的に } u \text{ と書く})$$

とする．このとき

$$\left.\begin{array}{l} u<\dfrac{1}{M}g(y) \ \text{ならば},\ y\ \text{を採用} \\[2ex] u>\dfrac{1}{M}g(y) \ \text{ならば},\ y\ \text{を棄却} \end{array}\right\}$$

とすれば，採用された y の系列（y の系列の中で採用されたものに○印をつける）

$$\begin{array}{ccccccccccc} y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & , & y_5 & , & \cdots\cdots \\ & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \\ & & x_1 & & x_2 & & & & x_3 & & \end{array}$$

は密度関数 $f(x)$ をもつ乱数列となる．すなわち

$$x_1=y_2,\quad x_2=y_3,\quad x_3=y_5,\quad \cdots\cdots$$

が $f(x)$ をもつ乱数列である．

その理由は次のように証明できる．

$$\mathrm{P}\left(y\in A/u<\frac{1}{M}g(y)\right)^{1)}=\frac{\displaystyle\int_A\left(\int_0^{\frac{1}{M}g(y)}du\right)h(y)\,dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{M}g(y)}du\right)h(y)\,dy}$$

$$=\int_A k\,g(y)\,h(y)\,dy=\int_A f(x)\,dx$$

この方法は，棄却される確率があまり大きいと有用でないので気をつける必要がある．

---

1) この意味は y が採用されたという条件のもとでの y がある集合 A に入る確率を表わす．

4.2　ポアソン乱数列のつくり方

[1]　ポアソン乱数列とは　離散型の確率分布の1つで，その確率分布が

$$\mathrm{P}(X=k)=e^{-m}\frac{m^k}{k!},\quad (k=0,1,2,\cdots\cdots) \qquad (4.10)$$

と書けるとき，この分布を**ポアソン分布** (Poisson distribution) という．

この式において m の値が決まれば，確率変数 X のとる値が 0, 1, 2, …… である確率は決まってくるわけである．

たとえば $m=0.5$, 1, 2, 4, 8 について示してみると，図 4.3 のようになる．

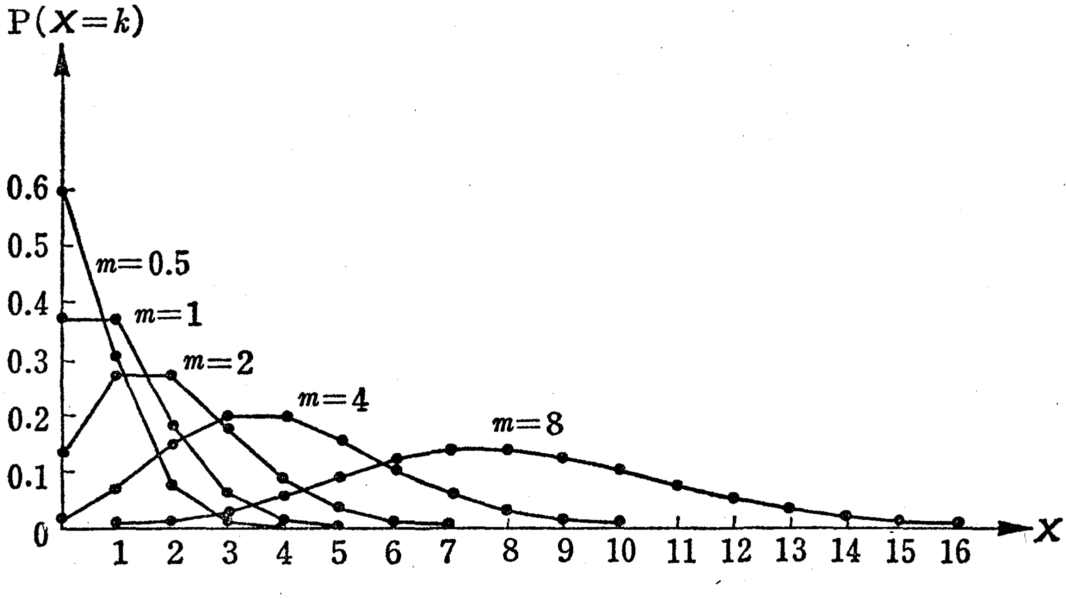


図 4.3　ポアソン分布の確率分布

さてポアソン乱数列とは，確率論的には式 (4.10) で示される確率分布に従う独立な確率変数の系列の実現値と考えられるわけであるが，指数乱数列のときと同様わかりやすく言えば，次のようになる．

いま $m=1$ と考えると，式 (4.10) で与えられる確率分布は次表

のようになる.

表4.3 $m=1$ のときのポアソン分布表

確率変数 X のとる値	0	1	2	3	4	5	6	………	計
その確率	0.368	0.368	0.184	0.061	0.015	0.003	0.001	………	1

たとえば壺の中に1000個の球が入っており，その球のうち368個には0，368個には1，184個には2, 61個には3, 15個には4，3個には5, 1個には6という数字が書かれているとする．そのとき，この壺の中の球をがらがらまぜて1つ取り出し，その球に書かれている数字を記録し x_1 とする．またもとに戻してがらがらまぜて次の球を取り出し，その球の数字を x_2 とする．このような操作を繰り返し行なって得られる数列

$$x_1,\ x_2,\ x_3\cdots\cdots$$

がポアソン乱数列とみなされる．この理由は表4.3から容易にわかるであろう．ただし，この実験では7以上の数字が出てこない不合理があるが,実際7以上の数字の現われる確率は 0.00008 ぐらいで10000回に1回ぐらいしか現われないので無視して考えているわけである.

これでポアソン乱数列の意味がわかったであろう．そのポアソン乱数列を，区間[0,1]上の一様数列から生成するにはどうしたらよいかを次に考えよう.

[2] ポアソン乱数列のつくり方　区間[0,1]上の一様乱数列を

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\cdots,\ u_i,\ \cdots\cdots$$

とすると，式(*4.10*)より，まず u_1 により

$$\sum_{k=0}^{x_1-1} e^{-m}\frac{m^k}{k!} \leqq u_1 < \sum_{k=0}^{x_1} e^{-m}\frac{m^k}{k!}$$

を満足する x_1 を求める．次に u_2 により

$$\sum_{k=0}^{x_1-1} e^{-m}\frac{m^k}{k!} \leqq u_2 < \sum_{k=0}^{x_1} e^{-m}\frac{m^k}{k!}$$

を満足する x_2 を求める．この操作を繰り返して得られる数列

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad \cdots\cdots$$

がポアソン乱数列となる．この場合，和 $(\sum)$ の個数は，ポアソン分布における平均値が m であるから，平均 m 個加える操作が必要である．

補注 4.5　一般に離散型確率分布をもつ乱数列をつくるときは次のようにすればよい．確率変数 $\boldsymbol{X}$ の確率分布を

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X}=k)=p_k, \quad (k=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

とすると，区間 $(0, 1)$ 上の一様乱数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ を用いて表 4.4 のようにしてつくればよい．p_k $(k=1, 2, \cdots)$ は与えられているとして考える．

表 4.4　離散型確率分布 $(\mathrm{P}(\boldsymbol{X}=k)=p_k)$ をもつ乱数列のつくり方

一様乱数列	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	……
変換方法	$\sum_{k=1}^{x_1-1} p_k \leqq u_1 < \sum_{k=1}^{x_1} p_k$	$\sum_{k=1}^{x_2-1} p_k \leqq u_1 \leqq \sum_{k=1}^{x_2} p_k$	$\sum_{k=1}^{x_3-1} p_k \leqq u_4 < \sum_{k=1}^{x_3} p_k$	$\sum_{k=1}^{x_4-1} p_k \leqq u_4 < \sum_{k=1}^{x_4} p_k$	$\sum_{k=1}^{x_5-1} p_k \leqq u_5 < \sum_{k=1}^{x_5} p_k$	……
生成される乱数列	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	……

4.3　正規乱数列のつくり方

［1］　正規乱数列とは　　指数乱数列と同様，連続型確率分布をもつ乱数列である．

確率密度関数が

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad(-\infty<x<\infty)\qquad(4.11)$$

と書かれる確率分布のことを，**正規分布** (normal distribution) という.

この正規分布のグラフを描いてみると図4.4のようになる.

式 (*4.11*) からもわかるように正規分布曲線の位置と形はμとσの値によって完全に決まる. μの値は曲線の中心を与えるものであり，σの値は曲線の左右への広がりを与えるものである. したがってμのことを平均値，σのことを標準偏差 (σ^2 は分散) と呼ばれている.

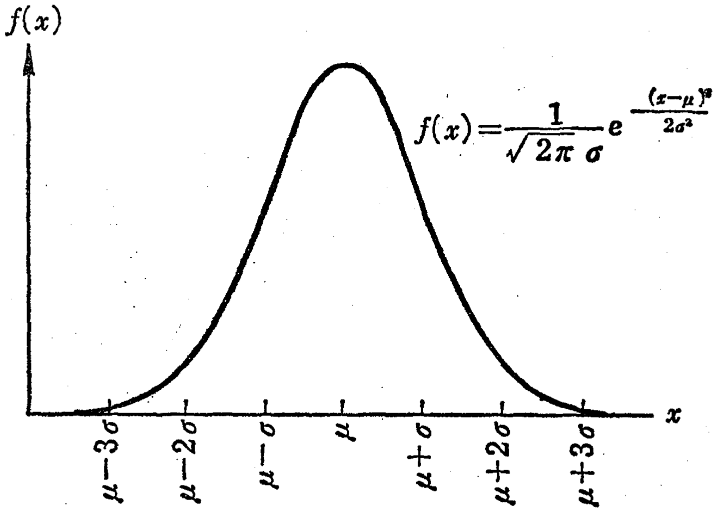


図4.4 正規分布の密度関数, N (μ, σ^2)

平均値μ, 分散σ^2の正規分布のことを略してN(μ, σ^2) とも書く.

図4.4において正規曲線とx軸とで囲まれる面積は1であることは確率分布の性質から容易にわかるであろう.

この正規分布をもつ独立な確率変数の系列の実現値を，正規乱数列という. わかりやすくいうためには指数分布のときと同様，頻度分布で近似して壺の中の球のモデルとして考えればよいが，ここではその説明は省略する.

この正規乱数列においては，平均値μに近いところの値が多く出て，μから離れるほどその出方は少なくなることは図4.4をみれば

わかるであろう．

さて，式 (4.11) において

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{4.12}$$

と変換してみると

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (-\infty < z < \infty) \tag{4.13}$$

となって，これは平均値 0，分散 1 の正規分布（略して N (0, 1) と書く）と考えることができ，これを**基準型正規分布**と呼んでいる．

その曲線は次図のようになる．

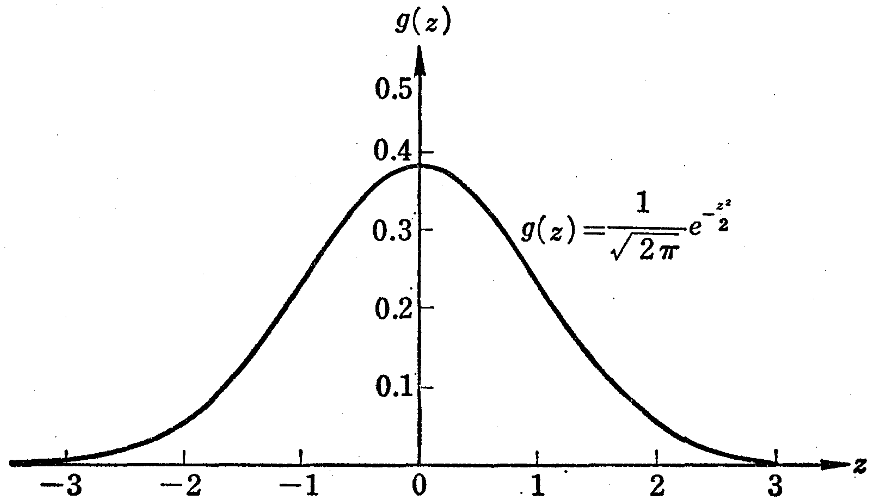


図 4.5　規準型正規分布の密度関数 (N (0,1))

一般にこの基準型正規分布をもつ乱数列

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \cdots\cdots$$

をつくっておけば，平均値 μ，分散 σ^2 の正規分布をもつ乱数列は式 (4.12) より

$$x_1 = \sigma z_1 + \mu, \quad x_2 = \sigma z_2 + \mu, \quad x_3 = \sigma z_3 + \mu, \quad \cdots\cdots$$

なる変換により容易につくることができる．

そこで，基準型正規乱数列に主体をおいて考えればよく，この乱数列のことを，単に**正規乱数列**と呼ぶことが多い．

この正規乱数列は，図 4.5 からもわかるように，z のとる値は $g(z)$ の大きさに比例するわけで，したがって乱数列は 0 に近いところが多く現われ，＋と－は $\dfrac{1}{2}$ の確率をもって現われることがわかる．

この乱数列については巻末付表 2 に示してある．

[2] 正規乱数列のつくり方　この正規乱数列を，たとえば指数乱数列をつくるとき用いた逆関数法によって生成することを試みよう．

基準型正規分布の分布関数は

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad (4.14)$$

と表わされ，$F(z)$ のグラフは次のようになる．

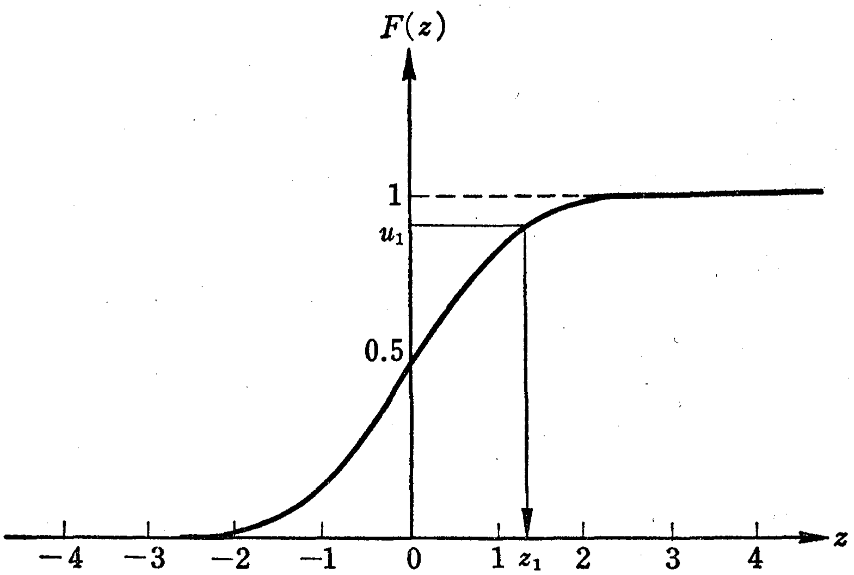


図 4.6　基準型正規分布の分布関数（$F(z)$）

この図に示すように逆関数法はまず区間 [0, 1] の上の一様乱数列

の1つ u_1 をとり，それに対応する z_1 を求めるわけであるが，このためには式 (4. 14) より

$$u_1 = F(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

を満足する z_1 を求めなくてはならない．これはコンピュータで計算するにしてもたいへんやっかいである．だから逆関数法は，正規乱数列をつくるときなどはたいへん不能率で別の方法を考えなければならない．そこで普通は次のような方法が用いられている．

［1］ 中心極限定理を利用する方法　　**中心極限定理** (central limit theorem) とは，

“平均値 μ^*，分散 σ^{*2} をもつ[1] 任意の分布に従う乱数列 (確率変数で書く)

$$\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \boldsymbol{X}_3,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{X}_n,\ \cdots\cdots$$

があるとき，その平均値

$$\overline{\boldsymbol{X}}_n = \frac{1}{n}(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2 + \cdots\cdots + \boldsymbol{X}_n)$$

の確率分布は n が大きくなるとき，平均値 μ^*，分散 $\dfrac{\sigma^{*2}}{n}$ である正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu^*, \dfrac{\sigma^{*2}}{n}\right)$ に収束する．すなわち

$$\frac{\overline{\boldsymbol{X}}_n - \mu^*}{\dfrac{\sigma^*}{\sqrt{n}}}$$

は n が大きいとき，平均値 0，分散 1 の正規分布 (N(0, 1)) とみなしてよい．”

---

1)　μ^*, σ^{*2}, を * 印をつけたのは正規分布の場合と区別するためである．

という定理である.

この定理で任意の分布とあるが，この分布がどんな分布であるかによって正規分布への収束のはやさが異なってくるのである．ある分布では，かなりnを大きくとらないと$(\overline{X}_n-\mu^*)\Big/\dfrac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$の分布は正規分布に近ずかないが，別の分布では$n$が小さくても$(\overline{X}_n-\mu^*)/\dfrac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$の分布は正規分布に早く近ずくということが考えられる.

我々が考えているのは $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ が $[0,1]$ 上の一様乱数列なので，好都合なことにこの場合はnが小さくても$(\overline{X}_n-\mu^*)/\dfrac{\sigma^*}{\sqrt{n}}$の分布は正規分布 $(\mathrm{N}(0,1))$ に非常に近くなる.

この場合，$\mu^*=\dfrac{1}{2}$，$\sigma^{*2}=\dfrac{1}{12}$であることは容易に計算できて[1)]，

$$Z_n=\frac{\overline{X}_n-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{12n}}} \qquad (4.15)$$

はnが大きくなるにしたがって正規分布 $(\mathrm{N}(0,1))$ に近ずく早さが非常に早い.

念のために式 (4.15) で示すZ_nの分布と正規分布 $(\mathrm{N}(0,1))$ との近似度を比較するために，$n=4$ の場合に図4.7に示しておこう.

この図から，$n=4$ ぐらいでも，Z_4 の分布はほとんど正規分布 $(\mathrm{N}\ (0,1))$ に従って分布しているとみなしてよいことがわかろう.

このような事実から，区間 $[0,1]$ 上の一様乱数列

1) X_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ のもつ確率分布は

$$f(x)=\begin{cases}1 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

と考えられて，その平均値は $E(X_i)=\displaystyle\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\frac{1}{2}$ となり，分散 $\mathrm{V}(X_i)=\displaystyle\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 f(x)\,dx=\frac{1}{12}$ となる.

