改訂新版

統計解析

田口玄一 著

丸善株式会社

まえがき

青山学院大学，お茶の水女子大学で統計関係の講義を受けもつことになり，大いそぎでテキスト用にまとめた統計解析を丸善株式会社より出版させていただいたのは，6年前の1966年であった．それまで，主として日，米の電気通信研究所で，研究者向きの実験計画法の手法の開発と普及を担当していた著者にとって，理工学部，経済学部，家政学部という異質な分野の学生に対して，それぞれの分野に別々に適当なテキストを作成することは不可能であり，止むを得ず技術部門の例を中心に，経済，社会，教育，保健，経営などの分野から無秩序にさまざまな例をとりまぜて書き上げたのが，旧版であったわけである．

そういう意味では誠に不満足なテキストであったが，科学技術関係以外の実例を中心にした書物が少なかったためか，或いはいくつかの新しい手法が受けたのか，学生以外の実務家からもかなり多くの読者を得ることができ，企業内の調査データの解析や予測などの分野に応用することができたという声をしばしば聞くようになった．近年のコンピューターの予想以上の普及はそれらの手法の適用にますます拍車をかけているようである．

しかしながら前述のような問題のほかに，また7年間に亘る講義を通して，“技術的にかたよりすぎ，程度も高すぎる”という声も少なくなかった．旧版の内容を書き改めなければという願望は著者にとって切実なものであった．1971年の春になって，第2回目の渡印中，寸暇を得ることができ，次のような方針の下で全面的に書き換えることにしたのである．

（1） テキストの中から技術関係の例を減らし，社会科学や営業などの例で説明する．その理由は技術関係の人は，調査のデータを理解することができるだろうが，専門的な技術のデータは，他部門の人にはわかりにくい．したがって，科学技術以外の例で解説した方が一般性があると考えたからである．

（2） 科学技術，特に技術や工学関係は計画的に実験ができるので，実験の計画は面倒かも知れないが，データ解析は単純明快である．しかしながら，社会，営業，医学，理学などの分野は実験よりは観察や調査のデータが主であり，技術や工学の例よりはるかに高度のデータ解析の手法を必要とする．したがって，テキスト全体を前半（1章～6章）と後半（7章～12章）に分けて，前半ではわかり易い例で基礎的な手法の説明を丁寧に行

ない，難しすぎるという批判をすくなくする．もちろん前半だけでも簡単な問題ならデータ解析を行ない結論が出せるようにする．後半では，複雑な厖大なデータにも適用できるような，また複雑な企画や計算にも適用できる高度な手法の説明を行なうが，それは必要な部分だけを直接読めばよいようにする．したがって後半では，できるだけ簡潔に，直交分解，SN 比，シミュレーションによる実験や計算方法の高度な手法を手法別に述べた．それらのあるものは，今後広く用いられることが期待されるものである．

（3） 本文は可能な限り具体例で説明し，データ解析の目的や内容の説明に重点をおき，わずらわしい抽象的な数式やその誘導などの証明は，各章末の注にまわしてしまう．したがって本文だけでその意味が理解できる人は，注の解説は読まずに，演習問題をやってみて理解できたかどうかを判断することをすすめる．

上述のような著者の新しい意図が十分であったかどうかは読者の方々の評価に待たなければならないと思っている．

現在は情報時代の入口に立っているといわれている．消費のためでない情報，原因探求，予測，企画，分析などのための情報，すなわち調査や研究のための情報のとり方とデータ解析法はますます大切になってくるだろう．情報の科学的取扱い方は，R.A. Fisher (1963 年逝去)，N. Wiener (1971 年逝去)，C.E. Shannon（ベル電話研究所，MIT）等によって発展してきた．情報を量としてのみ取り扱う Shannon の立場は，情報の価値に無縁な通信の世界を除いてはそれ程有用な方法だとは思われない．情報（要因）の価値はその質的内容であり，人間に与えた感動の大きさとか，目的特性に与えた影響の大きさで，その大きさ（影響の度合）を測ることが大切だと思うからである．したがって本書は，R.A. Fisher の立場を立脚点として，目的特性に与えた効果の大きさ，すなわちある種の仕事量で要因の影響の大きさを測る立場を一貫して採用することにしたのである．

本書は統計的な計算として F 検定（実は F 検定も全部削除したかったのだが，その点についてはまだ踏みきれなかった）などをしているとはいえ，類似の数理統計学や正統的とされている統計学の本とは異なって，確率だとか分布だとかにはほとんど触れていない．著者は，確率的な計算を中心とする数理統計学には実用性は少なく，むしろいろいろな原因の影響の度合や，誤差や誤りの大きさの程度を，パワーすなわち2乗の世界のものさしで評価する方法に実用性を感じているからである．

したがって本書で用いている理論は，数学的には，その考え方の基礎を直交展開（パーセバル等式）に置いており，計算上のルールは，2次形式の分解に置いている．何れも現在の大学における教養過程の数学の中心の一つである．解析学（直交関数展開）と代数学

(線形数学) の見事な結合が，このような実用上の問題に対して予定調和の花を咲かせているといったなら，それは著者の感傷でしかないのだろうか．物理的或いは工学的には，本書の立場はパワースペクトルの分解であり，信号対雑音比 (SN 比) の仲間の理論である．1962年におけるプリンストン大学とベル電話研究所における J.W. Tukey 教授や多くの通信技術者との討論が旧版の指導原理であった．新版はその上に，教育的見地による基礎の充実と応用上必要となった新しい手法 (たとえばシミュレーションによる回帰分析など) の導入が旧版と異なっている部分である．読者からの遠慮のない御批判をお願いする次第である．

本書の出版にあたり，文章のまずい点や誤りの御指摘や校正などについていろいろ御世話になった丸善出版部の方々に衷心より感謝の意を表する．

1972年1月15日

著　　者

目　　次

1. 変動と分散

2. 一元配置法

3. 多項式展開

4. 簡単な二元配置法

5. 特性値の分類と適当なデータの大きさ

6. 累積法と度数法

7. 二元配置法，一般の場合

12. 計算実験（シミュレーションによる計算法）と市場実験

1. 変 動 と 分 散

本章では，データの２乗和の意味とその計算法を解説する．本章のみ，各頁を半分ずつに分け，左側に一般的説明を，右側に数値例を示した．項目別に左側に目を通し，右側を読み，もう一度左側を読んで整理するとよいだろう．

n 個の観測値 y_1, y_2, ……, y_n に全変化量を定義し，それをいろいろな原因が与えた影響の大きさの和で表現する方法の基礎を述べる．計算の基礎を数理統計学におかずに２次形式と直交展開の総合的利用におくことによって，データ解析の展望が開けるのである．

1.1 和，平均，変動，分散

本節においては，和，平均，変動，分散というデータ解析の基礎を解説する．

1.1.1 和 と 平 均

n 個の測定値（または観測値）を y_1, y_2, ……, y_n とする．

y_1, y_2, ……, y_n の和を T とおく．

$$T=y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n \quad (1.1)$$

その平均を $\bar{y}$（ワイバーと読む）

$$\bar{y}=\frac{T}{n} \quad (1.2)$$

で表わす．

実際の計算では，計算の手間をらくにするために，平均値に近いと思われる数値（それを仮平均という）を引いて，和や平均を求めた方が，足し算をするときの桁数が少ないので計算がらくになる．

ときには，仮平均を引いた上に，小数部分がなくなるように，10 倍，100 倍，0.1 倍等をして計算の手間をらくにすることも

1.1.1 計 算 例

次のデータは，10人の人間の身長である（単位 cm)．

163.2, 171.6, 156.3, 159.2, 160.0,
158.7, 167.5, 175.4, 172.8, 153.5

和

$$T=163.2+171.6+\cdots\cdots+153.5=1638.2 \quad (1.1)$$

また，その平均 $\bar{y}$ は

$$\bar{y}=\frac{T}{10}=\frac{1638.2}{10}=163.82 \quad (1.2)$$

上の身長のデータの場合には，仮平均として 160.0 cm を用いたときには，データは次のようになる．

3.2, 11.6, −3.7, −0.8, 0.0,
−1.3, 7.5, 15.4, 12.8, −6.5

ある．このようなことを**データの変換**（1次変換）または，加工データにするという．

1.1.2 偏　　差

n 個の測定値を $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ とする．もし，n 個の測定値について，ある目標値 y_0 が決まっているなら，$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ の目標値 y_0 からの差を**目標値 y_0 からの偏差**という．

たとえば，y_0（キロオーム）のカーボン抵抗を作る目的で，品物を n 個作ったとき，それらの試作品の抵抗の測定値 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ と y_0 の差 $(y_1-y_0), (y_2-y_0), \cdots\cdots, (y_n-y_0)$ は目標値 y_0 からの偏差である．

目標値としては，必ずしも，自分の目的とした値だけでなく，公称値（規格値，あるいは 100 g 入りと書いてあったときの 100 g など），理論値（理論から計算されたもの，会社で日常用いている標準的な方法で計算されたもの），予想値，他社や他国の品物の値など，比較の標準となる値を目標値 y_0 とすることも少なくない．

また，ある地方の小学校6年生の児童の身長の場合には，全国の小学6年生の平均からの差を求めることも少なくない．

目標値や理論値 y_0 が存在しない場合でこの場合，和 T と平均 $\bar{y}$ は次のようにして求まる．

$$T=160.0\times 10$$
$$+[3.2+11.6+\cdots\cdots+(-6.5)]$$
$$=1600.0+38.2$$
$$=1638.2 \qquad (1.3)$$
$$\bar{y}=160.0+\frac{38.2}{10}$$
$$=163.82 \qquad (1.4)$$

1.1.2 計 算 例

10キロオームのカーボン抵抗を作る目的で，12個の試作品を作ってそれらの抵抗値を測ったら，次のようであった（単位 キロオーム）．

10.3, 9.9, 10.5, 11.0, 10.0, 10.3,
10.2, 10.3, 9.8, 9.5, 10.1, 10.6

目標値10キロオームからの偏差は次のようになる．

0.3, −0.1, 0.5, 1.0, 0.0, 0.3,
0.2, 0.3, −0.2, −0.5, 0.1, 0.6

ある電気回路で，電気抵抗 R（オーム），電圧 E（ボルト）を5通りに変えて，電流 y（アンペア）を測ったら表 1.1 のようであった．

表 1.1　観測値 y と理論値 y_0

R	E	y	y_0	偏差
10	50	5.10	5.00	0.10
20	20	0.98	1.00	−0.02
20	40	2.04	2.00	0.04
40	30	0.75	0.75	0.00
40	60	1.52	1.50	0.02

この場合，オームの法則からの理論値は 5.00, 1.00, 2.00, 0.75, 1.50 だから，

も，n 個の観測値 y_1，y_2，……，y_n があるとき，**その平均値 $\bar{y}$ からの偏差**が重要な場合がある．それを**平均値 $\bar{y}$ からの偏差**という．しかし，多くの場合，算術平均値 $\bar{y}$ からの偏差とことわらず，単に偏差ということにする．したがって，読者は平均値からの偏差なのか，理論値からの偏差なのかは，そのときどきで十分区別して考えることが大切になる．

1.1.3 変動と分散

偏差は，平均値からの偏差であろうと，目標値や理論値からの偏差であろうと，その値は，正になったり，負になったり，ゼロになったりする．一般に，いろいろな値をとる偏差があるとき，そのような偏差の大きさの全体を一つの数値で表わすのに，偏差の2乗和やその値の平均である分散が用いられる．

n 個の測定値を y_1，y_2，……，y_n；y の目標値を y_0 としたとき，偏差 (y_1-y_0)，(y_2-y_0)，…… の2乗和を**全2乗和**（または全変動）といい，S_T で表わす．

観測値 y と理論値 y_0 の偏差は表 1.1 の右側のようになる．

1.1.1 項の身長のデータの場合には，10人の人間の平均身長

$$\bar{y}=163.82 \tag{1.5}$$

からの偏差は，次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}163.2-163.82&=-0.62\\171.6-163.82&=\ \ 7.78\\156.3-163.82&=-7.52\\&\ \vdots\\153.5-163.82&=-10.32\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

平均値 $\bar{y}$ からの偏差の和はゼロになる．

上のような身長のデータでも，上の10人の身長が，僻地の青年のデータであるような場合には，その僻地の青年の身長が全国の平均に比べて大きいか小さいかをみたいことになる．その場合，全国の青年の平均値 y_0 がわかっているなら，y_0 からの偏差を計算することになる．

1.1.3 計算例

1.1.2 項のカーボン抵抗値の偏差は，最低 -0.5 から最高 $+1.0$ までいろいろな値をとっている．このようにいろいろな値をとっているデータがあるとき，そのようなバラツキの大きさを一つの数値で表わすのに，それらの偏差値の2乗和を計算する．

$$\begin{aligned}S_T&=(0.3)^2+(-0.1)^2+(0.5)^2+\cdots\cdots\\&\quad+(0.6)^2\\&=0.09+0.01+0.25+\cdots\cdots+0.36\\&=2.23 \qquad (\mathrm{f}=12)\end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.7) 式の自由度 f は，目標値10キロオームからの差だから，その自由度は 12

$$S_T=(y_1-y_0)^2+(y_2-y_0)^2+\cdots\cdots+(y_n-y_0)^2 \qquad (1.7)$$

全変動 S_T の中の独立な2乗の個数をその自由度という．記号では，f, df, ν, ϕ で表わす．上の (1.7) 式の自由度 f は n である．

n 個の測定値の平均を $\bar{y}$ としたとき，平均 $\bar{y}$ からの偏差の2乗和は，詳しくは平均値からの偏差2乗和というべきだが，普通全変動（全2乗和）ということが多い．

$$S_T=(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+\cdots\cdots+(y_n-\bar{y})^2 \qquad (1.9)$$

(1.9)式の変動の自由度は，n 個の2乗があるにもかかわらず，その自由度は $(n-1)$ となる．n 個の偏差，$(y_1-\bar{y})$, $(y_2-\bar{y})$, ……, $(y_n-\bar{y})$ の間には，それらを合計したものの和がゼロになるという1次関係式が存在するからである．

$$(y_1-\bar{y})+(y_2-\bar{y})+\cdots\cdots+(y_n-\bar{y})=0 \qquad (1.10)$$

一般に，n 個の2乗の和の自由度は，n から2乗する前の偏差の間の関係式（恒等的）の数を引いたもので与えられる．

(1.9) 式の全変動 S_T では，2乗の個数は n であるが，(1.10) 式の1個の関係式があるから，その自由度は $(n-1)$ ということになる．

一般に，n 個の観測値があるとき，目標値や理論値からの偏差の2乗和の自由度は n であり，平均値 $\bar{y}$ からの偏差の2乗和の自由度は $(n-1)$ となる．

算術平均値 $\bar{y}$ からの変動を求めるときである．

表1.1の全変動 S_T は

$$S_T=(0.10)^2+(-0.02)^2+(0.04)^2+(0.00)^2+(0.02)^2$$
$$=0.0124 \qquad (\mathrm{f}=5) \qquad (1.8)$$

であり，その自由度は5である．

(1.6) 式の偏差の2乗和 S_T

$$S_T=(-0.62)^2+7.78^2+(-7.52)^2+\cdots\cdots+(-10.32)^2$$
$$=0.3844+60.5284+56.5504+\cdots\cdots+106.5204$$
$$=514.3960 \qquad (\mathrm{f}=9) \qquad (1.9)$$

は，平均値 $\bar{y}=163.82$ からの差の変動であるから，その自由度は9となる．

2乗の値を求めるには，2乗の表を用いるとよい．2乗の表は巻末の付表1をみられたい．または，卓上計算機を用いるとよい．

身長のデータの全変動を求めるのに，仮の平均を 160.0 cm として，別な計算をやってみよう．

$$S_T=\begin{pmatrix}\text{仮平均 160.0 を引}\\\text{いたものの2乗和}\end{pmatrix}-\frac{(\text{仮平均を引いたものの和})^2}{10}$$
$$=(163.2-160.0)^2+(171.6-160.0)^2+\cdots\cdots+(153.5-160.0)^2$$
$$-[(163.2-160.0)+(171.6-160.0)+\cdots\cdots+(153.5-160.0)]^2/10$$
$$=3.2^2+11.6^2+\cdots\cdots+(-6.5)^2$$

に，仮の平均を y_1, y_2, ……, y_n から引いた2乗和から修正項を引いて求めた方がらくである．

$$S_T=(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+\cdots+(y_n-\bar{y})^2$$
$$=(y_1')^2+(y_2')^2+\cdots\cdots+(y_n')^2$$
$$-\frac{(y_1'+y_2'+\cdots\cdots+y_n')^2}{n} \quad (1.11)$$

ここに，y_1', y_2', ……, y_n' は y_1, y_2, ……, y_n から仮の平均を引いた値である．(1.11) 式の証明は読者に任せる．(1.11) 式の

$$\mathrm{CF}=\frac{(y_1'+y_2'+\cdots\cdots y_n')^2}{n} \quad (1.13)$$

は修正項と呼ばれ，CF, CT, C などと略記される．

変動を自由度で割った値を分散という．

$$分散=\frac{変動}{自由度} \quad (1.14)$$

分散は自由度当りの偏差の大きさの平均を表わし，誤差，誤り，バラツキ，変化などの単位当りの大きさを意味するもので，物理学でいう単位時間当りの仕事量，パワー，エネルギーなどに該当する測度である．

y_1, y_2, ……, y_n を n 個の測定値，目標値を y_0 とすれば，分散 V は

$$V=\frac{(y_1-y_0)^2+(y_2-y_0)^2+\cdots+(y_n-y_0)^2}{n} \quad (1.15)$$

また，y_1, y_2, ……, y_n の算術平均値を $\bar{y}$ とすれば分散 V は

$$V=\frac{(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+\cdots\cdots+(y_n-\bar{y})^2}{(n-1)}$$
$$=\frac{S_T}{n-1} \quad (1.16)$$

$$-\frac{[3.2+11.6+\cdots\cdots+(-6.5)]^2}{10}$$
$$=660.32-\frac{38.2^2}{10}$$
$$=660.32-145.924$$
$$=514.396 \qquad (f=9) \qquad (1.11)$$

修正項や変動の計算は，元の数値の2乗の最も下の桁，この場合，小数2位まででよいことが普通である．したがって，この場合，小数3位以下は丸めて

$$S_T=660.32-145.92=514.40$$
$$(f=9) \qquad (1.12)$$

とする．

この場合，修正項 CF は

$$\mathrm{CF}=\frac{38.2^2}{10}=145.92$$
$$(f=1) \qquad (1.13)$$

(1.7) 式のカーボン抵抗値の全変動 S_T は，自由度が 12 であるから，その分散は次のようになる．

$$V=\frac{S_T}{自由度}=\frac{2.23}{12}$$
$$=0.186 \qquad (1.15)$$

誤差分散は，元の単位より一桁余計に出す方がよい．

(1.15) 式の V の値は，自由度 12 の誤差分散ということもある．(1.12) 式の身長の全変動 S_T の場合には，自由度が9で，分散 V は次のようになる．

$$V=\frac{S_T}{自由度}=\frac{514.40}{9}$$
$$=57.156$$

1.1.2 項のカーボン抵抗のデータの場合には，目標値からの差は，0.3, −0.1, 0.5, 1.0,

いちいちことわるのがわずらわしいときには，目標値からの差を初めからデータとして観測値 y_1, y_2, ……, y_n と書くことも多い．その場合，観測値 y_1, y_2, ……, y_n はすでに目標値や理論値からの差になっていることになる．

目標値や理論値からの差を y_1, y_2,……, y_n としたとき，平均値 $\bar{y}$

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n}{n} \quad (1.17)$$

をかたより，正確にはかたよりの推定値という．目標値や理論値からの差をとる前の初めの観測値が，目標値や理論値から何時でも大きめであったりしたり，何時でも小さめであったりしたときには，(1.17) 式のかたより $\bar{y}$ の値は正で大きな値，または負で大きい値をとることになる．

正負の符号の如何にかかわらず，かたよりの絶対的な大きさを示すには，$\bar{y}$ の2乗を n 倍すればよい．それはかたよりの大きさ $(\bar{y})^2$ が全2乗和の中に n 個含まれているからである．

かたよりの大きさ $n(\bar{y})^2$

$$=n\left(\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n}{n}\right)^2$$

$$=\frac{(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)^2}{n} \quad (1.18)$$

この値は，理論値や目標値からの差を y_1, y_2, ……, y_n としたときの修正項（の変動）に当たっている．

したがって次の分解が成立する．

0.0, 0.3, 0.2, 0.3, −0.2, −0.5, 0.1, 0.6 であるから，かたよりの値 $\bar{y}$ は

$$\bar{y}=\frac{1}{12}(0.3-0.1+0.5+\cdots\cdots+0.6)$$

$$=\frac{2.5}{12}$$

$$=0.208 \quad (1.17)$$

$\bar{y}$ の値は元の桁より 1～2 桁余計に求める方がよい．

この場合，かたよりはプラス側であり，カーボン抵抗値は一般に目標値より大きめになっていることがわかる．

かたよりに対する変動すなわち修正項（ただし，この場合，y_1, y_2, ……, y_n から仮の平均を引いて計算してはならない．あくまでも，**理論値や目標値からの差そのもので修正項の値を求めなければならない．**）

$$\mathrm{CF}=\frac{(0.3-0.1+0.5+\cdots\cdots+0.6)^2}{12}$$

$$=\frac{2.5^2}{12}$$

$$=0.52 \qquad (f=1) \qquad (1.18)$$

修正項の計算は，全変動 S_T の計算と同じ桁に止めてよい．

この場合，次の等式が成立する．

S_T=CF＋平均値 $\bar{y}$ からの変動　(1.19)

S_T は (1.7) 式から 2.23，CF は (1.18) 式から，0.52 であるから，引算によって平均値 $\bar{y}$ からの偏差2乗和 S_e は

$$S_e=S_T-\mathrm{CF}$$

$$=2.23-0.52$$

$$=1.71 \quad (1.20)$$

この場合，S_e を誤差変動という．誤差変動の自由度は (12−1)=11 である．

$$y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2$$
$$=\frac{(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)^2}{n}$$
$$+[(y_1-\bar{y})^2+(y_2-\bar{y})^2+\cdots\cdots+(y_n-\bar{y})^2] \quad (1.19)$$

文章で書けば

データの２乗和＝(修正項)

＋(平均値からの偏差２乗和)

(変動)　(1.20)

$n=1+(n-1)$　(自由度)　(1.21)

(1.20) 式は，直流と交流が混合している電話の電流などの場合の次の式に対応する概念である．

全電流のパワー＝(直流電圧の２乗)

＋(交流のパワー)　(1.22)

この場合，$\bar{y}$ は直流電圧 (電話の場合 48 ボルト) であり，交流のパワーは交流電圧の２乗と同じものである．電圧では加法が成立しないが，電圧の２乗のパワーの世界では，加法が成立することが非常に大切なのである．このような分解を工学的には**パワースペクトルの分解**という．

数学的には，(1.19) 式の分解は，**有限次元のパーセバルの分解**であり，**線形数学で２次形式の理論**といわれているものに属する概念である．しかし，そのような物理的数学的概念にこだわる必要はない．実際の計算になれれば，自ら意味が理解できるようになるからである．

電話の電流の場合には，直流電圧は，音声を伝えるのに何の役にも立たない．すなわち，交流部分だけが音声の伝達に有効で

誤差変動をその自由度で割ったものは，誤差分散といわれ，V_e で示す．

$$V_e=\frac{S_e}{\text{自由度}}=\frac{1.71}{11}$$
$$=0.155$$

V_e は，個々のカーボン抵抗値がばらついている大きさを示すもので，この値が大きいときには，製品の個々の値の差が大きいことを意味している．

一方，修正項が大きいときには，品物の平均値が目標値から大きくずれていることを示している．修正項が大きい場合，それを小さくすることは多くの場合簡単である．たとえば，いまのカーボン抵抗の場合だったら，炭化時間を長くしたり，切込み方法を変えれば修正可能である．

寸法などの特性でもそのことは同じで，かたよりの修正は簡単だが，バラツキを小さくするには，多くの工夫が必要になる．

身長の場合では，その全変動 S_T を平均値からの差の変動として求めた理由は，身長には，目標値や理論値がないからであるが，理論値としてゼロをとるならば，ゼロからの差を $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ として，かたよりの大きさを修正項として求めることもできる．その場合の修正項は，仮の平均を引いたものであってはならない．

ある．

それと同様に，目標値や理論値からの偏差のデータの場合には，修正項と残りの変動の間には技術的な意味やそれに対する対策が全く異なることが多いので，この2つの違いを区別することは非常に大切である．

1.2 変動の分解

本節では，観測値の定数係数の線形式とその変動の求め方を解説し，分散分析への入門を論ずる．

1.2.1 簡単な例

n 個の観測値を $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ としたとき，y_1, y_2, ……, y_n の**定数係数の1次式を線形式**という．

n 個の定数を C_1, C_2, ……, C_n として，線形式を L とする．

$$L=C_1y_1+C_2y_2+\cdots\cdots+C_ny_n$$

係数 C_1, C_2, ……, C_n の中には，ゼロのものがいくつかあってもよいが，一部はゼロでないとする．

n 個の平均値（かたより）$\bar{y}$ は

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n}{n}$$

$$=\frac{1}{n}y_1+\frac{1}{n}y_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}y_n \quad (1.23)$$

であるから，係数が何れも

$$C_1=C_2=\cdots\cdots=C_n=\frac{1}{n}$$

の線形式である．

引張り強さの規格値が 80 kg/mm^2 以上であるとする．

$n=(n_1+n_2)$ 個の目標値からの差の観測

1.2.1 計算例

日本人6人，アメリカ人4人の身長は次のようであった（単位 cm）．

A_1＝日本人

158, 162, 155, 172, 160, 168

A_2＝アメリカ人

186, 172, 176, 180

この場合，10 人の人間の身長のデータがあるのだが，10 人の人間の間の身長の全変化量は，平均値からの偏差の2乗和で与えられる．この場合，目標値や理論値はないのだから，仮の平均170を引いて，10 人の間の全変動を計算する．

A_1 の偏差　$-12, -8, -15, 2, -10, -2$（計 -45）

A_2 の偏差　16, 2, 6, 10（計 34）

したがって

$$\mathrm{CF}=\frac{(-11)^2}{10}$$

$$=12$$

$$S_T=(-12)^2+(-8)^2+\cdots\cdots+10^2-\mathrm{CF}$$

値 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ があったとき，目標値 y_0 からの偏差の全変動 S_T を求める．

$$S_T = y_1^2 + y_2^2 + \cdots\cdots + y_n^2 \quad (1.24)$$

いま，$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ の中で最初の n_1 個は，焼鈍し温度を 300°C にして得られた品物の引張り強さであり，残りの $y_{n_1+1}, \cdots\cdots, y_n$ は焼鈍し温度を 400°C にして作った品物の引張り強さの測定値であるとする．

このとき，データの全変動 S_T を次の3つの部分に分解する．

S_T＝修正項＋（焼鈍し温度の差による引張り強さの変動）＋（誤差変動）

この場合，修正項は，n 個のデータ全体の平均が規格とどれ位異なっているかを示すもので，しばしば一般平均 m に対応する変動ともいわれている．

2番目の項の焼鈍し温度の差による引張り強さへの影響は，2つの製造方法

A_1＝焼鈍し温度を 300°C とする

A_2＝焼鈍し温度を 400°C とする

によって，引張り強さがどれ位異なるかを意味する変動である．

A_1 で作った n_1 個の特性値の平均

$$\bar{A}_1 = \frac{1}{n_1}(y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_{n_1}) \quad (1.25)$$

と A_2 で作った n_2 個の特性値 $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \cdots\cdots, y_n$ の平均

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{n_2}(y_{n_1+1} + y_{n_1+2} + \cdots\cdots + y_n) \quad (1.26)$$

の差の大きさに対する変動である．

明らかに $\bar{A}_1$ と $\bar{A}_2$ の差 L

$$= 937 - 12$$
$$= 925$$

ところで，誰でもこのデータを眺めたとき，10 人の人間の間の身長の全変動は，その大部分が日本人とアメリカ人の差であるというに違いない．すなわちこの場合，10 人の間の身長の全変化量 925 の中に，民族の差がどれだけの原因になっているのだろう．

おそらく，誰でも，日本人とアメリカ人の差は，日本人の平均身長とアメリカ人の平均身長の差 L で表わすだろう．

L＝（日本人の平均）－（アメリカ人の平均）

$$= \left(170 + \frac{-45}{6}\right) - \left(170 + \frac{34}{4}\right)$$

$$= \frac{-45}{6} - \frac{34}{4} \quad (1.22)$$

しばしば，日本人 A_1 の合計を同じ記号 A_1 を用い，アメリカ人 A_2 の合計を同じ記号 A_2 を用いて表わす．

したがって上の線形式 L は

$$L = \frac{A_1}{6} - \frac{A_2}{4} \quad (1.27)$$

とも書き表わす．

いま 10 人の人間の身長を $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$（以上日本人）；$y_7, y_8, y_9, y_{10}$（以上アメリカ人）とすれば，全変動 S_T は 10 人の身長の測定値 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{10}$ の間の全変化量であり，(1.22)式，または(1.27)式は 10 個の観測値 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{10}$ の定数係数の1次式である．したがって，(1.27) 式の L に対する変動 S_L は

$$L=\bar{A}_1-\bar{A}_2$$
$$=\frac{A_1}{n_1}-\frac{A_2}{n_2}$$
$$=\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{n_1}}{n_1}$$
$$-\frac{y_{n_1+1}+\cdots\cdots+y_n}{n_2} \quad (1.27)$$

は，n 個の観測値に対する線形式である．

$\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ は A_1, A_2 に対する n_1 個，n_2 個のデータの平均であり，A_1, A_2 はしばしば，A_1, A_2 でやった実験データの合計を表わす．

(1.27) 式のような線形式の変動 S_L は，次のようにして求められる．S_L は，S_A と略記されるのが普通で，A_1, A_2 の差に対応する変動という意味である．

$$S_A=\frac{(\bar{A}_1-\bar{A}_2)^2}{\text{係数の2乗和}}$$
$$=\frac{\left(\frac{A_1}{n_1}-\frac{A_2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{n_1}\right)^2\times n_1+\left(\frac{1}{n_2}\right)^2\times n_2}$$
$$=\frac{\left(\frac{A_1}{n_1}-\frac{A_2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \quad (1.28)$$

または，(1.28) 式の分母，分子に $n_1^2\times n_2^2$ を掛けて

$$S_A=\frac{(n_2A_1-n_1A_2)^2}{n_2^2\times n_1+n_1^2\times n_2} \quad (1.29)$$

あるいは

$$S_A=\frac{A_1^2}{n_1}+\frac{A_2^2}{n_2}-\mathrm{CF} \quad (1.30)$$

(1.30) 式を証明しよう．

$$S_A=\frac{n_2A_1^2+n_1A_2^2}{n_1n_2}-\frac{(A_1+A_2)^2}{n_1+n_2}$$
$$=\frac{(n_1+n_2)n_2A_1^2+(n_1+n_2)n_1A_2^2-n_1n_2(A_1+A_2)^2}{n_1n_2(n_1+n_2)}$$

$$S_L=\frac{\left(\frac{A_1}{6}-\frac{A_2}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 6+\left(-\frac{1}{4}\right)^2\times 4}$$
$$=\frac{\left(\frac{-45}{6}-\frac{34}{4}\right)^2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{[4\times(-45)-6\times 34]^2}{4^2\times 6+(-6)^2\times 4}$$
$$=\frac{(-384)^2}{240}$$
$$=614 \quad (1.28)$$

すなわち，10 人の身長の間の全変化量 925 の中に，日本人とアメリカ人という民族の差が 614 の大きさを占めていることになる．

925 から 614 を引いたものは，同じ民族内の個人差の大きさを表わす．それを誤差変動 S_e という．

$$S_e=S_T-S_A=925-614$$
$$=311 \quad (1.31)$$

S_T の自由度が 9，S_A の自由度が 1，S_e の自由度は $(9-1)=8$ である．したがって誤差分散 V_e は

$$V_e=\frac{S_e}{8}=\frac{311}{8}$$
$$=38.9 \quad (1.32)$$

である．この場合，誤差分散は，同じ民族内の一人当りの身長の差の大きさを示すものである．

誤差分散 V_e の平方根は，身長の個人差の標準偏差といわれ，多くの場合，記号 s で表わすことが多い．

$$s=\sqrt{V_e}=\sqrt{38.9}$$
$$=6.24\ (\mathrm{cm})$$

$$=\frac{n_2{}^2A_1{}^2+n_1{}^2A_2{}^2-2n_1n_2A_1A_2}{n_1n_2(n_1+n_2)}$$

$$=\frac{(n_2A_1-n_1A_2)^2}{n_2{}^2\times n_1+n_1{}^2\times n_2}$$

これは (1.29) 式と同じものである.

したがって, 誤差変動 Se は

$$S_e=S_T-\mathrm{CF}-S_A \quad (1.31)$$

で求められる.

S_e の自由度は, CF の自由度が 1, S_A の自由度が 1 であるから, $(n-2)$ ということになる. これから誤差分散 Ve は

$$V_e=\frac{S_e}{n-2} \quad (1.32)$$

誤差変動は, 同じ条件で作られた品物の間の引張り強さのバラツキの全体であり, 誤差分散は単位当りのバラツキの大きさを示す.

誤差分散 V_e の平方根は, そのようなバラツキの**標準偏差**といわれ, 記号 s で表わされるのが普通である.

$$s=\sqrt{V_e}$$

このようにして, データの全2乗和 S_T が

$$S_T=\mathrm{CF}+S_A+S_e \quad \text{(変　動)} \quad (1.33)$$

$$n=1+1+(n-2) \quad \text{(自由度)} \quad (1.34)$$

に分解された. このような分解を**変動の分解**という.

ところで, この場合, 品物の総個数は n 個なのだから, 同一条件で作った品物のバラツキの全体は, 誤差分散の n 倍でなければならない. 誤差変動 S_e の中には, そのような品物間のバラツキが $(n-2)$ 個分入っているのだが, 残りの2個は, 1個ずつ CF と S_A の中に混じって入っている.

この場合, 10 人の間の身長の全変動 S_T が, 日米間の差と個人差の変動に分解されたことになる.

$$S_T=S_A+S_e$$

$$925=614+311 \quad \text{(変　動)} \quad (1.33)$$

$$9=1+8 \quad \text{(自由度)} \quad (1.34)$$

この場合, 10 人の人間がいるのだから, 個人差は当然 10 個なければつじつまが合わないはずである.

実は S_e の中には, 個人差が8個分しか入っていないのであり, 残りの2個分は, 1個は修正項 CF の中に, 1個は S_A の中に入っているのである.

換言すれば, S_A の 614 の中には, 個人差が平均して1個分入っているので, 本当の民族間の差は S_A の中から, 1個分の個人差, すなわち誤差分散を引かなければならない. それを日米間の純変動と名づける. 純変動はダッシュをつけて表わそう.

$$S_A'=S_A-V_e=614-38.9$$

$$=575.1 \quad (1.36)$$

個人差の1個分は修正項に入ってしまっているが, このような身長の変動の場合には, 一般平均は必要でない情報であるから, 個人差と共にすててしまうのである. すなわち, データの全変化量はあくまで, その自由度を9として考えることになる.

したがって, 誤差の純変動 S_e' は, S_A から引いた1個分だけの誤差分散 V_e を加えて求める.

$$S_e'=S_e+V_e$$

したがって，本当の修正項（純修正項）CF′と，本当の焼鈍し温度の変動（純変動）S_A'は，CF，S_Aから1個分の品物間の差である誤差分散 V_e を引いて求める．

$$\mathrm{CF}'=\mathrm{CF}-V_e \qquad (1.35)$$

$$S_A'=S_A-V_e \qquad (1.36)$$

その代り本当の誤差変動（全誤差変動）S_e' はその2つの誤差分散を加えて

$$S_e'=S_e+2V_e \qquad (1.37)$$

と求められる．

これから

$$S_T=\mathrm{CF}'+S_A'+S_e' \qquad (1.38)$$

両辺を S_T で割って100倍したもの（率のままの場合も多い）を次のように書き表わす．

$$100=\rho_m+\rho_A+\rho_e$$

ρ_m，ρ_A，ρ_e はデータの全変化量の中に占める，一般平均（かたより），焼鈍し温度，誤差のそれぞれの寄与率（%）といわれているものである．

データが目標から食い違っているとき，そのような食い違いの全体の大きさが全変動であり，そのような食い違いの全変動の原因として，一般平均，焼鈍し温度の影響，誤差（この中には同じ温度で焼き鈍したときのテストピース間のバラツキや測定誤差の影響などをすべて含んでいる）の3つの原因に分解したものである．

この中で，一般平均すなわち，かたよりの影響がよくわからないかもしれないが，一般平均の影響の中には，そのデータを得

$$925=575.1+349.9 \qquad (1.38)$$

（1.38）式の両辺を925で割って100倍すれば，寄与率の分解が得られる．

$$100=62.2+37.8\ (\%) \qquad (1.39)$$

すなわち，10人の人間の身長の全変化量は925であったが，日米間の民族の差がその中の62.2%の原因であり，個人差が37.8%である．

このように，データが変化しているとき，変化の全体を全変動で表わし，全変動 S_T 中に占める各種原因の影響の寄与率を求めるには，このような変動の分解が必要である．

変動の分解が自由にできるようになるためには，分散分析の計算法をしっかりと身につけなければならない．

分散分析の計算は，数学的には，2次形式の表現論であるが，最も大切なことは，原因として何をとりあげるかである．何の原因をとりあげるかは研究者の固有技術の問題であるから，2次形式の理論である数学をどんなに知っていても分散分析の問題は解けない．

むしろ，研究者や技術者が，分散分析の計算になれて，どんなデータに対しても，変動の分解ができ，自分の考えた原因の影響の大きさがたちどころに計算できるようになることが最も大切である．

るときに固定したすべての原因の影響を含んでいる.

たとえば，焼鈍しの設備を変えたり，圧延方法を変えたり，添加剤を加えたり，成分を変えたりすれば，一般平均の寄与率が変わり得るのである.

すなわち，一般平均が規格から十分離れていなくて，不良品が存在するような場合には，その実験をやるとき固定した原因を変えて，最もコストの安い方法で平均値を最も望ましい値にもってゆくことが，生産技術の開発である.

現在，規格を十分満足するような場合でも，圧延のスピードを上げたりしたとき，どれ位引張り強さが下がるかを調べ，それを向上するもっと安い方法がないかを研究することが大切である.

1.2.2 分散分析表

1.2.1 項にしたような変動の分解は，分散分析表にまとめられる．その場合，寄与率の計算のみでなく，修正項や，Aの差があるかないかを**定性的に断言する検定が先行して行なわれる**のが普通である.

その理論は，n個のデータで，修正項やA_1, A_2 の差の寄与率を調べたのだが，そのような寄与率は，もっと多くのデータをとったときゼロになることはないかという懸念に対する解決法として生まれたものである.

換言すれば，本来，修正項やAの効果は存在しない，すなわち寄与率がゼロである

1.2.2 計 算 例

ある品物の対摩耗性を向上させる目的で，その品物の原料中に，ある添加剤を加えた品物と加えない品物の2種類を作った.

A_1＝現在のもの

A_2＝添加剤を加えたもの

A_1, A_2 の各々からテストピースを6個ずつ作り，ある条件の下で摩耗試験を行ない，摩耗量を調べた結果は次のようであった（単位 mg).

A_1　26, 18, 19, 21, 15, 29

A_2　15, 8, 14, 13, 16, 9

摩耗量とか，変化量，変化率のような場

にもかかわらず，たまたま観測したn個のデータのバラツキによって，偶然にもそのような大きな寄与率になったのではないかという疑問に答えようというわけである．

その方法は，結局は寄与率を計算する前の変動 CF や S_A が誤差分散以上に大きいとしてよいかどうか，ということと同じになる．もし，S_A が誤差分散以上に大きいことが（表われた数値の上ではなく，本当の効果がという意味で）確信できるならば，Aの純変動 S_A を求めることに意味があり，したがって寄与率の計算も確信して行なえるというわけである．

この問題は，もし，かたよりやAの効果が存在しないならば，CF や S_A は誤差分散と同じ位になるはずなのだから，次の分散比は，何れも1前後の値になるはずであることを意味する．

$$F_m=\frac{\mathrm{CF}}{V_e} \qquad (1.48)$$

$$F_A=\frac{S_A}{V_e} \qquad (1.49)$$

このような計算は，国際的に，F表（実験計画法の創始者，イギリスの R.A. Fisher を記念してつけられたもの．付表の第3表を見よ）を用いて行なう．

F表は，もし，一般平均やAの効果が存在しないならば，(1.48) 式の F_m も，(1.49) 式の F_A も，F表にある分子の自由度（CF や S_A の自由度）1，分母の自由度（誤差Veの自由度）$(n-2)$ の値（上段の細字が危険率5%の値，下段の太字が危合には，目標値はゼロであるから，このままで修正項の変動を求める．

$$A_1=26+18+\cdots\cdots+29=128$$

$$A_2=15+8+\cdots\cdots+9=75$$

$$T=A_1+A_2=203$$

したがって CF の代りに S_m と書いて

$$S_m=\frac{203^2}{12}=3\,432 \quad (f=1) \qquad (1.40)$$

A_1 と A_2 の平均値の差Lは

$$L=\frac{A_1}{6}-\frac{A_2}{6}=\frac{A_1-A_2}{6} \qquad (1.41)$$

したがって，A_1 と A_2 の差に対する変動 S_A は，線形式Lの値の2乗を係数の2乗和で割って求めればよい．

$$S_A=S_L=\frac{L^2}{\text{係数の2乗和}}$$

$$=\frac{\left(\frac{A_1-A_2}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 6+\left(-\frac{1}{6}\right)^2\times 6}$$

$$=\frac{(A_1-A_2)^2}{1^2\times 6+(-1)^2\times 6}$$

$$=\frac{(A_1-A_2)^2}{12}=\frac{(128-75)^2}{12}$$

$$=\frac{53^2}{12}=234 \quad (f=1) \qquad (1.42)$$

この場合の目標値はゼロだから，全変動は全2乗和と同じものである．

$$S_T=26^2+18^2+\cdots\cdots+9^2$$

$$=3\,859 \quad (f=12) \qquad (1.43)$$

したがって，誤差変動 S_e は

$$S_e=S_T-S_m-S_A$$

$$=3\,859-3\,432-234$$

$$=193 \qquad (f=10) \qquad (1.44)$$

S_T の自由度は 12，一般平均 S_m の自由度

険率1% の値）より大きくなることは，ほとんどあり得ないという限界の値を示している．そのほとんどあり得ない程度として，確率 5% と確率 1% の2つの値を考えている．確率 5% の値に対するのが F 表の上段の細字で，確率 1% に対するのが下段の太字の値である．

たとえば，$n=20$ なら，分子の自由度 1，分母の自由度 $(20-2)=18$ の F 表の数値は，上段が 4.41，下段が 8.28 である．

すなわち，“もし，一般平均 m や A_1 と A_2 の差が存在しないときには，(1.48) 式の F_m も (1.49) 式の F_A も，4.41 より大きくなることは，100 回に5回しかおこらないし，8.28 より大きくなることは 100 回に1回位しかおこらない奇跡である”ことを意味している．

したがって，実際のデータから求めた F_m や F_A が 4.41 より大きいときに，それらの効果があると断言すれば，ぎりぎりの場合 100 回に5回ほど間違った結論を出す可能性があることになる．この 5% という値は，そういう意味で危険率と呼ばれている．実際に得られた分散比 F_m や F_A の値が，危険率 5% の F 値 4.41 以上で，危険率 1% の F 値 8.28 より小さいとき，その効果は危険率 5% で有意であるといい，分散分析表の F 比の欄に星印を1つつけるのが慣行である．

同様に，実際に求めた分散比 F_m や F_A の値が危険率 1% の F 値 8.28 より大ききは 1，S_A の自由度は 1，誤差変動 S_e の自由度は $(12-2)=10$ ということになる．

また，分散の計算は

$$V_m=\frac{S_m}{1}=\mathrm{CF}=3\,432 \qquad (1.45)$$

$$V_A=\frac{S_A}{1}=S_A=234 \qquad (1.46)$$

$$V_e=\frac{S_e}{10}=\frac{193}{10}=19.3 \qquad (1.47)$$

である．

一般平均はこの場合，データ全部の平均の摩耗量の大きさを意味する．この場合には，その効果の存在は明白であるが，F 検定の説明のために，一般平均も検定する．もちろん，摩耗試験の場合にも，品物が，使用中，空中の水分や酸素を吸収して，たとえば膨潤をおこして反って厚みが増すというようなことも生ずる．そのような場合，厚さの減少量で摩耗量を測ると，摩耗量にプラス，マイナスのものがでてきて，一般平均が必ずしも有意になるとは限らないことがおこるのである．

$$F_m=\frac{V_m}{V_e}=\frac{3\,432}{19.3}=177.9 \qquad (1.48)$$

$$F_A=\frac{V_A}{V_e}=\frac{234}{19.3}=12.1 \qquad (1.49)$$

一般平均も，A の効果もどちらも自由度は1だから，F_m，F_A と比較する F 値は，分子の自由度 1，分母の自由度 10 の F 表の値をもってくればよい．

その値は，上段が 4.96，下段が 10.04 であるから，その値と上の F_m，F_A とを比較することになる．F_m，F_A は，何れも下

いときには，危険率1%で有意であるといい，星印を2つつけるのが普通である．

星印のついたいわゆる有意になった原因（これを要因という）のみに対して寄与率を計算するのが原則である．しかし，星印がつかない要因でも寄与率が大きい要因については，その効果を軽視すべきではない．有意でない要因でも，寄与率が大きいときには，その要因は大きな影響をもっている可能性が高いからである．有意でないということは，本当に効果が存在しない場合と，効果がかなりあっても誤差の自由度が少ないために，効果のあるなしに対する断言の精度が不十分の場合と2つの場合が段の 10.4 より大きいから，この場合，両方とも 1% 有意ということになる．

一般平均mも，その添加剤の効果も，危険率1%でゼロではないことがわかったことになる．このような効果のあるなしという定性的な判定は，あまり実際問題で重要でないかもしれない．

しかし，効果の大きさの定量的表現である寄与率の計算をするつもりならば，F検定はすぐに計算できるのだから，F検定をするくせをつけることをすすめる．

次に純変動 S_m', S_A' は，一般平均mもAの効果も自由度1だから，S_m, S_A から誤差分散を1個だけ引けばよい．

表 1.2 分散分析表

要因 Sources	自由度 f	変動 S	分散 V	分散比 F_0	純変動 S'	寄与率 $\rho(\%)$
m	1	CF	V_m	F_m	S_m'	ρ_m
A	1	S_A	V_A	F_A	S_A'	ρ_A
e	$n-2$	S_e	V_e		S_e'	ρ_e
計	n	S_T			S_T	100.0

あるからである．

F検定や寄与率の計算は，表1.2のようにまとめられる．それを分散分析表という．ただし

$$V_m=\frac{\mathrm{CF}}{1}=\mathrm{CF} \tag{1.45}$$

$$V_A=\frac{S_A}{1}=S_A \tag{1.46}$$

$$F_m=\frac{V_m}{V_e} \tag{1.48}$$

$$F_A=\frac{V_A}{V_e} \tag{1.49}$$

$$S_m'=\mathrm{CF}-V_e$$

$$S_m'=S_m-V_e=3\,432-19.3$$
$$=3\,412.7 \tag{1.50}$$

$$S_A'=S_A-V_e=234-19.3$$
$$=214.7 \tag{1.51}$$

$$S_e'=S_e+2\times V_e=193+2\times 19.3$$
$$=231.6 \tag{1.52}$$

したがって寄与率は

$$\rho_m=\frac{S_m'}{S_T}=\frac{3\,412.7}{3\,859}=0.884 \tag{1.53}$$

$$\rho_A=\frac{S_A'}{S_T}=\frac{214.7}{3\,859}=0.056 \tag{1.54}$$

$$S_A'=S_A-A \text{ の自由度}\times V_e$$
$$=S_A-V_e \qquad (1.51)$$
$$S_e'=S_e+2\times V_e \qquad (1.52)$$
$$\rho_m=\frac{S_m'}{S_T}\times 100 \qquad (1.53)$$
$$\rho_A=\frac{S_A'}{S_T}\times 100 \qquad (1.54)$$
$$\rho_e=\frac{S_e'}{S_T}\times 100 \qquad (1.55)$$

$$\rho_e=\frac{S_e'}{S_T}=\frac{231.6}{3859}=0.060 \qquad (1.55)$$

したがって，分散分析表は，表 1.3 のようになる.

表 1.3 分散分析表

要 因	f	S	V	F_0	S'	ρ(%)
m	1	3 432	3 432	177.9**	3 412.7	88.4
A	1	234	234	12.1**	214.7	5.6
e	10	193	19.3		231.6	6.0
T	12	3 859			3 859.0	100.0

1.2.3 要因効果の推定

1.2.2 項の分散分析で有意になった要因については，その要因効果の推定をする.

一般平均 m も A_1 と A_2 の差も有意になったとき，次のようないろいろな推定が考えられる.

（1） 一般平均 m と A_1 と A_2 の差の推定

推定値には，^ 型（ヤマガタ，ハットなどと読む）をつける.

一般平均 m の推定値は実験全部の平均（かたより）で推定される.

$$\hat{m}=\frac{T}{n} \qquad (1.56)$$

この場合，分散分析をやっているときには，真の一般平均mの値と実験データから推定した値$\hat{m}$との食い違いの程度，いわゆる信頼限界をF表から計算することができ

1.2.3 要因効果の推定

（1） 一般平均mと A_1, A_2 の差の推定をする.

$$\hat{m}=\frac{\text{合計}}{n}=\frac{203}{12}=16.9 \qquad (1.56)$$

信頼限界の計算は，上の値は 12 個の平均だから，$n_e=12$ である．また

$$V_e=19.3$$
$$F_{10}^1=4.96$$

したがって，信頼限界の計算は

$$\pm\sqrt{\frac{F_{10}^1\times V_e}{n_e}}=\pm\sqrt{\frac{4.96\times 19.3}{12}}$$
$$=\pm 2.8$$

したがって

$$m=\hat{m}\pm 2.8$$
$$=16.9\pm 2.8 \qquad (1.57)$$

また，A_1 と A_2 の差は

$$\bar{A}_1-\bar{A}_2=\frac{A_1}{6}-\frac{A_2}{6}$$

る．

その公式は

$$F=\frac{(\hat{m}-m)^2}{V_e}\times n$$

が分子の自由度 1，分母の自由度 $(n-2)$ のF分布に従うという仮定から導かれたもので，読者はこの公式を暗記すべきである．

$$m=\hat{m}\pm\sqrt{\frac{F^1_{n-2}\times V_e}{n_e}} \quad (1.57)$$

ここに，F^1_{n-2} は分子の自由度 1，分母の自由度 $(n-2)$ の F 表の 5% 値である．V_e は分散分析表の誤差分散の値，n_e は $\hat{m}$ が何個の平均値に対応するかを意味する値で，有効反復数と呼ばれている．有効反復数の逆数 $\frac{1}{n_e}$ は，線形式mの単位数で，係数の 2 乗和に等しい．

$$\hat{m}=\frac{y_1+\cdots\cdots+y_n}{n}$$

であるから，$\hat{m}$ の係数の 2 乗和は

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n}$$

となる．したがって，この場合 $n_e=n$ である．

同様に，A_1 と A_2 の差Lは

$$L=\frac{A_1}{n_1}-\frac{A_2}{n_2} \quad (1.58)$$

で，この線形式の係数の 2 乗和すなわち単位数 $\frac{1}{n_e}$ は

$$\frac{1}{n_e}=\left(\frac{1}{n_1}\right)^2\times n_1+\left(\frac{-1}{n_2}\right)^2\times n_2$$

$$=\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2} \quad (1.59)$$

であるから，A_1 と A_2 の差の真値に対する推定値と信頼限界は，次のようになる．

$$=\frac{128-75}{6}=8.8 \quad (1.58)$$

信頼限界は

$$\frac{1}{n_e}=\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 6+\left(-\frac{1}{6}\right)^2\times 6=\frac{1}{3}$$

$$(1.59)$$

$$F^1_{10}=4.96$$

$$V_e=19.3$$

を用いて

$$\pm\sqrt{\frac{F^1_{10}\times V_e}{n_e}}$$

$$=\pm\sqrt{4.96\times 19.3\times\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\pm 5.7 \quad (1.60)$$

（2）　A_1，A_2 それぞれの平均を求める．(1) の計算よりはこちらの計算の方が普通用いられる．A_1 の平均には，一般平均と A_1 だった効果（一般平均と A との差）が加わって入っている．

$$\bar{A}_1=\frac{128}{6}$$

$$=21.3 \quad (1.61)$$

この信頼限界は

$$\pm\sqrt{\frac{F^1_{10}\times V_e}{n_e}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{4.96\times 19.3}{6}}$$

$$=\pm 4.0 \quad (1.62)$$

同様にして

$$\bar{A}_2=\frac{75}{6}=12.5 \quad (1.63)$$

これから

A_1　21.3±4.0　(1.64)

A_2　12.5±4.0　(1.65)

$$\frac{A_1}{n_1}-\frac{A_2}{n_2}\pm\sqrt{\frac{F^1_{n-2}\times V_e}{n_e}}$$
$$=\bar{A}_1-\bar{A}_2\pm\sqrt{F^1_{n-2}\times V_e\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} \tag{1.60}$$

（2） A_1 と A_2 の平均を別々に求め，それぞれの信頼限界を示す方が普通である．その場合の信頼限界の公式は次のようである．

$$\bar{A}_1\pm\sqrt{\frac{F^1_{n-2}\times V_e}{n_1}} \tag{1.64}$$

$$\bar{A}_2\pm\sqrt{\frac{F^1_{n-2}\times V_e}{n_2}} \tag{1.65}$$

演 習 問 題

問（1.1） 100 オームをねらって抵抗を 8 個試作したが，その値は次のようであった．

98, 103, 100, 101, 102, 98, 99, 105

目標値からの偏差，修正項，誤差変動，誤差分散を求めよ．

問（1.2） ある機械の振動の大きさに対して，それを構成しているベアリングの振れの大小が影響するかどうかを調べたい．

ベアリングの振れ A について

A_1＝振れ小のもの

A_2＝振れ大のもの

として，A_1 から 10 個，A_2 から 6 個をとり，その機械を作って振動を測ったら次のようであった．

A_1　0.9, 0.3, 0.4, 0.2, 0.1, 0.8, 0.9, 0.4, 0.0, 0.6

A_2　0.6, 1.0, 1.1, 0.9, 1.0, 1.2

分散分析をし，A_1, A_2 の寄与率を求めよ．

注

(1.1) **パワーとエントロピー**　バラツキすなわち変化をしているデータの取扱いには，平均のみでなく，その変化の大きさを示す測度（ものさし）が必要である．

変化するものについて，その変化の度合を表現する古来からの方法は，波の強さというように 2 乗の和で，その大きさを定義する方法である．区間 (0, T) で波 $x(t)$ があったとき，そのパワー P は

$$P=\int_0^T (x(t)-\bar{x})^2 dt \tag{*1.1}$$

で表わされる．単位時間当りのパワーとしては (*1.1) を T で割れば良い．このようなパワーの定義

は，あらゆる種類の波について広く用いられ，それが波の強さになることが知られている．

変化している程度を表現するもう１つの昔から用いられている測度は，エントロピーという概念である．$x(t) \leq z$ なる t の集りの区間 $(0, T)$ での割合を $G(z)$ とすれば，$x(t)$ の全エントロピーEは，$g(z)$ を $G(z)$ の微分した関数として

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\log\, g(z)dG(z) \qquad (*1.2)$$

で定義する方法である．パワーとエントロピーはどちらも，波のない場合には，ゼロとなり，波の変化が大きいほどその値は大きくなる．

著者としては，どちらも同じような性質を持っており，エントロピーも魅力のある定義であるが，パワーの定義の方が実際の計算ではより簡単であり，変化しない波（たとえば直流）のパワーと変化する波（たとえば交流）の共存する場合（たとえば電話回路）のパワーが一緒に取り扱えて便利であること，有限次元空間のパーセバルの分解が一般に成立すること，の２つの理由から，本書では２乗でデータの変化量を定義する方法を一貫して採用することにしたのである．

ここで，大切なことは，バラツキを出す根源が確率的なものであるとする必要がないということである．自分の考えた公式が実際とどれくらい良く合うかということを，その公式から得られた値と実際の観測値の差の２乗和で定義しようというわけである．そのような差が高次の項を省略した確定的な誤差でも一向にさしつかえないということである．事実，直交関数による展開は，その誤差の２乗和（積分）を最小にする展開であり，その大きさの評価が大切である．われわれは，有限次元のベクトルの世界で直交展開を行なっているのである．直交展開がパーセバル形式のものであることについては，たとえば次の文献の第５章，一般展開定理を見られたい．

吉田耕作，積分方程式論，岩波全書，1950.

(1.2)　分散比と F 分布　　分散比Fをこのような効果の比較に用いることについては，通信工学の世界などではエスエヌ比（Signal 対 Noise 比，信号対雑音比）として用いられていて，誰にでも納得できる．しかし分散比FをF分布する確率変数として，F表を用いることについては，多くの疑問がある．F表は，誤差の正規性と効果の線形加法性の下に，第２種の過誤を最小にする尤度比検定として導かれたものだが，実際の世界では，誤差が厳密には正規分布をすることもなければ，効果が算術的に加わることもない．したがって，F 表から得る有意性のようなものは，１つの参考的なものであり，5% とか 1% とかいう危険率の値もそれ程はっきりした意味を持っていることはないと考えるべきである．ある人は，分散比 F は自由度に無関係に，F_0 が 4 以上なら*を，8 以上なら，** をつけても良いという．誤差分散の値には，確かに誤差が考えられるのだから，そのようなやり方にも疑問がある．したがって，あまり深くこだわらないで，通常のF表を用いることにするが，そこで有意でなくても，有意に近いものには，専門的な考察を加えるべきであるし，有意であっても疑問な場合には，深くこだわらないことが大切である．また，F表の限界値の２倍以上大きな分散比でないと，次にもう一度実験したとき，有意に出てくるとは限らないことを知っておくべきである．なお，参考文献（1）の 37.1 節も参照せよ．

2. 一 元 配 置 法

本章では，市場または技術における場の変化に対する対策としての実験の確率化を述べたあとで，一個の因子（変数）の実験や調査データの解析法を説明する．本章は分散分析の基礎である．

2.1 実験の確率化

本節においては，環境条件の変化によって生ずる誤差の問題に対する対策として，**実験の確率化**という概念の解説を行なう．

実験の確率化は，R.A. Fisher によって開発された手法であるが，実験データの解析の背後には，このことが何時でも仮定されていると考えてよい．

しかし，その方法は，実験の場によっては必ずしも実施されていなくてもよい．実験の確率化が実施されていない場合でも，実験の確率化が，実施されたという考えの下でデータ解析がされているということは知っていなければならない．この考え方なしには，データ解析は成り立たないからである．そういう意味において，本節の考え方は実験的方法の基礎の一つである．

因子Aについて，２通りの条件を比較する場合を考える．それを A_1, A_2 とする．たとえば，因子Aは工程の温度の２水準

A_1＝温度を 90°C にする

A_2＝温度を 100°C にする

でもよいし，因子Aは２種類の頭痛薬

A_1＝現在の頭痛薬

A_2＝新しい頭痛薬

でもよい．

このような場合，いままでは他のすべての条件を等しくして公平に A_1, A_2 の比較をするように努力してきた．

たとえば温度の場合だったら，標準の原料のみを用いるとか，工程や作業などもできるだけ均一の条件にして，公平に比較する方法である．しかし，そのように，ある標準の原

料だけで，A_1, A_2 の比較をして A_1 がよいとでても，原料中の不純物がちょっと増加したときには，A_2 の温度の方がよいかもしれない．すなわち，A_1, A_2 の比較をするとき，現実におこり得る原料の変化や，工程，作業者の変化を許容した上で，それらの全体を通して A_1, A_2 のどちらがよいかを問題にしたいことになる．

また，頭痛薬の比較の場合には，同じ程度の頭痛の人のみを集めることは不可能で，同じ程度の頭痛とは何かさえわかっていない．すなわち頭痛薬の場合には，医者が頭痛薬を用いるべきだと判断したすべての患者，また，家庭薬の場合には，頭痛薬を使用するすべての患者に対して，A_1, A_2 のどちらの頭痛薬の方が治癒率が高いかを知りたいことになる．

したがって，実際の実験では次のような実験がしたいことになる．

現場で毎日 1 バッチずつ生産するとして，今日から向う $2n$ 日間温度を 90°C，すなわち A_1 で製造したときの毎日の収量を X_1, X_2, ……, X_{2n} とする．A_1 で今日生産したら 27.3 トンの品物が得られたときには，$X_1=27.3$ トンということになる．

今日，もし，温度を 90°C でなく，A_2 の 100°C で生産したとき，品物の収量がいくらであったかの値を Y_1 とする．すなわち，Y_1 は，A_1 で製造したときと全く同じ原料を用い，同じ人達が，同じ装置で，温度だけを 100°C で生産したときに得られたであろう収量で，実際には，X_1 の値を出せば Y_1 の値は得ることはできない．

反対に Y_1 の値を出せば X_1 の値を得ることは不可能である．しかしながら，X_1, Y_1 の両方の値がもし得られたならば，それは全く同じ条件の比較であるから，全く公平な比較である．同様に，明日 A_1 で生産したときの収量を X_2，明日 A_1 の代りに A_2 で生産したときの値を Y_2 とする．以下同様に Y_3, Y_4, ……, Y_{2n} を定義する．

実際には不可能なことであるが，もし，$2n$ 対のデータ (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ……, (X_{2n}, Y_{2n}) が得られたならば，現実におこり得るいろいろな条件で A_1, A_2 を全く公平に比較しているのだから，統計をとることによって A_1 と A_2 の優劣を比較できることになる．

ここに統計をとるとは，$2n$ 回の生産の全部を A_1 でやったときの収量の総和と $2n$ 回の生産の全部を A_2 でやったときの収量の総和は，どちらが大きいかというようなことである．

ところで，収量の合計は

$$X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{2n}=2n\bar{X} \tag{2.1}$$

$$Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_{2n}=2n\bar{Y} \tag{2.2}$$

であるから，収量の総和の比較には，$2n$ 回の生産全部の平均収量 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ がわかればよい．すなわち，平均収量 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ の比較がこの場合できればよいことによる．次に，2種類の頭痛薬 A_1, A_2 の比較を考える．最初の患者 R_1 に対して，いままでの頭痛薬 A_1 を与えたところ，2時間後に頭痛がなおらなかったとする．われわれのほしいデータは，その同じ患者に，2時間前に新しい頭痛薬 A_2 を飲ましていたら果して頭痛がなおっていたかどうか，ということである．同じ患者に，同じ時間に A_1 の代りに A_2 を与えていたらどうなっていたか，というデータがほしいのである．

いま，R_1 の患者に，A_1 の頭痛薬を飲ましたときなおっていれば 1，なおっていなければ 0 というデータを記号 X_1 で表わす．実際の場合には，X_1 は 0 か 1 の何れかの値をとることになるのであり，0 か 1 をとる確率的な変数を考えているわけではない．

同じ患者に，新しい頭痛薬 A_2 を与えてなおったときには 1，なおらなかったときには 0 というデータを Y_1 とする．

同様に，R_2, R_3, ……, R_{2n} の患者に対して A_1, A_2 を与えたときに実際に得られるデータを X_2, X_3, ……, X_{2n}; Y_2, Y_3, ……, Y_{2n} とする．

すなわち，病院に実際にくる $2n$ 人の患者 R_1, R_2, ……, R_{2n} に，今までの頭痛薬 A_1 を与えたときに実際になおったかどうかのデータが X_1, X_2, ……, X_{2n} であり，新しい頭痛薬 A_2 を与えたときになおったかどうかというデータが Y_1, Y_2, ……, Y_{2n} である．

したがって，X_1, X_2, ……, X_{2n} のデータは，もし $2n$ 人の患者のすべてにいままでの頭痛薬 A_1 を与えてみればわかるし，Y_1, Y_2, ……, Y_{2n} のデータも，その $2n$ 人の患者全部に新しい頭痛薬 A_2 を与えてみればわかることになる．ただ，残念なことには，同じ人間に，同じ時間に，A_1 の頭痛薬を与えた実験と A_2 の頭痛薬を与えた実験とを同時に行なうことはできないから，X_1, ……, X_{2n} と Y_1, ……, Y_{2n} を共に求めることはできない．X_1 のデータを出せば Y_1 のデータは出せないし，Y_1 の値を求めれば X_1 の値は得られないということである．

しかし，もし $2n$ 対のデータが全部得られたとすれば，その $2n$ 人の全部の患者に頭痛薬 A_1 を与えたときのなおった患者数と，その同じ $2n$ 人の全部の患者に頭痛薬 A_2 を与えたときのなおった患者数がわかるのであるから，それからどちらの頭痛薬がよいか全く公平な比較が得られたことになる．

しかしながら，温度の実験の場合でも，頭痛薬の実験の場合でも，X_i のデータを出せば Y_i のデータを出せないし，Y_i のデータを出せば X_i のデータを出せない．この問題をいかに解決したらよいのだろうか．それを解決したのが，R.A. Fisher で，実験の確率

化という概念に到達したのである.