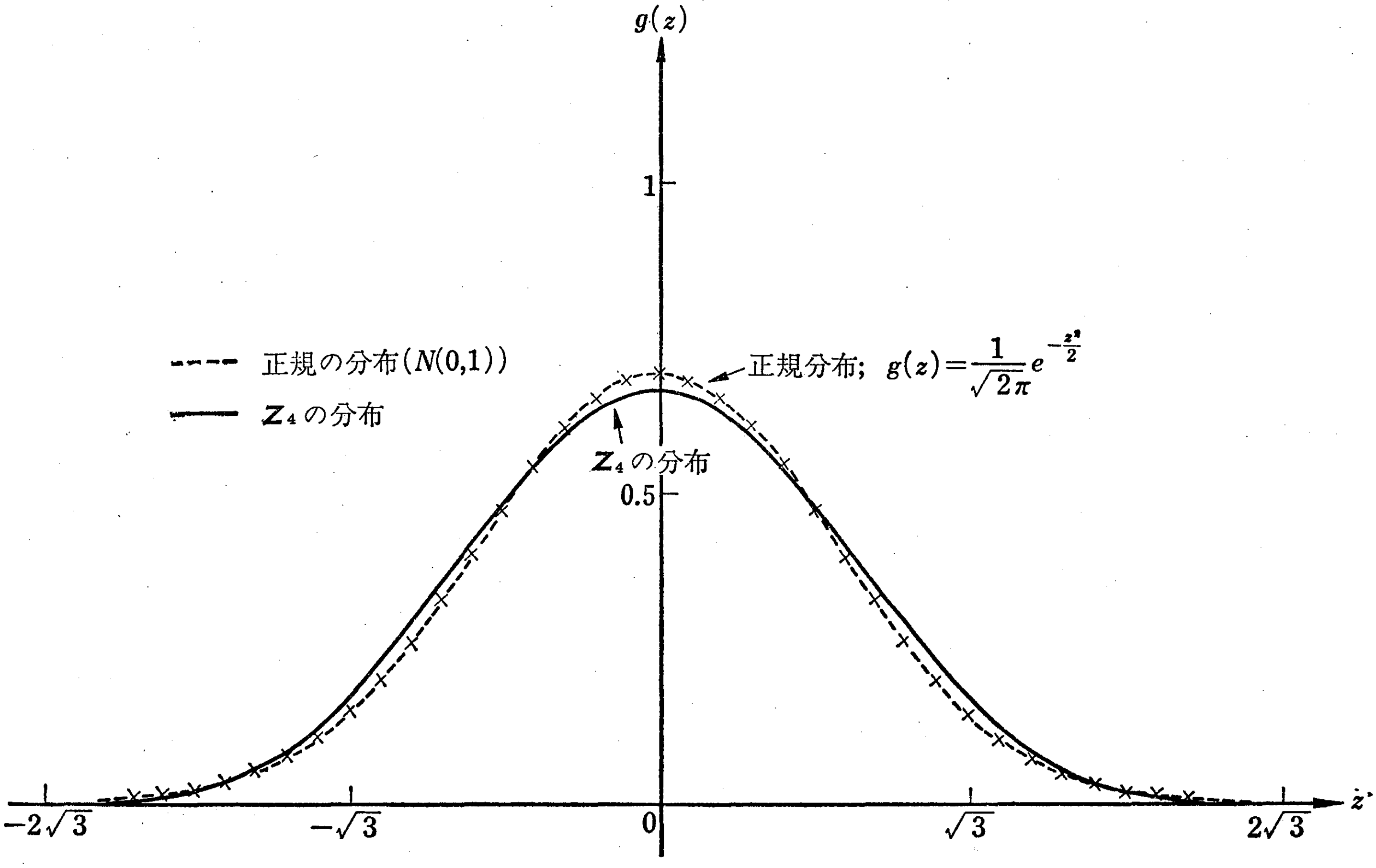


図 4.7　Z_4 の分布の正規分布 (N(0,1)) への近似度合

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \cdots\cdots$$

が与えられているとき，はじめから n 個の $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ を用いて

$$Z_1 = \frac{\dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n) - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{12n}}} \qquad (4.16)$$

をつくり，次に $u_{n+1} = u_1^{(2)},\ u_{n+2} = u_2^{(2)}, \cdots\cdots, u_{2n} = u_n^{(2)}$ と考えて

$$Z_2 = \frac{\dfrac{1}{n}(u_1^{(2)} + u_2^{(2)} + \cdots\cdots + u_n^{(2)} - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{12n}}}$$

をつくり，同様な手順で $Z_3, Z_4, \cdots\cdots$ をつくると，

$$Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \cdots\cdots$$

が求める正規乱数列である.

例　$n=4$ の場合に区間 $[0,1]$ 上の有効数字2桁の一様乱数列

0.82, 0.11, 0.51, 0.08, 0.38, 0.86, 0.79, 0.31, 0.82

0.88, 0.27, 0.00, 0.44, 0.28, 0.02, 0.27, 0.59, ……

から平均値0, 分散1の正規乱数列を作成する.

解　式(*4.16*)において $n=4$ であるから $\sqrt{\dfrac{1}{12n}}=\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$ となり，一様乱数列をはじめから4つずつとって，$z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots$ を求めてみると，

$$z_1=\frac{\frac{1}{4}(0.88+0.11+0.51+0.08)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4\sqrt{3}}}\fallingdotseq -0.73$$

$$z_2=\frac{\frac{1}{4}(0.38+0.86+0.79+0.31)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4\sqrt{3}}}\fallingdotseq 0.59$$

$$z_3=\frac{\frac{1}{4}(0.82+0.88+0.27+0.00)-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4\sqrt{3}}}\fallingdotseq -0.05$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

となる.

補注4.6　n を大きくすれば当然正規分布への近似の度合はよくなるわけであるが，あまり大きくすると正規乱数列を1つつくるのに多くの一様乱数列が必要となって不能率である.

ちなみに，$n=12$ のときに

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{Z}_{12}\geqq z)\ \text{と}\ \mathrm{P}(\boldsymbol{Z}\geqq z)$$

{ただし確率変数 Z は正規分布 (N(0, 1)) に正確に従う確率変数とする.}

の2つの確率の値を比較してみよう(表4.5参照).

表4.5　Z_{12} の正規分布への近似度合

z	$P(Z_{12} \geqq z)$	$P(Z \geqq z)$	差
.0	.500000	.500000	0
.2	.420740	.421711	$-.971 \cdot 10^{-3}$
.4	.344578	.346338	$-.1760 \cdot 10^{-2}$
.6	.274253	.276483	$-.2230 \cdot 10^{-2}$
.8	.211855	.214180	$-.2325 \cdot 10^{-2}$
1.0	.158655	.160727	$-.2072 \cdot 10^{-2}$
1.2	.115070	.116639	$-.1569 \cdot 10^{-2}$
1.4	$.807567 \cdot 10^{-1}$	$.817077 \cdot 10^{-1}$	$-.9510 \cdot 10^{-3}$
1.6	$.547993 \cdot 10^{-1}$	$.551457 \cdot 10^{-1}$	$-.3464 \cdot 10^{-3}$
1.8	$.359303 \cdot 10^{-1}$	$.357846 \cdot 10^{-1}$	$.1457 \cdot 10^{-3}$
2.0	$.227501 \cdot 10^{-1}$	$.222756 \cdot 10^{-1}$	$.4745 \cdot 10^{-3}$
2.2	$.139034 \cdot 10^{-1}$	$.132681 \cdot 10^{-1}$	$.6353 \cdot 10^{-3}$
2.4	$.819754 \cdot 10^{-2}$	$.754026 \cdot 10^{-2}$	$.65725 \cdot 10^{-3}$
2.6	$.466119 \cdot 10^{-2}$	$.407497 \cdot 10^{-2}$	$.58622 \cdot 10^{-3}$
2.8	$.255513 \cdot 10^{-2}$	$,208611 \cdot 10^{-2}$	$.46902 \cdot 10^{-3}$
3.0	$.134989 \cdot 10^{-2}$	$.100700 \cdot 10^{-2}$	$.34289 \cdot 10^{-3}$

この表から $n=12$ ぐらいになるとその近似の度合は非常によいことがわかる．実際には $n=6$ ぐらいで使われている．

［2］ ボックス・ミュラー（Box and Müller）**の方法**　区間 $[0,1]$ 上の一様乱数列を前と同様

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \cdots\cdots$$

とするとき，まずはじめから 2 つ u_1, u_2 をとってくる．そして

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi u_2 \\ z_2 &= (-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi u_2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

なる変換を行なう．次に u_3, u_4 をとってきて

$$\left.\begin{aligned} z_3 &= (-2\log_e u_3)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi u_4 \\ z_4 &= (-2\log_e u_4)^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi u_4 \end{aligned}\right\}$$

なる変換を行なう．同様な手順で生成される

$$z_1,\quad z_2,\quad z_3,\quad z_4,\quad z_5,\quad z_6,\quad \cdots\cdots$$

が平均値 0，分散 1 の正規乱数列となる．これは 2 つの一様乱数列を用いて 2 つの正規乱数列を生成していることになり，使用した一様乱数列の個数と同数だけの正規乱数列が生成できるわけである．わかりやすいために生成方法を表にしておこう．

表 4.6 正規乱数列のつくり方

<table>
<tr><td>区間 [0,1] 上の一様乱数列</td><td>u_1</td><td>u_2</td><td>u_3</td><td>u_4</td><td>u_5</td><td>u_6</td><td>u_7</td><td>u_8</td></tr>
<tr><td>変換式</td><td colspan="2">$z_1 =$ $(-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}}$ $\times\cos 2\pi\, u_2$
$z_2 =$ $(-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}}$ $\times\cos 2\pi\, u_2$</td><td colspan="2">$z_3 =$ $(-2\log_e u_3)^{\frac{1}{2}}$ $\times\cos 2\pi\, u_4$
$z_4 =$ $(-2\log_e u_3)^{\frac{1}{2}}$ $\times\sin 2\pi\, u_4$</td><td colspan="2">$z_5 =$ $(-2\log_e u_5)^{\frac{1}{2}}$ $\times\cos 2\pi\, u_6$
$z_6 =$ $(-2\log_e u_5)^{\frac{1}{2}}$ $\times\sin 2\pi\, u_7$</td><td colspan="2">$z_7 =$ $(-2\log_e u_7)^{\frac{1}{2}}$ $\times\cos 2\pi\, u_8$
$z_8 =$ $(-2\log_e u_7)^{\frac{1}{2}}$ $\times\cos 2\pi\, u_8$</td></tr>
<tr><td>生成される正規乱数列（平均値 0，分散 1）</td><td>z_1</td><td>z_2</td><td>z_3</td><td>z_4</td><td>z_5</td><td>z_6</td><td>z_7</td><td>z_8</td></tr>
</table>

補注 4.7 このボックス・ミュラーの方法で正規乱数列ができる理由を述べておく．式 (*4.17*)

$$z_1 = (-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi\, u_2$$

$$z_2 = (-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi\, u_2$$

より，

$$\frac{dz_1\, dz_2}{du_1\, du_2} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial z_1}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial z_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} = 2\pi\, e^{\frac{z_1{}^2}{2}} e^{\frac{z_2{}^2}{2}}$$ [1)]

となり，u_1, u_2 は区間 [0, 1] 上の一様分布をもつ独立な乱数列であるから

1) $\dfrac{\partial z_1}{\partial u_1}$ は z_1 を u_1 で偏微分するという意味である．この式の詳細は微分積分学の書物を参照されたい．

$$1\cdot 1\, du_1\, du_2=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z_1{}^2}{2}}e^{-\frac{z_2{}^2}{2}}dz_1\, dz_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z_1{}^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z_2{}^2}{2}}dz_1\, dz_2$$

となって，式(*4. 17*)の変換で正規乱数列が生成されることがわかる．

補注 4. 8　2 変量正規乱数列のつくり方

2 変量正規分布の密度関数は

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\,(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\,\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right\}} \tag{4.18}$$

$\left\{\begin{array}{c}\text{ただし，}\mu_1,\mu_2\text{ は変量 }x,y\text{ の平均値，}\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2\text{ は変量 }x,y\text{ の分散}\\ \rho\text{ は変量 }x\text{ と }y\text{ の相関係数とする，}\end{array}\right\}$

と表わされ，このような 2 次元の密度関数をもつような乱数列は次のようにして生成することができる．

いま，区間 $[0,1]$ 上の一様乱数列を

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \cdots\cdots$$

とすると，まずはじめの 2 つ (u_1,u_2) を用いて

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\mu_1+\sigma_1\,(-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}}\{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi\, u_2+\rho\sin 2\pi\, u_2\}\\ y_1&=\mu_2+\sigma_2\,(-2\log_e u_1)^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi\, u_2\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

なる変換によりできる組 (x_1,y_1) を考え，次に同様に次の 2 個 (u_3,u_4) を用いて

$$\left.\begin{aligned}x_2&=\mu_1+\sigma_1\,(-2\log_e u_3)^{\frac{1}{2}}\{(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi\, u_4+\rho\sin 2\pi\, u_4\}\\ y_2&=\mu_2+\sigma_2\,(-2\log_e u_3)^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi\, u_4\end{aligned}\right\}$$

なる変換によりできる組 (x_2,y_2) を考え，同様の手順で生成される

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_3),\ (x_4,y_4),\ \cdots\cdots$$

なる乱数列は式(*4. 18*)で示す 2 変量正規分布に従う乱数列となる．

理由は 1 変量の場合と同様に式(*4. 19*)より

$$\frac{du_1\, du_2}{dx_1\, dy_1}=\frac{1}{2\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\,(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-\frac{2\rho(x_1-\mu_1)(y_1-\mu_2)}{\sigma_1\,\sigma_2}+\frac{(y_1-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right\}}$$

となって，u_1,u_2 は区間 $[0,1]$ 上の一様分布をもつ独立な乱数列であるから

$$1\cdot 1\,du_1\,du_2$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-\frac{2\rho(x_1-\mu_1)(y_1-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y_1-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right\}}dx_1\,dy_1$$

となり，(x_1, y_1) が 2 変量正規分布に従う乱数列の 1 つであることがわかる．

4.4　階段関数の近似による乱数列のつくり方

指数分布とか正規分布とかよく知られた確率分布でなく，次図のように名前のついてないような確率分布に従う乱数列をつくって用いることが複雑な確率モデルのシミュレーションではよくある．

図 4.8 に示すような確率分布では，それに従う乱数列は今まで述べたようなエレガントな方法ではなかなかうまくつくることができない．そこで，図 4.8 に示すように密度関数 $f(x)$ を x の定義域（区間 $[0, a]$）[1] を

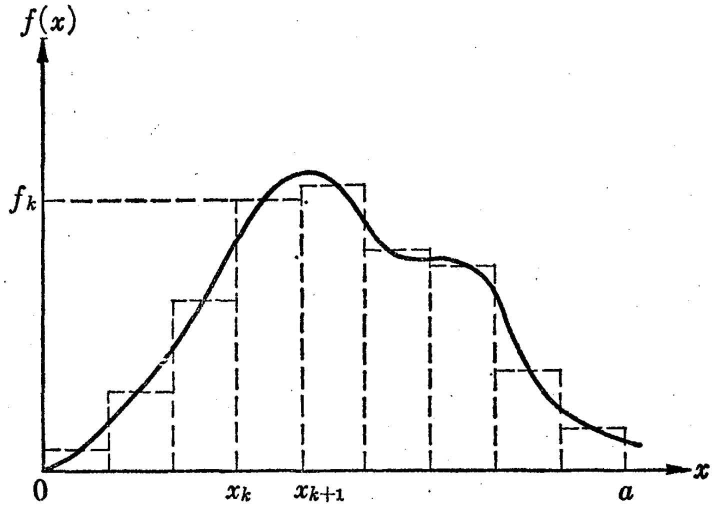


図 4.8　密度関数の階段関数による近似

$$0=x_1<x_2<\cdots\cdots<x_k<x_{k-1}<\cdots\cdots<x_{n+1}=a$$

と n 個の小区間に分け（等分割でなくてもよい），k 番目の区間 $[x_k, x_{k+1}]$ の近似した階段関数の高さを f_k とする $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$．

このとき，区間 $[0, 1]$ 上の一様乱数列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \cdots\cdots$$

1)　a の値は a を越える確率がほとんど 0 になるように考える．

を用いて，まず

$$\sum_{k=1}^{l_1}(x_{k+1}-x_k)f_k \leqq u_1 < \sum_{k=1}^{l_1+1}(x_{k+1}-x_k)f_k$$

を満足する l_1 を計算し，この不等式を満足するような区間 $[x_{l_1}, x_{l_1+1}]$ を定める.

もし，かりに各区間を小さくしておくと，階段関数と $f(x)$ とのくい違いはあるが，無視してよいから最初の乱数として

$$x_1=\frac{x_{l_1}+x_{l_1+1}}{2}$$

とすればよい.

同様に

$$\sum_{k=1}^{l_2}(x_{k+1}-x_k)f_k \leqq u_2 < \sum_{k=1}^{l_2+1}(x_{k+1}-x_k)f_k$$

を満足する l_2 を計算し，区間 $[x_{l_2}, x_{l_2+1}]$ を定め，

$$x_2=\frac{x_{l_2}+x_{l_2+1}}{2}$$

を第2の乱数とする.

このようにして得られる乱数列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \cdots\cdots$$

は密度関数 $f(x)$ をもつ乱数列とみなすことができるわけである.

各区間がかなり大きいときは，その区間を定めてから，その区間の中で操作してやればよい.

この考え方は**4.2**節の補注**4.5**で述べた離散型確率変数をもつ乱数列の作り方と同じであり，

分布関数

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y}f(x)\,dx$$

が複雑で，逆関数法も使えず，指数乱数列とか正規乱数列のようなエレガントな生成法もない場によく用いられる方法である．

この方法だと密度関数 $f(x)$ の形が複雑でも，ある程度の誤差は生ずるが，要求される乱数列をつくることが可能なわけである．

4.5　特殊な乱数列のつくり方

[1]　2次元のランダムな単位ベクトルのつくり方[1]区間 $[0, 2\pi]$ 上での一様乱数列

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \theta_5,\ \cdots\cdots$$

があるとき，

$$\sin\theta_1,\ \sin\theta_2,\ \sin\theta_3,\ \cdots\cdots$$

$$\cos\theta_1,\ \cos\theta_2,\ \cos\theta_3,\ \cdots\cdots$$

なる乱数列を**ランダムな単位ベクトル**という．このランダムな単位ベクトルを sine, cosine の値を直接計算しないで[2]，区間 $[0, 1]$ 上の乱数列

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5\ \cdots\cdots$$

を用いてうまくつくってみようという試みである．これは指数乱数列の生成のところでも述べたが，フォン・ノイマンにより提案された棄却法にもとづく方法で次のように考えられている．

まず u_1, u_2 を用いて

$$x_1 = 2u_1 - 1$$

$$y_1 = u_2$$

1)　このランダムベクトルの生成は5章の実験例3で述べるランダム・ウォークのシミュレーションなどでよく用いられる．

2)　直接計算するとコンピュータの中では級数展開して計算するので演算速度の遅い機種では計算時間がかなりかかるので，演算回数ができるだけ少ない方法を考えることが必要になる．

なる x_1, y_1 を考え，もし

$$x_1^2+y_1^2 \leqq 1 \tag{4.20}$$

なる条件を満足すれば

$$\cos\theta_1=\frac{x_1^2-y_1^2}{x_1^2+y_1^2}$$

$$\sin\theta_1=\frac{2x_1y_1}{x_1^2+y_1^2}$$

として採用し，満足しなければ，一様乱数 u_1, u_2 と式（4.20）の計算は無駄になるが棄ててしまう．そして次に u_3, u_4 を用いて同じ操作を繰り返し，満足するまで続ける．式（4.20）で採用された系列によりつくられる．

$$\sin\theta_1,\ \sin\theta_2,\ \sin\theta_3,\ \cdots\cdots$$

$$\cos\theta_1,\ \cos\theta_2,\ \cos\theta_3,\ \cdots\cdots$$

が要求される乱数列となる[1)]．これをコンピュータのプログラムのフローチャート（流れ図）形式で書いてみると図4.9のようになり，この操作を繰り返せばよい．

補注4.9　ここで問題となるのは式（4.20）で採用される確率であるが，これは実に大きく

$$\frac{\pi}{4} \fallingdotseq 0.785$$

となる．したがって10回繰り返すうちに平均8回までは採用されるので，sine, cosine の値を直接級数展開を用いて計算するより

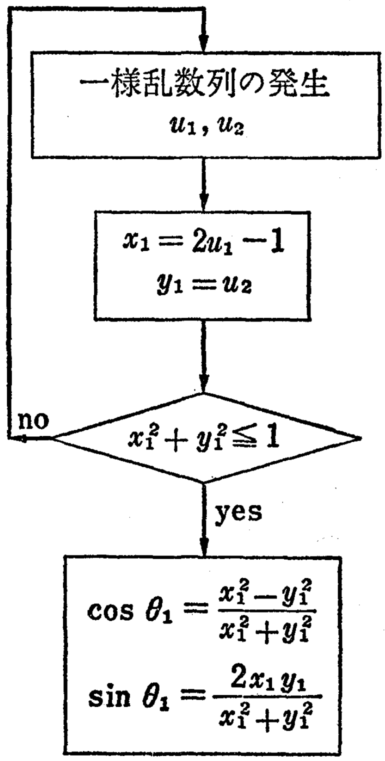


図4.9　2次元ランダム・ベクトルの生成法

1）　証明は4.1節の補注4.4で述べた棄却法の考え方よりできるが，ここでは省略した．

も，この方法で生成するほうが簡単な演算でできるわけである.