その方法は，結局私達のほしいのは，全部の生産を A_1 でやったときの総収量と，全部の生産を A_2 でやったときの総収量であるから，平均収量 $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ を比較したいことになる．また，頭痛薬の場合には，全部の患者に頭痛薬 A_1 を与えた場合と，全部の患者に頭痛薬 A_2 を与えた場合の治癒率 $\bar{X}$, $\bar{Y}$ を比較したいことを意味する.

したがって，$\bar{X}$, $\bar{Y}$ の比較ができればよいことになる．そのためには，X_1, X_2, ……, X_{2n} の $2n$ 個のデータから半分の n 個のデータをランダムにサンプリングして，それらの値 x_1, x_2, ……, x_n の平均

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+\cdots\cdots+x_n) \tag{2.3}$$

で $\bar{X}$ を推定しようというわけである.

新聞社などは，全国の有権者の中から，3000 分の 1 の人をランダムに選んで，その人達のデータから，全国の有権者の動向の推定を行なっている．われわれの場合には，1/2, 50% のサンプルを抽出していることになる.

ところで，$2n$ 個全体の平均 $\bar{X}$ を推定するのに，半分の n 個のデータの平均で推定するのだから，残りの半分のデータは用いないことになる．したがって，日付を入れた $2n$ 本のくじを作っておいて，ランダムに抜いてきた半分の n 日だけで A_1 の生産を行ない，そのデータを x_1, x_2, ……, x_n とすればよい．残りの n 個のデータは $\bar{X}$ の推定には使われないのだからである.

残りの半分の n 日では A_2 の方法で生産を行ない，そのデータを y_1, y_2, ……, y_n とする．こんどは，ランダムに半分の n 日を選ぶことはできないが，それでも y_1, y_2, ……, y_n の平均

$$\bar{y}=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n) \tag{2.4}$$

は $\bar{Y}$ の推定になっていることが証明される．注 (2.1) を見よ.

$(\bar{x}-\bar{y})$ はランダム抽出という操作に対して，$(\bar{X}-\bar{Y})$ のかたよらない推定値であり，しかも $(\bar{x}-\bar{y})$ と $(\bar{X}-\bar{Y})$ の差の 2 乗の平均，いわゆる分散は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} &E[(\bar{x}-\bar{y})-(\bar{X}-\bar{Y})]^2 \\ &=\frac{1}{2n}[\sigma_X{}^2+2\rho\,\sigma_X\sigma_Y+\sigma_Y{}^2] \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここに，$\sigma_X{}^2$, $\sigma_Y{}^2$ は分散

$$\sigma_X{}^2=\frac{1}{2n-1}\{(X_1-\bar{X})^2+\cdots\cdots+(X_{2n}-\bar{X})^2\} \tag{2.6}$$

$$\sigma_Y{}^2=\frac{1}{2n-1}\{(Y_1-\bar{Y})^2+\cdots\cdots+(Y_{2n}-\bar{Y})^2\} \tag{2.7}$$

で，ρは $2n$ 対のデータ (X_1, Y_1)，……，(X_{2n}, Y_{2n}) の間の相関係数である．

$$\rho=\frac{\dfrac{1}{2n-1}\{(X_1-\bar{X})(Y_1-\bar{Y})+\cdots\cdots+(X_{2n}-\bar{X})(Y_{2n}-\bar{Y})\}}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{2.8}$$

$\sigma_X{}^2$, $\sigma_Y{}^2$ は，x_1, ……, x_n の分散 V_x; y_1, y_2, ……, y_n の分散 V_y から推定できる．相関係数ρは絶対値が1以下である．したがって，(2.5) 式の括弧内の値の大きさは評価できることになる．

その値に係数$\dfrac{1}{2n}$がかかっている．このことは，nを十分大きくとれば，半分ずつのデータの差 $(\bar{x}-\bar{y})$ で，全部を A_1, A_2 でやった差 $(\bar{X}-\bar{Y})$ がいくらでも精度よく推定できることを意味している．

2.2 実施の方法

A_1=温度を 90°C にする

A_2=温度を 100°C にする

を8回ずつ実験するとして，その実験順序を確率化するには次のようにすればよい．

A_1 のくじ8本，A_2 のくじ8本をもってきてよく混ぜて，1本を抜く．もしそれが A_1 のくじだったら，A_1 の実験をやり，そのデータを記録する．

次に残りの 15 本のくじの中から，1本を抜いてくる．もし，それが A_2 のくじなら A_2 の実験を1回やる．残りの 14 本の中から，1本を抜いてきて，それが A_2 のくじだったら，A_2 の実験をやるというように実験の順番を決めることになる．

この方法を完全な順序の確率化という．

2つの頭痛薬 A_1, A_2 の比較の場合には，銅貨を投げて（銅貨がないときには，腕時計の秒針を見て，秒針が 0～30 秒の範囲だったら頭痛薬 A_1 を，30～60 秒の範囲だったら頭痛薬 A_2 を与えることにする）表がでたら，今までの頭痛薬 A_1 を，裏がでたら新しい頭痛薬 A_2 を与えることにする．いま，裏がでたとする．しからば，第1の患者 R_1 には，新しい頭痛薬 A_2 が与えられることになる．そうすると，第2番目の患者には，A_1 の頭痛薬を与えることにするのである．

第3番目の患者 R_3 に対しては，改めて銅貨を投げて A_1 か A_2 を決めることになる．第3番目の患者のとき，表がでたら，その患者には今までの頭痛薬 A_1 を用いることになる．したがって，第4番目の患者には，自動的に新しい頭痛薬 A_2 を与えることになる．

このように，A_1, A_2 の比較を，実験回数が毎回揃うように確率化を行なう方法は，古

くは乱塊法 (Rondomized block design) と呼ばれたが，現在では二元配置法の特殊ケースと考える．**二元配置法**については4章で説明する．

実験順序の確率化を実際の工場現場で実行するのは困難なことが少なくない．

たとえば，まず，90°C の実験を8回つづけて行ない，次に，100°C の実験を8回つづけて行なった方がらくである．しかし，その場合には，たとえば，90°C の実験を8回つづけてやっている間，最初のうちは実験になれていなかったので，最初の実験ではまずい結果がでるかもしれない．

その場合には，90°C の実験値の方は，ハンディキャップがついたデータということになり，公平な比較とはいいがたいことになる．

A_1 の実験も A_2 の実験も，いろいろな条件に対して行なわれる機会が平等になるようにするのが実験の確率化ということになる．

たとえば，3種類の動物用の飼料があるとし，それを A_1, A_2, A_3 とする．27 匹の動物をランダムに9匹ずつに分け，各9匹の組に A_1, A_2, A_3 の飼料を与えて実験し，各動物のたとえば体重について，初めの体重 y_0 とそれらの飼料を与えてから1ヵ月後の体重 y' を測ったとする．

この場合データとしては，次の値

$$y=100\log\frac{y'}{y_0}$$

を用いるのがよい．y は $y'=y_0$ のときゼロとなるから，y がゼロよりどれだけ大きいかは重要な情報で，この場合，一般平均の推定や検定が必要になる．

ただし，$(y'-y_0)$ が y_0 に比較して小さい（ほぼ 0.3 倍以内）ときには

$$\begin{aligned}
&100\log\left(\frac{y'}{y_0}\right)\\
&=100\log\frac{y_0+y'-y_0}{y_0}\\
&=100\log\left(1+\frac{y'-y_0}{y_0}\right)\\
&\fallingdotseq 100\times\frac{y'-y_0}{y_0}
\end{aligned}$$

となるから

$$\text{変化率}=\frac{y'-y_0}{y_0}\times 100\ (\%) \tag{2.9}$$

をデータとしてよい．何故こうするかは，かなり難しい理由があるのだが，変化率のデータは，±30% に入る範囲だけに限った方が無難である．

一般に，27 匹の動物をランダムに 9 匹ずつの 3 組に分けて，A_1, A_2, A_3 の 3 種類の飼料の比較をするのはまずいことが多い．

というのは，もし，その 27 匹の動物の中に年令や性別や体重の異なったものが混在していれば，データの誤差が大きくなるからである．一方，それらの一定のものだけを集めて実験する場合には，27 匹もそれらの一定のものがいるかどうか不明である．仮にそれらが同じ 27 匹の動物がいたとしても，一定の性，年令，体重の動物のみで得られた結果がそれ以外の性，年令，体重の動物に同じように効くという保証がないと，その結果がどの範囲に使えるか疑問ということになる．

すなわち，動物をランダムに 9 匹ずつの 3 組に分けないで，たとえば，次のようにする．いま，動物の 27 匹がすべてメスだとする．27 匹のメスの年令と体重を測定する．そして，年令の若い方から番号をつけ，最も若い方の 9 匹を B_1, 真中の 9 匹を B_2, 若くない方の 9 匹を B_3 とする．その場合，8 番目，9 番目，10番目が全く同じ年令のときはランダムに 2 匹を B_1 の組に入れる．このようにして，B_1, B_2, B_3 を丁度 9 匹ずつの 3 組に分ける．

次に，B_1 の中の 9 匹を体重の順番にならべ，初期体重の最も少ない 3 匹を C_1, 中の 3 匹を C_2, 重い 3 匹を C_3 とする．この場合も 3 番目，4 番目，5 番目が全く同じなら，ランダムに 1 匹を C_1 の組に入れる．

次に，B_2 の 9 匹について，その中だけで体重の順に番号をつけ，最も軽い 3 匹を C_1, 中の 3 匹を C_2, 最も重い 3 匹を C_3 とする．B_3 についても，同様に C_1, C_2, C_3 の 3 匹ずつの 3 組をつくる．この場合 B_1 と B_2 の C_1 の間には差がどんなにあってもかまわない．B_1, B_2, B_3 のそれぞれの組の中での相対的順序で C_1, C_2, C_3 の分類をすることになる．

しからば，27 匹の動物が年令と体重で，3 水準の B と C の 9 組に分類されたことになる．3 種類の飼料 A_1, A_2, A_3 を，それら B_iC_j の各組の 3 匹にランダムに対応させることになる．

したがって，データは次のようになる．y は体重の変化率などのデータである．

	A_1	A_2	A_3
B_1C_1	y_{111}	y_{112}	y_{113}
B_1C_2	y_{121}	y_{122}	y_{123}
B_1C_3	y_{131}	y_{132}	y_{133}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
B_3C_3	y_{331}	y_{332}	y_{333}

B, C を**分類の因子**という．この場合，データの解析には，A, B, C の 3 つの因子を考

えていることになる．データ解析の仕方は三元配置法のところで説明する．

次に，2種類の頭痛薬の実験の場合には，あらかじめ患者を集めて分類することはできない．

次のようにするのである．実験の確率化は前に述べたように行なうのであるが，1番目2番目，3番目，……，$2n$ 番目の各患者について，患者の性，年令，症状等をカルテに記録しておくのである．

もし，A_1, A_2 で 100 人ずつの患者について実験が行なわれたときには，200 人について，患者の性，年令，症状と頭痛がなおったかどうかというデータがあることになる．

いま，頭痛薬 A_1 を与えた患者 100 人の中に，B_1＝男性が 60人，B_2＝女性が 40 人いたとする．また，年令Cを次の3クラス

C_1＝30 才以下

C_2＝31 才～50 才

C_3＝51 才以上

に分けたとき

	B_1	B_2
C_1	18人	10人
C_2	25	20
C_3	17	10

だったとする．B_iC_j の組の中の人間を更に症状によって，仮に3クラスに分けることになる．それを D_1, D_2, D_3 とする．

この場合，A, B, C, D の4つの因子の組合せに，一般に異なった人数の患者数と，頭痛が，なおったかどうかというデータがあることになる．ときには，ある A, B, C, D の水準の組合せでは，患者数はゼロのこともある．

いずれにしろ，このような方法を B, C, D について後分類するという．

後分類の場合には，データ数（いまの場合患者数）が不揃いになるが，その場合でも，適当な分散分析が可能である．

それらについては8章に述べることにする．

2.3 信頼限界の公式

(2.5) 式は，データの存在という仮定だけから導かれるものなのだから，(2.5) 式は，どんな場合にも成立する公式である．

実際には，nを大きくするには，時間や経費がかかるのだから適当な反復数nでやめなければならないのだが，多くの場合 n=数回乃至十数回が最も経済的になることが知られている．

(2.5) 式では，次の不等式が成立するから，どんな相関係数の場合でも，σ_X^2 と σ_Y^2 がどんなに異なっていても，$(\bar{x}-\bar{y})$ で $(\bar{X}-\bar{Y})$ の値を推定したときの信頼限界は，(2.12) 式によって計算してよいだろう．

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2n}\{\sigma_X^2+2\rho\,\sigma_X\sigma_Y+\sigma_Y^2\}\\ &\leq\frac{1}{2n}\{\sigma_X^2+2\sigma_X\sigma_Y+\sigma_Y^2\}\\ &=\frac{1}{2n}(\sigma_X+\sigma_Y)^2\\ &\leq\frac{2}{n}\sigma^2\end{aligned}\tag{2.10}$$

ただし

$$\sigma^2=\frac{1}{2}(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$$

σ_X^2 と σ_Y^2 の平均 σ^2 は，残差 2 乗和の誤差変動をその自由度で割って推定することができる．

$$\sigma^2=V_e=\frac{S_e}{2(n-1)}\tag{2.11}$$

これから

$$\bar{X}-\bar{Y}=(\bar{x}-\bar{y})\pm\sqrt{F_{2n-2}^{1}\times\frac{2\times V_e}{n}}\tag{2.12}$$

2.4 計算例

40 人の人間をランダムに半分の 20 人ずつに分けて，一方の 20 人にありのままの生活を，他方の 20 人にある運動をやらせたときの，ある期間の体重の増減率が次のようであった（単位 %）．

A_1 0.7, 0.1, 0.6, −0.5, 0.3, 0.5, 0.3, −0.2, 0.5, 0.4, 1.1, 0.6, 0.3, 0.5, 0.5, 0.8, 1.3, −0.1, −0.3, 0.2 (計 7.6)

A_2 1.3, −0.3, 0.5, −0.1, 0.1, 0.8, −0.5, −0.3, −0.1, 0.0, 0.0, −0.6, −1.0, −0.9, 0.3, 0.0, 0.2, 0.5, 0.9, −0.6 (計 0.2)

$$\bar{A}_1=\frac{7.6}{20}=0.38\tag{2.13}$$

$$\bar{A}_2=\frac{0.2}{20}=0.01 \qquad (2.14)$$

$$S_m=\frac{7.8^2}{40}=1.52 \qquad (f=1) \qquad (2.15)$$

$$S_T=0.7^2+0.1^2+\cdots\cdots+(-0.6)^2$$
$$=13.38 \qquad (f=40) \qquad (2.16)$$

$$S_A=\frac{7.6^2+0.2^2}{20}-S_m$$
$$=1.37 \qquad (f=1) \qquad (2.17)$$

これから，誤差変動 S_e は

$$S_e=S_T-S_m-S_A$$
$$=13.38-1.52-1.37$$
$$=10.49 \qquad (f=38) \qquad (2.18)$$

これをその自由度 38 で割れば，平均の誤差分散となる．

$$V_e=\frac{S_e}{38}=\frac{10.49}{38}=0.27 \qquad (2.19)$$

運動がどれ位平均として，体重を減少させるかの真値を $\bar{X}-\bar{Y}$ とすれば

$$\bar{X}-\bar{Y}\text{ の推定}=\bar{A}_1-\bar{A}_2=0.38-0.01$$
$$\bar{X}-\bar{Y}=0.37\pm0.33 \qquad (2.20)$$

ここに，信頼限界は

$$\pm\sqrt{F^1_{38}\times V_e\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)}$$
$$=\pm\sqrt{4.10\times0.27\times\frac{2}{20}}=\pm0.33 \qquad (2.21)$$

として求められたのである．

この期間は体重を増加させる傾向の季節だったが，その運動によって体重増がなくてすんだのである．

2.5 一 元 配 置 法

ある一つの因子について，k 通りの条件すなわち k 水準に変えて，各水準で等しい反復数，または，n_1，n_2，……，n_k の異なった反復数のデータを**一元配置法**のデータという．反復数は繰返えし数であることも少なくない．各水準間の比較の精度を高めるためには，反復数はできるなら等しい方が望ましいが，やむを得ぬときは，異なった反復数でもよい．

2.5.1 反復数が等しい場合

頭痛薬の実験のとき，新しい頭痛薬について，投薬量を3通り

$A_2=1$ 日 1 g

$A_3=1$ 日 2 g

$A_4=1$ 日 4 g

に変え，現在の頭痛薬 A_1（投薬量は標準の方法）と比較する場合には，因子 A について4水準であるという．

一般に，因子Aについてa水準で，A_1, A_2, ……, A_a に対して，反復数が何れもn回の実験をやったものとする．そのデータを表 2.1 のように表わす．（データ y_{ij} は目標値 y_0 からの差が測定されているものとする．）

表 2.1 反復数nのデータ

					計
A_1	y_{11}	y_{12}	……	y_{1n}	A_1
A_2	y_{21}	y_{22}	……	y_{2n}	A_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_a	y_{a1}	y_{a2}	……	y_{an}	A_a

しからば，A_1, A_2, ……, A_a を用いて

$$S_m=\frac{(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_a)^2}{an} \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (2.22)$$

$$S_A=\frac{A_1^2+A_2^2+\cdots\cdots+A_a^2}{n}-S_m \qquad (\mathrm{f}=a-1) \qquad (2.23)$$

$$S_T=y_{11}^2+y_{12}^2+\cdots\cdots+y_{an}^2 \qquad (\mathrm{f}=an) \qquad (2.24)$$

$$S_e=S_T-S_m-S_A \qquad (\mathrm{f}=an-a) \qquad (2.25)$$

したがって，要因分析表は表 2.2 のようになる．

表 2.2 分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
m	1	S_m	V_m	F_m	S_m'	ρ_m
A	$a-1$	S_A	V_A	F_A	S_A'	ρ_A
e	$a(n-1)$	S_e	V_e		S_e'	ρ_e
T	an				S_T	100.0

ここに

$$V_m=\frac{S_m}{1}=S_m \qquad (2.26)$$

$$V_A=\frac{S_A}{a-1} \qquad (2.27)$$

$$V_e=\frac{S_e}{a(n-1)} \tag{2.28}$$

$$F_m=\frac{V_m}{V_e} \tag{2.29}$$

$$F_A=\frac{V_A}{V_e} \tag{2.30}$$

$$S_m'=S_m-V_e \tag{2.31}$$

$$S_A'=S_A-(a-1)V_e \tag{2.32}$$

$$S_e=S_e+aV_e \tag{2.33}$$

$$\rho_m=\frac{S_m'}{S_T} \tag{2.34}$$

$$\rho_A=\frac{S_A'}{S_T} \tag{2.35}$$

$$\rho_e=\frac{S_e'}{S_T} \tag{2.36}$$

推定

Aが有意でないときには，推定は一般平均のみにとどめるのが普通である．その場合，Aの効果はゼロと見做すことになるのだから，S_A は S_e にプールして，新しいプール（込みに）した誤差分散（同じ記号 V_e で示す）を求める．

$$V_e=\frac{S_A+S_e}{(a-1)+a(n-1)}$$

$$=\frac{S_A+S_e}{an-1} \tag{2.37}$$

したがって

$$m=\hat{m}\pm\sqrt{\frac{F^1_{an-1}\times V_e}{an}} \tag{2.38}$$

A の効果が有意ならば，A の水準毎の比較をするために，A の水準毎に平均値を作る．$\bar{A}_i$ でAの i 水準の平均として

$$\left.\begin{matrix}\bar{A}_1\pm\varepsilon\\ \bar{A}_2\pm\varepsilon\\ \vdots\\ \bar{A}_a\pm\varepsilon\end{matrix}\right\} \tag{2.39}$$

ここに，ε は共通の信頼限界で

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{F^1_{a(n-1)}\times V_e}{n}} \tag{2.40}$$

で与えられる．この場合の V_e は，分散分析表の誤差分散 V_e である．ときにはAの効果の比較をみやすくするために，グラフに表示する．

A の効果を自由度1の成分に分解して計算することもある．そのような線形式は，A_1, A_2, ……, A_a の間の定数係数の1次式

$$L=C_1A_1+C_2A_2+\cdots\cdots+C_aA_a \tag{2.41}$$

において，係数の和がゼロになる．その理由は，一般平均

$$m=\frac{A_1+\cdots\cdots+A_a}{an}$$

と直交しなければならないからである．注(2.2)に述べるように，直交しないと変動の分解が成立しないからである．

(2.41) 式の変動は自由度1で，次式で求められる．

$$S_L=\frac{(C_1A_1+C_2A_2+\cdots\cdots+C_aA_a)^2}{(C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_a^2)n} \tag{2.42}$$

また，信頼限界は

$$L\text{の真値}=L\pm\sqrt{F\times V_e(C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_a^2)} \tag{2.43}$$

2個の線形式

$$L_1=C_1A_1+C_2A_2+\cdots\cdots+C_aA_a \tag{2.44}$$

$$L_2=C_1'A_1+C_2'A_2+\cdots\cdots+C_a'A_a \tag{2.45}$$

において，係数の積の和がゼロ

$$C_1C_1'+C_2C_2'+\cdots\cdots+C_aC_a'=0 \tag{2.46}$$

のとき，L_1 と L_2 は**直交する**という．$(a-1)$ 個の線形式 L_1, L_2, ……, L_{a-1} が互いに，また一般平均mとも直交するならば，自由度 $(a-1)$ の S_A は

$$S_A=S_{L_1}+S_{L_2}+\cdots\cdots+S_{L_{a-1}} \tag{2.47}$$

と分解される．

ただし，S_{L_i} は次式で与えられる．

$$S_{L_i}=\frac{L_i^2}{(\text{係数の2乗和})n} \tag{2.48}$$

2.5.2 反復数が等しい場合，計算例

ピン穴加工において，加工順序Aを次のように3水準に変えて，反復数 10 の実験を行ない，ピン穴の真円度を測った結果は，表 2.3 のようであった．

A_1 (下穴貫通)→(リーマ下穴)→(リーマー)→(逃穴加工)

A_2 (下穴途中まで)→(リーマ下穴)→(リーマー)→(逃穴加工)

A_3 (逃穴加工)→(下　穴)→(リーマ下穴)→(リーマー)

表 2.3 真円度のデータ(単位 ミクロン)

											計
A_1	10	15	3	18	8	4	6	10	0	13	87
A_2	12	14	5	6	4	1	11	15	7	10	85
A_3	8	2	0	4	1	6	5	3	2	4	35
計											207

この場合には，目標値は 0 であるから，一般平均mも検定する.

$$S_m=\frac{207^2}{30}=1\,428 \qquad (f=1) \qquad (2.49)$$

$$S_A=\frac{A_1^2+A_2^2+A_3^2}{10}-S_m$$

$$=\frac{87^2+85^2+35^2}{10}-1\,428$$

$$=1\,602-1\,428=174 \qquad (f=2) \qquad (2.50)$$

$$S_T=10^2+15^2+3^2+\cdots\cdots+4^2$$

$$=2\,131 \qquad (f=30) \qquad (2.51)$$

表 2.4 分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
m	1	1 428	1 428	72.9**	1 408.4	66.0
A	2	174	87	4.4*	134.8	6.3
e	27	529	19.6		587.8	27.6
T	30	2 131			2 131.0	100.0

この場合，mは分子の自由度 $f_1=1$, 分母の自由度 $f_2=27$ のF表の値と比較し，要因Aは，分子の自由度 $f_1=2$, 分母の自由度 $f_2=27$ のF表の値と比較する．mは 1% 有意であり，Aは 5% 有意である.

$$S_m'=1\,428-19.6=1\,408.4 \qquad (2.52)$$

$$S_A'=174-2\times19.6=134.8 \qquad (2.53)$$

$$S_e'=529+3\times19.6=587.8 \qquad (2.54)$$

$$\rho_m=\frac{1\,408.4}{2\,131}=0.661 \qquad (2.55)$$

$$\rho_A=\frac{134.8}{2\,131}=0.063 \qquad (2.56)$$

$$\rho_e=\frac{587.8}{2\,131}=0.276 \qquad (2.57)$$

推定

この場合，一般平均mも，Aも有意である．したがって，Aの水準毎の推定をする.

$$\bar{A}_1=\frac{A_1}{n}=\frac{87}{10}=8.7 \tag{2.58}$$

同様に

$$\bar{A}_2=\frac{85}{10}=8.5 \tag{2.59}$$

$$\bar{A}_3=\frac{35}{10}=3.5 \tag{2.60}$$

信頼限界は，A_1, A_2, A_3 に共通で，次式で求める．

$$\pm\sqrt{\frac{F\times V_e}{n_e}}=\pm\sqrt{\frac{4.21\times 19.6}{10}}=\pm 2.9 \tag{2.61}$$

これから

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A}_1=8.7\pm 2.9\\ \bar{A}_2=8.5\pm 2.9\\ \bar{A}_3=3.5\pm 2.9\end{array}\right\} \tag{2.62}$$

あるときには，A_1 と A_2 の差，または，A_1, A_2 の平均と A_3 の差を求めたいことがある．そのような場合，A_1 と A_2 の差をLとして，まず変動 S_L を求める．

$$S_L=\frac{(A_1-A_2)^2}{20}=\frac{(87-85)^2}{20}=0.2 \tag{2.63}$$

したがって

$$F_0=\frac{S_L}{V_e}=\frac{0.2}{19.6}=0.01 \tag{2.64}$$

は有意でないから，A_1, A_2 の差は求める必要はない．

A_1, A_2 の平均と A_3 との間の有意差検定は，その線形式を L_2 として

$$L_2=\frac{A_1+A_2}{20}-\frac{A_3}{10} \tag{2.65}$$

$$S_{L_2}=\frac{\left(\frac{87+85}{20}-\frac{35}{10}\right)^2}{\left(\frac{1}{20}\right)^2\times 20+\left(-\frac{1}{10}\right)^2\times 10}=173.4 \tag{2.66}$$

これは

$$F_0=\frac{173.4}{19.6}=8.95 \tag{2.67}$$

で有意差がある．したがって推定値は

$$L=\frac{87+85}{20}-\frac{35}{10}\pm\sqrt{F\times V_e\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{10}\right)}$$
$$=5.1\pm 3.5 \tag{2.68}$$

で与えられる．

一般平均 m, A_1 と A_2 の差, A_1, A_2 と A_3 の差の3つの線形式を L_1, L_2, L_3 とする.

$$L_1=\frac{A_1+A_2+A_3}{30} \tag{2.69}$$

$$L_2=\frac{A_1-A_2}{10} \tag{2.70}$$

$$L_3=\frac{A_1+A_2}{20}-\frac{A_3}{10} \tag{2.71}$$

とすれば, L_1, L_2, L_3 は互いに直交する. たとえば L_2 と L_3 は

$$\frac{1}{10}\times\frac{1}{20}+\left(-\frac{1}{10}\right)\times\frac{1}{20}+0\times\left(-\frac{1}{10}\right)=0 \tag{2.72}$$

したがって

$$S_{L_2}+S_{L_3}=0.2+173.4=S_A \tag{2.73}$$

2.5.3 反復数が不揃いの場合

a 水準の因子 A に対して, A_1, A_2, ……, A_a の反復数 n_1, n_2, ……, n_a が一般に等しくないときには, 計算は次のようになる.

$$S_T=(n_1+n_2+\cdots\cdots+n_a)\text{ 個の個々の値の 2 乗和}\qquad (\mathrm{f}=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_a) \tag{2.74}$$

$$S_m=\frac{(\text{全部の合計})^2}{n_1+n_2+\cdots\cdots+n_a}\qquad (\mathrm{f}=1) \tag{2.75}$$

$$S_A=\frac{A_1{}^2}{n_1}+\frac{A_2{}^2}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{A_a{}^2}{n_a}-S_m\qquad (\mathrm{f}=a-1) \tag{2.76}$$

$$S_e=S_T-S_m-S_A\qquad (\mathrm{f}=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_a-a) \tag{2.77}$$

したがって, 分散分析表は表 2.5 のようになる.

表 2.5 分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
m	1	S_m	V_m	F_m	S_m'	ρ_m
A	$a-1$	S_A	V_A	F_A	S_A'	ρ_A
e	$n-a$	S_e	V_e		S_e'	ρ_e
T	n				S_T	100.0

ただし

$$n=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_a$$

である.

自由度 $(a-1)$ の A_1, A_2, ……, A_a 間の差を, 要求に直結する $(a-1)$ 個の線形式に分解することがある. いま, 一般平均 m の線形式 L_m, $(a-1)$ 個の A の水準間の線形式を次のように表わそう.

$$L_m=\frac{A_1+A_2+\cdots\cdots+A_a}{n_1+n_2+\cdots\cdots+n_a} \tag{2.78}$$

$$\left.\begin{array}{l} L_1=C_{11}A_1+C_{12}A_2+\cdots\cdots+C_{1a}A_a \\ L_2=C_{21}A_1+C_{22}A_2+\cdots\cdots+C_{2a}A_a \\ \quad\vdots \\ L_{a-1}=C_{a-1,1}A_1+C_{a-1,2}A_2+\cdots\cdots+C_{a-1,a}A_a \end{array}\right\} \tag{2.79}$$

いま，上の a 個の線形式において，それらの係数の積の和（正確には，A_1 は n_1 個の和，A_a は n_a 個の和であるから，それらの重みをかけた係数の積の和）がゼロならば，それらは互いに直交する線形式であるという．たとえば，L_m と L_1 の直交条件は

$$n=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_a \tag{2.80}$$

として

$$\frac{1}{n}\times C_{11}\times n_1+\frac{1}{n}\times C_{12}\times n_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\times C_{1a}\times n_a=0 \tag{2.81}$$

また，L_1 と L_2 の直交条件は

$$C_{11}\times C_{21}\times n_1+C_{12}\times C_{22}\times n_2+\cdots\cdots+C_{1a}\times C_{2a}\times n_a=0 \tag{2.82}$$

もし，L_m, L_1, L_2, ……, L_{a-1} が互いに直交する線形式ならば

$$\left.\begin{array}{l} S_{L_1}=\dfrac{L_1^2}{C_{11}^2\times n_1+C_{12}^2\times n_2+\cdots\cdots+C_{1a}^2\times n_a} \\ S_{L_2}=\dfrac{L_2^2}{C_{21}^2\times n_1+C_{22}^2\times n_2+\cdots\cdots+C_{2a}^2\times n_a} \\ \quad\vdots \\ S_{L_{a-1}}=\dfrac{L_{a-1}^2}{C_{a-1,1}^2\times n_1+C_{a-1,2}^2\times n_2+\cdots\cdots+C_{a-1,a}^2\times n_a} \end{array}\right\} \tag{2.83}$$

は互いに直交する変動で，S_A はそれらの和によって表現される．

$$S_A=S_{L_1}+S_{L_2}+\cdots\cdots+S_{L_{a-1}} \tag{2.84}$$

また，L_1, L_2, ……, L_{a-1} の変動を検定して有意差があったらそれらの値を推定することになる．その場合の信頼限界は

$$\begin{aligned} &L_1\pm\sqrt{F\times V_e\times \text{係数の 2 乗和}} \\ &=L_1\pm\sqrt{F\times V_e\times\{C_{11}^2\times n_1+\cdots\cdots+C_{1a}^2\times n_a\}} \end{aligned} \tag{2.85}$$

$$L_2\pm\sqrt{F\times V_e\times\{C_{21}^2\times n_1+\cdots\cdots+C_{2a}^2\times n_a\}} \tag{2.86}$$

他の線形式についても全く同様である．

どのような線形式を考えるかは，研究者，技術者の個人個人が目的によって決めることである．それが最も難しいことであって，どういう線形式が自分のほしい未知数の推定になっているかがわかれば，あとはその推定値の2乗をその係数の2乗和で割って変動を計

算したり，信頼限界を作ることは，統計解析の共通技術の問題である．

ここに，分解の一例を示そう．いま，5種類の洋服地が次のようであったとする．

A_1＝自社の純毛の生地

A_2＝英国の純毛の生地

A_3＝自社の混紡の生地

A_4＝α 社の混紡の生地

A_5＝β 社の混紡の生地

いま，A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の各々から，試料を5個，3個，10個，4個，4個ずつとって，しわの回復率を測ったとする．次のような線形式を考える．

L_1＝純毛と混紡の差

$$=\frac{A_1+A_2}{8}-\frac{A_3+A_4+A_5}{18} \tag{2.87}$$

L_2＝純毛における自社と英国の差

$$=\frac{A_1}{5}-\frac{A_2}{3} \tag{2.88}$$

L_3＝混紡の自社と他社の差

$$=\frac{A_3}{10}-\frac{A_4+A_5}{8} \tag{2.89}$$

L_4＝混紡の他社間の差

$$=\frac{A_4}{4}-\frac{A_5}{4} \tag{2.90}$$

この4つの対比は互いに直交する．したがって，適当に通分して簡単にすれば L_1, L_2, L_3, L_4 に対する変動は，次式で計算することができる．

$$S_{L_1}=\frac{\{9(A_1+A_2)-4(A_3+A_4+A_5)\}^2}{9^2\times 8+(-4)^2\times 18} \tag{2.91}$$

$$S_{L_2}=\frac{(3A_1-5A_3)^2}{3^2\times 5+(-5)^2\times 3} \tag{2.92}$$

$$S_{L_3}=\frac{\{4A_3-5(A_4+A_5)\}^2}{4^2\times 10+(-5)^2\times 8} \tag{2.93}$$

$$S_{L_4}=\frac{(A_4-A_5)^2}{1^2\times 4+(-1)^2\times 4} \tag{2.94}$$

また，たとえば L_1 の信頼限界は次の式で与えられる．

$$\pm\sqrt{F\times V_e\times\{\text{係数の2乗和}\}}$$

$$=\pm\sqrt{F\times V_e\times\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^2\times 8+\left(-\frac{1}{18}\right)^2\times 18\right\}}$$

$$=\pm\sqrt{F\times V_e\times\left\{\frac{1}{8}+\frac{1}{18}\right\}} \tag{2.95}$$

他の線形式については，読者に任せる．

2.5.4 計算例

4種類の製品

A_1＝外国製品

A_2＝自社製品

A_3＝国内α社製品

A_4＝国内β社製品

について，それぞれ，2個，10個，6個，6個ずつの品物をとり，300時間の連続劣化テストを行なった．表 2.6 は，次の変化率のデータである．

$$y=\frac{\text{テスト後の値}-\text{初期値}}{\text{初期値}}\times 100 \tag{2.96}$$

ただし，(2.96) 式を用いる場合は，変化率が ±30.0% 以内の範囲のときのみである．

表 2.6　変化率 y のデータ（単位 %）

A_1	12	14								
A_2	20	18	19	17	15	16	13	18	22	17
A_3	26	19	26	28	23	25				
A_4	24	25	18	22	27	24				

A_1，A_2，A_3，A_4 の合計を作る．

$$A_1=12+24=26$$

$$A_2=20+18+\cdots\cdots+17=175$$

$$A_3=26+19+\cdots\cdots+25=147$$

$$A_4=24+25+\cdots\cdots+24=140$$

$$\begin{aligned}T&=A_1+A_2+A_3+A_4\\&=26+175+147+140\\&=488\end{aligned}$$

これから

$$S_m=\frac{T^2}{n}=\frac{488^2}{24}=9923 \qquad (f=1) \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}S_A&=\frac{A_1^2}{2}+\frac{A_2^2}{10}+\frac{A_3^2}{6}+\frac{A_4^2}{6}-S_m\\&=\frac{26^2}{2}+\frac{175^2}{15}+\frac{147^2+140^2}{6}-9923\\&=346 \qquad (f=3)\end{aligned} \tag{2.98}$$

$$S_T=12^2+14^2+20^2+\cdots\cdots+24^2$$
$$=10\,426 \qquad (f=24) \qquad (2.99)$$
$$S_e=S_T-S_m-S_A$$
$$=10\,426-9923-346$$
$$=157 \qquad (f=20) \qquad (2.100)$$

したがって，分散分析表は表 2.7 のようになる．

表 2.7　分散分析表

要　因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
m	1	9 923	9 923	1 264.1	9 915	95.1
A	3	346	115.3	14.7	322	3.1
e	20	157	7.85		189	1.8
T	24	10 426			10 426	100.0

ところで，このような場合，4種類の製品間の差というような総括的な比較でなくて

L_1＝外国製品と日本製品の差

L_2＝自社製品と国内他社製品の差

L_3＝国内他社間の差

というような，きめのこまかい比較をしたいことが普通である．それらの比較は，1個1個のデータに同じ重要度をおいた次の線形式から計算することができる．

$$L_1=\frac{A_1}{2}-\frac{A_2+A_3+A_4}{22}$$
$$=\frac{26}{2}-\frac{462}{22}$$
$$=-8.0\pm4.2 \qquad (2.101)$$
$$L_2=\frac{A_2}{10}-\frac{A_3+A_4}{12}$$
$$=\frac{175}{10}-\frac{287}{12}$$
$$=-6.4\pm2.5 \qquad (2.102)$$
$$L_3=\frac{A_3-A_4}{6}$$
$$=\frac{147-140}{6}$$
$$=1.2\pm3.3 \qquad (2.103)$$

これらの線形式は，互いに直交し，しかも一般平均

$$L_m=\frac{A_1+A_2+A_3+A_4}{24} \tag{2.104}$$

とも直交する．なぜなら，L_m と L_1 の直交性は，係数の積の和がゼロになるからである．

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{24}\right)\times 2+\left(-\frac{1}{22}\right)\times\left(\frac{1}{24}\right)\times 22=0 \tag{2.105}$$

また，L_1 と L_2 の直交性は，係数の積和を作ると，やはりゼロになる．

$$\frac{1}{2}\times 0\times 2+\left(-\frac{1}{22}\right)\times\frac{1}{10}\times 10+\left(-\frac{1}{22}\right)\times\left(-\frac{1}{12}\right)\times 12=0 \tag{2.106}$$

すなわち，線形式 L_1, L_2, L_3 の変動を作れば

$$S_A=S_{L_1}+S_{L_2}+S_{L_3} \tag{2.107}$$

の分解が成立する．

$$\begin{aligned}S_{L_1}&=\frac{L_1^2}{\text{係数の 2 乗和}}\\&=\frac{\left(\frac{A_1}{2}-\frac{A_2+A_3+A_4}{22}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2+\left(-\frac{1}{22}\right)^2\times 22}\\&=\frac{[11A_1-(A_2+A_3+A_4)]^2}{11^2\times 2+(-1)^2\times 22}\\&=\frac{(286-462)^2}{264}=117\end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}S_{L_2}&=\frac{\left(\frac{A_2}{10}-\frac{A_3+A_4}{12}\right)^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2\times 10+\left(-\frac{1}{12}\right)^2\times 12}\\&=\frac{[6A_2-5(A_3+A_4)]^2}{6^2\times 10+(-5)^2\times 12}\\&=\frac{(1\,050-1\,435)^2}{660}=225\end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\begin{aligned}S_{L_3}&=\frac{\left(\frac{A_3}{6}-\frac{A_4}{6}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 6+\left(-\frac{1}{6}\right)^2\times 6}\\&=\frac{(A_3-A_4)^2}{12}=4\end{aligned} \tag{2.110}$$

したがって，A の効果を自由度 1 の 3 つの成分に分解した分散分析表は表 2.8 のようになる．

表 2.8　分 散 分 析 表

要 因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
m	1	9 923	9 923	1 264.1**	9 915	95.1
A L_1	1	117	117	14.9**	109	1.0
A L_2	1	225	225	28.7**	217	2.1
A L_3	1	4	4	0.5	—	
e	20	157	7.85			
(e)	21	(161)	(7.67)		185	1.8
T	24	10 426			10 426	100.0

分散分析の結果は，L_1 と L_2 には有意な差がみられるが，国内の他社間 L_3 には有意な差は存在しないことになる．

このように差が認められなかったときには，その効果は誤差の中に，その他の効果としてプールするのがよい．いまの場合，L_3 の効果は誤差変動に入れたので，$V_e \fallingdotseq 8$，$S_e'=161+8\times3=185$ となった．したがって，変化率の差 L_1 の信頼限界の計算は

$$\pm\sqrt{F_{21}^1\times V_e\times 単位数}$$

$$=\pm\sqrt{4.32\times7.67\times\frac{6}{11}}=\pm4.2 \qquad (2.111)$$

ここに，誤差分散 V_e は，L_3 を S_e にプールしたので

$$V_e=\frac{157+4}{21}=7.67 \qquad (2.112)$$

を用いた．

$$単位数=係数の2乗和$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times2+\left(-\frac{1}{22}\right)^2\times22$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{22}=\frac{12}{22}=\frac{6}{11} \qquad (2.113)$$

他の信頼限界の計算も全く同様にして求められたものである．

(2.103) 式の L_3 は有意差がないから，実際には推定しないのが普通である．

演 習 問 題

問 (2.1)　関東地方であるテレビ広告をしたあとで，自社製品を売っている小売店について，その売上規模の大きさで3クラス A_1 (大規模の店)，A_2 (中規模の店)，A_3 (小規模の店) の各々から6軒ずつ選んで，テレビ広告前の売上高に対するテレビ広告後の売上高の伸びを調べたら次のようであった (単位 %)．

A_1　9　7　10　5　8　8

A_2 6 5 8 7 5 6

A_3 7 4 5 3 2 0

データ解析をし，店の規模によってテレビ広告の効果が異なるかどうかを調べよ．また，A_1, A_2, A_3 の各クラスの全店の総売上高が 20 億円，48 億円，10 億円のとき，このテレビ広告は売上金額をいくら伸ばすかを推定せよ．

問 (2.2) 4種類の製品 A_1=外国製品，A_2=自社製品，A_3=国内α社製品，A_4=国内β社製品について，それぞれ2個，5個，5個，5個の品物をとり，300 時間の連続劣化テストを行なった．データは次の変化率である．

$$y=\frac{\text{テスト後の値}-\text{初期値}}{\text{初　期　値}}\times 100\ (\%)$$

A_1 12 14

A_2 20 18 15 17 15

A_3 26 19 25 28 23

A_4 24 25 18 22 27

（1） Aを A'=外国製品と日本製品，A''=自社製品と他社（国内）製品，A'''=α 社製品と β 社製品の3つの成分に分解して，分散分析せよ．

（2） 有意な成分について，推定を行ない，結論を示せ．

注

(2.1) (2.5) 式の証明　2.1 節の実験の確率化に出てくる (2.5) 式の証明をする．

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{2n}$ から，大きさnのサンプル $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ をランダムに選んだときの平均 $\bar{x}$ とその分散 $\mathrm{Var}(\bar{x})$ はつぎのようになる．

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{2n}$ からn個をとるあらゆる組合せは $\binom{2n}{n}$ で，そのうちの1つが選ばれたことになる．したがって，$\binom{2n}{n}$ のあらゆる組合せについて和を作れば，その中に各 X_i は残りの $(2n-1)$ から $(n-1)$ 個をとるあらゆる組合せの数だけあることになるから

$$E(\bar{x})=\frac{1}{\binom{2n}{n}}\times\frac{1}{n}\times\binom{2n-1}{n-1}(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_{2n})$$

$$=\frac{n!n!}{(2n)!}\times\frac{1}{n}\times\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}\times 2n\times\bar{X}$$

$$=\bar{X} \tag{*2.1}$$

$$\mathrm{Var}(\bar{x})=E\{(\bar{x}-\bar{X})^2\}$$

$$=E\left\{\left[\frac{(x_1-\bar{X})+\cdots\cdots+(x_n-\bar{X})}{n}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2}E\{(x_1-\bar{X})^2+\cdots\cdots+(x_n-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})[(x_1-\bar{x})+\cdots\cdots$$

$$+(x_{i-1}-\bar{X})+(x_{i+1}-\bar{X})+\cdots\cdots+(x_n-\bar{X})]\} \tag{*2.2}$$

$2n$ 個から，n 個をとるあらゆる組合せ $\binom{2n}{n}$ において，$(x_1-\bar{X})^2, \cdots\cdots, (x_n-\bar{X})^2$ のすべての和を作れば，$(X_1-\bar{X})^2, \cdots\cdots, (X_{2n}-\bar{X})^2$ はその対称性から同数回現われ，しかもその総回数は，

$\binom{2n}{n}\times n$ であるから，$(X_i-\bar{X})^2$ の現われる回数はその $1/2n$ すなわち

$$\frac{1}{2n}\times\binom{2n}{n}\times n=\frac{1}{2}\binom{2n}{n} \tag{*2.3}$$

回である．また，積の項の和に入っている全体の個数は，$n(n-1)$ 個で，$(X_i-\bar{X})(X_j-\bar{X})$ $(i\neq j)$ の現われる回数は，全部等しいはずだから，各項の現われる回数は

$$\frac{1}{2n(2n-1)}\times\binom{2n}{n}\times n(n-1)=\frac{n-1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n} \tag{*2.4}$$

である．しかるに

$$\begin{aligned}&(X_i-\bar{X})[(X_1-\bar{X})+\cdots\cdots+(X_{i-1}-\bar{X})+(X_{i+1}-\bar{X})+\cdots\cdots+(X_{2n}-\bar{X})]\\&=-(X_i-\bar{X})^2\end{aligned} \tag{*2.5}$$

が成立する．すなわち，(*2.2) 式の値は

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\bar{x})&=\frac{1}{n^2}\frac{1}{\binom{2n}{n}}\left\{\frac{1}{2}\binom{2n}{n}[(X_1-\bar{X})^2+\cdots\cdots+(X_{2n}-\bar{X})^2]\right.\\&\quad\left.+\frac{n-1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n}[-(X_1-\bar{X})^2-\cdots\cdots-(X_{2n}-\bar{X})^2]\right\}\\&=\frac{1}{n^2}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2(2n-1)}\right](2n-1)\sigma_X{}^2\right\}\\&=\frac{1}{2n}\sigma_X{}^2\end{aligned} \tag{*2.6}$$

同様に

$$E(\bar{y})=\bar{Y} \tag{*2.7}$$

$$\mathrm{Var}(\bar{y})=\frac{1}{2n}\sigma_Y{}^2 \tag{*2.8}$$

次に，$(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y})$ の期待値を考える．

$$\begin{aligned}&E\{(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y})\}\\&=E\left\{\frac{[(x_1-\bar{X})+\cdots\cdots+(x_n-\bar{X})][(y_1-\bar{Y})+\cdots\cdots+(y_n-\bar{Y})]}{n^2}\right\}\\&=\frac{1}{n^2}E\{\sum_{ij}(x_i-\bar{X})(y_j-\bar{Y})\}\end{aligned} \tag{*2.9}$$

の大括弧内の n^2 個の項の中で，$(X_i-\bar{X})(Y_j-\bar{Y})$ の現われる回数を考える．$i=j$ のことはなく，$i\neq j$ ならばその組合せが現われる回数は全部等しいはずである．したがって，各積の項の現われる回数は

$$\frac{1}{\binom{2n}{n}}\times\frac{n^2}{2n(2n-1)}\times\binom{2n}{n}=\frac{n}{2(2n-1)} \tag{*2.10}$$

ということになる．すなわち

$$\begin{aligned}E\{(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y})\}&=\frac{1}{n^2}\times\frac{n}{2(2n-1)}[\sum_{ij}(X_i-\bar{X})(Y_j-\bar{Y})]\\&=\frac{1}{2n(2n-1)}\sum_{i=1}^{2n}(X_i-\bar{X})[(Y_1-\bar{Y})+\cdots\cdots\\&\quad+(Y_{i-1}-\bar{Y})+(Y_{i+1}-\bar{Y})+\cdots\cdots+(Y_{2n}-\bar{Y})]\end{aligned}$$

$$=\frac{-1}{2n(2n-1)}\sum_{i=1}^{2n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$$

$$=-\frac{1}{2n}\rho\,\sigma_X\sigma_Y \qquad (*2.11)$$

したがって

$$E(\bar{x}-\bar{y})=\bar{X}-\bar{Y} \qquad (*2.12)$$

$$\mathrm{Var}(\bar{x}-\bar{y})=E\{(\bar{x}-\bar{X})-(\bar{y}-\bar{Y})\}^2$$

$$=E\{(\bar{x}-\bar{X})^2-2(\bar{x}-\bar{X})(\bar{y}-\bar{Y})+(\bar{y}-\bar{Y})^2\} \qquad (*2.13)$$

(*2.6), (*2.8), (*2.11) 式を代入して,

$$\mathrm{Var}(\bar{x}-\bar{y})=\frac{1}{2n}\sigma_X{}^2-2\times\frac{-1}{2n}\rho\,\sigma_X\sigma_Y+\frac{1}{2n}\sigma_Y{}^2$$

$$=\frac{1}{2n}[\sigma_X{}^2+2\rho\,\sigma_X\sigma_Y+\sigma_Y{}^2] \qquad (*2.14)$$

これで証明が終わった.

(2.2) データ解析と通信理論　データ解析は, 調査や実験のデータからどのような解析をしたらより正しい結論が得られるかを教えてくれるものである. R.A. Fisher が開発した実験計画法は, 実験や調査の設計に重要であるのみでなく, データ解析にも新しい方法を開発したものである. 通信理論と実験計画法, 特に通信理論とデータ解析の関係を示す.

情報の総合理論的な研究が始まったのは, C.E. Shannon の 1948 年の論文*といわれている. しかしながら, 筆者は, Shannon の上記論文とは別に R.A. Fisher の論文**も情報獲得のための最初の重要な研究であると思っている.

“モノ”と“エネルギー”については, その生産, 輸送, 貯蔵の合理化について, 多くの研究が行なわれてきた. もっとも, 電気的エネルギーの貯蔵についてはまだ良い方法が発見されていないようであるが, これも原子力エネルギーの利用と, 電気エネルギーへの変換が簡単にできるようになれば, 解決されるだろう.

これからは, 情報が中心の世界になるといわれている. 情報の生産, 輸送, 貯蔵において, 結局, Shannon の通信理論は, 情報の輸送である“通信”と情報の貯蔵である“メモリー”について, それらの効率を議論したものに他ならない. もっとも, 情報そのものではなく, システム中の一要素として情報の価値を位置づけてシステム全体の効率を論ずるシステム論, 情報に関係する問題をあまねく議論しようとする情報科学, 情報自体の処理のみを研究する情報処理学などその範囲は益々拡大している. しかし, それらは情報の輸送, 貯蔵, 加工, 利用が中心で, 情報そのものの生産にはあまり触れていない.

情報の生産には, 芸能関係の情報のように消費的な遊びのための情報そのものと, 実験, 市場調査によって得られる情報のように生産的, 開発的なものがある. 消費的な情報は, 社会全体の生産性の向上には直接の影響がない.

ここでは, 生産性に関係のある実験や, 調査によって得られる情報について考察を加えることにする.

通信理論は, “情報の伝達 (輸送と貯蔵) 効率を高めるための共通技術の全体”と定義することができる. そこで用いられているコーデング方法, 冗長度の入れ方, フィルターの設計方法, 通信路容量な

* C.E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Tech. Jour.*, Vol. 27, pp. 379~422 and 623~656, 1948.

** R.A. Fisher, The Design of Experiments, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1935.

どの概念は，個々の機器や装置の如何にかかわらず，情報の伝達で共通におこる問題点に対する対策ということができる．

R.A. Fisher が開発した実験計画法は，“（技術，市場）実験による情報の獲得効率を高めるための共通技術の全体”と定義することができる．

1962 年，米国ベル電話研究所において，著者は通信理論と実験計画法の関係の研究を行ない，数学的概念に関して両者は全く同じものであるという結論を与えた．たとえば，両者で用いられている用語の間には表 *2.1 のような対応関係がある．

表 *2.1 用語の対応関係

実験計画法	通信理論
要因	信号
誤差	雑音
変動の分解	スペクトル分解
分散比	SN比
推定	フィルター
わりつけ	コーデング
直交表	直交回路
交互作用	非線形性

研究技術における情報の生産は，物理，化学，電気，機械のみでなく，医学，農学，市場調査などを含めると，情報獲得の手段や装置の多様性は，種々雑多である．したがって情報をその量的面よりしか考察しない情報理論に比較して，実験計画法の方が，様々な場合に対応する手法が開発されている．注(2.3)，(2.4) では表 *2.1 の第3番目と第4番目の問題，すなわち実験計画法における変動の分解および分散比と，通信理論におけるスペクトル分解及び SN 比について，両者の共通性を数学的に論じよう．

(2.3) スペクトル分解と変動の分解

(1) スペクトル分解

簡単な例として，電話の場合を考える．電話の送受話機を取り上げると 48 ボルトの直流が電話回路を流れる．しかし，直流が流れただけでは音にはならない．送話者がしゃべらなければならない．送話者がしゃべると，それに応じて空気の縦波が生じ，送話口のすぐ後にある筒の中でスライドするように

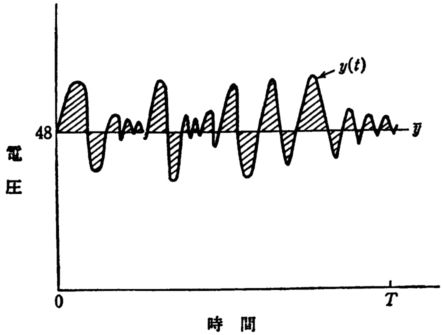


図 *2.1 電話回路における音声電流（斜線の交流部分）

なっている振動板を振動させる．その振動板の後に炭素粉がゆるくつまっている．その振動に即応して炭素粉の接触状態が変わる．炭素粉のつまった筒は 48 ボルトの直流回路の抵抗になっている．したがって，振動板の振動に応じて炭素粉の接触状態が変わるから，接触抵抗が変化し，音声の振動に応じた振動電流が生ずることになる．

いま，その振動電流を $y(t)$ とし，図 *2.1 のようであったとする．

したがって電話機の設計者は，次の 2 つのことに心血をそそぐことになる．

a. どこまでの高い振動数の音波に対して，それに即応して振動板が振動し，炭素粉が流動して振動電流を作り出し得るか．何千サイクルまでの音波を振動電流に変えることができるかということである．振動板は筒の中をスライドするようになっているから，どうしても湿気が中に入ることになる．湿度が高くても，1 秒間に何千回もの流動をする炭素粉を作ることは困難ということになる．将来，結晶内の自由電子が音圧で流動を起こすようなものが望ましいことになる．何千サイクルの音波まで振動電流にできるかは，通信系のハイファイ度と呼ばれている．

b. 一定の直流電圧のとき，一定の大きさでしゃべった音波が，できるだけ振幅の大きい振動電流になるように設計すること．これを感度を高めるという．感度が 10 倍になれば，十倍大きい音が相手に伝わることになるから，途中の電話ケーブルのロスが十倍あってもよいことになる．たとえば，それだけケーブルの銅線の太さを細くすることができる．

図 *2.1 に示した電流の斜線の部分のみが音声の伝送に有効な部分で，その大きさは振動電流，すなわち交流部分のパワー P として，次式で与えられる．

$$P=\int_0^T [y(t)-\bar{y}]^2 dt \tag{*2.15}$$

厳密には，(*2.15) 式は交流のなした仕事量である．この場合，時間はあまり大きな意味を持たないから，時間は何時でも同じにして比較するものとして，仕事量に対してもパワーという言葉を使用することにする．

(*2.15) 式の $\bar{y}$ は直流電圧に対応する．(*2.15) 式は次のように変形することができる．

$$\begin{aligned} P&=\int_0^T [y(t)-\bar{y}]^2 dt=\int_0^T y^2(t)dt-\frac{\left[\int_0^T y(t)dt\right]^2}{T} \\ &=y(t)\ \text{の 2 乗和}-\frac{[y(t)\ \text{の和}]^2}{T} \end{aligned} \tag{*2.16}$$

交流部分の全パワー P をいろいろな周波数成分に分解することは，スペクトル分解と呼ばれている．周波数成分には，点スペクトルと呼ばれている離散的な周波数成分，連続スペクトルと呼ばれている稠密な周波数成分などがある．両者が混合している場合の理論は，Paley-Wiener の論文*に詳しい．

ここでは，音声については，点スペクトルしかなく，雑音に関してはあらゆる成分があり得る場合を考えて，音声の点スペクトルの成分を $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_k$ とする．しからば，振動電流の全パワー P はそれらの点スペクトルに対するパワー $P_{\omega_1}, P_{\omega_2}, \cdots\cdots, P_{\omega_k}$ と，残りの雑音のパワー P_N に分解されて，次の等式が成立する．

$$P=P_{\omega_1}+P_{\omega_2}+\cdots\cdots+P_{\omega_k}+P_N \tag{*2.17}$$

これに，(*2.16) 式の結果を代入すれば次の等式が得られる．

---

* R.E.A.C. Paley and N. Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, *Amer. Col.*, XIX, 1935.

$$y(t)\ の2乗和=(直流のパワー)+P_{\omega_1}+P_{\omega_2}+\cdots\cdots P_{\omega_k}+P_N \tag{*2.18}$$

この等式は，数学の世界で **Parseval** の等式と呼ばれているものである．

直流や ω_i の成分は何れも，$y(t)$ に定数1や $\cos\omega_i t$ のような係数を掛け積分したものを規準化して求められる．規準化とは，$y(t)$ にかかる係数の2乗和で割り算することである．

たとえば

$$
\begin{aligned}
直流のパワー&=\frac{[y(t)\ 和]^2}{係数1の2乗和}\\
&=\frac{\left[\int_0^T y(t)dt\right]^2}{\int_0^T 1^2\cdot dt}=\frac{\left[\int_0^T y(t)dt\right]^2}{T}
\end{aligned}
\tag{*2.19}
$$

また

$$
\begin{aligned}
P_{\omega_i}&=\frac{[y(t)\cos\omega_i t\ の和]^2}{\cos\omega_i t\ の2乗和}\\
&=\frac{\left[\int_0^T y(t)\cos(\omega_i t)dt\right]^2}{\int_0^T\cos^2(\omega_i t)dt}
\end{aligned}
\tag{*2.20}
$$

ただし，Tは ω_i より十分大きいとする．次にデータにおける分散分析が，上と全く同じものであることを証明しよう．

（2） 変動の分解（1），回帰分析の場合（第3章参照）

目的変数を y，それに影響を与えると予想される原因変数をxとして，xとyのn対のデータが観測されたとして，それを (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，……，(x_n, y_n) とする．y がxの 1 次回帰式であるとして，それを

$$y=m+b(x-\bar{x}) \tag{*2.21}$$

と表わす．ただし

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n) \tag{*2.22}$$

とおく．しからば最小2乗法から，mとbの推定値mとbは次のようになる．

$$m=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)=\bar{y} \tag{*2.23}$$

$$b=\frac{\sum(x_i-\bar{x})y_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \tag{*2.24}$$

この場合，残差2乗和 S_e は

$$
\begin{aligned}
S_e&=\sum_i\{y_i-[\bar{y}+b(x_i-\bar{x})]\}^2\\
&=\sum_i\{y_i-\bar{y}-b(x_i-\bar{x})\}^2\\
&=\sum(y_i-\bar{y})^2-\frac{\sum\{(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\\
&=\sum y_i^2-\frac{(\sum y_i)^2}{n}-\frac{\{\sum(x_i-\bar{x})y_i\}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}
\end{aligned}
\tag{*2.25}
$$

書きかえれば

$$\sum y_i^2=\frac{(\sum y_i)^2}{n}+\frac{[\sum(x_i-\bar{x})y_i]^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}+S_e \tag{*2.26}$$

が得られる.