［2］ 密度関数

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= nx^{n-1}, & (0 \leqq x \leqq 1) \\ f(y) &= n(1-y)^{n-1} & (0 \leqq y \leqq 1) \end{aligned}\right\} \quad (4.21)$$

をもつ乱数列のつくり方.

この乱数列は区間 $[0, 1]$ の一様乱数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots$ より

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \max\,(u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_n)\ ^{1)} \\ y_1 &= \min\ \ (u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_n) \end{aligned}\right\} \quad (4.22)$$

と変換する．また同様に $u_1' = u_{n+1},\ u_2' = u_{n+2}, \cdots\cdots, u_n' = u_{2n}$ として

$$x_2 = \max\,(u_1',\ u_2',\ \cdots\cdots,\ u_n')$$

$$y_2 = \min\ \ (u_1',\ u_2',\ \cdots\cdots,\ u_n')$$

と変換する．同様な手順で得られる乱数列

$$x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ x_4,\ \ x_5,\ \ \cdots\cdots$$

$$y_1,\ \ y_2,\ \ y_3,\ \ y_4,\ \ y_5,\ \ \cdots\cdots$$

は式 (*4.21*) で示す $f(x)$, $f(y)$ なる密度関数をもつ乱数列となる．この理由は次のように考えればわかろう.

いま，区間 $[0, 1]$ の一様乱数列を $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots$ とするとき，はじめから n 個をとって大きさの順に並べかえ

$$u_{(1)} \leqq u_{(2)} \leqq u_{(3)} \leqq \cdots\cdots \leqq u_{(k)} \leqq \cdots\cdots \leqq u_{(n)}$$

とする．このとき $u_{(k)}$ は n 個の一様乱数列をとってくるたびに変わる確率変数と考えられ，これを普通 k 番目の順序統計量と呼んでい

1) $\max(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n)$ は $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ の中での最大値の意味，min は最小値の意味.

る．

この k 番目の順序統計量の確率分布は密度関数で書くと

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

と表わされることが知られている．よって式 (4.22) での x_1, y_1（一般に x, y と書く）の分布は $k = n, k = 1$ と考えることによって容易に

$$f_n(x) = nx^{n-1}$$

$$f_1(y) = n(1-x)^{n-1}$$

が導ける．この式は式 (4.21) に一致する．

［3］ 単位球面上のランダム点列[1] のつくり方　区間 [0, 1] 上の一様乱数列を $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots$ とするとき棄却法によって次のようにすればよい．

まず u_1, u_2, u_3 を用いて，もし

$$u_1^2 + u_2^2 < 1 \tag{4.23}$$

ならば，u_1, u_2, u_3 を採用し

$$x_1 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{1-u_3^2}$$

$$y_1 = \frac{\pm 2u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{1-u_3^2}$$

$$z_3 = \pm u_3$$

｛ただし，＋ と －はランダムにとる．たとえば銅貨を投げて表なら ＋，裏なら － をとるようにすればよい．｝

---

1) 半径1の球面上に等確率性と無規則性をもって現われる点列をいう．このランダム点列は球面上でのいろいろな確率モデルのシミュレーションによく用いられる．

とすることによって，球面上の1つの点 (x_1, y_1, z_1) をうる．式 (4.23) を満足しなければ，u_1, u_2, u_3 は棄てる．

このような操作を繰り返して採用された点列

$$(x_1,\ y_1,\ z_1),\ (x_2,\ y_2,\ z_2),$$
$$(x_3,\ y_3,\ z_3),\ \cdots\cdots\cdots$$

は半径1の球面上でランダムに分布する点の系列となる．

わかりやすいためにこの操作をフローチャートで示すと図 4.10 のようになる．

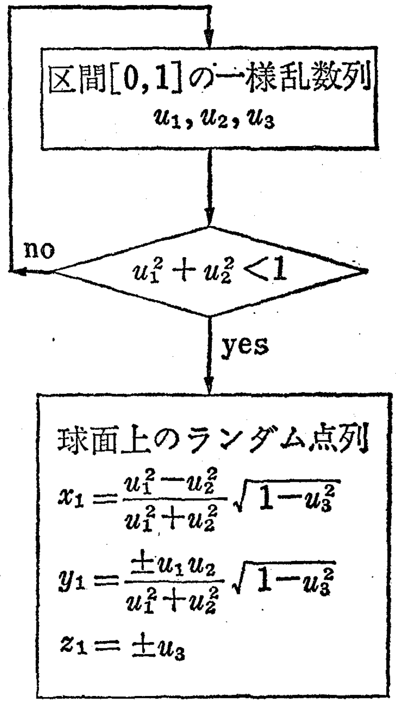


図 4.10 単位球面上のランダム点列のつくり方

[4] **$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$ $(x_i\geqq 0,\ i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ なる超平面上でのランダム点列**[1] **のつくり方**　これは，区間 $[0, 1]$ 上の $n-1$ 個の一様乱数列 $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_{n-1}$ を考え，これを大きさの順序に並べて

$$u_{(1)}\leqq u_{(2)}\leqq\cdots\cdots\leqq u_{(n-1)}$$

とする．これより

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_{(1)}\\
x_2 &= u_{(2)}-u_{(1)}\\
x_3 &= u_{(3)}-u_{(2)}\\
&\ \vdots\\
x_{n-1} &= u_{(n-1)}-u_{(n-2)}\\
x_n &= 1-u_{(n-1)}
\end{aligned}$$

1) $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$ $(x_i\geqq 0,\ i=1,2,\cdots\cdots,n)$ なる平面上に等確率性と無規則性をもって現われる点列をいう．

とおけば

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

なる点が $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=1$ なる超平面上でのランダムな点列の 1 つとなる．同様な手順で次々とつくってゆけば，この超平面上でのランダム点列ができる．これはなかなか面白い方法である．

例　$n=3$ の場合

$$x_1+x_2+x_3=1$$

で表わされる平面は図 4.11 のように各軸の値が 1 である点を結んで得られる正三角形で，この正三角形の上でランダムに現われる点列をつくる．

解　区間 [0, 1] 上の一様乱数列 $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \cdots\cdots$ を考え，まず最初の 2 つ u_1, u_2 を，大きさの順に並びかえて

$$0<u_{(1)}\leqq u_{(2)}<1$$

とする．

そこで

$$x_1=u_{(1)}$$
$$x_2=u_{(2)}-u_{(1)}$$
$$x_3=1-u_{(2)}$$

とおくとき，点 (x_1, x_2, x_3) が $x_1+x_2+x_3=1$ なる平面上の最初のランダム系列となる．

次に，$u_3=u_1^{(2)}$，$u_4=u_2^{(2)}$ を大きさの順に並びかえて

$$0<u_{(1)}^{(2)}\leqq u_{(2)}^{(2)}<1$$

とする．

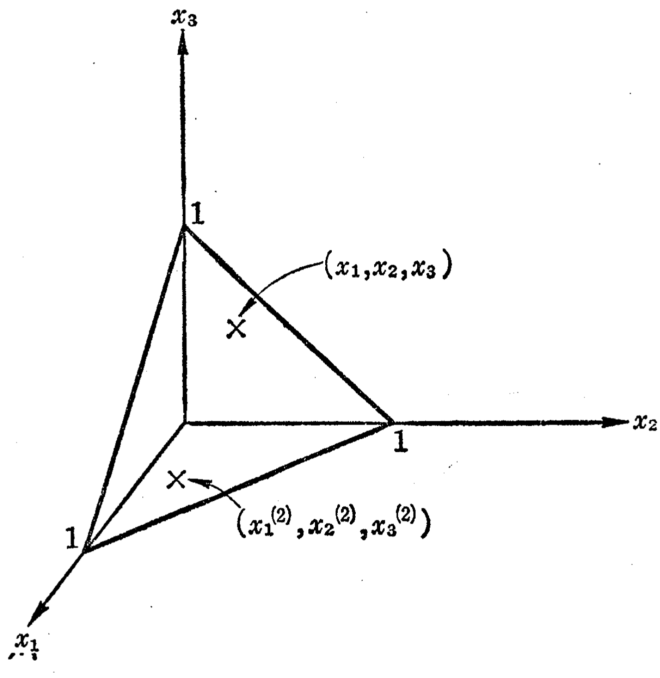


図 4.11　$x_1+x_2+x_3=1$ $(x_1, x_2, x_3\geqq 0)$ なる平面上のランダム点列

そこで

$$x_1^{(2)} = u_{(1)}^{(2)}$$
$$x_2^{(2)} = u_{(2)}^{(2)} - u_{(1)}^{(2)}$$
$$x_3^{(2)} = 1 - u_{(2)}^{(2)}$$

とおくとき，点 $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$ が $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ なる平面上の 2 番目のランダム点列となる．

以下同様な操作で順次ランダム点列を生成することができる．

[5] ランダム順列のつくり方 たとえば 1, 2, 3 の 3 つの数を考えたときに，この 3 つの数からできる順列(数のすべての並び方)の数は次のように 6 とおりある．

1, 2, 3	2, 3, 1
1, 3, 2	3, 1, 2
2, 1, 3	3, 2, 1

この 6 とおりの数の組が，ランダムに現われるとき，それを数字 1, 2, 3 からなる**ランダム順列**という．

この例の場合だと，表 3.7 のようにサイコロの 6 つの目と対応させてつくれば容易である．

すなわち，サイコロを投げて，もし 3 の目が出れば，(2, 1, 3) の組をとり，次に，もし 1 の目が出れば (1, 2, 3) の組をとる．このようにサイコロを投げてはその目と対応した順列をとってゆけば，6 つの順列がランダムに現われる系列ができるわけである．

表 4.7 サイコロの目と順列の対応

サイコロの目	順　列
1	1, 2, 3
2	1, 3, 2
3	2, 1, 3
4	2, 3, 1
5	3, 1, 2
6	3, 2, 1

1, 2, 3 からなるランダム順列の使用例　1章 1.4 節で述べたクジ引きの問題で, A, B, C という3人の人がこのクジを順番に引くとき, 何番目に引く人が1番当たりクジを引く確率が大きいかということを実際にクジ引きをしないで乱数列を用いた実験によって確かめてみる. この場合, 3本のクジに 1, 2, 3 という番号をつけると A, B, C の3人がこのクジを引く引き方は 1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1 の6とおりがあり, 1回のクジ引きではこれらのうちどれかが現われると考えればよい. すなわち 1, 2, 3 の3つの数からなるランダム順列の1つを用いて1回目のクジ引きの実験をする. 2回目, 3回目も同様で順次ランダム順列を用いると表4.8のようになり, この実験を多数回繰り返して A, B, C のそれぞれに現われる当たりクジ（当たりクジの番号を2とする）の比率が $\frac{1}{3}$ に近ずくことを確かめればよい.

表 4.8　ランダム順列を用いるクジ引き（○印が当たりクジ）

	A	B	C
1回目	②	1	3
2回目	3	②	1
3回目	1	②	3
4回目	②	3	1
5回目	3	1	②
6回目	3	1	②
7回目	1	3	②
8回目	②	1	3
⋮		⋮	

さて一般に n 個の数字

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$$

からなる順列の総個数は $n!$ 個だけあるわけであるが, $n!$ 個の中からランダムにとって出来る系列が1から n までの n 個の数からなる場合に**ランダム順列**と呼ぶ. これも, 表4.7と同様に1から $n!$ 個までの数と, この順列とを対応させて, $n!$ 桁以下の乱数列を用いて, それに対応した順列を書き出してゆけばよい. もちろんこのとき $n!$ 個の順列の1つは $\frac{1}{n!}$ の確率で現われ, 等確率性は保証で

きるし，無規則性も対応している乱数列の無規則性から保証できる．

また次のような便利な方法もある．

（i） **1桁の数からなるランダム順列のつくり方**　たとえば 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 の 7 つの数字からなるランダム順列を生成するためには次のようにすればよい．

まず 1 桁の 0 から 9 までの数からなる乱数列を考える．かりにその乱数列が

2, 9, 6, 1, 3, 1, 5, ……

であったとすると，図 4.12 のように 2 に対応するところに 1, 9 に対応するところに 2, 6 に対応するところに 3 と順次記入する．

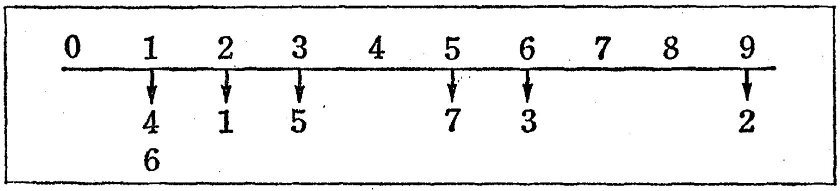


図 4.12　1桁のランダム順列のつくり方

その記入した数字を最初から書くと

(4, 6), 1, 5, 7, 3, 2

となる．ここで (4, 6) の組に対してはこの 4, 6 をランダムに並べてやる．

このようにしてできた数の組がランダム順列の 1 つである．同様の操作で順次つくってやれば 7 つの数字からなるランダム順列ができて，これは前の方法よりずっと簡単である．

（ii） **2桁の数からなるランダム順列のつくり方**　たとえば，1 から 18 までの数字からなるランダム順列をつくりたいときは次のようにすればよい．

まず図 4.13 のような 10×10 個の区かくからなる正方形を考える.

次に2桁の乱数列を考え，かりに

31, 17, 81, 45, 31, 23, 37, 61, 01, 05, 39, 25, 74,
98, 68, 45, 53, 76, ……

であったとする.

このとき10位の数字を縦に，1位の数字を横にとって対応する区かくを考える．1番はじめの 31 は縦の3の数字，横の1の数字のところの区かくに対応し，その区かくに1と記入する．次は17だから縦の1の数字，横の7の数字のところの区かくに対応し，その区かくに2と書く．同様に 81, 45, 31, 23, 37, ……, 76 の対応する区かくに 3, 4, ……, 18 と記入すると図 4.13 のようになる.

このとき，はじめの区かくから順次書き並べると

9, 10, 2, 6, 12, (1, 5), 7, 11, (4, 16), 17, 8, 15,
13, 18, 3, 14

となる．(1, 5), (4, 16) と1つの区かくに2つの番号が入っているところは，そこのところだけランダムに並べることを考える．その1つの方法としては乱数の 10 位の桁の数字が奇数なら順序を反対にし，偶数ならそのままにしておけばよい[1].
この例では (1, 5) は乱数31に対応するから10位の数字は奇数だから順序を反対にして 5, 1 とし，(4, 16) は乱数45に対応するから10位の数字は偶数となり，順序はそのままにしておく.

そこで，この例では

1)　偶数，奇数の並び方がランダムであることから説明できる.

9, 10, 2, 6, 12, 5, 1, 7, 11, 4,

16, 17, 8, 15, 13, 18, 3, 14

という1から 18 までの数からなるランダム順列の1つが得られる．この操作を繰り返すことによって1から 18 までの数からなるランダム順列が生成できる．

一様乱数列の1位の数字

一様乱数列の10位の数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		9				10				
1								2		
2				6		12				
3		1,5						7		11
4						4,16				
5				17						
6		8							15	
7					13		18			
8		3								
9									14	

図 4.13　2桁のランダム順列のつくり方

補注 4.10　3桁以上の数からなるランダム順列も同様にしてつくることができる．一般に n 桁の数からなるランダム順列は

$$\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \cdots\cdots \times 10}_{n\text{個}} = 10^n$$

の区かくからなる n 次元の立方体を考え，n 桁の数からなる乱数列を用いて 2桁のランダム順列をつくったときと同様に対応する区かくに 1, 2, …… と記入してゆけばよいが，次元が多くなると，コンピュータの中で生成するときのプログラムは少々やっかいとなろう．

例　1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の 9 つの数からなるランダム順列をつくり，それを順次 50 組だけ書いてみると次のようになる．

4, 7, 9, 6, 2, 5, 8, 3, 1	4, 7, 9, 6, 5, 1, 2, 8, 3
5, 9, 7, 4, 3, 2, 6, 8, 1	5, 3, 9, 7, 2, 1, 4, 6, 8
8, 4, 5, 3, 9, 7, 2, 1, 6	7, 5, 6, 1, 4, 2, 8, 9, 3
2, 9, 4, 3, 8, 1, 7, 5, 6	3, 6, 7, 4, 1, 5, 2, 8, 9
6, 4, 1, 5, 2, 7, 9, 8, 3	9, 6, 2 1, 8, 5, 4, 7, 3
5, 4, 1, 3, 7, 2, 6, 9, 8	5, 6, 7, 8, 2, 9 3, 4, 1
9, 3, 4, 1, 8, 5, 7, 6, 2	4, 9, 5, 2, 7, 3, 8, 6, 1
7, 6, 8, 4, 3, 2, 1, 5, 9	3, 5, 2, 9, 8, 6, 1, 7, 4
4, 5, 9, 7, 3, 2, 6, 8, 1	6, 3, 2, 1, 4, 5, 9, 8, 7
6, 5, 1, 2, 9, 4, 7, 8, 3	7, 1, 2, 8, 4, 5, 9, 3, 6
7, 4, 2, 1, 9, 3, 8, 5, 6	9, 6, 7, 8, 4, 2, 1, 3, 5
7, 5, 3, 8, 6, 2, 9, 1, 4	4, 3, 9, 7, 2, 1, 5, 8, 6
8, 9, 1, 3, 7, 6, 4, 2, 5	5, 9, 1, 4, 8, 2, 6, 7, 3
9, 8, 5, 2, 6, 1, 7, 4, 3	5, 9, 6, 4, 8, 1, 7, 2, 3
3, 9, 5, 7, 1, 4, 2, 8, 6	5, 7, 9, 6, 1, 3, 8, 2, 4
3, 8, 2, 6, 1, 9, 4, 7, 5	9, 5, 3, 7, 6, 1, 2, 4, 8
5 1, 9, 8, 7, 4, 6, 3, 2	1, 7, 9, 6, 3, 5, 4, 8, 2
2, 4, 1, 6, 9, 7, 5, 3, 8	4, 1, 8, 6, 7, 5, 2, 3, 9
9, 6, 1, 3, 8, 4, 5, 2, 7	4, 7, 2, 5, 8, 6, 1, 9, 3
8, 6, 1, 3, 9, 5, 4, 7, 2	2, 5, 8, 3, 7, 1, 6, 9, 4
8, 4, 1, 5, 6, 3, 2, 7, 9	6, 3, 1, 8, 9, 5, 2, 4, 7
4, 8, 7, 9, 1, 2, 3, 6, 5	1, 5, 8, 4, 2, 9, 3, 7, 6
8, 7, 3, 6, 9, 1, 5, 2, 4	5, 4, 6, 3, 2, 9, 1, 8, 7
2, 5, 3, 6, 8, 7, 4, 1, 9	6, 2, 3, 1, 5, 4, 8, 9, 7
8, 9, 4, 1, 6, 7, 2, 5, 3	9, 5, 4, 1, 8, 6, 2, 7, 3

5章　乱数列とシミュレーション[1)]

A.　乱数列を用いるシミュレーションの原理

5.1　シミュレーションの考え方

まず例をあげることからはじめよう.

例題　平均待ち時間の推定　駅の切符売場や，タクシー乗場などに客が行列をつくっているのをよく見かけるであろう．この場合，関係者はできるだけ行列が長くならないように，切符売場の窓口やタクシー乗場を増すことによって客に対して便宜をはかっているわけである．しかし，窓口（タクシー乗場も窓口と考える）をやたらに増すことは，人を多く雇わなければならないし，自動車そのものだって増さなければならないから，必要以上に多くの経費がかかってしまう．そこで，関係者は客に不満がでないような最小限必要な窓口の個数を算出する必要がある.

そのためには

客が窓口に到着する時間間隔の状態

窓口の数

客が窓口で受けるサービス時間（窓口で1人の客を処理する時間）

などをあらかじめ設定して次々と窓口にやってくる客の平均待ち時

1)　乱数列によるシミュレーションのことを“モンテカルロ法”または“統計実験”とも呼んでいる.

間（行列での待ち時間）を計算する必要がある．この平均待ち時間が多くなると客からは不満が出るわけである．

普通，客が窓口に到着する時間間隔はある確率分布に従って現われるとし，サービス時間もある確率分布に従っているとする．

この確率分布が簡単な場合は容易に待ち時間の平均値は計算できるが，確率分布が複雑で窓口の数が多くなると，その計算はたいへんやっかいとなり，乱数列を用いたシミュレーションによって求める方法が有効となるわけである．

ここでは簡単のために窓口の個数は1つとして考えるが，窓口の数が増してもシミュレーションの方法は同様である．

いま r 番目の客のサービス時間を $s(r)$，待ち時間を $w(r)$ とし，$r-1$ 番目の客と r 番目の客との到着時間間隔を $t(r-1)$ とする．

このとき図5.1，図5.2からわかるように漸化式

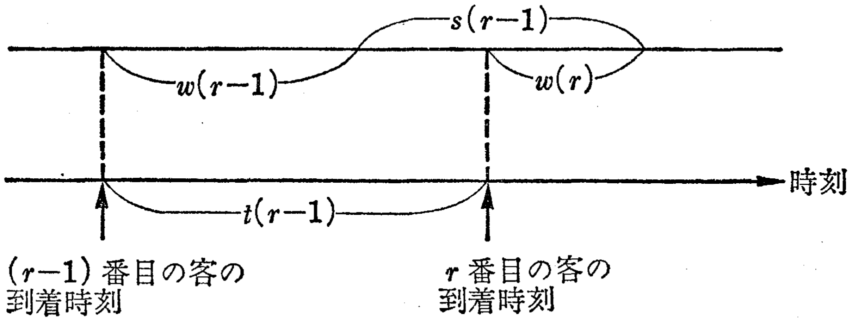


図5.1　r 番目の客の待ち時間 $w(r)$ のある場合

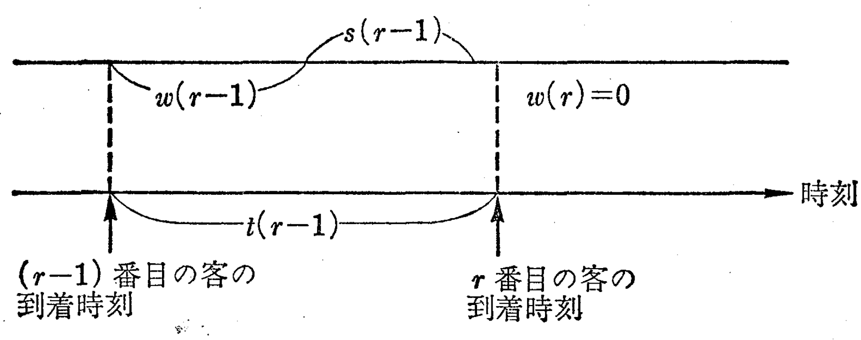


図5.2　r 番目の客の待ち時間 $w(r)$ のない場合

$$w(r) = \max\{w(r-1) + s(r-1) - t(r-1),\ 0\}^{1)} \qquad (5.1)$$
$$(r = 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

ができる.

サービス時間 s の確率分布を $g(s)$, 到着時間間隔 t の確率分布を $h(t)$ (いずれも，密度関数) とし，$w(0)$ は最初に来た人の待ち時間で適当に与える[2].

このとき $g(s)$ に従う乱数列を

$$s(0),\ s(1),\ s(2),\ s(3),\ s(4),\ \cdots\cdots$$

とし，$h(t)$ に従う乱数列を

$$t(0),\ t(1),\ t(2),\ t(3),\ t(4),\ \cdots\cdots$$

としよう．この乱数列の発生の方法は **4** 章で述べた方法のいずれかを用いればよい.

この乱数列から式 (5.1) により，

$$w(1),\ w(2),\ w(3),\ \cdots\cdots,\ w(n) \qquad (5.2)$$

なる n 個の乱数列をつくり，この平均値でもって平均待ち時間を推定すればよい[3]．わかりやすいために図に示しておこう.

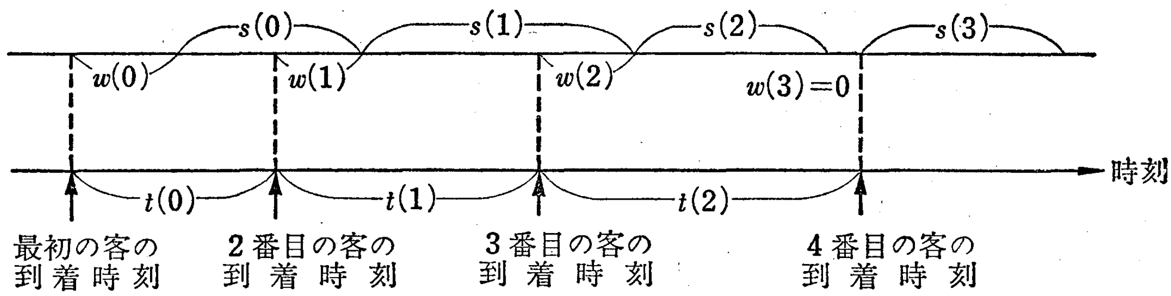


図 5.3　待ち時間推定のためのシミュレーション

---

1) この式の意味は $w(r-1)+s(r-1)-t(r-1)$ の値と 0 との大きいほうを $w(r)$ とすることである.

2) $w(0)$ の与え方によってあとで出てくる $w(1)$, $w(2)$, …… のうちの初期の待ち時間に多少影響を与えるが，それ以後はあまり影響がない.

3) 実際の乱数列の発生とか計算はすべてコンピュータの中で行なうので非常に短時間で推定値が求められる.

以上のことから式 (5.2) で得られる n 個の実現値から平均待ち時間を推定することができるが，この推定の精度等については次節に詳しく述べることにする．

5.2 シミュレーションによる推定

式 (5.1) で示す $w(r)$ $(r=1,2,\cdots\cdots)$ はある確率分布をもつ系列と考えられ[1]，その確率分布を密度関数 $f(w)$ で書くことにしよう．

もしこの密度関数が

$$f(w)=\alpha e^{-\alpha w},\quad (w>0)\quad (\text{指数分布})$$

のように簡単であれば，待ち時間の平均値はこの分布をもつ乱数列

$$w(1),\ w(2),\ \cdots\cdots\ w(n)$$

を用いて推定するまでもなく，$\dfrac{1}{\alpha}$ となることはよく知られている事実である．ところが普通の場合は $f(w)$ が複雑で，待ち時間の平均値 (μ_w と書くことにする)

$$\mu_w=\int_0^\infty w\,f(w)\,dw \tag{5.3}$$

を計算によって算出することは非常にやっかいとなる．

このように μ_w を計算によって求めることが非常にやっかいな場合には乱数列を用いたシミュレーションにより $f(w)$ に従う乱数列 $w(1), w(2), \cdots\cdots, w(n)$ を生成することにより推定することが非常に有効な手段となるのである．

この $w(1), w(2), \cdots\cdots, w(n)$ はシミュレーションを繰り返すごとに異なった値をとる変動する量であり，確率変数で

1) この確率分布はサービス時間 s の分布と到着時間間隔 t の分布を与えればきまるものである．

$$\boldsymbol{W}_1,\ \boldsymbol{W}_2,\ \boldsymbol{W}_3,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{W}_n \tag{5.4}$$

と書くことにしよう[1]．1回のシミュレーションによって得られる結果 $w(1), w(2), \cdots\cdots, w(n)$ はこの確率変数の実現値と思えばよい．

さて，$\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{W}_n$ の算術平均

$$\overline{\boldsymbol{W}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{W}_i \tag{5.5}$$

によって μ_w（平均待ち時間）を推定するわけであるが[2]，この算術平均の期待値（E と表わす）を計算すると

$$\mathrm{E}(\overline{\boldsymbol{W}}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(\boldsymbol{W}_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{\infty} w\, f(w)\, dw\right\} = \mu_w$$

となって，我々が求めたい待ち時間の平均値 μ_w に一致する．

補注 5.1　このように期待値を計算して μ_w になる推定量 $\overline{\boldsymbol{W}}_n$ のことを μ_w の**不偏推定量** (unbiased estimator) と呼んでいる．

このことは確率変数 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{W}_n$ の実現値 $w(1), w(2), \cdots\cdots, w(n)$ の平均値をシミュレーションを何回も繰り返すことによって求めたとき，その平均値はあるときは μ_w のすぐ近くに，あるときは μ_w からすこし離れたところに現われるが，それ等をすべて平均すると μ_w に一致するということを意味している．

さて，式 (5.5) の $\overline{\boldsymbol{W}}_n$ で μ_w を推定したときにその推定の誤差は，$\overline{\boldsymbol{W}}_n$ の実現値が μ_w からどれほど離れて現われるかによって決まるので，それは $\overline{\boldsymbol{W}}_n$ の確率分布にもとづいて算出される．

---

1)　密度関数 $f(w)$ をもつ母集団から抽出された n 個の無作為標本と考えてもよい．

2)　実際は確率変数 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{W}_n$ の実現値 $w(1), w(2), \cdots\cdots, w(n)$ を用いて

$$\overline{w}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(i)$$

を μ_w の推定値とする．

この μ_w からの離れ具合がどれほどであるかを普通 $\overline{W}_n$ の分散[1)]によって表わしている．分散が大きければ大きいほど，μ_w からの離れ具合は大きくなり，推定の誤差は大きくなるわけである．

この分散を記号 $V(\overline{W}_n)$ で示せば，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
V(\overline{W}_n) &= E\{(\overline{W}_n-\mu_w)^2\} \\
&= E\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i-\mu_w\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} E(W_i-\mu_w)^2+\sum_{i\neq j}^{n}\sum E((W_i-\mu_w)(W_j-\mu_w))\right\}^{2)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(W_1-\mu_w)^2=\frac{\sigma_w^2}{n}
\end{aligned}$$

$$\left\{\text{ただし，}\ \sigma_w^2=\int_0^{\infty}(w-\mu_w)^2 f(w)\,dw\right\}$$

ここで前章でも述べた中心極限定理を用いると n（**標本数**と呼ぶことにしよう）が十分大きいとき[3)]，$\overline{W}_n$ の確率分布は $f(w)$ の確率分布が何であっても（どんな分布であっても）

平均値が μ_w，分散が $\dfrac{\sigma_w^2}{n}$ の正規分布

に従って分布すると考えてよいから[4)]

$$\frac{\overline{W}_n-\mu_w}{\dfrac{\sigma_w}{\sqrt{n}}}$$

---

1)　$\overline{W}_n$ の分散は $E\{\overline{W}_n-E(\overline{W}_n)\}^2$ で定義される．

2)　$\sum\limits_{i\neq j}^{n}\sum$ の意味は i, j が異なっているところでの和を意味する．
よって期待値の定義から，$i\neq j$ に対しては $E((W_i-\mu_w)(W_j-\mu_w))=E(W_i-\mu_w)\times E(W_j-\mu_w)=0$，よって $\sum\limits_{i\neq j}^{n}\sum E((W_i-\mu_w)(W_j-\mu_w))=0$ となる．

3)　乱数列を用いるシミュレーションの場合，n は相当大きいと考えてよい．

4)　$n\geqq 30$ ならば正規分布とみなしてよい．

の確率分布は平均値が 0，分散 1 の基準型正規分布に従って分布する．よって，α を固定して

$$P\left\{\left|\frac{\overline{W}_n-\mu_w}{\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}}\right|\leqq k_\alpha\right\}=1-\alpha \tag{5.7}$$

となる k_α を正規分布表（巻末付表 4）から求め[1]，式 (5.7) の { } の中を変形すると，次式が得られる．

$$P\left\{\overline{W}_n-k_\alpha\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}\leqq\mu_w\leqq\overline{W}_n+k_\alpha\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha \tag{5.8}$$

このとき，{ } の中の区間を**信頼係数** $1-\alpha$[2] の**信頼区間** (confidence interval) と呼んで

$$\left(\overline{W}_n-k_\alpha\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}},\quad \overline{W}_n+k_\alpha\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.9}$$

と表わす．この区間は確率変数 $\overline{W}_n$ の実現値と σ_w^2 が与えられれば定まるもので，この区間の中に確率 $1-\alpha$ で真の平均値 μ_w がはいってくる．わかりやすくいうと，n 個の標本から $\overline{W}_n$ の実現値を求め式 (5.9) の区間を作ったとき，いつでもその区間に真の平均値 μ_w を含んでいるとは限らないが n 個の標本をとるシミュレーションを何回もくり返したとき，くり返し回数をかりに N とすると，平均的に $N\times(1-\alpha)$ 回だけは式 (5.9) で示す区間の中に μ_w を含むわけである．たとえば $1-\alpha=0.95$ とすると n 個の標本をとるシミュレーションを 100 回くり返し行なったとき，そのうち平均的に 95 回は式 (5.9) で与えられる区間に μ_w を含む．

ところが，普通シミュレーションはただ 1 回しか行なわない．そ

1) $\alpha=0.05$ だと $k\alpha=1.96$ となり，$\alpha=0.01$ だと $k\alpha=2.58$ となる．
2) 普通 α は 0.05，0.01 とされている．

の 1 回のシミュレーションの結果から作った信頼区間の中に必ず μ_w を含むとは断言できないわけである．しかしある程度 $1-\alpha$ の値を大きくすれば，ほとんど 100％ μ_w をその区間の中に含むようにできる．

前の平均待ち時間の推定の場合は確率変数

$$\overline{W}_1, \quad \overline{W}_2, \quad \cdots\cdots, \quad \overline{W}_n$$

の実現値として，シミュレーションの結果，式 (5.2) で示されるように

$$w(1), \quad w(2), \quad \cdots\cdots, \quad w(n)$$

が得られたと考えればよいから，$\overline{W}_n$ の実現値は $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(i) = \bar{w}_n$ となり，信頼係数 $(1-\alpha)\times 100$％ の信頼区間は次式のようになる．

$$\left(\bar{w}_n - k_\alpha \frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}, \quad \bar{w}_n + k_\alpha \frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.10}$$

ところが，σ_w はあらかじめ未知であるから，やはり既知の標本 $w(1)$，$w(2)$，……，$w(n)$ から推定しなければならない．

σ_w^2 の不偏推定値は次式のようになることが知られており，

$$\hat{\sigma}_w^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(w(i) - \bar{w}_n)^2 \tag{5.11}$$

σ_w のかわりに $\hat{\sigma}_w$ を用いて式 (5.10) の区間を書きかえてみると

$$\left(\bar{w}_n - k_\alpha \frac{\hat{\sigma}_w}{\sqrt{n}}, \quad \bar{w}_n + k_\alpha \frac{\hat{\sigma}_w}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.12}$$

となり，これを信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間と考えればよい．

たとえば，$1-\alpha=0.95$ なら $k_\alpha=1.96$ となって，信頼係数 95％ の信頼区間は次式のようにして求めることができる．

$$\left(\bar{w}_n - 1.96\frac{\hat{\sigma}_w}{\sqrt{n}}, \quad \bar{w}_n + 1.96\frac{\hat{\sigma}_w}{\sqrt{n}}\right)$$

補注 5.2 式 (*5.11*) で示される値は確率変数で書くと

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{W}_i-\overline{\boldsymbol{W}}_n)^2$$

と書かれ，この期待値が σ_w^2 になることを示しておく．

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{W}_i-\overline{\boldsymbol{W}}_n)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\{\boldsymbol{W}_i-\mu_w)-(\overline{\boldsymbol{W}}_n-\mu_w)\}^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{\mathrm{E}(\boldsymbol{W}_i-\mu_w)^2-2\mathrm{E}(\overline{\boldsymbol{W}}_i-\mu_w)(\overline{\boldsymbol{W}}_n-\mu_w)+\mathrm{E}(\overline{\boldsymbol{W}}_n-\mu_w)^2\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_w^2-\frac{\sigma_w^2}{n}\right)=\sigma_w^2$$

よって推定量

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{W}_i-\overline{\boldsymbol{W}}_n)^2$$

は σ_w^2 の不偏推定量となる．

補注 5.3 (標本数 n の決定)　以上述べたように，信頼係数 $1-\alpha$ と標本数を決めれば信頼区間が定まるが，普通のシミュレーションにおいてはむしろ標本数 n をどれほどにすればよいかという問題が重要視される．いかにコンピュータの計算速度が早いといっても，むやみやたらにシミュレーションをくり返して多くの標本を得るということは無駄である．

そこで与えられた確率モデルに対して，どれほどの標本数にしたらよいかを考えてみよう．

いま，信頼係数と信頼区間の信頼幅 (L と書くことにする) を人為的に与えるとそれに必要な標本数 n は決まるわけである．すなわち

$$\text{人為的}\left.\begin{cases}\text{信頼係数 } 1-\alpha \text{ を決める } (k_\alpha \text{ を決める})\\ \text{信頼幅 } (L) \text{ を決める．}\end{cases}\right\}\Rightarrow \text{標本数 } n \text{ が定まる．}$$

具体的には，信頼係数 $1-\alpha$ の信頼幅は式 (*5.9*) より

$$2k_\alpha\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}$$

となり，これを L とするわけであるから，

$$L=2k_\alpha\frac{\sigma_w}{\sqrt{n}}$$

なる式を解いて

$$n=\left(\frac{2k_\alpha\,\sigma_w}{L}\right)^2 \tag{5.13}$$

となり，もし σ_w がわかれば標本数 n は決まってくることがわかる．

σ_w はもともと未知であるから，予備的なシミュレーションにより小さい標本 n' をとり，これより，式 (5.11) と同様に σ_w^2 を

$$\hat{\sigma}_w'^2=\frac{1}{n'-1}\sum_{j=1}^{n'}(w(j)-\overline{w}_{n'})^2$$

で確定して式 (5.13) の σ_w に代入して次式のように n を定めればよい．

$$n\fallingdotseq\left(\frac{2k_\alpha\hat{\sigma}_w'}{L}\right)^2$$

σ_w^2 を推定するための標本数 n' が小さいため多少の誤差は出てくるが，このようにして n を決めてシミュレーションを行なうと，やたらに多くの標本をとって推定する場合に比べて大変有効である．

B.　いろいろな例題

例題 1.　細胞の分裂のモデル　　図 5.4 のように時刻 T_0 で 1 個であった細胞がある時間 t_1 だけ経過したときに 2 個に分裂し，そのそれぞれの細胞がまた時間 t_2, t_3 だけ経過したときにそれぞれ 2 個に分裂する．このような分裂がどんどん行なわれてゆくとき，ある時刻 T_1 で一体細胞が何個に分裂したかが知りたいとする[1)]．

ただし，この 1 つの細胞が 2 つに分裂するまでの時間間隔はある確率分布に従っていると仮定しよう[2)]．その確率分布を確率密度関数で表わして，$f(t)$ と書くことにする．このとき，系列

1)　時刻 T_1 での細胞の総個数が知りたいとする．
2)　どんな確率分布に従っているかは過去のデータから決めるのが普通である．

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots\cdots,\ t_n,\ \cdots\cdots$$

は密度関数 $f(t)$ をもつ乱数列と考えられる．よってあらかじめ $f(t)$ を定めておけば，それに従う乱数列を作り，図 5.4 のようにコンピュータの中で，どんどん細胞を分裂させることができる．

ここで時刻 T_1[1] での細胞の総個数は図 5.4 のようなシミュレーションをくり返すごとに変わった値をとる確率変数とみなされ $N(T_1)$ と表わすことにして，$N(T_1)$ の確率分布を