(*2.26) 式の左辺は, y_1, y_2, ……, y_n の単位 2 次形式, 右辺の 3 つの項は何れも y_1, y_2, ……, y_n の 2 次形式である. $S(xx)=\sum(x_i-\bar{x})^2$ として, それらの 2 次形式の行列を M_m, M_x, M_e とすれば

$$M_m=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots\cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots\cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots\cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \tag{*2.27}$$

$$M_x=\begin{pmatrix} \frac{(x_1-\bar{x})^2}{S(xx),}, & \frac{(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x})}{S(xx)}, & \cdots\cdots, & \frac{(x_1-\bar{x})(x_n-\bar{x})}{S(xx)} \\ \frac{(x_2-\bar{x})(x_1-\bar{x})}{S(xx)}, & \frac{(x_2-\bar{x})^2}{S(xx)}, & \cdots\cdots, & \frac{(x_2-\bar{x})(x_n-\bar{x})}{S(xx)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{(x_n-\bar{x})(x_1-\bar{x})}{S(xx)}, & \frac{(x_n-\bar{x})(x_2-\bar{x})}{S(xx)}, & \cdots\cdots, & \frac{(x_n-\bar{x})^2}{S(xx)} \end{pmatrix} \tag{*2.28}$$

$$M_e=\begin{pmatrix} \frac{n-1}{n}-\frac{(x_1-\bar{x})^2}{S(xx)}, & -\frac{1}{n}-\frac{(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x})}{S(xx)}, & \cdots\cdots, & -\frac{1}{n}-\frac{(x_1-\bar{x})(x_n-\bar{x})}{S(xx)} \\ -\frac{1}{n}-\frac{(x_2-\bar{x})(x_1-\bar{x})}{S(xx)}, & \frac{n-1}{n}-\frac{(x_2-\bar{x})^2}{S(xx)}, & \cdots\cdots, & -\frac{1}{n}-\frac{(x_2-\bar{x})(x_n-\bar{x})}{S(xx)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n}-\frac{(x_n-\bar{x})(x_1-\bar{x})}{S(xx)}, & -\frac{1}{n}-\frac{(x_n-\bar{x})(x_2-\bar{x})}{S(xx)}, & \cdots\cdots, & \frac{n-1}{n}-\frac{(x_n-\bar{x})^2}{S(xx)} \end{pmatrix} \tag{*2.29}$$

この場合, 行列, M_m, M_x の階数は何れも 1 で, 行列 M_e の階数は $(n-2)$ である. しかも, 3 つの行列 M_m, M_x, M_e は互いに直交する.

$$M_m\cdot M_x=(0) \tag{*2.30}$$

$$M_m\cdot M_e=(0) \tag{*2.31}$$

$$M_x\cdot M_e=(0) \tag{*2.32}$$

あとで必要であるからここではもっと一般的に次の定理を証明しておく.

定理　n 個の観側値 y_1, y_2, ……, y_n の $k(<n)$ 個の規準化した線形式

$$L^{(i)}=C_1^{(i)}y_1+C_2^{(i)}y_2+\cdots\cdots+C_n^{(i)}y_n \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k) \tag{*2.33}$$

が互いに直交する. すなわち

$$C_1^{(i)}C_1^{(j)}+C_2^{(i)}C_2^{(j)}+\cdots\cdots+C_n^{(i)}C_n^{(j)}=\delta_i^j \tag{*2.34}$$

ただし, δ_i^j はクロネッカーの記号である.

$$\delta_i^j=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{*2.35}$$

しからば, 線形式 $L^{(i)}$ の 2 乗によって得られる 2 次形式の行列 M_i は, 何れも階数 1 で互いに直交す

る．また，単位行列 I からそれらの行列を引いて得られる行列 M_e

$$M_e=I-M_1-M_2-\cdots\cdots-M_k \tag{*2.36}$$

は，その階数が $(n-k)$ で，$M_1, M_2, \cdots\cdots, M_k$ の何れとも直交する．

証明　行列 M_i の任意の 2×2 小行列の行列式の値がゼロになることをまず証明する．i_1 行，i_2 行，j_1 列，j_2 列の 2×2 小行列式は

$$\begin{vmatrix} C_{j_1}{}^{(i)}C_{i_1}{}^{(i)} & C_{j_1}{}^{(i)}C_{i_2}{}^{(i)} \\ C_{j_2}{}^{(i)}C_{i_1}{}^{(i)} & C_{j_2}{}^{(i)}C_{i_2}{}^{(i)} \end{vmatrix}=C_{j_1}{}^{(i)}C_{j_2}{}^{(i)}C_{i_1}{}^{(i)}C_{i_2}{}^{(i)}$$
$$-C_{j_1}{}^{(i)}C_{j_2}{}^{(i)}C_{i_1}{}^{(i)}C_{i_2}{}^{(i)}=0 \tag{*2.37}$$

しかるに，規準化の条件から

$$C_1{}^{(i)2}+C_2{}^{(i)2}+\cdots\cdots+C_n{}^{(i)2}=1 \tag{*2.38}$$

であるから，$C_1{}^{(i)}, C_2{}^{(i)}, \cdots\cdots, C_n{}^{(i)}$ の中にはゼロでないものが少なくとも 1 つあることになる．それを $C_j{}^{(i)}$ とすれば，行列 M_i の中の (j, j) 成分はゼロではない．したがって，行列 M_i の階数は 1 ということになる．

次に行列 M_1 と行列 M_2 が直交していることを証明する．

$$M_1=\begin{pmatrix} C_1{}^{(1)}C_1{}^{(1)}, & C_1{}^{(1)}C_2{}^{(1)}, & \cdots\cdots, & C_1{}^{(1)}C_n{}^{(1)} \\ C_2{}^{(1)}C_1{}^{(1)}, & C_2{}^{(1)}C_2{}^{(1)}, & \cdots\cdots, & C_2{}^{(1)}C_n{}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n{}^{(1)}C_1{}^{(1)}, & C_n{}^{(1)}C_2{}^{(1)}, & \cdots\cdots, & C_n{}^{(1)}C_n{}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{*2.39}$$

$$M_2=\begin{pmatrix} C_1{}^{(2)}C_1{}^{(2)}, & C_1{}^{(2)}C_2{}^{(2)}, & \cdots\cdots, & C_1{}^{(2)}C_n{}^{(2)} \\ C_2{}^{(2)}C_1{}^{(2)}, & C_2{}^{(2)}C_2{}^{(2)}, & \cdots\cdots, & C_2{}^{(2)}C_n{}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n{}^{(2)}C_1{}^{(2)}, & C_n{}^{(2)}C_2{}^{(2)}, & \cdots\cdots, & C_n{}^{(2)}C_n{}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{*2.40}$$

行列 M_1 と行列 M_2 の積の ij 成分を求めれば次のようにゼロとなる．

$$\begin{aligned} &C_i{}^{(1)}C_1{}^{(1)}\times C_1{}^{(2)}C_j{}^{(2)}+C_i{}^{(1)}C_2{}^{(1)}\times C_2{}^{(2)}C_j{}^{(2)}+\cdots\cdots+C_i{}^{(1)}C_n{}^{(1)}\times C_n{}^{(2)}C_j{}^{(2)} \\ &=C_i{}^{(1)}C_j{}^{(2)}[C_1{}^{(1)}\times C_1{}^{(2)}+C_2{}^{(1)}\times C_2{}^{(2)}+\cdots\cdots+C_n{}^{(1)}\times C_n{}^{(2)}] \\ &=0 \end{aligned} \tag{*2.41}$$

したがって，M_1 と M_2 は直交する．全く同様にして，$M_1, M_2, \cdots\cdots, M_k$ は互いに直交することがわかる．次に，誤差変動の 2 次形式の行列を考える．

$$M_e=I-(M_1+M_2+\cdots\cdots+M_k)$$

に，行列 $M_i(i=1, 2, \cdots\cdots, k)$ を左から掛けると

$$M_iM_e=M_i-M_i^2 \tag{*2.42}$$

ところで

$$M_i^2=\begin{pmatrix} C_1{}^{(i)}C_1{}^{(i)}, & C_1{}^{(i)}C_2{}^{(i)}, & \cdots\cdots, & C_1{}^{(i)}C_n{}^{(i)} \\ C_2{}^{(i)}C_1{}^{(i)}, & C_2{}^{(i)}C_2{}^{(i)}, & \cdots\cdots, & C_2{}^{(i)}C_n{}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n{}^{(i)}C_1{}^{(i)}, & C_n{}^{(i)}C_2{}^{(i)}, & \cdots\cdots, & C_n{}^{(i)}C_n{}^{(i)} \end{pmatrix}^2 \tag{*2.43}$$

において，その (jk) 成分を求める．

$$\begin{aligned} &C_j{}^{(i)}C_1{}^{(i)}\times C_1{}^{(i)}C_k{}^{(i)}+C_j{}^{(i)}C_2{}^{(i)}\times C_2{}^{(i)}C_k{}^{(i)}+\cdots\cdots+C_j{}^{(i)}C_n{}^{(i)}\times C_n{}^{(i)}\times C_k{}^{(i)} \\ &=C_j{}^{(i)}C_k{}^{(i)}[C_1{}^{(i)2}+C_2{}^{(i)2}+\cdots\cdots+C_n{}^{(i)2}] \\ &=C_j{}^{(i)}C_k{}^{(i)} \end{aligned} \tag{*2.44}$$

これは，M_i の $(j,\ k)$ 成分と同じである．したがって

$$M_i^2=M_i \tag{*2.45}$$

(*2.42) 式から

$$M_iM_e=0$$

M_i と M_e は直交することがわかる．

$M_1,\ M_2,\ \cdots\cdots,\ M_k,\ M_e$ が互いに直交して，しかもその和が単位行列であることは，M_e の階数が $(n-k)$ であることを意味する．その証明は，$M_1,\ M_2,\ \cdots\cdots,\ M_k,\ M_e$ を対角行列に変えてできるが，よく知られた定理であるから，証明は省略する．証明はこれで終わった．

(*2.27) 式の M_m，(*2.28) 式の M_x は何れも，$y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots,\ y_n$ の 2 次形式の行列である．

$$S_m=\left[\frac{y_1+\cdots\cdots+y_n}{\sqrt{n}}\right]^2 \tag{*2.46}$$

$$S_x=\left[\frac{\sum(x_i-\bar{x})y_i}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\right]^2 \tag{*2.47}$$

しかも，M_m，M_x の何れについても規準化されている．

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=1 \tag{*2.48}$$

$$\left[\frac{(x_1-\bar{x})}{\sqrt{S(xx)}}\right]^2+\left[\frac{(x_2-\bar{x})}{\sqrt{S(xx)}}\right]^2+\cdots\cdots+\left[\frac{(x_n-\bar{x})}{\sqrt{S(xx)}}\right]^2=1 \tag{*2.49}$$

また，両者の内積は次のようにゼロとなる．

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{(x_1-\bar{x})}{\sqrt{S(xx)}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{(x_2-\bar{x})}{\sqrt{S(xx)}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{(x_n-\bar{x})}{\sqrt{S(xx)}}=0 \tag{*2.50}$$

これから行列，M_m，M_x は互いに直交する行列で，しかも階数は 1 である．したがって，残差 2 乗和 S_e の階数は $(n-2)$ で，M_m，M_x の何れとも直交することになる．

もっと一般の回帰関数の場合として，y が x の関数として，未知定数のない $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\cdots\cdots$，$\varphi_k(x)$ の線形式の場合を考える．

$$y=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\cdots\cdots+a_k\varphi_k(x) \tag{*2.51}$$

(*2.51) 式をそのままあてはめると計算が複雑になる．それを避けるために，Schmidt の直交展開を行なう．

$$y_i=b_1\varphi_1(x_i) \tag{*2.52}$$

とおいて，b_1 を推定する．

$$b_1=\frac{(\varphi_1 y)}{(\varphi_1\varphi_1)} \tag{*2.53}$$

ここに

$$(\varphi_1 y)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)y_i \tag{*2.54}$$

$$(\varphi_1\varphi_1)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) \tag{*2.55}$$

しからば，$\varphi_1(x)$ で表現しきれない y_i との差

$$y_i^{(1)}=y_i-b_1\varphi_1(x_i) \tag{*2.56}$$

に対して，$\varphi_2(x)$ をあてはめることになる．ただし，$\varphi_2(x)$ そのものでなく，$\varphi_2(x)$ を $\varphi_1(x)$ で表現したときの残差の関数 $\varphi_2^{(1)}$ を用いて表現する．

$$\varphi_2^{(1)}(x_i)=\varphi_2(x_i)-b_{21}\varphi_1(x_i) \tag{*2.57}$$

ここに

$$b_{21}=\frac{(\varphi_1\varphi_2)}{(\varphi_1\varphi_1)} \tag{*2.58}$$

この場合，$\varphi_1(x_i)$ と $\varphi_2^{(1)}(x_i)$ は直交する．何となれば

$$\begin{aligned}\sum\varphi_1(x_i)\varphi_2^{(1)}(x_i)&=\sum\varphi_1(x_i)\left[\varphi_2(x_i)-\frac{(\varphi_1\varphi_2)}{(\varphi_1\varphi_1)}\varphi_1(x_i)\right]\\&=(\varphi_1\varphi_2)-\frac{(\varphi_1\varphi_2)}{(\varphi_1\varphi_1)}(\varphi_1\varphi_1)=0\end{aligned} \tag{*2.59}$$

したがって

$$y=b_1\varphi_1(x)+b_2\varphi_2^{(1)}(x) \tag{*2.60}$$

ここに，b_2 は

$$b_2=\frac{(\varphi_2^{(1)}y)}{(\varphi_2^{(1)}\varphi_2^{(1)})} \tag{*2.61}$$

次に

$$\varphi_3^{(1)}=\varphi_3-b_{31}\varphi_1-b_{32}\varphi_2^{(1)} \tag{*2.62}$$

とおくと

$$b_{31}=\frac{(\varphi_1\varphi_3)}{(\varphi_1\varphi_1)} \tag{*2.63}$$

$$b_{32}=\frac{(\varphi_2^{(1)}\varphi_3)}{(\varphi_2^{(1)}\varphi_2^{(1)})} \tag{*2.64}$$

これを用いて

$$b_3=\frac{(\varphi_3^{(1)}y)}{(\varphi_3^{(1)}\varphi_3^{(1)})} \tag{*2.65}$$

これから，第3項までの展開を得る．

$$y=b_1\varphi_1+b_2\varphi_2^{(1)}+b_3\varphi_3^{(1)} \tag{*2.66}$$

以下同様にして，k 項までの直交展開を得る．このようにして，y が x の任意の関数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ……, $\varphi_k(x)$ の線形関数の場合でも，単位行列を $\varphi_1(x)$, $\varphi_2^{(1)}(x)$, $\varphi_3^{(1)}(x)$, ……, $\varphi_k^{(1)}(x)$ に対する階数1の行列と，階数 $(n-k)$ の残差2乗和に対する行列の和に分解することができる．

分散分析においては，各行列に対する2次形式は変動と呼ばれ，S_1, S_2, ……, S_k, S_e と書かれる．またそれらの2次形式の行列の階数は自由度と呼ばれている．したがって，n 個の観測値 y_1, y_2, ……, y_n の全2乗和 S は

$$S=S_1+S_2+\cdots\cdots+S_k+S_e \qquad \text{（変　動）} \tag{*2.67}$$

$$n=1+1+\cdots\cdots+1+(n-k) \qquad \text{（自由度）} \tag{*2.68}$$

のように分解されることになる．

(2.4) SN 比と分散比（10 章も参照）　通信工学の世界では，Signal（信号）対 Noise（雑音）比が，通信方式の良し悪しの比較に用いられてきた．その比は SN 比と略称されている．アウトプットのパワーを信号によるパワーと雑音によるパワーに分けたときその比が SN 比である．

$$\text{通信の SN 比}\quad \eta=\frac{\text{信号のパワー}}{\text{雑音のパワー}} \tag{*2.69}$$

(*2.69) 式の比は，アウトプットの全パワーの測定と信号のパワーまたは雑音のパワーの何れかがわ

かれば，その比を求めることができる．良い通信システムとは，SN 比の大きいものと定義することができる．

ところで，データの全2乗和を要因による変動と誤差による変動に分けるのが変動の分解であった．したがって，通信における SN 比と同じように，有限個のデータの場合にも SN 比を求めることができる筈である．

(*2.21) 式の場合の SN 比について考察しよう．この場合，データの全変化量 S_T は

$$S_T=y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots\cdots+y_n{}^2-\frac{(y_1+\cdots\cdots+y_n)^2}{n}$$

であり，その中に占める x による変動 S_x は

$$S_x=\frac{\{\sum(x_i-\bar{x})y_i\}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

であった．

したがって，通信の場合の SN 比と同じ定義式を用いるならば，SN 比 η は

$$\eta=\frac{S_x}{S_e} \tag{*2.70}$$

で与えられることになる．

統計学では，y と x の間の相関係数 r を次の式で定義する．

$$r=\frac{V_{xy}}{\sqrt{V_xV_y}} \tag{*2.71}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} V_x&=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2\\ V_y&=\frac{1}{n-1}\sum(y_i-\bar{y})^2\\ V_{xy}&=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x}_i)(y_i-\bar{y}) \end{aligned}\right\} \tag{*2.72}$$

ところで，変動の分解から

$$\sum(y_i-\bar{y})^2=\frac{\{\sum(x_i-\bar{x})y_i\}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}+S_e$$

$$\sum(y_i-\bar{y})^2=\frac{\{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}+S_e \tag{*2.73}$$

(*2.73) 式の両辺を $\sum(y_i-\bar{y})^2$ で割り算すれば

$$\begin{aligned} 1&=\frac{\{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}+\frac{S_e}{\sum(y_i-\bar{y})^2}\\ &=\frac{\left\{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1}\right\}^2}{\left\{\dfrac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2\right\}\left\{\dfrac{1}{n-1}\sum(y_i-\bar{y})^2\right\}}+\frac{S_e}{\sum(y_i-\bar{y})^2} \end{aligned}$$

(*2.71)，(*2.72) 式を代入して

$$1=r^2+(1-r^2) \tag{*2.74}$$

が成立する．

相関係数 r の2乗は，全変動中に占める x による部分の割合であり，寄与率といわれている．

$$\rho = r^2 \tag{*2.75}$$

この記号を用いれば

$$\eta = \frac{S_x}{S_e} = \frac{S_x/\sum(y_i - \bar{y})^2}{S_e/\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{*2.76}$$

が得られる．

実際には，誤差変動の中には誤差分散が（$n-2$）個しか入っておらず，1個は S_m に，1個は S_x の中に入っている．本来なら S_x の中に入っている1個分の誤差は，S_x から差し引くべきである．更に，SN 比はいろいろな測定方法，試験方法，分析方法，予測方法などの良し悪しの比較に用いられることを考えるならば，x_1，x_2，……，x_n の値が異なったデータでも比較できるようにした方が望ましい．ところで，S_x の期待値 $E(S_x)$ は

$$E(S_x) = \sigma^2 + b^2\sum(x_i - \bar{x})^2 \tag{*2.77}$$

である．x の変化に対する変動の部分は，通信における信号のパワーに当たるものであるが，その部分は x の単位変化量に対する係数 b の2乗に，x の全変化量を掛けたものである．x の全変化量は通信の場合の電界強度に対応する．単位電界強度に対する SN 比を求めるには，b^2 を σ^2 で割った方が望ましい．

したがって，SN 比としては（*2.76）式ではなく次の（*2.78）式の方がよい．

$$\eta = \frac{\beta^2}{\sigma^2} = \frac{\dfrac{1}{S(xx)}[S_x - V_e]}{V_e} = \frac{1}{S(xx)}\left[\frac{S_x}{V_e} - 1\right] \tag{*2.78}$$

ところで，S_x/V_e は分散比 F_0 であるから，上式は

$$\eta = \frac{1}{S(xx)}[F_0 - 1] \tag{*2.79}$$

とも書ける．

分散比 F_0 の大小は，統計的な検定そのものである．ただし，筆者は統計的検定のような定性的な結論にあまり重要性を感じない．分散比 F_0 よりは，（*2.79）式で定義される SN 比，または全変動に対する原因 x の寄与率 ρ_x を重視すべきだと思うからである．

$$\rho_x = \frac{S_x - V_e}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \tag{*2.80}$$

寄与率 ρ_x を用いるなら，（*2.79）式の SN 比は

$$\eta = \frac{\rho_x}{1-\rho_x} \tag{*2.81}$$

で与えられる．

SN 比，寄与率 ρ_x を一般の分散分析の世界に拡大することは簡単であるから，ここに詳細に述べることはしない．

分散分析すなわち変動の分解は，有限次元ユークリッド空間，すなわちベクトル空間のパーセバル分解である．通信工学におけるスペクトル分解，SN 比の概念をそのまま変動の分解の世界に応用することができる．スペクトル分解，SN 比の概念をデータ解析の世界に導入することによって，検定のような定性的評価を寄与率という定量的評価に，また SN 比を測定方法や試験方法の良し悪しの比較に持ちこむことが可能になる．

3. 多 項 式 展 開

本章においては，予測式，実験式，回帰式などを作るときしばしば必要になる1次回帰式，直交多項式の計算法を述べる．3.2 節の一般式が難しい人は，3.1 節を読んだら，3.3 節を読み，3.2 節に入るのがよい．

3.1 全国デパートの売上高

昭和 34 年から，昭和 41 年まで6年間の全国百貨店売上高は次のようである．

年(A)	34	35	36	37	38	39	40	41	
売上高	3643	4396	5436	6345	7417	8440	9294	10429	(単位 億円)

経済統計のようなものは，前年に対する伸び率をとった方が，売上金額の差そのものより一定に近い値になることが多い．そこで，売上高の対数を付表2の常用対数表から求める．

対 数 値								
11.5615	11.6431	11.7353	11.8024	11.8702	11.9263	11.9682	12.0182	
仮平均 (11.8)								計
−0.2385	−0.1569	−0.0647	0.0024	0.0702	0.1263	0.1682	0.2182	0.1252

この対数値は，1年毎のデータに対する対数値である．売上金額 y の対数値 $\log y$ が，年度の1次式でどれ位よく表現されるかは，2章にも述べたように，次のように表現式を作り，その寄与率を求めればよい．

$$\log y = b_0 + b_1\ (A - \bar{A})$$

この場合，定数項 b_0 は全部のデータの平均で推定される．

$$\begin{aligned}\hat{b}_0 &= \text{仮平均} + \frac{1}{8}(-0.2385 + \cdots\cdots + 0.2182) \\ &= 11.8156 \qquad (3.1)\end{aligned}$$

また，1次の係数 b_1 は，付表6の**直交多項式**における，8水準の1次項 b_1 の係数を用いて次のように推定される．

$$\hat{b}_1 = \frac{\begin{array}{r}-7(-0.2385)-5(-0.1569)-3(-0.0647)-0.0024 \\ +0.0702+3(0.1263)+5(0.1682)+7(0.2182)\end{array}}{r \cdot \lambda S \cdot h} \qquad (3.2)$$

ここに，−7，−5，−3，−1，1，3，5，7 は b_1 の係数 W_1，W_2，……，W_8 の値，r は −0.2385，−0.1569，……，0.2182 などが何個のデータの和であるかを意味し，この場合は 1 である．λS は，付表 6 の 1 次項 b_1 の係数の下にある λS の欄の値 84 である．h は A_1，A_2，……，A_8 の間隔でこの場合 1 年であるから，1 ということになる．したがって

$$\hat{b}_1=\frac{5.4632}{1\times 84\times 1}$$
$$=0.065038 \qquad (3.3)$$

データの全変動 S_T は

$$S_T=(-0.2385)^2+(-0.1569)^2+\cdots\cdots+0.2182^2-\frac{0.1252^2}{8}$$
$$=0.18051454 \qquad (f=7) \qquad (3.4)$$

また，A の 1 **次効果の変動** S_b は，$\hat{b}_1$ が線形式であることを忘れないで，次のように求める．

$$S_{b_1}=\frac{5.4632^2}{168}$$
$$=0.17765806 \qquad (f=1) \qquad (3.5)$$
$$S_e=S_T-S_{b_1}$$
$$=0.00285648 \qquad (f=6) \qquad (3.6)$$

したがって，分散分析表は表 3.1 のようになる．

表 3.1　分散分析表

要　因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
Aの1次効果	1	0.17765806	0.17765806	373.2**	0.17718198	98.2
res	6	0.00285648	0.00047608		0.00333256	1.8
T	7	0.18051454			0.18051454	100.0

これから，A の **1 次項の寄与率**が 98.2% で非常に大きい効果だということがわかる．A の 2 次効果，3 次効果などについては，3.4 節を見られたい．かりに A の 2 次効果や，3 次効果が有意にでてきても，それらは予測に役立つとは限らない．それらは景気，不景気のきまぐれな効果を示しているに過ぎないことが多い．**予測を計画に用いるときには特にそうだが，1 次効果のみを考えて計算する方がよい**．ただし，1 次効果からのずれは，誤差に入れる必要があることはもちろんである．

この場合の 1 次回帰式 μ は

$$\mu=\hat{b}_0+\hat{b}_1(A-\bar{A}) \qquad (3.7)$$

$$=11.8156+0.065038\ (A-37.5) \tag{3.8}$$

いま，昭和 42 年，43 年の**売上高を予測**して見よう．(3.8) 式で $A=42$, $A=43$ を代入する．xを昭和 42 年，x' を昭和 43 年の実売上高の対数値として

$$x=11.8156+0.065038\ (42-37.5)$$
$$=12.1083\pm0.0670 \tag{3.9}$$
$$x'=11.8156+0.065038\ (43-37.5)$$
$$=12.1733\pm0.0722 \tag{3.10}$$

これらの値の信頼限界は次のようにして求めたものである．$\hat{b}_0$, $\hat{b}_1(A-37.5)$, x, x' の何れも直交しているから，信頼限界の公式

$$\pm\sqrt{F\times V_e\times \text{単位数}}$$

において

$$\text{単位数}=\hat{b}_0\ \text{の単位数}+(\hat{b}_1\ \text{の単位数})\times(A-37.5)^2+(x\ \text{または}\ x'\ \text{の単位数})$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{(A-37.5)^2}{42}+1 \tag{3.11}$$

したがって，$A=42$ のときは

$$\text{単位数}=\frac{1}{8}+\frac{(42-37.5)^2}{42}+1=1.607 \tag{3.12}$$

したがって，信頼限界は

$$\pm\sqrt{5.99\times0.00047608\times1.607}=\pm0.0670 \tag{3.13}$$

真数に戻して，次の結果が得られる．

	売上高予測値	信頼下限	信頼上限	
昭和 42 年	12840	11000	14970	(億円)
昭和 43 年	14900	12620	17600	(億円)

信頼限界の幅が広いのは，景気，不景気の差による売上高の差まで誤差に入っているためである．実際には，信頼限界は参考として，予測値の値で計画を立てる．

3.2　1次回帰式の一般公式

いろいろな温度 x_1, x_2, ……, x_n で，ある品物の引張り強さを測ったデータが，y_1, y_2, ……, y_n だったとする．

このような場合，引張り強さyを温度xの1次関数で表現するのが普通である．

$$a+bx=y \tag{3.14}$$

いま，n対の観測値 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, ……, $(x_n,\ y_n)$ を (3.14) 式に代入する．

$$a+bx_i=y_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{3.15}$$

(3.15) 式は未知数が2個 a, b で，式の数が n 個ある連立方程式で，観測方程式といわれている式である．

式の数の方が，未知数の数より多いときには，それを完全に満たす解は存在しないが，できるだけ左辺と右辺の値の差が小さくなる解を求めることができる．それは右辺と左辺の差の2乗和，いわゆる残差2乗和 S_e

$$S_e=(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+\cdots\cdots+(y_n-a-bx_n)^2 \tag{3.16}$$

を最小にするように，a, b を求めるのである．その方法は，ガウスによって最小2乗法と名づけられたもので，次の正規方程式を解くことによって，解が求まる．$\sum$を i に対する1から n までの和として

$$na+(\sum x_i)b=\sum y_i \tag{3.17}$$

$$(\sum x_i)a+(\sum x_i^2)b=\sum x_i y_i \tag{3.18}$$

ここに

$$\begin{aligned}
n&=(3.15)\ \text{式において}\ a\ \text{の係数1の2乗和}\\
&=1^2+1^2+\cdots\cdots+1^2\\
(\sum x_i)&=(3.15)\ \text{式において，}\ a\ \text{の係数と}\ b\ \text{の係数の積の和}\\
&=1\times x_1+1\times x_2+\cdots\cdots+1\times x_n\\
\sum y_i&=(3.15)\ \text{式において，}\ a\ \text{の係数と観測値}\ y\ \text{の積の和}\\
&=1\times y_1+1\times y_2+\cdots\cdots+1\times y_n\\
(\sum x_i^2)&=(3.15)\ \text{式において，}\ b\ \text{の係数の2乗の和}\\
&=x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2\\
\sum x_i y_i&=(3.15)\ \text{式において，}\ b\ \text{の係数と観側値}\ y\ \text{の積の和}\\
&=x_1\times y_1+x_2\times y_2+\cdots\cdots+x_n\times y_n
\end{aligned}$$

連立方程式 (3.17)，(3.18) 式の係数と右辺の値の計算式は覚えやすいのだから，自分でいつでも連立方程式が書き下せるようになっているのが望ましい．

連立方程式 (3.17)，(3.18) 式を解くには，(3.17) 式の両辺に ($\sum x_i$) を掛け，(3.18) 式の両辺に n を掛けて，辺々相引けば，a の項が消えて b の項のみが残る．

$$\{(\sum x_i)^2-n(\sum x_i^2)\}b=(\sum x_i)(\sum y_i)-n\sum x_i y_i$$

これから

$$b=\frac{n\sum x_i y_i-(\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2)-(\sum x_i)^2} \tag{3.19}$$

分母，分子を n で割って

$$b=\frac{x_1y_1+\cdots\cdots+x_ny_n-\dfrac{(x_1+\cdots\cdots+x_n)(y_1+\cdots\cdots+y_n)}{n}}{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2-\dfrac{(x_1+\cdots\cdots+x_n)^2}{n}}$$

$$=\frac{S_T(xy)}{S_T(xx)} \tag{3.20}$$

ここに $S_T(xx)$ は，温度 x の全変動である．

$$S_T(xx)=x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2-\frac{(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)^2}{n} \tag{3.21}$$

また，$S_T(xy)$ は x と y の共変動といわれている項で，次式で与えられる．

$$S_T(xy)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n$$
$$-\frac{(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)}{n} \tag{3.22}$$

共変動の式は，変動の式において，2乗のところに x と y の積がくることになる．

(3.17) 式に (3.19) 式の b を代入して，a を求めれば

$$a=\frac{1}{n}\left\{\sum y_i-\frac{S_T(xy)}{S_T(xx)}\times(\sum x_i)\right\} \tag{3.23}$$

上式からわかることは，もし

$$\sum x_i=0$$

が成立すれば

$$a=\frac{y_1+\cdots\cdots+y_n}{n}=\bar{y} \tag{3.24}$$

となって，未知数 a と b の推定は非常に簡単になる．

そのためには，元の式を次のような展開にしておけばよい．

$$m+b(x-\bar{x})=y \tag{3.25}$$

ここに，$\bar{x}$ は x_1, x_2, ……, x_n の平均値である．このようにすれば，未知数 m と未知数 b の推定値が直交する．このような展開を直交展開という．その意味は，(3.25) 式を用いると，一般平均 m も，1次係数 b も，y の線形式で推定されるが，それらの2つの線形式が直交して，影響の大きさの評価が簡単になるからである．

観測方程式

$$m+b(x_i-\bar{x})=y_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{3.26}$$

において，未知数 m と未知数 b の係数の積の和は

$$\sum(x_i-\bar{x})=0$$

とゼロになるから，**正規方程式**は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l} n\times m+0\times b=\sum y_i \\ 0\times m+\{\sum(x_i-\bar{x})^2\}b=\sum(x_i-\bar{x})y_i \end{array}\right\} \tag{3.27}$$

したがって

$$m=\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n}{n} \tag{3.28}$$

$$b=\frac{\sum(x_i-\bar{x})y_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=\frac{S_T(xy)}{S_T(xx)} \tag{3.29}$$

そして，mのみでなく，bも $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ の線形式である．その係数 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ は次のようになる．

$$C_1=\frac{(x_1-\bar{x})}{S_T(xx)},\ \cdots\cdots,\ C_n=\frac{(x_n-\bar{x})}{S_T(xx)} \tag{3.30}$$