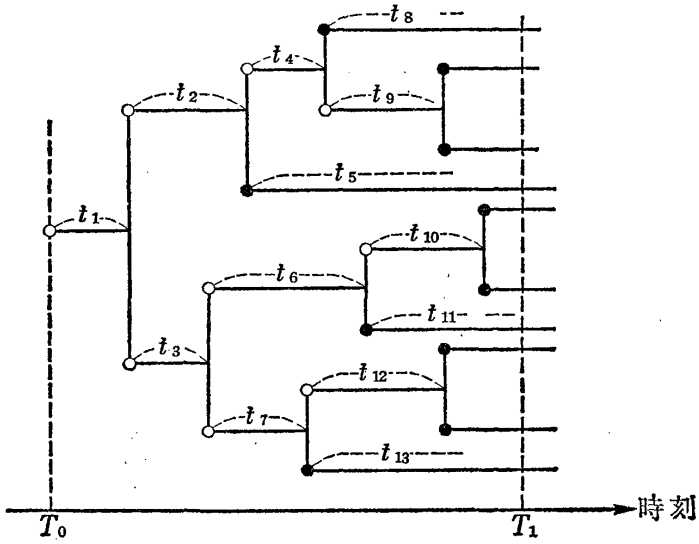


図 5.4 細胞の分裂のシミュレーション

$$\mathrm{P}\{N(T_1)=k\}=p_k, \quad k=1,2,3,\cdots\cdots \tag{5.14}$$

とする．

このとき，密度関数 $f(t)$ の形が簡単であれば，T_1 を固定したとき $N(T_1)$ の期待値

$$\mu_{T_1}=\mathrm{E}(N(T_1))=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k \text{ [2]}$$

を直接計算できるが，$f(t)$ が少し複雑であると普通の確率の計算で μ_{T_1} の値を求めることは非常にやっかいになる．

そこで，図 5.4 に示すような乱数列を用いたシミュレーションを n 回くり返し，それから得られる n 個の標本値（$N(T_1)$ の実現値）

1) T_1 はどこにとってもよいが，T_1 のとり方によって $N(T_1)$ の確率分布は変わってくる．

2) 期待値の意味は時刻 T_1 では細胞の総数が平均的に μ_{T_1} 匹になるということである．

から μ_{T_1} を推定することが有効な手段となる．

いま，シミュレーションの結果得られる n 個の標本値を

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \cdots\cdots,\ k_n$$

とすると

$$\bar{k}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

でもって μ_{T_1} の推定値とすれば，信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は式 (5.12) より

$$\left(\bar{k}_n - k_\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(k_i-\bar{k}_n)^2},\ \bar{k}_n + k_\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(k_i-\bar{k}_n)^2}\right) \tag{5.15}$$

として求めることができる．

たとえば密度関数 $f(t)$ を簡単のために指数分布

$$f(t) = e^{-t},\quad (t>0)$$

とするとき，この $f(t)$ に従う乱数列を生成してみると

1.04, 0.94, 0.63, 0.80, 0.25, 1.87, 1.52, 1.74, 0.26,
0.49, 0.92, 1.74, 0.90, 1.10, 0.38, 0.50,
0.10, 1.51, 1.65, 0.76, 0.39, 0.76, 1.06,
0.33, 1.46, 0.64, 1.40, 3.52, ……

となり，この乱数列を用いたシミュレーションの結果は図5.5のようになる．

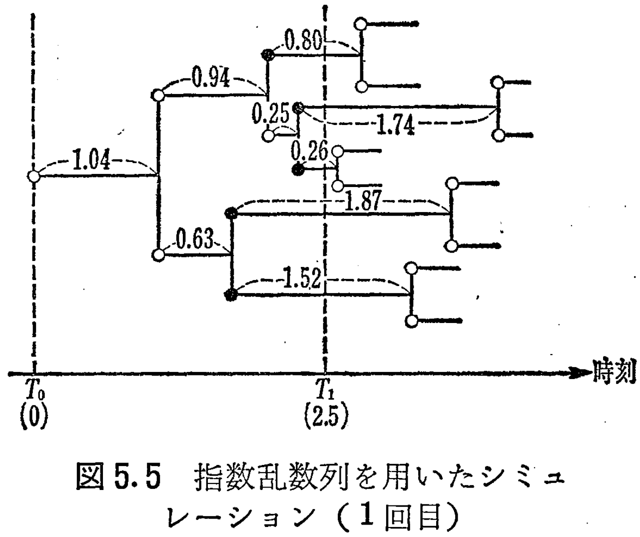


図5.5　指数乱数列を用いたシミュレーション（1回目）

いま，$T_1=2.5$, $T_0=0$ とすると，図5.5より●印の細胞が時刻 $T_1=2.5$ では5個存在しているから，最初の標本値 k_1 は

$$k_1 = 5$$

となり，同様に次の標本値 k_2 は図 5.6 より

$$k_2 = 6$$

となる．同様に，引き続いた指数乱数列を用いて，このようなシミュレーションをくり返して

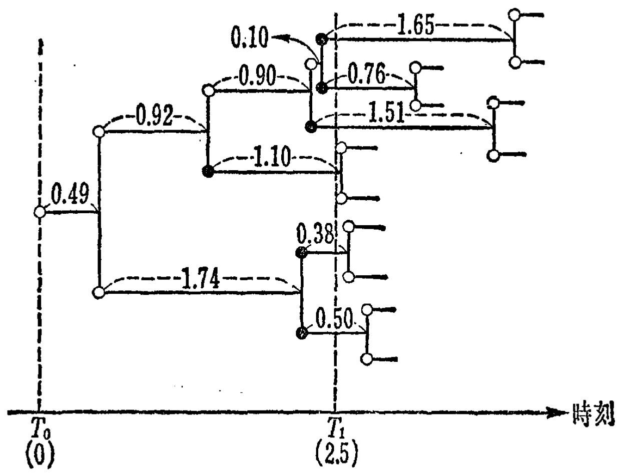


図 5.6 指数乱数列を用いたシミュレーション（2回目）

$$k_3,\ k_4,\ \cdots\cdots,\ k_n$$

と n 個の標本値が得られると

式 (*5. 15*) より信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間を求めることができる．

補注 5.4 このような例題においては，T_1 が大きいとき，1つの値 k_i ($i=1, 2, \cdots\cdots, n$) を求めるのに多くの乱数列を用いるわけであるから，標本数 n をむやみに多くすることはいかにコンピュータの中とはいえ大変な手数となるわけであり，補注 5.3 で述べた方法で n を前もって決めてから，シミュレーションにとりかかることがたいせつである．

例題 2. 銅貨投げと賭[1] フェラーの著書に従って，いまピーター君とポール君の 2 人が銅貨投げの賭をすることにしよう．もし表が出ればピーター君の勝ちで 1 ドルをポール君からもらい，もし裏が出ればポール君の勝ちでピーター君がポール君に 1 ドルを支払う．この賭を n 回くり返して行ない，n 回までにピーター君の得た総額を S_n とする．このとき賭の回数を横軸にとると，S_n は図 5.7 のように折れ線グラフで書くことができる．

この図では，最初はピーター君の勝ちで，$n=1$ のとき $S_1=1$ と

1) フェラー著“確率論とその応用”から引用．

なり，2回目もピーター君の勝ちで $n=2$ では $S_2=2$ となり，3回目はピーター君の負けで $S_3=1$ となる．以下も同時に考えればよい．

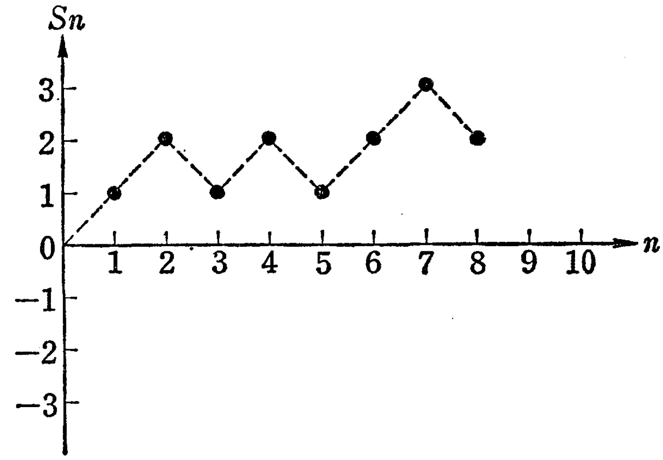


図5.7　S_n のグラフ

このような賭において，正しい1枚の銅貨を10 000回投げて，その結果を図5.7と同様に書いた結果がフェラーの著書に記されているが，それはおおよそ図5.8のようになっている．

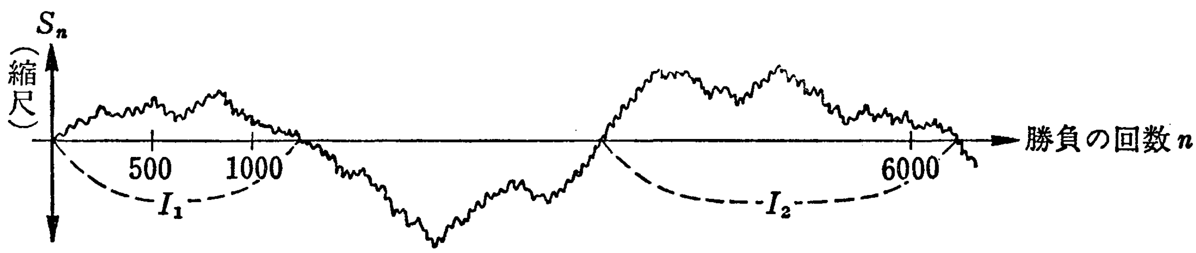


図5.8　S_n の グ ラ フ

このグラフを見ると，ごく局部的には何処でも表と裏の出る割合はだいたい同じで，折れ線は上下しているが，全体としては，最初のうち，800回近くまでは大体正の側にあり，何らかの原因でだんだん S_n の値は減少してゆく，そして局部的には上下をくり返しながら全体としてはどんどん S_n は減ってゆき，n が1 000を過ぎたころから S_n の値が負の側になる．そしてどんどん下がってゆき，また途中から正の側に上がってくる．

このように非常に面白い現象が出現するわけであるが，このとき，

ピーター君がリードを保っているところは S_n が正のところ，すなわち図5.8で区間 I_1, I_2 の部分である．

ここで，ピーター君がリードを保っている区間の平均値を求めることを問題とする．

この区間

$$I_1,\quad I_2,\quad I_3.\quad \cdots\cdots$$

はある確率分布に従って出てくる系列である．

このときその確率分布はかなり複雑なのでその平均値は計算では容易には求まらない．そこで，乱数列を用いたシミュレーションにより，ピーター君がリードを保つ区間の長さの平均値を求めることが有効となるわけである．

そのために図5.8に示すようなシミュレーションを乱数列を用いてコンピュータによりどんどん先まで行なって[1] n 個の標本

$$I_1,\ I_2,\ I_3,\ \cdots\cdots,\ I_n$$

が得られたとする．

この標本から式(5.12)と同様に信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間を次のように求めることができる．

$$\left(\bar{I}_n - k_\alpha\frac{\hat{\sigma}_I}{\sqrt{n}},\ \bar{I}_n + k_\alpha\frac{\hat{\sigma}_I}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.16}$$

$$\left\{\text{ただし}\quad I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i,\quad \hat{\sigma}_I = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(I_i-\bar{I}_n)^2}\ \text{とする}\right\}$$

補注5.5　このような例題においても補注5.4で述べたと同様に1つの

---

1) このシミュレーションを行なうためには，コンピュータの中で1けたの乱数列を用いて偶数(0も含めて)なら表，奇数なら裏が出たことにすればよく，それで S_n の値を計算し，

$$S_n > 0$$

の状態が続く区間の長さを，次々と記録してゆけばよい．

標本値 I_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ を得るために多くの乱数列が必要であり，むやみに n を大きくすることは大変な手数となる．そこで，補注 5.3 で述べた定められた精度で推定するための標本数を前もって決定してからシミュレーションにとりかかると無駄がなくて有効である．

例題 3.　ランダム・ウォーク　図 5.9 に示すように 1 点 O にいる酔払いが，勝手気ままな方向に長さ l_1 だけ進み，点 p_1 にたどりつき，次にまた勝手気ままな方向に長さ l_2 だけ進み，点 p_2 にたどりついた．

このような歩行を s 回くり返して点 p_s までたどりついたとする．いいかえれば，出発点 O からランダムな方向に長さ l_1 だけ歩き，次にまたランダムな方向に長さ l_2 だけ歩き，同様に各ステップにおいて方向だけがランダムに変わるように s ステップ歩くわけである．

このような運動の仕方を**ランダム・ウォーク**といって，分子の運動をはじめいろいろな場面で見られる．

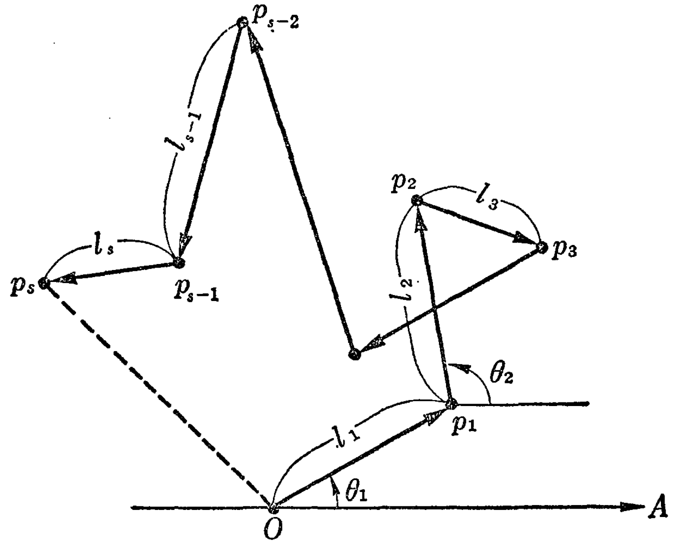


図 5.9　s ステップのランダム・ウォーク

図 5.9 に示すランダム・ウォークにおいて，出発点 O から点 p_s はどのくらい離れているかを問題として考えてみよう．すなわち酔払いがたどりついた点 p_s は出発点 O からどれくらいの距離にあるかという問題である．この問題を確率的に考えてみると次のようになる．

出発点 O から酔払いが勝手気ままな方向に歩くということは，基

準線OA (図5.9) から角度 θ_1 の方向に歩くことである．ただし，θ_1 は区間 $[0, 2\pi]$ の上の一様乱数列の1つと考える．次に θ_2 も同様に区間 $[0, 2\pi]$ の上の一様乱数列の1つと考え，順次同様に考えればよい．

出発点Oから出発したランダム・ウォークの各ステップの長さ l_1, $l_2, l_3, \cdots\cdots, l_s$ は一定として，各ステップにおける方向だけがランダムであるというモデルと考えるわけである．このモデルを乱数列を用いて再現してみよう[1]．

いま，区間 $[0, 1]$ の上の一様乱数列を

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ \cdots\cdots$$

とするとき，区間 $[0, 2\pi]$ の上の一様乱数列は

$$\theta_1 = 2\pi u_1,\ \theta_2 = 2\pi u_2,\ \theta_3 = 2\pi u_3,\ \theta_4 = 2\pi u_4,\ \theta_5 = 2\pi u_5,\ \cdots\cdots$$

として作られるから，この乱数列を用いて図5.9に示すように出発点O（直交座標の原点と考える）から基準線Aに対して角度 θ_1 の方向に l_1 だけ進ませる．そのとき点 p_1 の座標は

$$p_1 = (l_1 \cos\theta_1,\ l_1 \sin\theta_1)$$

となる．次に同様に θ_2 なる角度の方向に l_2 だけ進み，点 p_2 に到ると，点 p_2 の座標は

$$p_2 = (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2,\quad l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2)$$

となり，順次同様にして点 p_s にたどりつくと，p_s の座標は

$$p_s = (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 + \cdots\cdots + l_s \cos\theta_s,$$
$$l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 + \cdots\cdots + l_s \sin\theta_s)$$

と書けて，出発点Oと点 p_s の距離 $(\overline{\mathrm{O}p_s})$ はピタゴラスの定理より

1) 実際はコンピュータの中でシミュレーションを行なうわけである．

$$\overline{\mathrm{O}p_s}=\sqrt{(l_1\cos\theta_1+\cdots+l_s\cos\theta_s)^2+(l_1\sin\theta_1+\cdots+l_s\sin\theta_s)^2} \tag{5.17}$$

と求めることができる.

これで，1回目の試行に対して1つの長さ $\overline{\mathrm{O}p_s}$ が求まる.

次に同様にして，　2回目の試行に移ろう．$l_1, l_2, \cdots\cdots, l_s$ は一定だから，各ステップにおける角度だけを変えればよい.

$\theta_{s+1}=\theta_1^{(2)},\ \ \theta_{s+2}=\theta_2^{(2)},$

$\theta_{s+3}=\theta_3^{(2)}, \cdots\cdots, \theta_{2s}=\theta_s^{(2)}$ [1]

とすると，まず出発点Oから $\angle \mathrm{AO}p_1^{(2)}=\theta_1^{(2)}$ なるように

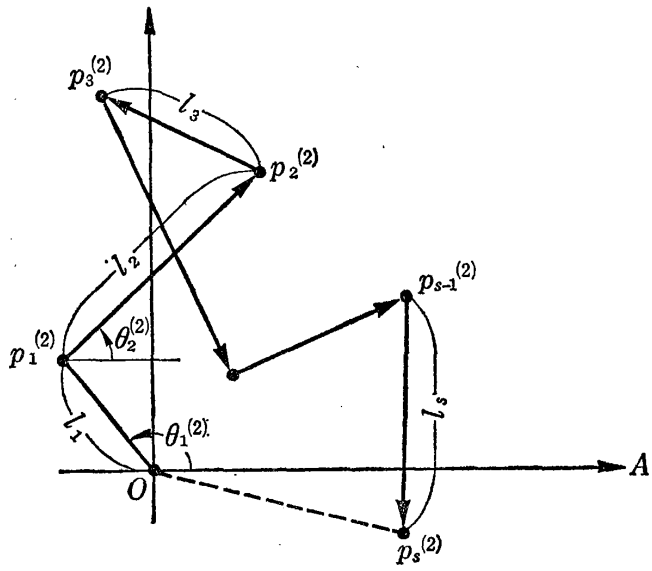


図 5.10.　s ステップのランダム・ウォーク（2回目の試行）

長さ $\mathrm{O}p_1^{(2)}=l_1$ をとり，同様に $\theta_2^{(2)}, \theta_3^{(2)}, \cdots\cdots\theta_s^{(2)}$ を用いて，次々と $p_2^{(2)},\ p_3^{(2)}, \cdots\cdots, p_s^{(2)}$ を求める（図 5.10).

このとき，第1回目の試行と同様に考えると

$$\begin{aligned}
p_1^{(2)}&=(l_1\cos\theta_1^{(2)},\ \ l_1\sin\theta_1^{(2)})\\
p_2^{(2)}&=(l_1\cos\theta_1^{(2)}+l_2\cos\theta_2^{(2)},\ \ l_1\sin\theta_1^{(2)}+l_2\sin\theta_2^{(2)})\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
p_s^{(2)}&=(l_1\cos\theta_1^{(2)}+l_2\cos\theta_2^{(2)}+\cdots\cdots+l_s\cos\theta_s^{(2)},\\
&\qquad\qquad l_1\sin\theta_1^{(2)}+l_2\sin\theta_2^{(2)}+\cdots\cdots+l_s\sin\theta_s^{(2)})
\end{aligned}$$

となり，出発点Oと点 $p_s^{(2)}$ の距離は 式（5.18）となる.