したがって，単位数である係数の2乗和は

$$\begin{aligned} &C_1^2+C_2^2+\cdots\cdots+C_n^2 \\ &=\left[\frac{(x_1-\bar{x})}{S_T(xx)}\right]^2+\left[\frac{(x_2-\bar{x})}{S_T(xx)}\right]^2+\cdots\cdots+\left[\frac{(x_n-\bar{x})}{S_T(xx)}\right]^2 \\ &=\frac{1}{\{S_T(xx)\}^2}\{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\bar{x})^2\} \\ &=\frac{S_T(xx)}{\{S_T(xx)\}^2}=\frac{1}{S_T(xx)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

すなわち

$$S_m=\mathrm{CF}=\frac{(y_1+\cdots\cdots+y_n)^2}{n} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} S_b&=\frac{(b)^2}{\text{単 位 数}}=\frac{\left[\dfrac{S_T(xy)}{S_T(xx)}\right]^2}{\dfrac{1}{S_T(xx)}} \\ &=\frac{\{S_T(xy)\}^2}{S_T(xx)} \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$S_e=y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2-S_m-S_b \tag{3.34}$$

S_m も S_b も自由度1で S_e の自由度は $(n-2)$ である．

また，m, b の信頼限界は

$$m=\hat{m}\pm\sqrt{\frac{F_{n-2}^1\times V_e}{n}} \tag{3.35}$$

$$b=\hat{b}\pm\sqrt{\frac{F_{n-2}^1\times V_e}{S_T(xx)}} \tag{3.36}$$

が得られる．

ある場合には，任意のxの値に対してyを推定したいことがおこる．たとえば，温度をx°C にしたときの引張り強さyの値の推定である．

$$y=\hat{m}+\hat{b}(x-\bar{x})\pm\sqrt{F^1_{n-2}\times V_e\left\{\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_T(xx)}+1\right\}} \tag{3.37}$$

ここに，信頼限界の中の単位数が

$$\frac{1}{n}+\frac{(x-\bar{x})^2}{S_T(xx)}+1 \tag{3.38}$$

となったのは，$\hat{m}$の単位数が$\dfrac{1}{n}$で，$(x-\bar{x})\hat{b}$の単位数が$(x-\bar{x})^2/S_T(xx)$で，これから得られるであろうデータyの単位数が1であるからである．

1次回帰式の場合をまとめれば表 3.2 のようになる．

表 3.2 分散分析表

要因	f	S	V	$E(V)$	S'	$\rho(\%)$
m	1	S_m	V_m	σ^2+nm^2	S_m-V_e	ρ_m
x	1	S_x	V_x	$\sigma^2+\beta^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2$	S_x-V_e	ρ_x
e	$n-2$	S_e	V_e	σ^2	S_e+2V_e	ρ_e
T	n	S_T			S_T	100.0

ここに，yは目標値からの差として与えられているとした．

$$S_T=y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2$$

$$S_m=\frac{(y_1+\cdots\cdots+y_n)^2}{n}$$

$$S_\beta=\frac{S_T(xy)^2}{S_T(xx)}$$

$$S_T(xx)=x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2-\frac{(x_1+\cdots\cdots+x_n)^2}{n}$$

$$S_T(xy)=x_1y_1+\cdots\cdots+x_ny_n-\frac{(x_1+\cdots\cdots+x_n)(y_1+\cdots\cdots+y_n)}{n}$$

$$S_e=S_T-S_m-S_x$$

また

$$\hat{m}=\frac{(y_1+\cdots\cdots+y_n)}{n}$$

$$\hat{\beta}=\frac{S_T(xy)}{S_T(xx)}$$

任意のxの値x'に対して，yの値の予測値をy'とすれば

$$y'=\hat{m}+\hat{\beta}(x'-\bar{x})\pm\sqrt{F\times V_e\left[\frac{1}{n}+\frac{(x'-\bar{x})^2}{S_T(xx)}+1\right]} \tag{3.39}$$

また，xの値を x_0 を中心に，その分散 $\sigma_0{}^2$ を $\sigma_x{}^2$ にコントロールしたとき，yの値の中心と分散は次式で与えられる．

$$y\text{の中心値}=\hat{m}+\hat{\beta}(x_0-\bar{x}) \tag{3.40}$$

$$y\text{の新しい分散}=y\text{ の現在の分散}\times\left\{1-\rho_x\left[1-\frac{x\text{の新しい分散}}{x\text{の現在の分散}}\right]\right\} \tag{3.41}$$

3.3 計 算 例

問題 ある工程の温度とできた製品の硬度の関係は次のようであった．

温度 (x)	520	505	500	515	524	516	523	507	509	512
硬度 (y)	23	21	18	22	24	22	23	20	19	19

（1） 硬度yについてその目標値は 22 である．yの目標値からの偏差２乗和を，一般平均mの変動と，温度xによる変動と，残りの変動に分解せよ．

（2） xとyの関係式を求めよ．

（3） 温度xのねらいの中心を，硬度yの平均が 22 になるように，温度の分散を現在の 1/5 にしたら，硬度の分散は現在の何％に縮まるとしてよいか．

解

（1） xの仮平均を 500，yの目標値を 22 とする．

											計	平均
x	20	5	0	15	24	16	23	7	9	12	131	13.1
y	1	−1	−4	0	2	0	1	−2	−3	−3	−9	−0.9

$$S_T=1^2+(-1)^2+(-4)^2+\cdots\cdots+(-3)^2=45.0 \quad (\mathrm{f}=10) \tag{3.42}$$

$$S_m=\frac{(-9)^2}{10}=8.1 \quad (\mathrm{f}=1) \tag{3.43}$$

$$S_T(xx)=20^2+5^2+\cdots\cdots+12^2-\frac{(131)^2}{10}$$
$$=568.9 \tag{3.44}$$

$$S_T(xy)=20\times1+5\times(-1)+\cdots\cdots+12\times(-3)-\frac{131\times(-9)}{10}$$
$$=126.9 \tag{3.45}$$

$$S_x=\frac{S_T(xy)^2}{S_T(xx)}=\frac{126.9^2}{568.9}=28.3 \quad (\mathrm{f}=1) \tag{3.46}$$

$$S_e=S_T-S_m-S_x=45.0-8.1-28.3$$
$$=8.6 \quad (\mathrm{f}=8) \tag{3.47}$$

これから表 3.3 の分散分析を得る.

表 3.3 分散分析表

要 因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
m	1	8.1	8.1	7.5*	7.025	15.5
x	1	28.3	28.3	26.3**	27.225	60.6
e	8	8.6	1.075		10.750	23.9
T	10	45.0			45.000	100.0

（2） x と y の回帰式を求める.

$$y=\bar{y}+b(x-\bar{x}) \tag{3.48}$$

$$\bar{y}=22.0+\frac{-9}{10}=21.1 \tag{3.49}$$

$$\bar{x}=500.0+\frac{131}{10}=513.1 \tag{3.50}$$

$$b=\frac{S_T(xy)}{S_T(xx)}=\frac{126.9}{568.9}$$

$$=0.223 \tag{3.51}$$

$$y=21.1+0.223(x-513.1) \tag{3.52}$$

（3） y が 22 になる x の値は

$$21.1+0.223(x-513.1)=22$$

を解いて，その中心値を求める.

$$x=\frac{1}{0.223}(22-21.1)+513.1$$

$$=517(°\mathrm{C}) \tag{3.53}$$

ところで，σ_0^2 を現在の温度の分散（または H_0 を現在の温度のバラツキの幅），σ_1^2 をコントロールしたときの新しい温度の分散（または温度の新しいバラツキの幅を H_1）とすると，硬度 y の新しい分散 σ_y^2（または硬度の新しいバラツキの幅 H_y）は

$$\sigma_y^2=\left\{1-\rho_x\left[1-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right]\right\}\times(y\text{ の現在の分散}) \tag{3.54}$$

または

$$H_y=\sqrt{1-\rho_x\left[1-\left(\frac{H_1}{H_0}\right)^2\right]}\times(y\text{ の現在のバラツキの幅}) \tag{3.55}$$

となる.

$$y\text{ の現在の分散}=\frac{S_T-S_m}{9}=\frac{45.0-8.1}{9}$$

$$=\frac{36.9}{9}=4.1 \tag{3.56}$$

$$\sigma_0{}^2=\frac{S_T(xx)}{9}=\frac{568.9}{9}$$

$$=63.2 \tag{3.57}$$

$$\sigma_1{}^2=\frac{1}{5}\times\sigma_0{}^2=\frac{63.2}{5}$$

$$=12.6 \tag{3.58}$$

ρ_x は，y の平均値からの全変動で割ってその寄与率を求めなおさなければならない．

$$\rho_x=\frac{28.3-1.075}{28.3+8.6}=0.737 \tag{3.59}$$

(3.56)〜(3.59) 式を (3.54) 式に代入して

$$\sigma_y{}^2=\left\{1-0.737\left[1-\frac{1}{5}\right]\right\}\times 4.1=2.4 \tag{3.60}$$

分散は，約 60% (2.4+4.1×100) に小さくなることがわかる．

なお温度 x のバラツキの幅を 1/5 にするときには，分散は 2 乗のものさしだから，1/25 になる．その場合 (3.55) 式を用いる．

$$\frac{y\text{ の新しいバラツキの幅}}{y\text{ の現在のバラツキの幅}}=\sqrt{1-\rho_x\left[1-\left(\frac{H_1}{H_0}\right)^2\right]}$$

$$=\sqrt{1-0.737\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]}$$

$$=0.54 \tag{3.61}$$

温度の中心を 517°C，そのバラツキの幅を現在の 1/5 にしたら，製品の硬度の中心値は 22，そのバラツキの幅は現在の 54% に縮まることが期待される．

3.4 直交多項式の利用

毎年，毎年の売上高とか，温度を 10°C 間隔で変えて調べたような場合には，変数 x を 1 年間隔，10°C 間隔のように等しい間隔に変えたときのデータ y が求まっていることになる．変数 x が等間隔のときには，その間隔を h とし，x をその値の小さい方から大きさの順に並べたものを，x_1, x_2, ……, x_k とすると

$$\begin{aligned} x_1&=x_1\\ x_2&=x_1+h\\ x_3&=x_1+2h\\ &\vdots\\ x_k&=x_1+(k-1)h \end{aligned}$$

である．この場合

$$\bar{x}=x_1+\frac{1}{k}[h+\cdots\cdots+(k-1)h]$$
$$=x_1+\frac{k-1}{2}h$$

である．$\bar{x}$ は，k が奇数のとき，丁度真中の x の値であり，k が偶数のときには，真中の 2 つの項の中間の値である．

等間隔のときの多項式展開は，3.2 節で述べた場合と異なって，x の 1 次式のみでなく，x の 2 次式，3 次式等の高次の項を考えた場合でも，簡単にその係数を求めたり，それらの項を検定したりすることができる．それは，チェビシェフによって与えられた**直交多項式の表**を用いることができるからである．チェビシェフによれば y は直交関数である次の式，常数項，x の 1 次式の項，x の 2 次式の項，x の 3 次式の項で展開される．

$$y=b_0+b_1(x-\bar{x})+b_2\left\{(x-\bar{x})^2-\frac{k^2-1}{12}h^2\right\}+b_3\left\{(x-\bar{x})^3-\frac{3k^2-7}{20}(x-\bar{x})h^2\right\}+\cdots\cdots \tag{3.62}$$

この式の誘導には，かなり数学的知識が必要なので省略する．直交多項式の付表 6 を用いて実際問題を解く方法を説明する．

1962 年から，1968 年までのビールの総売上高は，次のようであった（単位 万キロリットル）．

	売上高
$A_1=x_1=1962$	142
$A_2=x_2=1963$	159
$A_3=x_3=1964$	184
$A_4=x_4=1965$	192
$A_5=x_5=1966$	206
$A_6=x_6=1967$	241
$A_7=x_7=1968$	240

これに，多項式をあてはめてみよう．付表 6 の水準数 $k=7$ のところを見る．b_1 が 1 次の項，b_2 が 2 次の項，b_3 が 3 次の項である．付表 6 では，4 次の項，5 次の項まで求められるようになっているが，特別な場合をのぞいて面倒なために，4 次の項や 5 次の項が計算されることはまれである．

常数項 b_0，1 次の項の係数 b_1，2 次の項の係数 b_2，3 次の項の係数 b_3 は次のようにして推定される．付表 6 の $k=7$ の値を用いて

$$b_0=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7}{7}$$

$$=\frac{142+159+184+192+206+241+240}{7}$$

$$=\frac{1364}{7}=194.9 \tag{3.63}$$

$$b_1=\frac{-3y_1-2y_2-y_3+0\times y_4+y_5+2y_6+3y_7}{r\lambda Sh}$$

$$=\frac{-3\times 142-2\times 159-184+0+206+2\times 241+3\times 240}{1\times 28\times 1}$$

$$=\frac{480}{28}=17.14 \tag{3.64}$$

$$b_2=\frac{5y_1+0\times y_2-3y_3-4y_4-3y_5+0\times y_6+5y_7}{r\lambda Sh^2}$$

$$=\frac{5\times 142+0-3\times 184-4\times 192-3\times 206+0+5\times 240}{1\times 84\times (1)^2}$$

$$=\frac{-28}{84}=-0.33 \tag{3.65}$$

$$b_3=\frac{-y_1+y_2+y_3+0\times y_4-y_5-y_6+y_7}{r\lambda Sh^3}$$

$$=\frac{-142+159+184+0-206-241+240}{1\times 36\times (1)^3}$$

$$=\frac{-6}{36}=-0.17 \tag{3.66}$$

ここに，r は，y_1, y_2, ……, y_7 が何個の和になっているかを示す値で，この場合 $r=1$ である．λS は，b_1, b_2, b_3 の欄にある λS の値である．h は，A_1, A_2, ……, A_7, すなわち，x_1, x_2, ……, x_7 の間隔で，この場合１年である．

y_1, y_2, ……, y_7 の平均値からの差の全変動 S_T は

$$S_T=142^2+159^2+\cdots\cdots+240^2-\frac{1364^2}{7}$$

$$=8497 \qquad (\mathrm{f}=6) \tag{3.67}$$

実際には，仮平均 200 を引いて求めた方がよい．

b_1, b_2, b_3 は何れも y_1, y_2, ……, y_7 の線形式で，しかも互いに直交する．それが直交多項式の名の由来である．したがって

$$S_{b_1}=\frac{(-3y_1-2y_2-y_3+0\times y_4+y_5+2y_6+3y_7)^2}{r\lambda^2 S}$$

$$=\frac{480^2}{1\times 28}=8229 \qquad (\mathrm{f}=1) \tag{3.68}$$

$$S_{b_2}=\frac{(5y_1+0\times y_2-3y_3-4y_4-3y_5+0\times y_6+5y_7)^2}{r\lambda^2 S}$$

$$=\frac{(-28)^2}{1\times 84}=9 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (3.69)$$

$$S_{b_3}=\frac{(-y_1+y_2+y_3+0\times y_4-y_5-y_6+y_7)^2}{r\lambda^2 S}$$

$$=\frac{(-6)^2}{1\times 6}=6 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (3.70)$$

$\lambda^2 S$ は，付表6にあげてあるが，それは y_i の係数の2乗和と同じものである．

誤差変動 S_e は

$$S_e=S_T-S_{b_1}-S_{b_2}-S_{b_3}$$

$$=8\,497-8\,229-9-6$$

$$=253 \qquad (\mathrm{f}=3) \qquad (3.71)$$

これから，表 3.4 の分散分析表を得る．

表 3.4 分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
b_1 (x の1次項)	1	8 229	8 229	153.6	8 175.4	96.2
b_2 (x の2次項)	1	9	—			
b_3 (x の3次項)	1	6	—			
e	3	253	84			
(e)	(5)	(268)	(53.6)		321.6	3.8
T	6	8 497			8 497.0	100.0

この場合，2次項，3次項は，誤差（実は4次，5次，6次などの高次の項も含んでいる）で有意でないから，これを誤差変動にプールして，自由度5の誤差分散 53.6 を作って，b_1 を検定した．この期間のビールの販売高を，年度A（または x）の1次式で表現すると，その寄与率は変化の 96.2% をつかんでいることになる．年度の1次式からのずれの大きさは，3.8% ということになる．

推定

すでに (3.63)，(3.64) 式で係数の推定値は求められている．

$$y=b_0+b_1(x-\bar{x})$$

$$=194.9+17.14(x-1965) \qquad (3.72)$$

この式を用いて，たとえば 1969 年の売上高を予測する場合，$x=1969$ としたものが正しい予測ということにはならない．たしかに，1962～1968 年の間で，売上高が (3.72) 式からはずれる程度は，誤差分散 V_e の中にすべて含まれているので，(3.72) 式で売上高を表現したときの誤差は十分に信頼限界

$$\pm\sqrt{F\times V_e\times\left\{\frac{1}{7}+\frac{(x-1965)^2}{rSh^2}+1\right\}} \tag{3.73}$$

の中に入るとしてよい．しかし，x を外挿する場合にはそうはいかない．したがって，(3.72) 式に $x=1969$ を代入したときの予測値は，1962 年から 1968 年における傾向がつづくとしてという仮定が必要である．もし，1962 年から 1968 年の傾向がつづくとすれば，1969 年の売上高の推定値 $\hat{\mu}$ は

$$\hat{\mu}=194.9+17.14(1969-1965)$$
$$=263.5\pm24.6 \tag{3.74}$$

信頼限界は，(3.73) 式において

$$F=F_5^1(0.05)=6.61$$

$$V_e=53.6$$

$$rSh^2=1\times28\times1^2=28$$

$$(1969-1965)^2=16$$

を代入した．

$$\pm\sqrt{6.61\times53.6\times\left\{\frac{1}{7}+\frac{16}{28}+1\right\}}=\pm24.6 \tag{3.75}$$

(3.74) 式程度の推定精度で十分かどうかは，生産計画や販売量の変更の容易性などによって異なる．

3.5 繰返えし測定のある場合

温度 A を 0°C, 20°C, 40°C, 60°C の 4 水準に変えて，ある品物の引張り強さが温度によって，どのように変化するかをみるために，各温度で 2 個ずつのテストピースについて引張り強さを測ったところ，表 3.5 のようになった．

表 3.5 引張り強さのデータ（単位 kg/mm²）

$A_1=0$ (°C)	84.0	85.2
$A_2=20$	77.2	76.8
$A_3=40$	67.4	68.6
$A_4=60$	58.2	60.4

規格値のような目標値がないとする．しからば，全変動は，修正項を除いて，自由度 7 ということになる．

仮の平均値として 70.0 を引くとデータは，次の表 3.6 のようになる．

表 3.6 加工データ

			計
A_1	14.0	15.2	29.2
A_2	7.2	6.8	14.0
A_3	− 2.6	− 1.4	− 4.0
A_4	−11.8	− 9.6	−21.4
計			17.8

$$\mathrm{CF}=\frac{17.8^2}{8}=39.60 \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}S_T&=14.0^2+15.2^2+\cdots\cdots+(-9.6)^2-\mathrm{CF}\\&=765.24-39.60\\&=725.64 \qquad (f=7)\end{aligned} \tag{3.77}$$

温度Aの効果を，付表6の $k=4$ の表を利用して，Aの1次，2次，3次効果に分解しよう．Aの1次の項の変動を S_{A_l}，2次の項の変動を S_{A_q}，3次の項の変動を S_{A_c} とする．

$$\begin{aligned}S_{A_l}&=\frac{(-3A_1-A_2+A_3+3A_4)^2}{r\lambda^2S}\\&=\frac{\{-3(29.2)-(14.0)+(-4.0)+3(-21.4)\}^2}{2\times 20}\\&=\frac{(-169.8)^2}{40}=720.80 \qquad (f=1)\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}S_{A_q}&=\frac{(29.2-14.0+4.0-21.4)^2}{r\lambda^2S}\\&=\frac{(-2.2)^2}{2\times 4}=0.60 \qquad (f=1)\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}S_{A_c}&=\frac{\{-29.2+3(14.0)-3(-4.0)-21.4\}^2}{r\lambda^2S}\\&=\frac{(3.4)^2}{2\times 20}=0.29 \qquad (f=1)\end{aligned} \tag{3.80}$$

S_{A_l}, S_{A_q}, S_{A_c} を加えたものは，次の S_A と等しくなる．この関係は，自由度3の S_A が，自由度1ずつの直交多項式の3つの成分に分解されたことを示している．

$$\begin{aligned}S_A&=\frac{1}{2}\{29.2^2+14.0^2+(-4.0)^2+(-21.4)^2\}-\mathrm{CF}\\&=721.70 \qquad (f=3)\end{aligned} \tag{3.81}$$

実際に

$$S_{A_l}+S_{A_q}+S_{A_c}=720.80+0.60+0.29$$

$$=721.69 \tag{3.82}$$

これから，表 3.7 の分散分析表を得る．

表 3.7 分散分析表

要因		f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
A	1次(l)	1	720.80	720.80	889.9**	719.99	99.22
	2次(q)	1	0.60	0.60			
	3次(c)	1	0.29	0.29			
e		4	3.95	0.99			
(e)		(6)	(4.84)	(0.81)		5.65	0.78
T		7	725.64			725.64	100.00

温度Aと引張り強さyの関係式は

$$y=b_0+b_1(A-\bar{A})$$

$$b_0=\text{仮平均}+\frac{T}{8}$$

$$=70.0+\frac{17.8}{8}$$

$$=72.22\pm0.78 \tag{3.83}$$

$$\pm\sqrt{F_6^1\times V_e\times\frac{1}{8}}=\pm\sqrt{\frac{5.99\times0.81}{8}}$$

$$=\pm0.78$$

$$b_1=\frac{-3A_1-A_2+A_3+3A_4}{r\lambda Sh}$$

$$=\frac{-3\times29.2-14.0+(-4.0)+3(-21.4)}{2\times10\times20}$$

$$=\frac{-169.8}{400}$$

$$=-0.424\pm0.035 \tag{3.84}$$

$$\pm\sqrt{\frac{5.99\times0.81}{rSh^2}}=\pm\sqrt{\frac{5.99\times0.81}{2\times5\times20^2}}$$

$$=\pm0.035$$

$$\bar{A}=30°\mathrm{C}$$

したがって

$$y=b_0+b_1(A-\bar{A})$$

$$=72.22-0.424(A-30) \tag{3.85}$$

ある温度Aで引張り強さを測ったときの値xの推定値と信頼限界は

$$x=b_0+b_1(A-\bar{A})\pm\sqrt{F\times V_e\times\left\{\frac{1}{8}+\frac{(A-30)^2}{rSh^2}+1\right\}}$$

$$=72.22-0.424(A-30)\pm\sqrt{5.99\times0.81\times\left\{\frac{1}{8}+\frac{(A-30)^2}{2\times5\times20^2}+1\right\}} \quad (3.86)$$

たとえば，$A=25°C$ の場合

$$x=72.22-0.424(25-30)\pm\sqrt{5.99\times0.81\times\left\{\frac{1}{8}+\frac{(25-30)^2}{4000}+1\right\}}$$

$$=74.34\pm\sqrt{5.99\times0.81\times1.131}$$

$$=74.34\pm2.34 \quad (3.87)$$

演 習 問 題

問 (3.1) 原料の粘度 x（単位 ポアズ）と製品の塗布厚 y（単位 ミクロン）のデータは次のようである．

x	3.5	4.1	3.6	3.3	3.9	4.0	4.2	3.8	4.0	3.7
y	18	24	20	15	20	22	29	21	25	23

塗布厚 y について，その平均値からの偏差の変動を，原料の粘度 x による部分と残りの変動に分解せよ．いま，粘度 x について，その中心値を 3.0，分散を現在の 1/10 にするときには，塗布厚 y の平均値はいくらに，またバラツキの幅は現在の何パーセントに縮まるか．

問 (3.2) 次のデータは，勤労者世帯の所得階級別のエンゲル係数（消費支出の中の食費の割合）である．

所得階級（中心値）		エンゲル係数
x_1	50（万円）	39.3
x_2	70	37.7
x_3	90	35.1
x_4	110	32.9
x_5	130	31.4
x_6	150	29.3
x_7	170	29.7
x_8	190	27.1

（1） 所得と支出の関係を所得 x の 3 次項まで考えて分散分析をせよ．

（2） 所得 x とエンゲル係数の関係式を求めよ．

問 (3.3) 火曜から金曜までのウィークデーについて，ある地区におけるのべ 10 日間の，ピーク時の不快指数 x と，その日の最大の単位時間当りの水の使用量 y は次のようであった（単位 万トン）．

x	72	68	75	78	81	80	75	69	75	80
y	15.3	13.2	16.2	19.0	22.2	20.8	17.0	12.5	16.8	21.5

（1） 水の消費量yを不快指数xの1次式で表わせ.

（2） 現在の水の最大供給能力は，単位時間当り 24 万トンである．不快指数がいくらまでなら，供給能力があるとしてよいか.

（注） その日の最悪の不快指数とその日の最大供給量（単位時間当りの供給量）の時間は，ずれていてもよい．回帰式の値が 24.0 以下になるような最大のxを求めること.

問 (3.4) 1960 年から，1969 年までの年間電灯使用量の生の値 y と，対数変換値 y' は，次のようであった.

	y（単位 億kwh）	y'（対数値）
1960	134	10.127
1961	157	10.196
1962	188	10.274
1963	220	10.342
1964	253	10.403
1965	284	10.453
1966	317	10.501
1967	357	10.553
1968	396	10.598
1969	454	10.657

（1） 生の値，対数値を別々に分散分析をせよ．ただし，年度xについては，1次項と2次項のみを考えよ．3次以上の項は，誤差項に入れることになる.

（2） xの1次項までとった要因の寄与率（一般平均は除く）を求め，生データと対数変換値でどちらが何倍よいかを次の値の比較で示せ．すなわち，生の値，対数値の分散分析から別々に次の SN 比

$$\eta=\frac{x\text{の1次項の寄与率}}{1-x\text{の1次項の寄与率}}$$

を求めて比較せよ.

（3） SN 比の良い方のデータで，このままの増加傾向がつづくとして 1970 年，1971 年の電灯量を推定せよ.

4. 簡単な二元配置法

2つの異なった因子の水準の各組合せにデータが与えられているものを二元配置のデータ，または二元分類のデータという．年度別，月別の売上高；年度別，支店別の売上高；国別，年度別の物価指数；銘柄別，時期別の株価；洗剤別，時間別の洗浄度；薬の種類別，男女別の治癒率などはすべて二元配置のデータである．本章においては，やや簡単な二元配置のデータの典型的な解析法を示す．二元配置のデータ解析はデータ解析の基礎である．

4.1 年度別，月別の売上高のデータ

4.1.1 データ

電力，ガス，電話，郵便，交通，上・下水道等の公共企業においては，需要に見合う設備や生産計画のために，何よりも需要予測が大切である．電力のように貯蔵のできないもの，電話，交通のように需要があったとき即座にサービスをしないとサービス低下になるものでは，年別，月別，曜日別，時刻別需要の推定が必要である．郵便のようなものは，年別，日別の推定で十分であろう．

需要予測は，生産企業や販売企業においても大切である．製造設備，売場面積や人員計画には，1年先，2年先の需要予測が必要になるし，色，柄，サイズ別の仕入計画には，半年，1カ月，1週間，1日先などのさまざまな予測が，商品の種類によっては必要になる．

ここには，年度別，月別のデータから，1年後，2年後位までの予測の一つの方法を説明する．電力のように，年度別，季節別，曜日別，時間別の需要予測には，四元配置のデータ解析が必要になるが，それについては8章を見られたい．

表 4.1 のデータは，ある商品の年度別，月別売上高である．

需要量のようなものは，どの地域でも，どの月でも，前年の 10% 増しのように，ほぼ同じような比率で増加するのが普通である．そのような場合には，対数値をとってデータ解析をした方が効率がよいことが多い．表 4.2 は付表2の常用対数表を用いて，表 4.1 のデータを対数変換したデータから，仮平均8を引いて 1000 倍したものである．たとえ

表 4.1 年度別，月別売上高（単位 百万円）

A(年) \ B(月)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
昭和 39	50	52	78	72	63	67	90	66	58	75	77	182	930
〃 40	58	60	83	80	70	71	96	72	59	82	89	195	1 015
〃 41	64	64	91	84	79	80	115	80	68	95	98	226	1 144
〃 42	74	74	102	104	92	93	142	96	83	113	116	277	1 366
〃 43	89	90	128	126	113	127	179	117	100	137	143	331	1 660
〃 44	103	104	142	135	129	130	192	130	112	150	156	364	1 827
計	438	444	624	601	546	568	774	561	480	652	679	1 575	7 942

ば，昭和 39 年 1 月の売上高は 50 000 000 円（50 メガ円ともいう）で，この常用対数は 8 桁の数字だから，常用対数の指標は（桁の数−1）で 7，小数部分すなわち仮数は，付表 2 から 500 のところを見て 0.6990，したがって 50 000 000 円の常用対数は 7.699（小数 4 位は丸めた）．これから仮平均 8 を引いて 1000 倍すれば，−301 ということになる．表 4.2 の他の値も同様にして求めたものである．電子計算機を用いるときには，常用対数を求めるサブルーチンを用いるか，予め常用対数に変換したデータをインプットするかしなければならない．

表 4.2 対数にした売上げのデータ
変換 $(\log y-8)\times 1\,000$ をしたもの

A \ B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
39	−301	−288	−104	−143	−201	−174	−46	−181	−237	−125	−114	260	−1 654
40	−237	−222	−81	−97	−155	−149	−18	−143	−229	−86	−51	290	−1 178
41	−194	−194	−41	−76	−102	−97	61	−97	−168	−22	−9	354	−585
42	−131	−131	9	17	−36	−32	151	−18	−81	53	64	442	307
43	−51	−46	107	100	53	104	201	68	0	137	155	520	1 348
44	13	17	152	130	111	114	236	114	49	176	193	561	1 866
計	−901	−864	42	−69	−330	−234	585	−257	−666	133	238	2 427	104

4.1.2 分 散 分 析

2 因子がある場合には，1 つの因子の効果が，他の因子の水準でどうなるかという**交互作用**の研究が必要となる．この場合，年度の伸び，すなわち，A の効果がどの月でも同じようかどうかということである．3.4 節で述べたように，B_1（1 月）における年度の 1 次効果（対数の世界，したがって真数では指数に当たる）は

$$b(B_1)=\frac{-5(-301)-3(-237)-1(-194)+1(-131)+3(-51)+5(13)}{r\lambda Sh}\times\frac{1}{1000}$$

$$=\frac{2\,191}{1\times 35\times 1(\text{年})}\times\frac{1}{1000}=0.0626 \tag{4.1}$$

元の真数では，付表2の対数を逆に読んで

$$10^{0.0626} \fallingdotseq 1.155$$

となる．すなわち，毎年 1.155 倍，年率 15.5% の販売量の増大である．

同様に，B_2, B_3, ……, B_{12} における年度の1次効果 $b(B_2)$, ……, $b(B_{12})$ が求まる．B_1, B_2, ……, B_{12} の各月で年度の1次効果がかなり異なるなら，B の水準毎に，それらを求めなければならない．そうでないなら，売上げの伸び率を1個の数値で表現する方が簡単で望ましい．そのためには，$b(B_1)$, $b(B_2)$, ……, $b(B_{12})$ の間の差が有意かどうかを調べればよい．ときには，その差が有意であっても，寄与率が小さければ，平均の伸び率で表現し，それで予測した方が有利になることが多い．

$b(B_1)$, $b(B_2)$, ……, $b(B_{12})$ の比較には，35や1000で割る前の分子の値で分散分析する方が手間がらくである．すなわち，Aの1次効果がBでどれだけ異なるかは，次の $S_{A_l \times B}$ を求めればよい．

$$S_{A_l \times B} = \frac{L(B_1)^2 + L(B_2)^2 + \cdots\cdots + L(B_{12})^2}{70} - \frac{[L(B_1) + L(B_2) + \cdots\cdots + L(B_{12})]^2}{70 \times 12}$$