---

1)　$\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \cdots\cdots, \theta_s^{(2)}$ の (2) は2回目の試行を意味する.

$$\overline{\mathrm{O}p_s^{(2)}} = \sqrt{(l_1\cos\theta_1^{(2)} + \cdots + l_s\cos\theta_s^{(2)})^2 + (l_1\sin\theta_1^{(2)} + \cdots + l_s\sin\theta_s^{(2)})^2} \tag{5.18}$$

同様な試行をくり返すと

$$\overline{\mathrm{O}p_s},\ \overline{\mathrm{O}p_s{}^{(2)}},\ \overline{\mathrm{O}p_s{}^{(3)}},\ \overline{\mathrm{O}p_s{}^{(4)}},\ \cdots\cdots \tag{5.19}$$

が求まり，この値は試行ごとに変わってくる．

これらの値はもちろん，0 から $l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_s$ の間にあることは容易にわかり，この間である確率分布に従って現われるわけである．

そこで，出発点 O から s ステップの終点までの長さを確率変数で表わしてみると，次のようになる．

$$\boldsymbol{\theta}_1,\ \boldsymbol{\theta}_2,\ \boldsymbol{\theta}_3,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{\theta}_s$$

を区間 $[0, 2\pi]$ 上の一様分布をもつ独立な s 個の確率変数とするとき，長さ $\overline{\mathrm{O}p_s}$ はやはり確率変数となって，これを $\boldsymbol{T}_s$ と書くことにすれば，式 (5.17) より，式 (5.20) となる．

$$\boldsymbol{T}_s = \sqrt{(l_1\cos\boldsymbol{\theta}_1 + \cdots + l_s\cos\boldsymbol{\theta}_s)^2 + (l_1\sin\boldsymbol{\theta}_1 + \cdots + l_s\sin\boldsymbol{\theta}_s)^2} \tag{5.20}$$

いま，我々はこのランダム・ウォークのモデルにおいて，長さ $\overline{\mathrm{O}p_s}$ は平均的にどれぐらいになるかを問題にしている．

それは，$\boldsymbol{T}_s$ の期待値

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{T}_s) = \mu_s \tag{5.21}$$

を求めることである．

ここで，$\boldsymbol{T}_s$ の確率分布を求めることが困難であれば，その期待値も計算することが困難となり，乱数列を用いたシミュレーションによって μ_s を推定することが効力を発揮するわけである．

このためには，式 (5.19) で示す標本値を n 個とり，それを

$$x_1=\overline{Op_s},\ \ x_2=\overline{Op_s{}^{(2)}},\ \ x_3=\overline{Op_s{}^{(3)}},\ \ \cdots\cdots,\ \ x_n=\overline{Op_s{}^{(n)}}$$

とすれば，μ_s の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は式 (5.16) と同様に

$$\left(\bar{x}_n-k_\alpha\frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}},\quad \bar{x}_n+k_\alpha\frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.22}$$

$$\left\{\text{ただし，}\ \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \ \hat{\sigma}_x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2}\ \ \text{とする}\right\}$$

と求めることができる.

補注 5.6　実をいうとこの $\boldsymbol{T}_s$ の確率分布はクリューベル (Kluyver) によって

$$\mathrm{P}\{\boldsymbol{T}_s<t\}=t\int_0^\infty J_1(tx)\left[\prod_{i=1}^{s}J_0(l_ix)\right]dx$$

$\{$ただし，$J_1(tx)$，$J_0(l_ix)$ はベッセル関数$\}$

と求められており，$l_1=l_2=\cdots\cdots=l_s=1$ のときは近似的に

$$\mathrm{P}\{\boldsymbol{T}_s<t\}\sim 1-e^{-\frac{t^2}{s}},\quad t>0$$

なることが知られている.

このように $\boldsymbol{T}_s$ の確率分布（確率密度関数，または確率分布関数）がすでに計算されており，$\mathrm{E}(\boldsymbol{T}_s)$ が直接計算できれば，この乱数列を用いたシミュレーションによる推定はその価値を失うわけである.

次にこのランダム・ウォークの例において，s ステップのうちで1番出発点Oより遠くなる点までの距離の平均値を求めることを考えてみよう[1].

いま，s ステップのランダム・ウォークにおいて出発点より1番遠くなる点までの長さを確率変数 $\boldsymbol{T}_s^{(m)}$ で表わせば $\boldsymbol{T}_s^{(m)}$ は式(5.23)で表わせる.

1)　ランダム・ウォークする物体の動く最大距離はその物体の行動範囲と考えられ，それを知ることは必要である.

$$T_s^{(m)} = \max_{1 \leqq k \leqq s} \sqrt{(l_1\cos\theta_1 + \cdots + l_k\cos\theta_k)^2 + (l_1\sin\theta_1 + \cdots + l_k\sin\theta_k)^2}\ ^{1)} \tag{5.23}$$

このとき s ステップの試行において原点Oから1番遠くなるのは，平均どれくらいの距離なのだろうかという問題を解くためには $T_s^{(m)}$ の確率分布を明らかにして，$T_s^{(m)}$ の期待値（平均値）

$$\mathrm{E}(T_s^{(m)}) = \mu_s^{(m)} \tag{5.24}$$

を求める必要がある．

ところが，この場合 $T_s^{(m)}$ の確率分布は容易に求まらなくて $\mathrm{E}(T_s^{(m)})$ の計算は非常にやっかいとなる．

そこで乱数列

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \theta_5,\ \cdots\cdots$$

を用いて $\mu_s^{(m)}$ の値をシミュレーションにより推定することが効力を発揮するわけである．

そのためには図5.9に示すように乱数列 $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_s$ を用いて s ステップまでとり，ステップごとに原点からの距離

$$\overline{\mathrm{O}p_1},\ \overline{\mathrm{O}p_2},\ \cdots\cdots,\ \overline{\mathrm{O}p_s}\quad (\text{図5.9より})$$

を計算し[2]，その中で1番大きい値を $T_s^{(m)}$ の実現値（標本値）として採用し，$x_1^{(m)}$ とする．次に図5.10に示すように乱数列 $\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \cdots\cdots, \theta_s^{(2)}$ を用いて s ステップまでとり，ステップごとに原点からの距離

---

1) $\max\limits_{1 \leqq k \leqq s}$ は k が1から s までのどの値かで $\sqrt{}$ の中が最大となり，その値が $T_s^{(m)}$ という意味である．

2) 実際はコンピュータで計算するわけである．

$$\overline{\mathrm{O}p_1^{(2)}},\ \overline{\mathrm{O}p_2^{(2)}},\ \cdots\cdots,\ \overline{\mathrm{O}p_s^{(2)}}\quad(\text{図 5.10 より})$$

を計算し，その中で1番大きい値を $T_s^{(m)}$ の2番目の実現値（標本値）として採用し，$x_2^{(m)}$ とする．同様の操作で得られる n 個の標本値を

$$x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ \cdots\cdots,\ x_n^{(m)}$$

とすると，$\mu_s^{(m)}$ の推定のための信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は式(5.22)と同様に

$$\left(\bar{x}_n^{(m)} - k_\alpha\frac{\hat{\sigma}_{x^{(m)}}}{\sqrt{n}},\quad \bar{x}_n^{(m)} + k_\alpha\frac{\hat{\sigma}_{x^{(m)}}}{\sqrt{n}}\right) \tag{5.25}$$

$\left\{\text{ただし，}\ \bar{x}_n^{(m)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{(m)},\ \hat{\sigma}_{x^{(m)}}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(m)}-\bar{x}_n^{(m)})^2}\ \text{とする}\right\}$

と求めることができる．

$s=10,\quad l_1=l_2=\cdots\cdots=l_{10}=1$ のときに実際にコンピュータの中でシミュレーションを行ない，

$\mu_{10}^{(m)}$（原点Oから1番遠くなる点までの長さの平均値）

を推定した結果を示しておこう．

実際のシミュレーションの結果（標本数, $n=30$）

表5.1 標　本　値

試作回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
標 本 値	3.52	3.78	2.08	5.09	2.11	3.20	2.82	3.14	3.64	2.18	4.58	2.37	2.48	5.53	2.38

試行回数	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
標 本 値	2.21	4.87	3.34	4.58	4.11	2.66	3.38	5.74	1.84	3.34	2.67	2.49	1.96	2.43	4.45

この表より

$$\bar{x}_{30}^{(m)} \fallingdotseq 3.33$$

$$\hat{\sigma}_{x^{(m)}} \fallingdotseq 1.15$$

となって，かりに信頼係数 0.95 とすると正規分布表（巻末付表4）より $k_{0.05}=1.96$ となり，

$$k_\alpha \frac{\hat{\sigma}_{x^{(m)}}}{\sqrt{n}} \fallingdotseq 0.41$$

となって $\mu_{10}^{(m)}$ の信頼区間は式（*5.25*）より

$$(2.92,\quad 3.74)$$

と求まる．標本数(試行回数)を大きくすれば，この信頼区間はだんだんと狭くなることは式（*5.25*）から容易にわかろう．

付　　録

1. 予備知識

1.1 確率分布

1つの実験を考えたとき，その実験の結果を事象といってEで表わすことにする．その事象Eの起こる確率を次のように定義する．

定義　事象Eの起こる確率とは，Eの起こる可能性，すなわち，すべての起こり方に対するEの起こる割合をいう．

いま，正しいサイコロを投げる実験を考えよう．そのときこの実験の結果（事象）としては出る目の数 X が考えられ，それは1から6までのいずれかの値をとる．すなわち，1の目の出る事象 E_1，2の目が出る事象 $E_2, \cdots\cdots, 6$ の目の出る事象 E_6 が考えられ，事象 E_i が起こるということは，$X=i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, 6)$ ということと同等である．サイコロを投げる場合，どの目の出る可能性も等しいと考えることができるから，すなわち $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_6$ のどの事象の起こる場合も等しいと考えることができるから，確率の定義によってどの目の出る確率も $\dfrac{1}{6}$ と考えることができる．いいかえれば，X のとる値として1から6までが考えられて，その確率は $\dfrac{1}{6}$ ということになる．

一般に，X はいろいろな値をとる可能性をもっているという意味で，変数と呼ぶこととする．その値をどの程度の確率でとるかによって変数 X のすべてのとる値に対して確率が示されているとき，このような変数 X のことを，確率変数と呼んでいる[1]．

確率変数について定められた確率をその確率分布と呼ぶ．この確率分布には，次のように離散型と連続型が考えられる．

（1） **離散型確率分布**　サイコロの例のように，確率変数 X のとりうる値が有限個のとびとびの値をとる場合，または有限個でなく無限個のとびとびの値をとる場合，その確率を

$$P\{X=x_i\}=p_i,\quad \sum_i p_i=1,\quad p_i>0 \qquad (1)$$

で表わすことにすれば，X の確率分布は p_i によって定められる．

たとえば，サイコロを投げる実験では

$$P\{X=x\}=\frac{1}{6},\quad x=1,2,3,4,5,6$$

と表わすことができる．

このように確率変数 X のとりうる値が有限個または無限個のとびとびの値をとり，それぞれ確率が p_i によって定められるとき，確率変数 X の確率分布は離散型であるという．(表1.1参照)

表 1.1　離散型確率分布

X のとる値	x_1 x_2 x_3 …… x_i ……
その確率	p_1 p_2 p_3 …… p_i ……

主な離散型確率分布

（i） **二項分布**　何か実験を行なうとき毎回の試行においてあ

1)　確率変数は原則として太文字で表わすことにする．

る事象 E の起こる確率を p とするとき，n 回の試行において事象 E の起こる回数 X は確率変数で，その確率分布は

$$P\{X=x\} = {}_nC_x p^x q^{n-x} \text{ [1]} \qquad (2)$$

$$\begin{pmatrix} q = 1-p \\ x = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n \end{pmatrix}$$

によって与えられる．この分布が**二項分布** (binomial distribution, ベルヌーイ分布とも呼ばれている) である．

明らかに関係式

$$\sum_{x=0}^{n} P\{X=x\} = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1 \qquad (3)$$

が成立する．

例　正常なサイコロをなんらの作為なく5回くりかえし投げるとき，1の目の出る回数 X の確率分布を求める．

解　$x=5,\ p=\dfrac{1}{6},\ q=\dfrac{5}{6}$ であるから，次のような式が得られる．

$$P\{X=0\} = {}_5C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.4019$$

$$P\{X=1\} = {}_5C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.4019$$

$$P\{X=2\} = {}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.1608$$

$$P\{X=3\} = {}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.0322$$

$$P\{X=4\} = {}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.0032$$

---

1) n 個のものから x 個のものをとり出して組とするとき，これを n 個のものから x 個とってつくった組合せという．この組合せの総数を ${}_nC_x$ または $\binom{n}{x}$ で表わし二項係数と呼んでいる．

$${}_nC_x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$ なる関係式が成立する．

$$P\{X=5\}={}_5C_5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0=0.0001$$

(ii)　ポアソン分布　　確率変数 X のとる値が $0, 1, 2, \cdots\cdots$ であるとき，確率分布

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad \lambda>0 \tag{4}$$

を**ポアソン分布** (poisson distribution) という．

これは二項分布において $np=\lambda$ という条件のもとで n を限りなく大きくしたときの極限分布である．この事実を示しておこう．

$$\lim_{n\to\infty}{}_nC_x p^x q^{n-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{n^x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)$$

ここで x が小さいところでは n が大きいとき

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\sim 1$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\sim\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n$$

したがって　$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$ より

$$\lim_{n\to\infty}{}_nC_x p^x q^{n-x}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0, 1, 2, \cdots\cdots$$

が導かれる．

(2)　連続型確率分布　　確率変数のもう1つの場合は，とりうる値が連続的なある範囲全体になる場合である．たとえば，ある実

験結果の観測値は前のサイコロの例のようにいつでもあらかじめ定められたいくつかの点のみをとるというようなことはない．すなわち，確率変数 X のとる値は連続的であると考えられる場合に X の確率分布は連続型であるという．たとえば，ルーレットのゲームを考えてみよう．ルーレットは図1．に示すように0から1までの数が刻まれている．いま，針の位置を X で表わすとする．このとき X は，0と1の間の値をとる確率変数で区間 $(0,1)$ のおのおのの数(実数)を同じ確率でとると考えられる．区間 $(0,1)$ の実数の個数は無限個あり，X が0と1の間の1点をとる確率は0，すなわち，$P\{X=x\}=0$ でなければならない．

このように連続型の場合は離散型のときと同じような型でその確率を表わすことはできない．

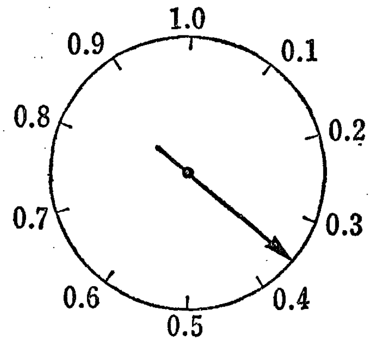


図1　ルーレット

そこで連続型の場合には，X が区間 $(x,\ x+\varDelta x)$ にはいる確率を

$$P\{x \leqq X \leqq x+\varDelta x\}$$

で表わすことにする．x と $\varDelta x$ を与えればこの値は計算できる．たとえばルーレットの例で $x=0.1$, $\varDelta x=0.02$ とすれば

$$P\{0.1 \leqq X \leqq 0.1+0.02\}=0.02$$

となる．

ところで，

$$\frac{P\{x \leqq X \leqq x+\varDelta x\}}{\varDelta x}$$

なる値を考えると，これは点 x の近くでの単位長さ当たりの確率変

数 X のとる確率の平均値と考えることができる．たとえば，ルーレットの例では $x=0.1$, $\varDelta x=0.02$ とすると，この式の値は **1** となる．

さらに $\varDelta x\to 0$ とする．すなわち，$\varDelta x$ を限りなく小さくするとき（これを微分 dx で表わす）

$$f(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{P\{x\leqq X\leqq x+\varDelta x\}}{\varDelta x}=\frac{P\{x\leqq X\leqq x+dx\}}{dx} \qquad (5)$$

または

$$P\{x\leqq X\leqq x+dx\}=f(x)\,dx$$

なる $f(x)$ を考える．この $f(x)$ を点 x における確率密度関数と呼ぶ．連続な確率分布は，この密度関数 $f(x)$ を用いて表現することができる．X のとる値は $f(x)$ の値が大きいところでは確率が大きく，逆に $f(x)$ 値の小さいところではそのとる確率は小さくなる．

また，

$$P\{a\leqq X\leqq b\}=\int_a^b f(x)\,dx$$

と表わすことができる．

離散型の場合の式（3）に対応するものとして次の式が成立する．

$$P\{-\infty<x<\infty\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1,\quad f(x)\geqq 0 \qquad (6)$$

主な連続型確率分布

（i）一様分布　密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\leqq a)\\[4pt] \dfrac{1}{b-a} & (a<x<b)\\[4pt] 0 & (b\leqq x)\end{cases} \qquad (7)$$

で表わされるような確率分布のことを**一様分布** (uniform distribution), また**矩形分布** (rectangular distribution) という.

（ii） **正規分布**　　密度関数が

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty<x<\infty) \qquad (8)$$

で表わされる確率分布のことを**正規分布** (normal distribution) と呼んでいる. これは $x=\mu$ (平均値) を対称軸として左右対称になっており, その広がりの程度は σ (標準偏差) で表わされる.

そこでこの分布はしばしば $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ [1] と表わされる.

とくに, $\mu=0$, $\sigma=1$ のとき基準型正規分布と呼んで $\mathrm{N}(0,1)$ と表わし, この基準型正規分布については巻末の付表4に示すように確率を示す表が作られている.

（iii） **ガンマ (Γ) 分布, 指数分布**

密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\alpha x},\ p>0,\ \ \alpha>0 & (0<x<\infty)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases} \qquad (9)$$

で表わされるような確率分布のことを**ガンマ分布** (gamma distribution) という. ただし $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ である. もし α が整数なら $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$.

このガンマ分布において $p=1$ のとき**指数分布** (exponential distribution) と呼ばれる. そのときの密度関数は

$$f(x)=\alpha e^{-\alpha x},\ \alpha>0 \quad (0<x<\infty) \qquad (10)$$

と書ける.

---

1) σ^2 は分散と呼ばれている.

(iv) ベータ (B) 分布

密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} & (0<x<1)\\ 0 & (x\leqq 0,\ x\geqq 1)\end{cases}\tag{11}$$

で表わされるような確率分布のことを**ベータ分布** (Beta distribution) という.

ただし,

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

とする.

(v) χ^2 分布[1)]

密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2}} & (n>0,\ 0<x<\infty)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}\tag{12}$$

で表わされる確率分布のことを**自由度 n の χ^2 分布** (χ^2-distribution) という.

(vi) F 分布

密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{B}\left(\dfrac{n_1}{2},\dfrac{n_2}{2}\right)}\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}x^{\frac{n_1}{2}-1}\left(1+\dfrac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}\tag{13}$$

で表わされる確率分布のことを**自由度対 n_1, n_2 の F 分布** (F-distribution) という.

---

1) χ^2 はカイ2乗と読む.

(vii) t 分布

密度関数が

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{n}\,B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\ n>0\quad(-\infty<x<\infty) \tag{14}$$

で表わされる確率分布のことを**自由度 n の t 分布** (t-distribution) という.