ここに，$L(B_1)$, ……, $L(B_{12})$ は付表6の直交多項式の表から

$$\left.\begin{aligned}
L(B_1) &= -5(-301) - 3(-237) - 1(-194) + 1(-131) + 3(-51) + 5(13) = 2191 \\
L(B_2) &= -5(-288) - 3(-222) - 1(-194) + 1(-131) + 3(-46) + 5(17) = 2096 \\
&\vdots \\
L(B_{12}) &= -5(260) - 3(290) - 1(354) + 1(442) + 3(520) + 5(561) = 2283
\end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

したがって

$$\begin{aligned}
S_{A_l \times B} &= \frac{1}{70}\Big(2191^2 + 2096^2 + 1914^2 + 2049^2 + 2250^2 + 2264^2 + 2157^2 + 2187^2 \\
&\qquad + 2204^2 + 2249^2 + 2226^2 + 2283^2\Big) - \frac{(2191 + \cdots\cdots + 2283)^2}{70 \times 12} \\
&= 1786
\end{aligned} \quad (4.3)$$

一方，B_1, B_2, ……, B_{12} における年度の効果の平均をAの主効果という．その値 S_A は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
S_A &= \frac{(-1654)^2 + (-1178)^2 + \cdots\cdots + 1866^2}{12} - \frac{104^2}{72} \\
&= 821428
\end{aligned} \quad (4.4)$$

年度の効果の中から，年度による1次効果 S_{A_l} を引いたものは，**1次効果の残りの効果**と呼ばれ，$S_{A_{res}}$ と呼ばれる．A_{res} をAの2次，3次，4次，5次の効果に分解することもあるが，そのような効果は，存在しても予測には役立たないことが多い．たとえば，売上げの伸びは本来ならば，全商品，全サービスの合計を考えた場合，生産性の向上の割合

しか伸びない筈であるが，誰かが不景気になりそうだと予測して宣伝すると，それを真に受けた企業が品物を売り急ぐことになる．すると品物の価格が下がり始める．その誰かの予測を正しいと思うようになり，更に売り急ぐと，買う方は価格低下を予想して買い控えることになる．同業者も真似を始めると，結局売行きが落ち，不景気になる．しかし，これは誰かの誤った予想による**ハンテング現象**（振れ現象）であり，そのうちに回復する．景気不景気は誤った予測からくるものであり，それによって販売量が直線的に伸びないことがあっても，それは1次的なものであって，本質的には直線によるあてはめの方が望ましいことになる．もちろん，新製品を出したときなど，普及までの間はS字状の曲線になることが少なくないが，それは新規購入と買い換えが混入しているからである．

したがって，Aの効果の中からAの1次効果だけを抽出し，1次効果以外は誤差と考えた方が実際的である．$A_{\rm res}$ は年度効果の中の1次誤差と考えることもできる．

Aの1次効果は，$L(B_1)$，$L(B_2)$，……，$L(B_{12})$ の合計から求めることができる．

$$S_{A_l}=\frac{[L(B_1)+L(B_2)+\cdots\cdots+L(B_{12})]^2}{70\times 12}=809\,101 \tag{4.5}$$

または，A_1，A_2，……，A_6 に対する合計を用いてもよい．

$$\begin{aligned}S_{A_l}&=\frac{(-5A_1-3A_2-A_3+A_4+3A_5+5A_6)^2}{70\times 12}\\&=\frac{[-5(-1\,654)-3(-1\,178)+\cdots\cdots+5\times 1913]^2}{840}\\&=\frac{26\,070^2}{840}=809\,101\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}S_{A{\rm res}}&=S_A-S_{A_l}=821\,428-809\,101\\&=12\,327\end{aligned} \tag{4.7}$$

次のBの効果は，B_1，B_2，……，B_{12} に対する合計から求める．

$$\begin{aligned}S_B&=\frac{B_1{}^2+B_2{}^2+\cdots\cdots+B_{12}{}^2}{6}-{\rm CF}\\&=\frac{(-901)^2+(-860)^2+\cdots\cdots+2\,427^2}{6}-\frac{104^2}{72}\\&=1\,422\,810\end{aligned} \tag{4.8}$$

全変動 S_T と誤差変動 S_e は

$$\begin{aligned}S_T&=(-301)^2+(-288)^2+\cdots\cdots+561^2-{\rm CF}\\&=2\,252\,696\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}S_e&=S_T-(S_A+S_B+S_{A_l\times B})\\&=6\,672\end{aligned} \tag{4.10}$$

したがって分散分析表は表 4.3 のようになる．

表 4.3 分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
A l	1	809 101	809 101	5 253.9**	808 947	35.91
A res	4	12 327	3 082	20.0**	11 711	0.52
B	11	1 422 810	129 346	839.9**	1 421 116	63.09
$A_l\times B$	11	1 786	162	—		
e	44	6 672	152			
(e)	(55)	(8 452)	(154)		10 922	0.48
T	71	2 252 696			2 252 696	100.00

$A_l\times B$ は有意でないので，e にプールした．それが (e) である．A_{res} が小さいから無視して誤差に入れてしまうこともあるが，別な誤差と考えるべきで，予測に次のように用いることになる．

4.1.2 推定と予測

有意な要因は，A_l, A_{res}, B の各効果と一般平均mである．この中で，A_{res} は年度毎の伸びが一定でない程度を示している．景気，不景気などの思惑，競合品の影響など予測できないものによるもので，普通は誤差と看做すべきである．ただし，A_l に対する誤差であるから，S_e とは一緒にしない方がよい．むしろ，A_l を用いたときの予測値の誤差として考慮すべきである．したがって，ここでは，A_l, B, m のみを考えた推定を行なう．A_l の場合には，V_e' を A_{res} の誤差分散，Fは分子の自由度 1，分母の自由度 4 とする．

mの推定 $$\bar{T}=8+\frac{104}{72}\times\frac{1}{1000}\pm\sqrt{\frac{4.02\times154}{72}}\times\frac{1}{1000}$$
$$=8.0014\pm0.0029 \tag{4.11}$$

A_l の推定 $$\hat{a}=\frac{-5A_1-3A_2-A_3+A_4+3A_5+5A_6}{r\lambda Sh}\pm\sqrt{\frac{F\times V'}{rSh^2}}\times\frac{1}{1000}$$
$$=\frac{26070}{12\times35\times1}\times\frac{1}{1000}\pm\sqrt{\frac{7.71\times3082}{12\times\frac{35}{2}\times1^2}}\times\frac{1}{1000}$$
$$=0.0621\pm0.0106 \tag{4.12}$$

B_i の主効果の推定．たとえば B_1 の場合は次のようになる．

$$\bar{B}_1=\frac{-901}{6}\times\frac{1}{1000}\pm\sqrt{\frac{4.02\times154}{6}}\times\frac{1}{1000}$$
$$=-0.1502\pm0.0032 \tag{4.13}$$

これから，A年の B_i 月の売上高 $\hat{\mu}(B_i)$ は

$$\hat{\mu}(B_i)=\bar{T}+(\bar{B}_i-\bar{T})+\hat{b}(A-\bar{A})$$
$$=\bar{B}_i+0.0621(A-41.5) \tag{4.14}$$

昭和 45 年，46 年の売上高の予測は，$A=45$，46，$\bar{B}_i$ を代入して表 4.4 のようになる．

表 4.4 昭和 45 年，46 年の売上高の予測（真数の単位 百万円）

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
$\bar{B}$(対数値)	7.8498	7.8567	8.0063	7.9885	7.9450	7.9543
$\bar{B}$(真　数)	70.8	71.9	101.5	97.4	88.1	90.0
昭和 45 年	116.7	118.6	167.3	160.6	145.3	148.4
昭和 46 年	134.6	136.8	193.1	185.2	167.6	171.2
	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
$\bar{B}$(対数値)	8.0975	7.9572	7.8890	8.0222	8.0397	8.4045
$\bar{B}$(真　数)	125.2	90.6	77.4	105.2	109.6	253.8
昭和 45 年	206.5	149.4	127.7	173.5	180.7	418.5
昭和 46 年	238.1	172.4	147.3	200.1	208.5	482.7

昭和 45 年，46 年の予測値は，$\bar{B}$（真数）をそれぞれ 1.649 倍，1.902 倍して求めたものである．1.649 と 1.902 は，$0.0621\times(45-41.5)=0.2172$，$0.0621\times(46-41.5)=0.2793$ に対する真数である．昭和 45 年の各月の予測値に対する信頼限界は次のようにして求められる．

対数値の世界で

$$\hat{\mu}=\bar{B}_i+\hat{b}(A-41.5)$$

は，$\bar{B}_i$ については，誤差分散 σ_1^2 の n_e が 6，$\hat{b}$ については，A_{res} を省略したため，誤差分散 V_e' に対する n_e が，直交多項式の付表 6 の S を用いて，$rSh_A{}^2=12\times\dfrac{35}{2}\times 1^2=210$ となる．$\hat{b}(A-41.5)$ の信頼限界の 2 乗と，$\bar{B}_i$ の信頼限界の 2 乗の和の平方根が，求める信頼限界となる．

$$\bar{B}_i+\hat{b}(A-41.5)\pm\sqrt{F_4^1\times\frac{(A-41.5)^2}{210}\times V_e'+F_{55}^1\times\left(\frac{1}{6}+1\right)\times V_e}$$
$$=\bar{B}_i+\hat{b}(45-41.5)\pm\sqrt{7.71\times\frac{3.5^2}{210}\times 3082+4.02\times\frac{7\times 154}{6}\times\frac{1}{1000}}$$
$$=\bar{B}_i+0.02172\pm 0.046 \tag{4.15}$$

元の対数では，0.036 の真数が 1.112 である．したがって信頼限界は

$$1.112^{\pm 1}\fallingdotseq 1\pm 0.112 \tag{4.16}$$

だから，誤差は ±11.2% ということになる．

ところで，A と B の効果の推定をどういうことに用いるかというと，たとえば昭和 45

年度において自社製品の売上げが順調かどうかを調べたいとする．昭和45年は，昭和44年までに比較して，不景気になっているかも知れない．しかし，自社の売上げの伸びが，いままで通り年率1.154倍ずつとすれば，昭和45年度の売上げは，表4.4の値位になるべきである．

このような売上目標は，生産予定を作ったり，販売予定を作ったりするのに用いられるが，その目的は，**決して売上高の予測ではない**．すなわち，**販売に対する計画目標として重要になる**のである．もし，昭和45年度に，表4.4の売上目標よりずっと多い売上げがあったにしても，同業他社の売上げも同様に伸びているならば，営業が特別優れているというわけにはいかない．反対に売上目標より実績が悪くなっても，同業他社よりも，その減り方が少ないならば，優秀な営業ということになる．すなわち，売上げ目標は，あくまでも一応の目標であるが，実績が出たあとで最終的に営業部門が評価されるのは，表4.4にさらに全売上高の伸び率を掛けた次の額ということになる．

$$\text{表4.4の売上目標} \times \frac{\text{全国のその製品の伸び率}}{1.154} \tag{4.17}$$

(4.17) 式の値が営業の評価の基準になる．

このような計算は，全国的製品のときには，地域別，年別，月別にとったり，地域の商店というようなときには，年別，月別；年別，日別；年別，月別，商品別にとったりして解析するのがよい．そうすると，営業政策上の問題点が発見されることが少なくない．

(4.17) 式の後の項をKとすれば

$$K = \frac{\text{その製品の全国の伸び率}}{1.154} \tag{4.18}$$

を，(4.16) 式の信頼限界にもそのまま掛けてよい．

4.2 新聞広告の注目率調査

表4.5のデータは，毎日新聞社広告調査部三村晶英氏の下で望陀修氏（当時青山学院大学理工学部3年）が実習に用いたデータである．新聞広告のサイズBを

B_1=全1段，B_2=全3段，B_3=全5段，B_4=全7段，B_5=全10段，B_6=全15段（全1面）に変え，朝刊 A_1，夕刊 A_2 毎にどれ位の注目率があったかを調べたものである．

表 4.5 広告注目率の調査データ（単位 %）

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	計
A_1	17.4	21.9	38.4	47 4	38.2	66.5	229.8
A_2	14.3	32.8	39.8	49.9	45.9	54.3	237.0
計	31.7	54.7	78.2	97.3	84.1	120.8	466.8

統計解析の目的は，広告の大きさと注目率の関係として，次の3つの意見のどれがよいかを調べるためである．

場合（1） 注目率を，広告の大きさの平方根の1次式で表わす．

場合（2） 注目率を，広告の大きさの対数値の1次式で表わす．

場合（3） 注目率を，広告の大きさの1次式で表わす．

4.2.1 場合 (3) の解析

広告のサイズは，段数に比例する．注目率の変動を朝夕刊すなわちAの主効果，Bの1次効果，Bの1次効果の A_1, A_2 での差 $(B_l \times A)$，Bの残りの効果，誤差の 5つの成分に分解する．

$$\mathrm{CF}=\frac{466.8^2}{12}$$

$$=18158.52 \tag{4.19}$$

$$S_T=17.4^2+21.9^2+\cdots\cdots+54.3^2-\mathrm{CF}$$

$$=2636.34 \tag{4.20}$$

$$S_A=\frac{(229.8-237.0)^2}{12}$$

$$=4.32 \tag{4.21}$$

S_{B_l} と $S_{B_l \times A}$ を求めるために，A_1, A_2 毎にBの1次効果の線形式を作る．

$$L(A_1)=(B_1-\bar{B})\times 17.4+(B_2-\bar{B})\times 21.9+\cdots\cdots+(B_6-\bar{B})\times 66.5 \tag{4.22}$$

ここに，$B_1=1$, $B_2=3$, ……, $B_6=15$ で

$$\bar{B}=\frac{1}{6}(1+3+\cdots\cdots+15)=\frac{41}{6} \tag{4.23}$$

(4.22) 式は，次のようにして計算した方がらくである．

$$L(A_1)=B_1\times 17.4+B_2\times 21.9+\cdots\cdots+B_6\times 66.5-\frac{(B_1+B_2+\cdots\cdots+B_6)}{6}$$

$$\times(17.4+21.9+\cdots\cdots+66.5)$$

$$=1\times 17.4+3\times 21.9+\cdots\cdots+15\times 66.5-\frac{(1+3+\cdots\cdots+15)\times 229.8}{6}$$

$$=416.1 \tag{4.24}$$

同様に

$$L(A_2)=1\times 14.3+3\times 32.8+\cdots\cdots+15\times 54.3-\frac{41\times 237.0}{6}$$

$$=315.0 \tag{4.25}$$

これから

$$S_{B_l}=\frac{[L(A_1)+L(A_2)]^2}{2\times B \text{ の水準間の変動}}$$

$$=\frac{(416.1+315.0)^2}{2\times\left[1^2+3^2+\cdots\cdots+15^2-\frac{41^2}{6}\right]}$$

$$=2074.47 \qquad (f=1) \qquad (4.26)$$

$$S_{A\times B_l}=\frac{(416.1-315.0)^2}{2\times\left[1^2+3^2+\cdots\cdots+15^2-\frac{41^2}{6}\right]}$$

$$=\frac{101.1^2}{257.66}=39.67 \qquad (f=1) \qquad (4.27)$$

$$S_B=\frac{1}{2}(31.7^2+54.7^2+\cdots\cdots+120.8^2)-\mathrm{CF}$$

$$=2463.96 \qquad (f=5) \qquad (4.28)$$

$$S_{B\mathrm{res}}=S_B-S_{B_l}$$

$$=2463.96-2074.47$$

$$=389.49 \qquad (f=4) \qquad (4.29)$$

表 4.6 場合 (3) の分散分析表

要 因	f	S	V
A	1	4.32	4.32
B B_l	1	2 074.47	2 074.47
B B_{res}	4	389.49	97.37
$A\times B_l$	1	39.67	39.67
e	4	128.39	32.10
T	11	2 636.34	

表 4.6 の場合, B_l 以外は全部プールして, 表 4.7 の整理した分散分析表が得られる.

表 4.7 場合 (3) の整理した分散分析表

要 因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
B_l	1	2 074.47	2 074.47	36.9**	2 018.28	76.6
e	10	561.87	56.19		618.06	23.4
T	11	2 636.34			2 636.34	100.0

4.2.2 場合 (1) の解析

この場合

$$y=b_0+b_1(\sqrt{B}-\sqrt{B}\text{ の平均}) \qquad (4.30)$$

となる. CF, S_T, S_A, S_B などは, 場合 (3) と全く同じになる. $\sqrt{B}$ にしたときのBの各水準値は次のようになる.

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	計
1.000	1.732	2.236	2.646	3.162	3.873	14.649

したがって，Bの平方根に対する変動Sは

$$S=1.000^2+1.732^2+\cdots\cdots+3.873^2-\frac{14.649^2}{6}$$

$$=5.233675 \tag{4.31}$$

$$L(A_1)=1.000\times17.4+1.732\times21.9+\cdots\cdots+3.873\times66.5-\frac{14.649\times229.8}{6}$$

$$=83.8998 \tag{4.32}$$

$$L(A_2)=1.000\times14.3+1.732\times32.8+\cdots\cdots+3.873\times54.3-\frac{14.649\times237.0}{6}$$

$$=68.9420 \tag{4.33}$$

$$S_{B_l}=\frac{(83.8998+68.9420)^2}{2\times5.233675}$$

$$=\frac{152.8418^2}{10.46735}$$

$$=2231.76 \qquad (f=1) \tag{4.34}$$

$$S_{A\times B_l}=\frac{(83.8998-68.9420)^2}{10.46735}$$

$$=21.37 \qquad (f=1) \tag{4.35}$$

$$S_{B\mathrm{res}}=S_B-S_{B_l}$$

$$=2463.96-2231.76$$

$$=232.20 \qquad (f=4) \tag{4.36}$$

$$S_e=S_T-S_A-S_{B_l}-S_{B\mathrm{res}}-S_{A\times B_l}$$

$$=146.69 \qquad (f=4) \tag{4.37}$$

表 4.8 場合 (1) の分散分析表

要 因	f	S'	V	S'	$\rho(\%)$
A	1	4.32	4.32		
B $\{B_l$	1	2 231.76	2 231.76	219 130	83.1
$\ \ \ B_{\mathrm{res}}$	4	232.20	58.05		
$A\times B_l$	1	21.37	21.37		
e	4	146.69	36.67		
(e)	(10)	40 458	4 046		16.9
T	11	2 636.34			100.0

公式の表現力は，要因の寄与率を誤差の寄与率で割った **SN 比**で比較される．場合 (1) の SN 比は

$$\eta=\frac{83.1}{16.9}=4.92 \tag{4.38}$$

また場合 (3) の SN 比は

$$\eta=\frac{76.6}{23.4}=3.27 \tag{4.39}$$

したがって，場合 (1) の方が場合 (3) より，4.92÷3.27=1.51 倍，表現力が良いことになる．

4.2.3 場合 (2) の分散分析表

表 4.5 の対数値をとると表 4.9 のようになる．ただし，データは元の率に直して対数変換をした．

表 4.9 Bを対数変換したデータ

$\log B$	0	0.477	0.699	0.845	1.000	1.176	計
A_1	17.4	21.9	38.4	47.4	38.2	66.5	229.8
A_2	14.3	32.8	39.8	49.9	45.9	54.3	237.0
計	31.7	54.7	78.2	97.3	84.1	120.8	466.8

CF, S_T, S_A, S_B は場合 (3) と同じである．すなわち，

$$\mathrm{CF}=18158.52,\quad S_T=2636.34,\ S_A=4.32,\ S_B=2463.96$$

$$S_{B_l}=\frac{[L(A_1)+L(A_2)]^2}{2\times\left[0^2+0.477^2+\cdots\cdots+1.176^2-\dfrac{4.197^2}{6}\right]}=2233.80$$

$$S_{A\times B_l}=\frac{[L(A_1)-L(A_2)]^2}{2\times\left[0^2+0.477^2+\cdots\cdots+1.176^2-\dfrac{4.197^2}{6}\right]}=6.56$$

ただし，

$$L(A_1)=0\times17.4+0.477\times21.9+\cdots\cdots+1.176\times66.5-\frac{4.197\times229.8}{6}$$

$$L(A_2)=0\times14.3+0.477\times32.8+\cdots\cdots+1.176\times54.3-\frac{4.197\times237.0}{6}$$

$$S_e=S_T-S_A-S_B-S_{A\times B_l}=161.50$$

これから，表 4.10 の分散分析表が得られる．表 4.10 から

$$\eta=\frac{0.832}{0.168}=4.95 \tag{4.40}$$

この SN 比の値は，場合 (1) より大きい．したがって，場合 (2) の SN 比が最大であるから，三者の意見の中では“注目率は広告の大きさの対数値の 1 次式で表わされる”

表 4.10 場合 (2) の分散分析表

要　因	f	S	V	S'	$\rho(\%)$
A	1	4.32	4.32		
B l	1	2233.80	2233.80**	2193.42	83.2
B q	4	230.16	57.54		
$A\times B_l$	1	6.56	6.56		
e	4	161.50	40.38		
プールした (e)	(10)	402.54	40.25	442.92	16.8
T	11	2636.34		2636.34	100.0

が最も良いことになる．このようにいろいろな公式の比較は，分散分析によって合理的に行なうことができる．もし，第4の意見として，注目率 y の公式の中に未知数が存在しない式が与えられた場合には，SN 比は次のようにして求めることになる．ただし，一般平均 m を除外して前述の (1)，(2)，(3) と比較したいときである．

$$S_e=\sum(\text{計算値}-\text{観測値})^2 \qquad (\mathrm{f}=12) \qquad (4.41)$$

$$S_e'=S_e\times\frac{11}{12} \qquad (4.42)$$

$$S_T=\text{観測値の全変動} \qquad (\mathrm{f}=11) \qquad (4.43)$$

$$\eta=\frac{S_T-S_e'}{S_e'} \qquad (4.44)$$

4.3 ゴルフボールの飛距離の実験

4.3.1 分　散　分　析

表 4.11 は 2 種のゴルフボール A_1 (ダンロップ)，A_2 (イーグル) について，ボールの温度を 4 水準

$B_1=0°\mathrm{C}$, $B_2=10°\mathrm{C}$, $B_3=20°\mathrm{C}$, $B_4=30°\mathrm{C}$

にとり，それぞれ 2 個ずつのボールの跳返えり高さを測ったものである．

表 4.11 跳返えり高さのデータ (単位 cm)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	99.0	105.1	110.3	114.5
	98.2	104.6	112.8	116.1
A_2	96.1	101.6	109.8	117.1
	95.2	102.4	108.2	116.0

仮平均 105.0 cm を引き，繰返えしの和，縦横の和などの計算用の補助表，表 4.12 を作る．

表 4.12　補　助　表

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−6.0	0.1	5.3	9.5
	−6.8	−0.4	7.8	11.1
A_2	−8.9	−3.4	4.8	12.1
	−9.8	−2.6	3.2	11.0

	B_1	B_2	B_3	B_4	計
A_1	−12.8	−0.3	13.1	20.6	20.6
A_2	−18.7	−6.0	8.0	23.1	6.4
計	−31.5	−6.3	21.1	43.7	27.0

$$\mathrm{CF}=\frac{27.0^2}{16}$$

$$=45.60 \qquad (f=1) \qquad (4.45)$$

$$S_T=(-6.0)^2+0.1^2+\cdots\cdots+11.0^2-\mathrm{CF}$$

$$=833.40 \qquad (f=15) \qquad (4.46)$$

次に，A, B の組合せ間の変動 S_{T_1} を求める．S_{T_1} は実験間（この場合 A, B の 8 通りの異なった条件の実験が行なわれている）の変動，または 1 次単位間の変動と呼ばれる．

$$S_{T_1}=\frac{1}{2}[(-12.8)^2+(-0.3)^2+\cdots\cdots+23.1^2]-\mathrm{CF}$$

$$=826.04 \qquad (4.47)$$

実験間の変動 S_{T_1} が，Aの主効果 S_A, Bの 1 次効果 S_{B_l}, Bの 2 次効果 S_{B_q}, Bの 3 次効果 S_{B_c}, Bの 1 次効果が A_1 と A_2 で異なるかどうかの交互作用 $S_{B_l\times A}$, 1 次誤差変動（実験間誤差変動）S_{e_1} に分解される．

$$S_A=\frac{1}{16}(20.6-6.4)^2$$

$$=12.60 \qquad (f=1) \qquad (4.48)$$

$$S_{B_l}=\frac{(-3B_1-B_2+B_3+3B_4)^2}{[(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2]\times 4}$$

$$=\frac{[-3\times(-31.5)-1\times(-6.3)+1\times 21.1+3\times 43.7]^2}{80}$$

$$=800.11 \qquad (f=1) \qquad (4.49)$$

$$S_{B_q}=\frac{[1\times(-31.5)+(-1)\times(-6.3)+(-1)\times 21.1+1\times 43.7]^2}{4\times 4}$$

$$=0.42 \qquad (f=1) \qquad (4.50)$$

$$S_{B_c}=\frac{[-1\times(-31.5)+3\times(-6.3)+(-3)\times 21.1+1\times 43.7]^2}{20\times 4}$$

$$=0.61 \qquad (f=1) \qquad (4.51)$$

A_1, A_2 毎にBの１次効果の対比を作る．

$$\left.\begin{aligned}L(A_1)&=-3\times(-12.8)-1\times(-0.3)+1\times 13.1+3\times 20.6=113.6\\ L(A_2)&=-3\times(-18.7)-1\times(-6.0)+1\times\ 8.0+3\times 23.1=139.4\end{aligned}\right\} \quad (4.52)$$

$L(A_1)$, $L(A_2)$ の何れの単位数も，$[(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2]\times 2=40$ である．

$$S_{A\times B_l}=\frac{L(A_1)^2+L(A_2)^2}{40}-\frac{[L(A_1)+L(A_2)]^2}{80}$$

$$=\frac{113.6^2+139.4^2}{40}-\frac{253.0^2}{80}$$

$$=8.32 \qquad (4.53)$$

$$S_{e_1}=S_{T_1}-S_A-S_{B_l}-S_{B_q}-S_{B_c}-S_{A\times B_l}$$

$$=0.38 \qquad (f=2) \qquad (4.54)$$

次に繰返えし間の誤差変動（２次誤差変動ともいう）S_{e_2} を求める．

$$S_{e_2}=\left[(-6.0)^2+(-6.8)^2-\frac{(-12.8)^2}{2}\right]+\cdots\cdots+\left[12.1^2+11.0^2-\frac{23.1^2}{2}\right]$$

$$=(-6.0)^2+(-6.8)^2+\cdots\cdots+12.1^2+11.0^2-CF-\left[\frac{(-12.8)^2+\cdots\cdots+23.1^2}{2}-CF\right]$$

$$=S_T-S_{T_1}$$

$$=833.50-826.04$$

$$=7.46 \qquad (f=8) \qquad (4.55)$$

したがって，分散分析表は表 4.13 のようになる．

表 4.13 分散分析表

要因	f	S'	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
A	1	12.60	12.60	17.0**	11.86	1.4
B l	1	800.11	800.11	1 083.0**	799.37	95.9
B q	1	0.42	0.42			
B c	1	0.61	0.61			
$A\times B_l$	1	8.32	8.32	11.3**	7.58	0.9
e_1	2	0.38	0.19			
e_2	8	7.46	0.932			
(e)	(12)	(8.87)	(0.739)		14.59	1.8
T	15	833.40			833.40	100.0

１次誤差は２次誤差で有意ではない．このような場合には，実験誤差は存在しないと考えて，e_1 と e_2 をプールする．

この結果は，16 個の跳返えり高さの変化に対して次の結論を示している．

（1） ボールの差は僅かにある．

（2） 温度が上がると跳返えり高さは直線的に増加する．

（3） 温度が上がるとき，跳返えり高さが直線的に増すが，その傾向は A_1 と A_2 で僅かに異なる．

（注） e_1 が e_2 で有意のときは，B_q, B_c, S_{e_1} をプールして，1次誤差変動を求め，それで A, B_l, $A\times B_l$ をテストする．しかし，その場合，自由度が小さいので精度は悪化する．

4.3.2 推　　定

この場合，A_1, A_2 毎に B の1次式を作る．

（1） A_1 の場合

$$\mu=\bar{A}_1+\hat{b}_1(B-\bar{B}) \tag{4.56}$$

において

$$\bar{A}_1=\text{仮平均}+\frac{1}{8}A_1$$

$$=105.0+\frac{20.6}{8}$$

$$=107.6 \tag{4.57}$$

$$\hat{b}_1=\frac{-3B_1-B_2+B_3+3B_4}{r\lambda Sh}$$

$$=\frac{-3\times(-12.8)-1\times(-0.3)+1\times13.1+3\times20.6}{2\times10\times10}$$

$$=\frac{113.6}{200}$$

$$=0.568 \tag{4.58}$$

$$\bar{B}=\frac{1}{4}(0+10+20+30)=15 \tag{4.59}$$

これから，A_1 のゴルフボールの跳返えり高さと温度 B の関係式は

$$\mu=107.6+0.568\ (B-15) \tag{4.60}$$

（2） A_2 の場合

A_1 と全く同様にして

$$\bar{A}_2=105.0+\frac{6.4}{8}=105.8$$

$$\hat{b}_1=\frac{139.4}{200}=0.697$$

$$\mu=105.8+0.697(B-15) \tag{4.61}$$

この結果は，A_2（イーグル）の方が温度による跳返えり高さへの効果が 23% 程大きいことを示している．

プロゴルファーは，寒い時ゴルフボールを暖めてショットするという．外気温が 5°C のとき，ゴルフボールを 20°C に暖めたとしたら，ゴルフボールは何%余計跳ぶかを計算してみよう．(4.60)，(4.61) 式に B=5°C と B=20°C を代入する．

（1） B=5°C のとき

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ダンロップ} & \mu=107.6+0.568(5-15)=101.92 \\ \text{イーグル} & \mu=105.8+0.697(5-15)=98.83 \end{array}\right\} \tag{4.62}$$

（2） B=20°C のとき

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ダンロップ} & \mu=107.6+0.568(20-15)=110.44 \\ \text{イーグル} & \mu=105.8+0.697(20-15)=109.28 \end{array}\right\} \tag{4.63}$$

したがって，飛距離の伸びは

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ダンロップ} & (110.44+101.92-1)\times 100=8.4 \ (\%) \\ \text{イーグル} & (109.28+98.83-1)\times 100=10.6 \ (\%) \end{array}\right\} \tag{4.64}$$

演 習 問 題

問 (4.1) 次のデータは，4 カ国

A_1＝日本，A_2＝米国，A_3＝英国，A_4＝西独

の 1964 年から 1967 年にわたる物価指数（1963 年＝100 とする）である．ただし B_1＝1964, B_2=1965, B_3=1966, B_4=1967 (年) である．

	A_1	A_2	A_3	A_4
B_1	104	101	103	102
B_2	111	103	108	106
B_3	116	106	112	110
B_4	121	109	115	111

（1） Bの効果を直交多項式の成分に分解し，$A\times B_l$ も考えた分散分析表を求めよ．

（2） このままの物価上昇がつづくとして，1968 年，1969 年の各国の物価指数を推定せよ．

（注） S_T=473.35, S_{B_l}=296.45, $S_{A\times B_l}$=24.85, S_e=2.90 である．

問 (4.2) 次のデータは 21 才の男子 (B_1 とする)，女子 (B_2 とする) の年度別の平均身長である（文部省統計による）．ただし仮の平均として 160.0 cm を引いてある．