1.2 分 布 関 数

これまで，離散型分布と連続型分布とは別々の形式で表現してきた．すなわち離散型の場合はその確率を直接表現し，連続型の場合は密度関数によって確率分布を表現した．しかしある場合には両者を統一的に表現する方法が必要になる．そのために次のような関数を定義する．

$$F(x)=\mathrm{P}\{X\leqq x\} \tag{15}$$

$F(x)$ はいつでも 0 と 1 の間の値をとり，x に関して単調非減少関数である．また，$F(\infty)=1$, $F(-\infty)=0$ という関係も成立することは明らかである．

この関数 $F(x)$ を確率変数 X の**分布関数** (distribution function) と呼ぶ．

この $F(x)$ は離散型のときと連続型のときとで次のように定められる．

$$\text{離散型のとき，}\ F(x)=\sum_{i\leqq x}p_i \tag{16}$$

$$\text{連続型のとき}\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(y)\,dy \tag{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ただし，} \sum_{i \leqq x} \text{は} x \text{より小さい値} i \text{についての和を意味する．} \\ \text{また式}(17)\text{においては} F'(x) = f(x) \text{の関係がある．}\end{array}\right\}$$

例 1.　正常なサイコロを投げて出る目の数を X とするとき，X の分布関数を求める．

解　X の分布関数 $F(x)$ は $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$ の各点で $\frac{1}{6}$ ずつ増加する．すなわち式(16)より

$$F(x)=\begin{cases} 0 & (x<1) \\ \frac{1}{6} & (1 \leqq x<2) \\ \frac{1}{6} & (2 \leqq x<3) \\ \frac{3}{6} & (3 \leqq x<4) \\ \frac{4}{6} & (4 \leqq x<5) \\ \frac{5}{6} & (5 \leqq x<6) \\ 1 & (6 \leqq x) \end{cases}$$

となる．

例 2.　X が式(10)で示すような指数分布をもつとき X の分布関数 $F(x)$ を求める．

解　式(17)より

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} \alpha e^{-\alpha y} dy=1-e^{-\alpha x}, \quad (x \geqq 0)$$

となる．

1.3　確率分布の平均値，分散および標準偏差

確率分布相互の比較をするためにその分布を定める特性値を考えることが必要となる．そのもっとも代表的なものが平均値と分散な

らびに標準偏差である.

離散型の場合　確率変数 X のとる値を $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_i, \cdots\cdots$ とし，その確率を $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_i, \cdots\cdots$ とするとき，$\sum_i x_i p_i$ でもって確率変数 X の**平均値**または**期待値**（expectation）と定義し，これを $\mathrm{E}(X)$ で書く（E は期待値 expectation の略）. すなわち

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i \mathrm{P}(X = x_i) \qquad (18)$$

と書ける.

また確率変数 X の平均値からの偏差の平方の平均値 $\mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}(X))^2\}$ を確率変数 X の**分散**（variance）と定義し $\mathrm{V}(X)$ または $\sigma_X{}^2$ で表わす. すなわち,

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) = \sigma_X^2 &= E\{(X - E(X))^2\} \\ &= \sum_i (x_i - E(X))^2 \mathrm{P}(X = x_i) \end{aligned} \qquad (19)$$

と書ける.

また次のように分散の平方根を**標準偏差**（standard deviation）という.

$$\sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}(X))^2\}} \qquad (20)$$

連続型の場合　離散型において確率変数 X の値 x をとる確率 $\mathrm{P}\{X = x\}$ に対応するものは連続型においては確率変数 X が x と $x + dx$ の間の値をとる確率 $f(x)\,dx$ である. よって式 (18) の $\sum_i$ に相当するものは $\int_{-\infty}^{\infty} dx$ である.

したがって，確率変数 X の**平均値** $\mathrm{E}(X)$，一般に関数 $g(X)$ の**平均値** $\mathrm{E}\{g(X)\}$ は次のように定義される.

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \qquad (21)$$

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx \tag{22}$$

また，X の**分散**を

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \sigma_X^2 = \mathrm{E}\{(X-\mathrm{E}(X))^2\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{E}(X))^2 f(x)\, dx \end{aligned}\tag{23}$$

と定義する．**標準偏差**は

$$\sqrt{\mathrm{V}(X)} = \sigma_X = \sqrt{\mathrm{E}\{(X-\mathrm{E}(X))^2\}} \tag{24}$$

と書ける．

例 1.　変数 X が 1 回のサイコロを投げる実験において出る目の数であるとき，X の平均値 $\mathrm{E}(X)$，分散 $\mathrm{V}(X)$ を求める．

解　X の確率分布は

$$\mathrm{P}\{X=x\} = \frac{1}{6},\ x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

で与えられるから式(*18*)，式(*19*)より

$$\mathrm{E}(X) = 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}-4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \left(4-\frac{7}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(3-\frac{7}{2}\right)^2\times\frac{1}{6} \\ &\quad +\left(4-\frac{7}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(5-\frac{7}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\times\frac{1}{6}=\frac{35}{12}\end{aligned}$$

となる．

例 2.　確率変数 X が二項分布をもつとき，X の平均値 $\mathrm{E}(X)$ と X の分散 $\mathrm{V}(X)$ を求める．

解　X の確率分布は式(*2*)で与えられるから，式(*18*)，式(*19*)より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{x=0}^{n} x\, {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = np\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{(x-1)!}\, p^{x-1} q^{n-x} \\ &= np\sum_{y=0}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-1-y+1)}{y!}\, p^y q^{n-1-y} \\ &= np(p+q)^{n+1} = np\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\{(X-\mathrm{E}(X))^2\} = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \\
&= \mathrm{E}\{X(X-1)\} + \mathrm{E}(X) - (\mathrm{E}(X))^2 \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ {}_nC_x\, p^x q^{n-x} + np - (np)^2 \\
&= n(n-1)\, p^2 \sum_{y=0}^{n-2} {}_{n-2}C_y\, p^y q^{n-2-y} + np - (np)^2 \\
&= n(n-1)\, p^2 + np - (np)^2 = npq
\end{aligned}
$$

例 3.　確率変数 X が区間 $[a, b]$ で一様分布をもつとき，X の平均値 $\mathrm{E}(X)$，分散 $\mathrm{V}(X)$ を求める．

解　X の確率分布は式 (*7*) で与えられるから，式 (*21*)，式 (*23*) より

$$
\mathrm{E}(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}
$$

$$
\mathrm{V}(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-x}\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}
$$

となる．

付表1　区間 [0,1] 上の一様乱数列

.53535	.04260	.77609	.93799	.92171	.45524	.10968	.30231	.70864	.29908
.41292	.15201	.66342	.59155	.46163	.69248	.31029	.62034	.21855	.27863
.07320	.22682	.09595	.44805	.54593	.53350	.61354	.14029	.10195	.18644
.77676	.67772	.45072	.08940	.02592	.45976	.82099	.90739	.77072	.42081
.43227	.20568	.16309	.23841	.53173	.39475	.27282	.82699	.00022	.96419
.90712	.41695	.67474	.27567	.93269	.10163	.94190	.36188	.41491	.71217
.88103	.21514	.60787	.33170	.58215	.89951	.01634	.98155	.05154	.08971
.72252	.35791	.84125	.31962	.81093	.93068	.41197	.57779	.88515	.48002
.51702	.49516	.69510	.19678	.47298	.11355	.68459	.96360	.13436	.66314
.63055	.86998	.22187	.59869	.96371	.61370	.35937	.34292	.00678	.33505
.32373	.57889	.85880	.66515	.37489	.37854	.72926	.23437	.62233	.38651
.71996	.16525	.25618	.56577	.69130	.25035	.93551	.54394	.81572	.90624
.26912	.70619	.22576	.22780	.99118	.18487	.58801	.36063	.32886	.60453
.74589	.82677	.13353	.67658	.17080	.43212	.34585	.17179	.86980	.81899
.56041	.53072	.19912	.47466	.32585	.41414	.07564	.80712	.27286	.07966
.09286	.68067	.84883	.10023	.78195	.84711	.85988	.31545	.39904	.14984
.33610	.84843	.07145	.38437	.06148	.06094	.89601	.96751	.49124	.55092
.14113	.06396	.59084	.02534	.09360	.81918	.77118	.91640	.92978	.24815
.56302	.89765	.63857	.42747	.28592	.41784	.00822	.60356	.96389	.11728
.06362	.94540	.29532	.09994	.55277	.43897	.63268	.40481	.00312	.46039
.48568	.34412	.84939	.54850	.84317	.92032	.60430	.49071	.68962	.28953
.65975	.60965	.77679	.95782	.67541	.50654	.09482	.56111	.98710	.35803
.66686	.32977	.48472	.30226	.54226	.72490	.18395	.37338	.88279	.79089
.51610	.13000	.73849	.46654	.30324	.78000	.72852	.28934	.83197	.59003
.47600	.86103	.25788	.08774	.72020	.04543	.25894	.88887	.41159	.30131
.59367	.86990	.48714	.48661	.27925	.64600	.15031	.53011	.28158	.90210
.02661	.26233	.18351	.02243	.48003	.81875	.58445	.29164	.91290	.64914
.58256	.97097	.53105	.20303	.13301	.65032	.95838	.06793	.51119	.08152
.24502	.66475	.73604	.50125	.02482	.08330	.15359	.20355	.91382	.76605
.93698	.60165	.17647	.85355	.49883	.46358	.04105	.91461	.63455	.40285
.13399	.96277	.81024	.29371	.73294	.43568	.37884	.57081	.57897	.14475
.22933	.01744	.97148	.81176	.26520	.88687	.94379	.68214	.80784	.08084
.71949	.66439	.35737	.03808	.22826	.97570	.01121	.14617	.20128	.74584
.84585	.67397	.84726	.30396	.62134	.00022	.79032	.76094	.73172	.82288
.20689	.76212	.00874	.91436	.76142	.52764	.75398	.61131	.66146	.22675
.17157	.10429	.96795	.70274	.86139	.63178	.45025	.49336	.52482	.51324
.21428	.89654	.46718	.33039	.96969	.76207	.87969	.01023	.62551	.33024
.91028	.68875	.49757	.84014	.13004	.88590	.51318	.50187	.12792	.91702
.08528	.73444	.24551	.39140	.04749	.42415	.83629	.23463	.94735	.32098
.94931	.87793	.18268	.09541	.56116	.20355	.73274	.06548	.40358	.76545
.75900	.68321	.22221	.80562	.86284	.52332	.59503	.37119	.44981	.84328
.12061	.77586	.90110	.86013	.20409	.87965	.09770	.42619	.28103	.35379
.74607	.96188	.07679	.50122	.26258	.73470	.74302	.62607	.35523	.54683
.97719	.34876	.57747	.30062	.26002	.97315	.86448	.17977	.40494	.27764
.07537	.73378	.94568	.11459	.28838	.20912	.84546	.30711	.05438	.85811
.91409	.43928	.63290	.33406	.27673	.96579	.97362	.76177	.16699	.03222
.56812	.06974	.04062	.17440	.53275	.03941	.10982	.93447	.36984	.26262
.65238	.17593	.64657	.63540	.47885	.20005	.68673	.89452	.65847	.39926
.34937	.60090	.21179	.40332	.23476	.59147	.53352	.28807	.75459	.15344
.87906	.34989	.24568	.70169	.78495	.24522	.53329	.74384	.17011	.60954

.32159	.97118	.50045	.17928	.11255	.67362	.37103	.48053	.59549	.75143
.05559	.14643	.55368	.25288	.36896	.93369	.50448	.37072	.83826	.29227
.27922	.52374	.65178	.30264	.96343	.13547	.47141	.39551	.06200	.65489
.86806	.25604	.50101	.66320	.30334	.86333	.91613	.76606	.90970	.16661
.94353	.25149	.50540	.76190	.00335	.50886	.00250	.39988	.12286	.26685
.30950	.68577	.31348	.51290	.20507	.14973	.08288	.39590	.11927	.57022
.49573	.76019	.18771	.80756	.62520	.94764	.12252	.59557	.40416	.52456
.28599	.78812	.52967	.52177	.92502	.05418	.05888	.27726	.04118	.58115
.53926	.29252	.33951	.10146	.52625	.01205	.64543	.94557	.31777	.55165
.37351	.84471	.17509	.84533	.04640	.32763	.24603	.10269	.21046	.13467
.58303	.77110	.33963	.58982	.42744	.35705	.86900	.01161	.42897	.90762
.96476	.58705	.86253	.17356	.70301	.88795	.38584	.69001	.10909	.84899
.87201	.40835	.42051	.81873	.50597	.96513	.82807	.31478	.99274	.08519
.88931	.59317	.60991	.48881	.35046	.48415	.85039	.93868	.94654	.60378
.30105	.13315	.63615	.39577	.39343	.26781	.55347	.80502	.89475	.41862
.75907	.49996	.01801	.79604	.30705	.36182	.03977	.28732	.14909	.41826
.47516	.09244	.96809	.76055	.92928	.45972	.60476	.93839	.12990	.94314
.84523	.51107	.08593	.46649	.31389	.05710	.82901	.80034	.41776	.91680
.39330	.89796	.72846	.75734	.25412	.69805	.10175	.09078	.62730	.71816
.00964	.91585	.69303	.70117	.80423	.10126	.91977	.66274	.71770	.77611
.72525	.40786	.08329	.81815	.72790	.55300	.59653	.14733	.32703	.27829
.75858	.35502	.95298	.88875	.83065	.99601	.10383	.89426	.66218	.67701
.84339	.60352	.63227	.09256	.07540	.39946	.10725	.14327	.12702	.96185
.91045	.11246	.82511	.22363	.90087	.38380	.40122	.93062	.93968	.16054
.12208	.31596	.15428	.05324	.93306	.79762	.82910	.71458	.30126	.12856
.06459	.78388	.13374	.17205	.07292	.63447	.67458	.63794	.00072	.94726
.49523	.32920	.89327	.73313	.51903	.48372	.70801	.55334	.79843	.66278
.44734	.57413	.96236	.62926	.77055	.87841	.01077	.23084	.26571	.22209
.87784	.64579	.01739	.06144	.47583	.56407	.80782	.62870	.84552	.23632
.93802	.05794	.34130	.66253	.02246	.21465	.50736	.90625	.25147	.68102
.35803	.82884	.56329	.95801	.44619	.72540	.38834	.54969	.02248	.25851
.44054	.56259	.29859	.86461	.65786	.31564	.32976	.11226	.15640	.10437
.37009	.21157	.86878	.70530	.03073	.72377	.41035	.35216	.91721	.41238
.64891	.25636	.71434	.20160	.47925	.57714	.48912	.55253	.87318	.34582
.30908	.63747	.99408	.33672	.66560	.43849	.84390	.99370	.56093	.01700
.89987	.74571	.99118	.93227	.56861	.38264	.66431	.48777	.16374	.52970
.27262	.77987	.18536	.71521	.29701	.17638	.48740	.96416	.25853	.11747
.67142	.69762	.85556	.64493	.18384	.92914	.82418	.98256	.33804	.93799
.30651	.72907	.92924	.09233	.15102	.46464	.43836	.75876	.27889	.57482
.23208	.24652	.16695	.52397	.33445	.71360	.05286	.58286	.56695	.97427
.99330	.09938	.16161	.03759	.02840	.56403	.91177	.70092	.57813	.56845
.51973	.84973	.47774	.97639	.46945	.74684	.53212	.49604	.11262	.01880
.80330	.03439	.76552	.07576	.25188	.85126	.62572	.97692	.01859	.47473
.79412	.17497	.26030	.76261	.23326	.80150	.15810	.62647	.31802	.94158
.66491	.28082	.32154	.45447	.42722	.28776	.45616	.09732	.25191	.05626
.01601	.49139	.74712	.58829	.00709	.18293	.86424	.67849	.14201	.75474
.69792	.93505	.01750	.79563	.52272	.50681	.12719	.00900	.47688	.89302
.31507	.01562	.36340	.57048	.87661	.42789	.05970	.91237	.27401	.04237
.93465	.04906	.76488	.35106	.13514	.30802	.91067	.52207	.90798	.28609
.67412	.36983	.38420	.40296	.50802	.19267	.12294	.75873	.15407	.58796

.06316	.15135	.77995	.46666	.65860	.10183	.68930	.35285	.68307	.24868
.21238	.48326	.43772	.04089	.84541	.46830	.68724	.21817	.54514	.05039
.37172	.60422	.52233	.65421	.71276	.84340	.65077	.21774	.37264	.67222
.04003	.28689	.03699	.66213	.83440	.73009	.37556	.26721	.18997	.97440
.20594	.08649	.80341	.05049	.75442	.21289	.61590	.70296	.68475	.69460
.22768	.18202	.85090	.29867	.82758	.15239	.45175	.66350	.50362	.34953
.67542	.27980	.62150	.44833	.35090	.77706	.20353	.98682	.96946	.29718
.10478	.30707	.63836	.45643	.98014	.60628	.14537	.72210	.15861	.87357
.33029	.32684	.26933	.39191	.35883	.31690	.24154	.53279	.87801	.40172
.35185	.76673	.85535	.69659	.73316	.67466	.67084	.49281	.50122	.45460
.43098	.99662	.50816	.57369	.39349	.70058	.81680	.47478	.38455	.55947
.38651	.14278	.13960	.77356	.75252	.04723	.71573	.52042	.22688	.23037
.28305	.32040	.26767	.90838	.15537	.72997	.55501	.21559	.39466	.23865
.29217	.33612	.19708	.21447	.57201	.15253	.59054	.10699	.80603	.97342
.72850	.50553	.13122	.25217	.68954	.53639	.47561	.01215	.11619	.44266
.73858	.79235	.08731	.57433	.40263	.33820	.42921	.25756	.63605	.83869
.84283	.30570	.28317	.88069	.59079	.83831	.10031	.37814	.04039	.12397
.60327	.43153	.18601	.10716	.56246	.61593	.72347	.50101	.97914	.73559
.17632	.39564	.53071	.12787	.77951	.82960	.25133	.82513	.34912	.89301
.04719	.36407	.12742	.11462	.23546	.84382	.96011	.83612	.58879	.14217
.43738	.85193	.46094	.18750	.83109	.89936	.99941	.00439	.28289	.28670
.10670	.93756	.84111	.41931	.37529	.08069	.17149	.00380	.75888	.72754
.64111	.03529	.14712	.95613	.23459	.90508	.25613	.32506	.25097	.98758
.52731	.34865	.39634	.91399	.72033	.30110	.58781	.66927	.53958	.48436
.26455	.46887	.16982	.26592	.59649	.89539	.56790	.44020	.44290	.47058
.82821	.48681	.74806	.88018	.52787	.85404	.54318	.29469	.82936	.93927
.53683	.00400	.95388	.12603	.16207	.63676	.66594	.44890	.93883	.93123
.58718	.74413	.17915	.04200	.68004	.14122	.77323	.92373	.28840	.57075
.76388	.95885	.38676	.85426	.57883	.54071	.13688	.83273	.74688	.17174
.19248	.82618	.64233	.60206	.13047	.33804	.81979	.49170	.21770	.75181
.20413	.22456	.37159	.37331	.53212	.20559	.46812	.09076	.56819	.95939
.36242	.16506	.48194	.32351	.90752	.97309	.41757	.31415	.74129	.50629
.79970	.31253	.57275	.44519	.23094	.61240	.72649	.64136	.72974	.42033
.15433	.29115	.62002	.19535	.89693	.04837	.69861	.93890	.02926	.83382
.10629	.09836	.60657	.62699	.00091	.61978	.44092	.60052	.91930	.76011
.71989	.42132	.22529	.86798	.27009	.61713	.60707	.94892	.25578	.90282
.04758	.20117	.15004	.40236	.59344	.48266	.41638	.26520	.23575	.62938
.31336	.40192	.10922	.42071	.75108	.95684	.17288	.68336	.57627	.02445
.28655	.30518	.35427	.83729	.22900	.46210	.86318	.33062	.64545	.47413
.63597	.29144	.43580	.75907	.62535	.15405	.22754	.73669	.60023	.74143
.39997	.99154	.57386	.64574	.11933	.80572	.53267	.94833	.90066	.18165
.68468	.88610	.76869	.96148	.49948	.94896	.26124	.34809	.36967	.90200
.96753	.00981	.43215	.30438	.36596	.35983	.37602	.73363	.55641	.04210
.97255	.78170	.44406	.12599	.00200	.51410	.00427	.16196	.71596	.77350
.81504	.56068	.47031	.46927	.77509	.67265	.98903	.62880	.46331	.98493
.05924	.14026	.17894	.84249	.96303	.17582	.74981	.78759	.98397	.21855
.94898	.55388	.91263	.12389	.85261	.18001	.48899	.14816	.66740	.68761
.80632	.41619	.11919	.12582	.69019	.85409	.43169	.31559	.57344	.48060
.10317	.47128	.61859	.87999	.77016	.95536	.46930	.93174	.73519	.47508
.88029	.80932	.02970	.64040	.07427	.39431	.56646	.07277	.61841	.95910

付表2 基準型正規乱数列（平均値０，分散１）

−1.143	0.300	0.296	−0.661	−1.187	0.854	0.678	−0.965	1.126	0.461
0.907	−1.729	0.657	0.346	−1.938	0.640	0.592	0.067	−0.124	−0.688
−0.339	0.707	2.278	1.029	0.747	−0.998	0.714	−1.028	−2.481	1.053
0.949	1.808	0.110	−0.733	0.726	1.040	1.639	−0.715	0.605	−0.525
−0.795	1.432	−1.006	0.203	−0.702	0.256	−0.320	−0.842	−1.297	−0.736
0.648	−1.024	−0.053	−1.417	0.318	−0.100	−0.737	0.183	−0.215	−0.368
1.326	1.000	0.369	0.563	0.105	0.242	0.415	−0.089*	0.231	0.726
0.143	1.944	2.070	−1.273	−2.007	−0.244	1.375	−0.658*	−0.799	−0.922
0.830	−0.209	−0.917	1.337	0.708	0.324	0.984	1.434	0.149	−0.499
0.534	0.481	−2.876	1.712	1.089	0.203	0.516	1.272	0.773	−0.757
−1.078	0.147	0.089	1.680	−1.420	−0.277	−1.733	1.265	−0.223	−0.486
0.251	−0.413	−1.388	−1.540	−1.507	0.772	−0.040	0.453	0.518	−0.915
0.315	−0.389	0.322	1.043	0.325	−0.313	−1.041	0.188	−0.273	0.410
0.190	−0.194	2.005	1.080	0.125	−0.748	−0.026	1.064	0.662	0.018
−1.017	0.803	1.315	0.969	0.773	−1.311	0.437	0.273	−1. 83	2.046
−0.892	0.266	−0.717	−0.460	0.097	0.341	−0.445	0.792	0.902	−2.059
0.663	0.700	0.479	−1.285	1.204	0.214	0.546	−2.813	−0.716	−1.381
−1.220	1.027	−0.973	0.666	−0.601	1.418	1.293	0.635	0.814	−0.908
−0.225	−0.125	−0.941	1.497	−0.026	−0.576	0.092	−0.774	−0.920	0.022
−0.464	0.355	1.377	0.067	1.004	−0.692	0.303	−1.112	0.916	0.301
−0.641	0.582	0.479	−0.997	0.516	0.403	0.926	−0.211	−1.047	−0.106
0.459	1.441	0.834	−0.235	−0.039	0.090	0.235	1.113	−0.146	−0.509
−1.029	−1.249	−0.868	−0.061	−1.077	−0.483	−1.474	−0.738	−0.666	−0.461
0.202	−1.175	−0.125	−0.791	0.181	1.478	−1.268	−0.227	−0.335	−0.423
0.162	0.196	0.100	0.138	1.091	−0.155	−0.450	−0.125	0.802	0.122
0.940	−1.636	0.997	1.437	−1.099	−0.629	0.270	0.731	−0.919	0.244
−1.040	0.057	−0.230	0.521	−0.710	−0.399	−0.031	−1.128	−0.129	−0.226
−0.715	0.934	−0.755	−0.522	−1.440	−0.580	1.080	−1.353	0.656	−0.053
−0.440	1.421	1.951	−0.843	−1.785	0.663	0.354	0.331	−1.408	0.793
−0.615	1.039	−0.704	1.161	1.401	−0.090	0.787	0.633	−0.403	0.560
−0.773	1.489	−0.255	−1.664	−0.597	0.020	1.222	−0.451	−0.024	−0.624
−1.351	−1.735	−0.188	0.220	1.553	−0.620	1.559	−0.260	−0.572	0.163
0.211	−0.319	−1.219	0.594	−0.063	−1.296	−2.353	1.685	1.376	0.016
0.306	0.040	1.350	−0.587	0.690	0.332	−0.064	1.790	0.063	0.689
−0.121	−0.572	−0.508	−1.392	0.078	1.392	−1.737	−1.497	0.210	0.310
1.379	0.367	0.323	0.353	0.257	−1.374	−0.369	−0.733	0.350	0.043
0.138	2.030	0.354	−1.601	1.095	−0.803	−0.021	0.960	1.521	1.009
−0.894	−1.063	−1.297	−1.246	0.646	−0.412	0.100	0.346	−1.228	−1.772
0.276	−0.427	−1.887	−1.448	1.298	−1.534	0.921	1.941	0.980	0.258
−0.125	−0.183	0.141	1.744	0.945	−0.443	0.276	−0.020	0.663	−0.887
−0.922	−0.275	−1.297	−0.436	0.823	−0.292	0.705	0.583	−0.571	−0.382
−0.250	−0.167	−1.753	1.814	−1.434	−0.080	−0.910	1.420	−1.217	−0.268
0.765	−0.582	−0.486	−0.102	−1.055	2.362	1.997	0.758	−0.993	−0.199
0.513	−0.471	−0.148	−0.082	−0.251	0.940	1.710	−0.760	−1.586	1.833
−0.845	−0.293	0.074	−1.685	−0.628	0.085	−1.292	0.150	1.142	0.730
−1.942	0.776	0.216	1.508	−1.427	−0.704	0.167	−0.166	0.394	1.912
0.390	−0.024	0.618	−0.363	1.133	0.867	−0.371	0.947	−0.051	−0.726
−1.240	−0.116	2.295	−1.117	−0.128	0.157	−1.210	0.689	1.266	−1.264
2.209	−0.431	1.272	0.459	0.574	−0.008	0.039	1.083	0.981	1.488
0.257	−0.257	−0.656	−0.817	1.527	0.753	−0.657	0.711	−1.934	0.812

−1.209	0.764	−0.869	0.414	0.023	1.395	−1.071	−2.014	−0.264	−0.406
1.877	1.552	−0.843	0.178	−0.476	0.165	−0.248	−1.636	−0.982	−1.142
−1.420	1.773	−0.057	0.134	−0.417	−0.077	1.024	−0.803	−0.003	−1.392
0.573	0.024	1.750	−1.080	−1.354	−1.600	−1.115	−1.929	0.561	−0.334
−0.445	−0.178	0.605	−1.104	−0.985	0.290	0.599	−1.439	−1.250	1.417

−1.044	0.647	0.158	0.723	0.077	2.879	0.569	−0.598	0.457	−1.388
−1.013	−0.644	−1.066	0.743	−1.434	−2.153	−0.030	−0.618	−0.520	0.966
1.421	−2.710	−0.221	−0.573*	1.326	1.689	−1.349	−0.112	−1.402	1.458
−0.424	1.910	1.519	−1.474*	−1.239	0.118	−1.248	0.721	0.563	−1.467
1.014	−0.189	0.141	−0.424*	−0.239	0.659	0.610	−0.325	−0.502	0.427

1.382	−1.032	−0.190	0.516	0.985	0.315	2.431	−2.347	−0.112	−1.099
0.783	−0.090	0.353	−0.237	−0.613	0.863	−0.734	−1.040	0.153	0.550
2.031	−0.899	0.129	0.089	0.400	−0.128	−1.895	−1.099	−0.252	0.093
0.448	2.266	−1.341	−0.582	−1.298	0.029	0.446	−0.261	0.101	−1.689
0.091	0.880	0.239	−0.156	1.273	−0.281	0.586	−0.493	0.429	1.633

0.074	0.653	0.712	0.631	0.493	−1.595*	0.373	2.611	−2.009	0.644
−0.664	1.336	−0.260	−0.056	−0.656	−1.997*	0.014	0.867	1.781	0.964
0.615	−1.439	−0.142	0.308	0.759	0.623	−0.018	−1.524	0.148	−1.066
−0.473	1.353	0.056	−0.628	−0.296	−2.379*	−0.055	1.214	−0.039	−1.239
−0.056	0.449	−0.745	0.261	−0.334	−0.628*	−0.254	0.392	−0.412	0.609

0.104	1.048	0.548	2.006	−0.317	0.159	−0.471	0.201	−0.274	0.460
1.534	0.035	3.015	1.480	−0.323	1.366	0.126	−0.008	1.593	−1.661
0.903	−0.214	0.033	−1.388	0.223	0.741	0.650	−1.390	1.137	0.237
0.834	−0.670	−2.015	0.239	−0.433	0.172	1.566	−1.869	0.076	1.135
1.413	−1.418	0.285	−0.050	0.489	−0.791	−0.285	−3.455	−2.016	−0.697

1.152	0.231	−0.573*	0.606	−0.122	0.408	0.691	1.459	0.434	−1.196
−0.318	−0.269	−0.042*	−0.047	−0.026	−0.961	−1.424	0.351	−0.827	−0.554
1.746	0.576	1.834	−3.282	0.507	1.812	−0.023	−0.726	1.292	0.360
−0.395	−0.203	1.052	−1.550	0.084	−1.413	0.357	0.703	0.826	0.658
0.010	−0.960	−0.496*	−0.887	−1.327	−0.212	−0.087	−0.560	0.297	−0.252

0.083	−1.682	0.636	0.208	0.252	−0.227	0.130	−1.586	−0.157	0.341
−0.982	1.666	0.361	0.874	0.708	−0.283	−0.555	−1.831	−0.800	0.777
1.794	0.855	2.213	1.079	−2.073	1.080	1.222	0.743	1.144	−1.742
−0.292	0.224	1.232	−1.569	1.256	−0.885	−1.011	0.052	−0.421	0.250
−0.102	−0.772	−1.643	−0.111	−1.546	−0.710	0.708	−0.214	0.193	0.323

−1.995*	0.717	−0.715	0.489	0.481	−0.227	2.188	−1.354*	0.740	−0.475
0.247	0.043	−1.074	0.391	−0.675	−0.221	−1.558	1.287	0.963	1.565
−0.797*	−1.177	0.091	−0.524	0.941	0.397	−0.770	−1.306*	−0.525	0.332
1.530	−2.331	0.258	−1.112	−0.875	0.275	0.333	0.632	1.223	1.105
−1.012*	0.946	0.728	−0.222	−0.850	1.397	0.756	0.334	−0.170	0.643

−1.138	0.327	−0.431	1.215	0.519	0.570	−1.796	0.099	−0.323	−0.111
1.229	−1.913	0.087	0.753	1.500	0.098	−0.672	−0.085	1.184	1.613
0.316	−0.434	0.176	−0.837	−1.380	0.072	−0.249	0.835	−0.600	−0.401
−0.104	0.546	0.471	0.229	−0.281	−1.248	0.742	0.279	0.392	−0.176
1.013	0.447	−0.698	−0.005	1.009	0.857	−3.045	−0.034	0.477	0.849

−0.119	−0.859	0.212	1.896	0.500	−1.440	0.281	−0.417	0.849	0.159
0.468	0.922	2.327	−1.641	−1.183	0.218	−0.258	0.265	0.858	−0.861
−1.114	−1.431	1.421	−0.379	1.257	0.496	0.427	−1.450	−1.519	−1.714
0.421	−0.842	−0.483	1.048	1.996	0.507	−0.075	0.967	0.493	0.464
0.160	−0.407	−1.617	−0.536	−0.287	0.172	0.927	−2.314	−0.634	0.510

−0.496	1.863	0.354	2.206	−0.922	0.117	−1.400	0.884	−0.872	2.201
1.127	−1.865	0.967	0.171	0.160	−1.761	−0.446	0.487	1.066	1.220
−0.068	0.162	1.884	−0.512	−0.364	−0.307	0.521	−0.734	−0.063	−0.991
−0.415	−0.584	1.239	−0.876	−1.546	−0.441	0.492	−3.976	−1.361	0.544
−0.617	1.957	1.734	−0.643	0.391	0.795	−0.669	−0.126	−2.108	−1.233

0.100	−0.788	1.168	−0.518	0.546	−0.642	0.856	−0.117	0.793	−1.035
2.016	1.119	−1.806	−0.173	−2.527	0.250	−0.801	0.619	−1.195	−1.161
1.066	−1.624	0.823	0.458	0.670	0.772	1.150	−0.644	0.196	0.232
−1.422	0.348	0.196	−0.620	−0.741	−0.621	−0.948	1.194	−0.311	−1.302
−1.081	0.770	0.644	−0.632	1.331	0.267	1.070	−0.640	0.229	−0.238

1.261	0.026	1.605	0.909	0.372	−1.264	0.874	1.044	−1.658	−0.250
−0.829	−1.388	−1.362	−1.186	−1.222	0.331	−0.853	−0.602	1.006	0.276
−1.103	2.338	0.655	−0.642	−0.448	0.519	1.166	1.074	−0.552	−0.570
0.479	1.066	−0.017	−0.502	−0.515	−1.283	0.325	2.928	−0.120	−0.482
0.292	−0.173	−1.294	−0.440	−1.355	−0.895	1.531	−1.126	−0.155	0.509

0.579	−1.149	0.099	0.333	−1.303	0.498	0.331	−1.183	0.371	0.357
2.451	−0.158	1.104	0.195	1.118	1.321	−0.280	0.745	1.388	1.205
−1.338	−0.136	0.972	0.354	−1.137	0.006	−0.468	−0.159	0.256	−0.145
0.983	−0.024	1.264	−0.741	0.099	0.088	−0.215	0.787	−0.993	−1.101
0.154	0.028	−0.085	−0.459	1.161	1.825	1.405	2.785	−0.295	−1.827

−1.089	0.241	0.038	0.644	0.129	1.717	−0.739	0.777	0.937	−0.082
1.064	1.552	−0.746	−0.760	0.901	−0.275	−1.230	−0.065	0.056	2.438
1.502	0.846	−0.564	0.516	−0.277	1.521	−2.360	0.513	0.520	−0.904
−1.645	1.799	0.559	1.383	−1.019	1.074	3.622	0.272	0.203	1.218
0.335	−0.665	0.181	−1.127	−0.107	0.900	−0.501	0.306	0.540	−0.721

2.090	−1.937	0.028	−0.144	−0.911	0.194	−0.235	−0.398	−0.098	−1.072
−0.583	1.230	1.731	−0.789	1.557	0.124	0.177	−0.994	0.679	2.173
−1.591	0.257	−0.071	0.562	−1.322	1.347	−1.216	−0.063	1.990	−0.682
0.869	−0.242	0.421	0.656	00821	1.852	−2.874	−0.482	0.482	0.089
−0.260	−0.691	−0.716	0.359	0.463	0.852	0.993	−1.855	−1.313	0.436

−0.269	−0.754	0.595	0.365	1.180	2.365	−1.415	−0.523	0.461	1.090
0.148	0.867	0.534	0.258	0.207	1.237	−0.376	−0.287	1.372	2.044
−0.406	−1.063	0.605	1.180	0.991	−0.368	−0.251	0.503	0.870	−0.295
1.360	0.059	−0.139	−0.576	−1.286	0.173	−0.217	−0.256	1.835	0.612
0.025	0.769	−1.404	0.145	0.098	0.163	−0.819	0.206	−0.247	1.621

−0.028	−0.681	0.209	−1.084	−0.886	0.367	1.374	−1.101	−1.651	0.743
−0.678	−0.054	1.491	−1.066	0.754	0.822	0.095	0.229	−0.028	1.713
−0.015	1.798	−0.178	−0.208	−0.578	0.271	−1.294	−0.246	−1.030	−0.149
0.159	−0.642	1.335	−2.266	−0.911	0.851	−0.345	−0.021	−2.145	−1.518
−0.042	−0.296	1.321	−0.386	1.105	0.494	1.033	−1.055	0.118	−2.159

0.027	−0.124	−2.501	−0.825	−1.594	−1.424	−0.661	−0.698	−1.029	−0.042
−0.170	−0.587	0.571	0.570	1.062	0.705	0.249	−0.251	−2.173	0.256
−2.678	1.300	−0.938	−0.385	0.692	−0.403	0.835	0.781	−0.693	0.203
0.144	0.075	−0.114	1.669	−1.151	−0.198	0.382	1.477	−0.162	−0.538
−0.268	0.718	−0.304	−1.739	−1.257	−0.142	−0.898	0.257	0.871	0.516

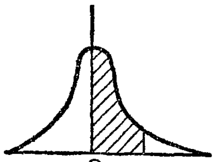
−1.983	−0.143	−1.211	−0.218	2.575	0.340	−0.442	−0.522	1.197	1.365
1.460	−0.674	0.320	0.203	−0.639	1.420	0.975	−0.657	−1.281	0.294
2.212	1.221	1.739	0.171	0.651	0.320	−0.121	−1.248	−0.937	0.096
1.705	1.173	1.074	−0.057	0.027	−0.103	−0.639	0.882	−2.328	1.086
0.464	0.496	−0.720	−0.887	−0.226	−1.023	0.341	1.191	0.596	0.380

付表 3　Poisson 分布表 $P\{X=x\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$

x \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.497	.368	.223	.135	.082	.050
1	.090	.164	.222	.268	.303	.329	.348	.359	.366	.368	.335	.271	.205	.149
2	.001	.016	.033	.054	.076	.099	.122	.144	.165	.184	.251	.271	.257	.224
3	—	.001	.003	.007	.013	.020	.028	.038	.049	.061	.126	.180	.214	.224
4	—	—	—	.001	.002	.003	.005	.008	.011	.015	.047	.090	.134	.168
5	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.002	.003	.014	.036	.067	.101
6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.004	.012	.028	.050
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.003	.010	.022
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.003	.008
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.003
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001

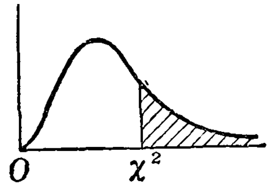
x \ λ	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
0	.030	.018	.011	.007	.004	.002	.002	.001	.001	—	—	—	—	—
1	.106	.073	.050	.034	.022	.015	.010	.006	.004	.003	.002	.001	.001	—
2	.185	.147	.112	.084	.062	.045	.032	.022	.016	.011	.007	.005	.003	.000
3	.216	.195	.169	.140	.113	.089	.069	.052	.039	.029	.021	.015	.011	.008
4	.189	.195	.190	.175	.156	.134	.112	.091	.073	.057	.044	.034	.025	.019
5	.132	.156	.171	.175	.171	.161	.145	.128	.109	.092	.075	.061	.048	.038
6	.077	.104	.128	.146	.157	.161	.157	.149	.137	.122	.107	.091	.076	.063
7	.039	.060	.082	.104	.123	.138	.146	.149	.146	.140	.129	.117	.104	.096
8	.017	.030	.046	.065	.085	.103	.119	.130	.137	.140	.138	.132	.123	.113
9	.007	.013	.023	.036	.052	.069	.086	.101	.114	.124	.130	.132	.130	.125
10	.002	.005	.010	.018	.029	.041	.056	.071	.086	.099	.110	.119	.124	.125
11	.001	.002	.004	.008	.014	.023	.033	.045	.059	.072	.085	.097	.107	.114
12	—	.001	.002	.003	.007	.011	.018	.026	.037	.048	.060	.073	.084	.095
13	—	—	.001	.001	.003	.005	.009	.014	.021	.030	.040	.050	.062	.073
14	—	—	—	—	.001	.002	.004	.007	.011	.017	.024	.032	.042	.052
15	—	—	—	—	—	.001	.002	.003	.006	.009	.014	.019	.077	.035
16	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.003	.005	.007	.011	.016	.022
17	—	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.002	.004	.006	.009	.013
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.002	.003	.005	.007
19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.002	.004
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001	.001	.002
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.001

付表4　正規分布表　$x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0159	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0756
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3718	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4083	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4430	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4485	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4758	.4762	.4767
2.0	.4773	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4865	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4984	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993

付表5　χ^2 分布表



自由度 n	$p=0.99$	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0.000157	0.000628	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.166	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.193	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

（注）$n>30$ のときは $\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2n-1}$ が近似的に $N(0.1)$ に従って分布するから付表4を用いよ．

索　　引