年 度	B_1（男）	B_2（女）	計
A_1=昭和 31 年度	5.9	−5.4	0.5
A_2=昭和 33 年度	6.1	−5.4	0.7
A_3=昭和 35 年度	6.5	−5.3	1.2
A_4=昭和 37 年度	7.0	−4.9	2.1
A_5=昭和 39 年度	7.4	−4.7	2.7
計	32.9	−25.7	7.2

分 散 分 析 表

要 因		f	S	V	$\rho(\%)$
A	1次	1	1.682	1.682	0.487
	2次	1	0.051	0.051	0.014
	3次	1	0.018	0.018	0.005
	4次	1	0.005	0.005	0.001
B（性別）		1	343.396	343.396	99.432
A1次×B		1	0.200	0.200	0.058
e		3	0.004	0.0013	0.003
T		9	345.356		100.000

Aの効果を1次，2次，3次，4次の効果に分解し，A1次×Bも計算した分散分析の結果は表のようであった．次の問題を解け．

（1） 各変動の計算式を示せ．

（2） Aの2次，3次，4次の項は寄与率が小さいから，それらを無視するとして，このままの身長の伸びがつづいたとき，西暦 2000 年における 21 才の男子，女子の身長を推定せよ．

問（4.3） 次のデータは，ある化学製品の製造における触媒の粒度Aと，反応物質に対する触媒の相対速度Bをうまく決めて，収量をあげるために行なった二元配置による実験である．（実験値は space time yield（単位規模，単位時間当りの収量）を示す．）

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	9	11	13	10
A_2	10	12	17	12
A_3	16	18	24	18
A_4	12	16	25	24

A_1: 成型，A_2: 半砕，A_3: 10〜20 メッシュ，A_4: 20〜28 メッシュ，B_1: 40 cm/sec，B_2: 80 cm/sec，B_3: 120 cm/sec，B_4: 160 cm/sec

（1） 分散分析をし，要因効果の寄与率を求めよ．

（2） A, B の効果のグラフを画け．

（3） A, B について最適条件を求め，その条件で1回の追加実験をやったときの観測値xの存在範囲を予測せよ．

（注） A, B の効果について1次効果以外の効果が大きいようなら，直交多項式成分に分解して複雑な多項式を作っても大して価値がない．この場合，A, B 何れも効果が直線的でないから，直交多項式に分解しないで，4.1 節のBのような計算をせよ．すなわち，全変動 S_T を S_A, S_B, S_e に分解することになる．また，推定では A, B の水準毎の平均値を求め，グラフに画くことになる．

注

(4.1) 欠測値　（繰返えし数が不揃いの場合については7章，また 8.3 節も参照せよ）．

二元配置法で欠測値があった場合には，次のようにする．まず1個の場合，A_iB_j で欠測した場合には，A_iB_j の実験値に次の値を代入して，**後はあたかも欠測がなかったかのように計算する．**

$$欠測値の代用値=\frac{a(A_i)+b(B_j)-(T)}{(a-1)(b-1)}$$

(A_i)＝欠測値のある行の和（欠測を含まない）

(B_j)＝欠測値のある列の和（欠測を含まない）

(T)＝総和（欠測を含まない）

この方法は，正確な解析法の近似法であるが，近似が非常によいので，きわめて役に立つ．もちろん欠測の代りに入れたからといって，欠測値を再現したものではない．失われた情報はあくまでも失われたものであるから，観測の自由度は1だけ減る．分散分析表における自由度の配分は，表*4.1 のようになる．

Fisher-Yates によるこの方法は，正確な計算が面倒なので，その面倒な計算の代りに素晴らしく近似のよい簡単な計算法を代用するだけなのである．

表 *4.1

	B_1 …… B_j …… B_b	
A_1	y_{11} …… y_{1j} …… y_{1b}	(A_1)
⋮	⋮　⋮　⋮	⋮
A_i	y_{i1} …… 欠 …… y_{ib}	(A_i)
⋮	⋮　⋮　⋮	⋮
A_a	y_{a1} …… y_{aj} …… y_{ab}	(A_a)
計	(B_1)……(B_j)……(B_b)	(T)

要　因	自由度
A	$a-1$
B	$b-1$
e	$(a-1)(b-1)-1$
計	$ab-2$

もっと一般的には，欠測値をxとして，誤差変動を最小にするようにxを推定する．

2つ以上の欠測があっても，それらを x, y, …… として誤差変動を最小にするように求める．

(4.2) 一般の自由度への分解　統計解析では，n個の実験値 y_1, y_2, ……, y_n の全2乗和

$$S_T=y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2 \tag{*4.1}$$

を必ずしも，自由度1の成分に分解しないことが多い．

たとえば，2因子，A, B がそれぞれ5水準と4水準のとき，20 通りのあらゆる組合せについて実

験を行ない，表 *4.2 のような二元配置法のデータを得たとする．

表 *4.2 二元配置のデータ

	B_1	B_2	B_3	B_4	計
A_1	y_1	y_2	y_3	y_4	A_1
A_2	y_5	y_6	y_7	y_8	A_2
A_3	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	A_3
A_4	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	A_4
A_5	y_{17}	y_{18}	y_{19}	y_{20}	A_5
計	B_1	B_2	B_3	B_4	T

この場合，全 2 乗和 S_T を次のように分解する．

$$S_T=S_m+S_A+S_B+S_e \tag{*4.2}$$

ただし

$$S_T=y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_{20}^2 \tag{*4.3}$$

$$S_m=\frac{(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{20})^2}{20} \tag{*4.4}$$

$$\begin{aligned} S_A&=\frac{A_1^2+A_2^2+\cdots\cdots+A_5^2}{4}-S_m \\ &=\frac{(y_1+\cdots\cdots+y_4)^2+\cdots\cdots+(y_{17}+\cdots\cdots+y_{20})^2}{4}-S_m \end{aligned} \tag{*4.5}$$

$$\begin{aligned} S_B&=\frac{B_1^2+B_2^2+\cdots\cdots+B_4^2}{5}-S_m \\ &=\frac{(y_1+y_5+\cdots\cdots+y_{17})^2+\cdots\cdots+(y_4+y_8+\cdots\cdots+y_{20})^2}{5}-S_m \end{aligned} \tag{*4.6}$$

$$S_e=S-S_m-S_A-S_B \tag{*4.7}$$

(*4.2) 式の右辺は，階数が，1，4，3，12 の y_1，y_2，……，y_{20} の 2 次形式でそれらの行列は次のようになる．

$$M_m=\begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \cdots\cdots & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \cdots\cdots & \frac{1}{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \cdots\cdots & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \tag{*4.8}$$

$$M_A=\begin{pmatrix} \frac{4}{20} & \frac{4}{20} & \cdots & -\frac{1}{20} \\ \frac{4}{20} & \frac{4}{20} & \cdots & -\frac{1}{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \cdots\cdots & \frac{4}{20} \end{pmatrix} \tag{*4.9}$$

$$M_B=\begin{pmatrix} \frac{3}{20} & -\frac{3}{20} & \cdots\cdots & -\frac{1}{20} \\ -\frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \cdots\cdots & -\frac{1}{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \cdots\cdots & \frac{3}{20} \end{pmatrix} \tag{*4.10}$$

$$S_e=\begin{pmatrix} \frac{12}{20} & -\frac{4}{20} & \cdots\cdots & -\frac{1}{20} \\ -\frac{4}{20} & \frac{12}{20} & \cdots\cdots & -\frac{1}{20} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \cdots\cdots & \frac{12}{20} \end{pmatrix} \tag{*4.11}$$

M_A，M_B のような行列は，それを自由度1の直交する成分に分解することができる．そのような分解の方法は無限に存在するが，次の例はその一例である．M_A の分解のみを説明する．

A_1，A_2，……，A_5 の間の4つの規準線形式として，次のものを考える．

$$L_1=\frac{4A_1-A_2-A_3-A_4-A_5}{\sqrt{80}} \tag{*4.12}$$

$$L_2=\frac{3A_2-A_3-A_4-A_5}{\sqrt{48}} \tag{*4.13}$$

$$L_3=\frac{2A_3-A_4-A_5}{\sqrt{24}} \tag{*4.14}$$

$$L_4=\frac{A_4-A_5}{\sqrt{8}} \tag{*4.15}$$

L_1，L_2，L_3，L_4 は互いに直交する線形式である．たとえば，L_1 と L_2 については，y_1，y_2，……，y_{20} に対する係数の積和は0となる．

$$\left\{\left(\frac{4}{\sqrt{80}}\right)\times 0+\left(-\frac{1}{\sqrt{80}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{48}}\right)+\left(\frac{-1}{\sqrt{80}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{48}}\right)+\left(\frac{-1}{\sqrt{80}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{48}}\right)+\left(\frac{-1}{\sqrt{80}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{48}}\right)\right\}\times 4$$
$$=\frac{(-3+1+1+1)\times 4}{\sqrt{80}\times\sqrt{48}}=0 \tag{*4.16}$$

また，規準化されていることは

$$\left\{\left(\frac{4}{\sqrt{80}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{80}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{80}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{80}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{80}}\right)^2\right\}\times 4$$
$$=\frac{(16+1+1+1+1)\times 4}{80}=1 \tag{*4.17}$$

$$\left\{0^2+\left(\frac{3}{\sqrt{48}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{48}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{48}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{48}}\right)^2\right\}\times 4$$
$$=\frac{(0+9+1+1+1)\times 4}{48}=1 \tag{*4.18}$$

したがって，注（2.3）の定理から，L_1, L_2 を2乗して得られる2次形式の行列は互いに直交することがわかる．

同様にして，L_1，L_2，L_3，L_4 に対応する行列は互いに直交する．次に B についても，次の3つの線形式を考える．

$$L_5=\frac{3B_1-B_2-B_3-B_4}{\sqrt{60}} \tag{*4.19}$$

$$L_6=\frac{2B_2-B_3-B_4}{\sqrt{30}} \tag{*4.20}$$

$$L_7=\frac{B_3-B_4}{\sqrt{10}} \tag{*4.21}$$

L_5, L_6, L_7 は規準化された互いに直交する線形式であることが，A の場合と同様に証明される．次に

$L_1 \sim L_4$ と $L_5 \sim L_7$ が互いに直交することを証明しよう．そのために，次の一般的な定理を証明する．

「定理」　k 水準の A，l 水準のBがすべての水準組合せについて等しい回数実験されているときには，係数の和がゼロの A の任意の線形式 L_A と，係数の和がゼロのBの任意の線形式 L_B は，互いに直交する．

「証明」　操返えし数を r とする．2つの線形式を

$$L_A = a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots\cdots + a_kA_k \qquad (*4.22)$$

$$L_B = b_1B_1 + b_2B_2 + \cdots\cdots + b_lA_l \qquad (*4.23)$$

ただし

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_k = 0 \qquad (*4.24)$$

$$b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_l = 0 \qquad (*4.25)$$

とおく．A_iB_j で条件 A_iB_j の r 個のデータの和を示すものとする．

しからば，L_A，L_B のデータに対する係数の積和は次のようにゼロとなる．

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1B_1 + A_1B_2 + \cdots\cdots + A_1B_l \\ A_2 &= A_2B_1 + A_2B_2 + \cdots\cdots + A_2B_l \\ &\vdots \\ A_k &= A_kB_1 + A_kB_2 + \cdots\cdots + A_kB_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1B_1 + A_2B_1 + \cdots\cdots + A_kB_1 \\ B_2 &= A_1B_2 + A_2B_2 + \cdots\cdots + A_kB_2 \\ &\vdots \\ B_l &= A_1B_l + A_2B_l + \cdots\cdots + A_kB_l \end{aligned}$$

を代入して

$$\begin{aligned} &\{(a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots\cdots + a_1b_l) + (a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots\cdots + a_2b_l) + \cdots\cdots \\ &\quad + (a_kb_1 + a_kb_2 + \cdots\cdots + a_kb_l\} \times r = 0 \end{aligned} \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

上の定理から，L_1，L_2，……，L_7 は何れも相互に直交する規準化された線形式であることが証明された．注（2.3）の（2）の定理を用いて，S_m，S_A，S_B，S_e は互いに直交する2次形式であることが，証明されたことになる．

一般の自由度への分解は，通信におけるスペクトル分解では，周波数の帯域を k 個の互いに異なる区間 Ω_1，Ω_2，……，Ω_k に分けて，全パワー P を各帯域幅のパワーの和に分解した場合と同じになる．

$$P = P(\Omega_1) + P(\Omega_2) + \cdots\cdots + P(\Omega_k) + P(N) \qquad (*4.26)$$

ただし，$P(N)$ は残りの周波数領域の全パワーで，雑音のパワーということになる．したがって，分散分析における自由度とは，周波数成分の数または帯域幅に対応する概念ということがいえる．

5. 特性値の分類と適当なデータの大きさ

本章においては，調査，実験などで存在するあらゆる種類のデータに対して適切な解析法を選ぶ基礎となるデータの分類を示す．また，それらの各種のデータに対して適当な調査や実験の規模を示す．

5.1 特性値と単調性

特性値として何をとり上げるべきかは，調査や実験の目的を記述するのに最もふさわしいかどうかの面から考えなければならない．良い特性値は，目的そのものをずばり表わすものでないかも知れないのである．

（1） 体の調子というデータ

たとえば体の調子が悪いとき，体の調子を直したい実験を考える．体の調子というデータは，目的に直結するから，調子の良し悪し（うまい，まずいなどもこれと同じような特性値のことが少なくない）をデータにとるとする．いま，3つの薬があってそれを A, B, C とする．まず A を飲んでみたところ，体の調子がかなり良くなったとする．データ上は，次のように表現される．

$A_1=A$ を飲まない　　調子悪い

$A_2=A$ を飲む　　調子やや良い

次に，BとCについても次のようだったとする．

$B_1=B$ を飲まない　　調子悪い

$B_2=B$ を飲む　　調子良い

$C_1=C$ を飲まない　　調子悪い

$C_2=C$ を飲む　　調子やや良い

A, B, C が何れも効くからというので，A, B, C を3つ飲んだとき，気分が一段と爽快なら，A, B, C の3つの薬の効果には**単調性**（広い意味の**加法性**）があるという．3つを一度に飲んだら，死んでしまったとか，調子が悪くなってしまうときには，A, B, C の間に**交互作用**（結果を逆転させるような大きな）があるという．**交互作用があるときには，1つ1つの因子の研究をしてゆくことが一般に役立たないことになる．**

ところが，このようなことは良くおこることである．たとえば体の調子が悪いのは，インシュリンが不足で糖尿病であったとする．Aの薬の中には，インシュリンが不足量の80％入っており，Bの中には丁度100％，Cの中には150％入っていたものとする．そのとき，上述のような実験結果が得られることになる．しからば，A, B, C を全部飲んだら，インシュリンが 330％ となり，体の調子が悪くなるということがわかる．すなわち，体の調子を見ている限り，A, B, C の効果に単調性がないが，インシュリンの量を測っているときには，やっていない組合せである A, B, C を同時に服用した結果の推定ができることになる．Aの効果が他の条件によって逆転する場合には，A単独の効果を出しても無意味で，結局，A, B, C のあらゆる組合せについて実験しなければならない．2水準が3個ならば，あらゆる組合せは8種類でしかないが，研究したい因子が 10 あれば 1024 通りの組合せとなり，実際には実験不可能ということになる．

ところが，**インシュリンの量を測っているときには，加法性があることになり**（実際には，体の調節作用で＋330％にならなくても，より多くなるならば単調性がある），***A*, *B*, *C* を全部飲んだときには，体の調子が悪くなることがわかる．したがって，あらゆる組合せのデータを必要としないから，2 水準の因子が 10 個あっても，因子を 1 個ずつなり，10 個全部を直交表を用いる精々 10 回前後の実験であらゆる組合せに関する推定ができることになる．体の調子というデータは，能率の悪い非科学的なデータであり，インシュリンの量は能率の高い科学的なデータということになる．**1つ1つの効果の結論が，他の因子の条件の如何にかかわらず，再現するような特性値をさがすことができないと，研究の能率は下がることになる．このように，効果に広い意味の加法性がある特性値をさがすことは，研究の能率化上最も大切である．

（2）雑音の大きさと単調性

雑音の大きさを測るのに，耳で聞こえる周波数範囲の雑音の大きさを，フォンやデシベルで測るのが普通のようである．

一般に，雑音の大きさに影響する要因には次の3通りの系統のものがある．もし

a. 雑音のもとになる振動のエネルギー自体をなくする要因，たとえば**ダイナミックバランスをとる**要因．

b. 振動源のエネルギーには影響しないが，振動によっておこるエネルギーを，他のエネルギー，たとえば熱エネルギーに変えてしまうような要因．

の2通りの系統の要因しかとり上げていないときには単調性が存在するのが普通である．

振動源を少なくすればするほど，音は小さくなってしまうだろうし，音になるエネルギ

ーを他に変えてしまえばしまうほど，音は小さくなるであろうからである．

ところで，雑音の大きさに影響する第3の系統の要因として

c.　雑音の周波数特性を可聴周波数以外の周波数に変えてしまうもの．

がある．部品の形や大きさを変えたり，クリヤランスを変えたり，表面の状態や相互位置を変えたりする要因はこれに当たる．いま，雑音の周波数特性が図5.1のようであるとする．

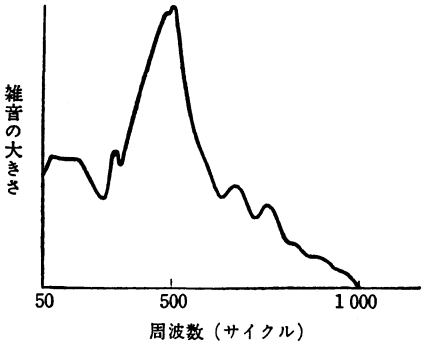


図 5.1　周波数毎の雑音の大きさ

500 サイクルの所に大きな共振周波数があって，雑音の大きさの半分の原因を作っているとき，2つの対策 A，B が次のような効果を持っていたとする．

雑音への効果

- ***A* を用いる**　共振周波数を 500 サイクルから 50000 サイクルに変えて，雑音の大きさが半分になる．
- ***B* を用いる**　共振周波数を 500 サイクルから 5 サイクルに変えて，雑音の大きさが半分になる．

この場合，両方の対策を同時にとったら，元の木阿弥になってしまう可能性があるのである．雑音の大きさを半分にする対策を2つ採用したら，元通りの大きさの雑音だったということになりかねない．

雑音の大きさの研究のファクターの大部分に，第3の系統のものがとり上げられているのが普通である．そのような場合には，雑音の大きさはナンセンスなデータである．周波数特性を可聴範囲外にまでとって研究しないと，まったく能率の悪い研究になり，あらゆる組合せの研究をしなければ最適条件がわからないことになる．

5.2 特性値の分類

データ解析における特性値は，次の6種類の何れかに分類される．

（1） **単純計数値**

ある日の入場人員，売上個数，粒子数，ピンホール数，分結数など1個，2個と数えられるデータをいう．1本の樹に実ったリンゴの数などは，リンゴ1個1個に1級，2級，等外などの格付けが行なわれることが普通で，その場合には，単純計数値ではなく，多計数値の仲間になる．

（2） **単純計量値**

1日当りの売上金額，単位時間当りの収量，重さ，長さ，時間，硬度，引張り強さ，アンバランス量，寿命，誤差など普通の計量値をいう．入場人員でもある日の合計入場人員なら単純計数値だが，一時間当りの平均入場人員などとなると，単純計量値ということになる．平均入場人員の場合には小数位もあり得るから，1個，2個，……という計数値ではなく，125.3 人というようになるからである．しかし，(1)，(2) のデータの解析法は全く同じだから，データ解析上からは区別する必要はない．

（3） **計数分類値**

何人かの人を調査して，ある意見に対して，賛成 n_1 人，中立 n_2 人，反対 n_3 人，意見なし n_4 人とか，好きな小説家として，夏目漱石，芥川龍之介，島崎藤村，その他と区分し，それぞれに何人いるというようなデータをいう．n 人中，n 回中，それぞれの組に入った人数や，回数，個数などで数えられたデータをいう．

計数分類値は，通常次のように分類される．

a. 格付けデータ

ある試験の成績を点数で与えれば計量値だが，優が5人，良が 20 人，可が8人というようにすれば格付けデータである．胃ガンの診断で，胃ガン，疑いあり要精密検診，胃ガンでない，のように3組に分けたものもこの仲間である．品物の外観を上，中，下，味や風合いなどを優，良，可，不可と分類したものなど，人間による評価のデータに多い．

b. スケールアウトのデータ

動物や品物の寿命試験で，一部のものの寿命がくる前に実験を打ち切ったものとする．たとえば，10 個の品物を 1000 時間寿命テストしたとき，3個は 1000 時間でもまだだめにならなかったとする．この場合，寿命を次の5組

Ⅰ＝最初からだめのもの

Ⅱ＝1〜100 時間で寿命がきたもの

Ⅲ＝101〜500 時間で寿命がきたもの

Ⅳ＝501〜1 000 時間で寿命がきたもの

Ⅴ＝1 001 時間以上で寿命がくるもの

に分類すれば，aの格付けデータと同様に取り扱うことができる．一般にスケールアウトのデータでは，一部のデータは計量値であるが，一部はある値以下，またはある値以上というデータである．計量値の範囲を3組位に分けたり，寿命のように5組に分類すれば，計数分類値として取り扱うことができる．

ただし，寿命試験の場合，時間の因子kを，$k_1=0$ 時間目，$k_2=100$ 時間目，$k_3=200$ 時間目，$k_4=300$ 時間目，……，$k_{11}=1000$ 時間目として，各kの水準別に 10 個の品物が生きていれば 1，だめになっていればゼロというデータにすれば，組数2の格付けデータになる．

c. ゲージ値

定性分析において，−(痕跡なし)，＋(痕跡あり)，卄(痕跡より多い）の3組に分けたデータのように，本来は計量値なのであるが，その大きさによっていくつかの組に分けたものをいう．通り（go）ゲージを通らないもの，通りゲージを通ったが，止り（not-go）ゲージを通らなかったもの，止りゲージを通ったものに分類したものもここに入る．

プラスチック製品が何度でもろくなるかという脆化温度を求めたいとする．丁度の温度を測定するのは面倒であるが，0°C でもろくなったかどうか，−10°C でもろくなったかどうか，−20°C でもろくなったかどうかというテストをすれば，ゲージ値が得られる．

人間による官能検査のデータも，この場合に入ることが多い．

d. 順位のデータ

美人コンテストや品物の外観など，順位に並べることができるものをいう．

同順位のものがいくつかあってもよい．しかし，何社かの品物の味の良し悪しを比較したいときには，自社のものを基準にとって

Ⅰ＝自社のものよりまずい

Ⅱ＝自社のものより少しまずい

Ⅲ＝自社のものと差がない

Ⅳ＝自社のものより少しうまい

Ⅴ＝自社のものよりうまい

の5組に分けて，aの格付けデータとする方がよい．

図形のようなものはいろいろな面から眺めて順位づけをすることが多い.

e. 純分類値

いくつかの組に分類されたデータであるが，それらの組に順位のつかないものをいう．たとえば，ある人間がジャンケンにおいて，カミ，イシ，ハサミを出したあとで，カミ，イシ，ハサミの出す割合が異なるかどうかを見たい場合のデータなどをいう.

3社の品物，4種類のタバコなどをランダムな順番で出し，その銘柄を当てさせるような場合は，純分類値である．しかし，ドレミファの音を当てさせる場合には，ドをレと間違った場合と，ドをミと間違った場合では，その間違いの程度に違いがあるから，aの格付けデータということになる.

以上述べた5種類の計数分類値の中で，a, b, c, d はあとで述べるように累積法で解析する.

eは度数法で解析する.

累積法で解析する場合，データは次のように扱う必要がある．たとえば，データが格付けデータで，分類が優，良，可の3組のとき，それぞれの個数が2個，3個，1個だったとする.

密度度数			累積度数		
優	良	可	I（優の数）	II（優＋良の数）	III（優＋良＋可の数）
2	3	1	2	5	6

データ解析は，I組とII組のみを行ない，III組は解析しないことになる．解析に用いられる組数は，（最初の密度度数の組の数 −1）ということになる.

度数法の場合は密度度数のままで行なうので，解析する組の数は密度度数の組の数と等しい.

（4） 計量分類値

計量分類値は，分類の各組のデータが，計数分類値のように個数ではなく，率（百分率）で与えられているデータである．例をあげて説明する.

a. 粒度分布，重合度分布，繊維長分布などの全個数不明のときの分布

ある粒状物を

I＝25 メッシュの篩を通らないもの

II＝25 メッシュの篩を通るが，50 メッシュの篩を通らないもの

III＝50 メッシュの篩を通るが，100 メッシュの篩を通らないもの

Ⅳ＝100 メッシュの篩を通るもの

のように4組に分けたようなデータをいう.

b. 連続曲線のデータ

鉄板やフィルムの厚さ，工程の温度や粘度などの連続測定値があり，しかもその値を一定の範囲にコントロールしたいとき，図5.2に示すように連続曲線の値の範囲を各組に分け，その割合にしたデータをいう.

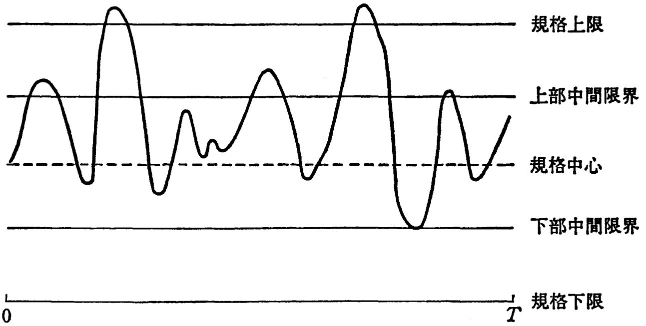


図 5.2 連続曲線のデータ

規格上限	これ以上大きくなると不良になったり，トラブルが起こる.
上部中間限界	できるなら，これ以上にしたくない限界．データ解析や管理上の目的で適当に決める.
下部中間限界	できるなら，これ以下にしたくない限界．データ解析や管理の目的で適当に決める.
規格下限	これ以上小さくなると不良になったり，トラブルが生ずる.

(0, T) の間の連続曲線を見て

Ⅰ＝規格上限を超えた割合 5%

Ⅱ＝上部中間限界と規格上限の間 15%

Ⅲ＝上部及び下部の中間限界の間の望ましい値 80%

Ⅳ＝下部中間限界と規格下限の間 0%

Ⅴ＝規格下限を割った割合 0%

のように，5組に入った百分率のデータを求める.

もし，区間 (0, T) を 100 等分して，それらの各点で，曲線がⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴのどの組に入ったかをデータにとった場合は，計数分類値のゲージ値として解析する.

横座標がエンジンの回転数，縦軸がポンプの吐出量のような場合で，吐出量の理想曲線

の上側，下側に上部限界，下部限界などを入れたときは，エンジンの回転数を何水準かにとり，それを外側因子として，各点における吐出量の目標値 y_0 と吐出量の実測値 y' から，次の y を求めて解析するのがよい．

$$y=100\log\frac{y'}{y_0}$$

この場合は，単純計量値ということになる．ただし，上式の y の値のバラツキに大きなウエートがある場合には，y の値について繰返えしデータを求め，y の値をたとえば5組に分け，計数分類値のゲージ値にするか，y の値について精密累積法の解析をするのがよい．

各種のヒステリシス曲線，コントロール用の動作特性などもこの仲間に入る．

c. 純計量分類値

人間の身長で頭部，胴部，脚部の長さを割り，百分率にしたようなデータをいう．個人消費支出を支出項目別の割合にしたデータ，予算を教育，防衛，社会福祉等の予算項目別に見たデータなどをいう．個人消費支出の割合でも

Ⅰ＝食費の割合

Ⅱ＝他項目の割合

Ⅲ＝雑費の割合

の3組に分類した場合，Ⅰ組が減るほど，Ⅲ組が増加するほど，文化水準の向上と考えられるときには，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲに1つの順位が成立するから，aの分布と同じになる．

a，bは累積法で，解析する組の数は（最初の組の数 −1）となる．

cは度数法で，解析する組の数は（最初の組の数）と同じである．

(5) 多計数値

大，中，小のキズの数，大事故，小事故の数などのように，いくつかのグレードに分けて，各グレード毎に個数が数えられているものをいう．キズの数でも大，中，小ではなくて，キズの種類別の個数を分析したいときには，度数法で解析する．

この場合，累積法でも，度数法でも，解析する組の数は（最初の組の数）と同じである．

(6) 多計量値

1本の木からとれたリンゴを，1級 15 kg，2級 20 kg，3級 5 kg，等外 2 kg，合計 42 kg と分類したとき，多計量値という．ダイナマイト破壊で，ほりおこされた鉱石や岩石を，その粒度分布で次の3組に分類して重量を測定したものとする．

(1)＝大きすぎて再破壊を必要とするもの

(2)＝丁度よい大きさに破壊されたもの

(3)＝細かすぎて，焼結が必要だったり，運搬の困難なもの

この場合，累積度数として次の３組の重量

Ⅰ＝(1) 組の重量

Ⅱ＝(1) 組と (2) 組の重量の合計

Ⅲ＝(1)，(2)，(3) 組の重量の合計

を解析する．もちろん解析の方法は累積法，組の数は３組である．

5.3 望ましいデータの大きさ

データ解析をするとき，最初からデータが与えられていて，もっと多くのデータを選ぶことができない場合は別だが，一般には，調査や実験を計画したり，統計資料を用いてデータ解析を行なうとき，適当な個数のデータを得るように計画することは大切である．たとえば，電力会社が年度別，月別，曜日別，時間別のデータを，５年間，12 カ月，７日，30 分別に，12 の地域別の電力使用量のデータを解析しようと思えば，5×12×7×48×12＝241 920 個のデータを解析しなければならない．いくつかの因子の水準組合せの数（これを１次単位の大きさとか因子水準の組合せ数という）は，普通数十から数百程度あれば十分で，余程重要な場合でも 10 000 より多いとデータの数が大きすぎる．

上の場合 24 万個であるから，数を減らすように工夫すべきである．この場合，年度は減らすべきではなく，月について春，夏，秋，冬から需要の多い月を１カ月ずつ，曜日について日，月，木，土の４日間，時間について午前の最低とピーク時の前後１時間おきに３点，午後のピーク時の前後を 30 分おきに４点，合計８点程度とれば十分である．この場合，5×4×4×8×12＝7680 個となる．

目的によっては，時間について，最近のピーク時の 30 分の電力需要量のみをデータにとり，その日の天候を補助測定として，解析する方がよいだろう．天候の代りにその日の最高気温をとってもよいだろう．一般にデータが 100 個以上になるとコンピューターを用いた方がよい．**DAP-G** などはそのような場合の汎用データ解析プログラムである．

3.1 節に示した全国百貨店の合計売上高のデータは８個しかない．しかし，自分の百貨店のデータの解析を行ない，売上げの分析をしたり，将来の需要の予測などをしたい場合には，年度別，月別，支店別，品種別（補助要因として，売場面積，面積当りの店員数，在庫金額などをとることもある）にデータをとって，少なくとも 100 以上のデータにした方がよい．

交通事故についての調査をしたいような場合は，道路の幅を３水準，歩道のあるなしを２水準，歩道橋あり，信号あり，信号なしを３水準，合計 3×2×3＝18 通りの条件をみた

す道路や，相手道路についてもその幅を3水準にとり，54 通りの条件の交叉点を選び，それらの道路や交叉点における交通事故のデータをとるのがよい．ただしそれだけではデータが不足気味だから，月別，時刻別の交通事故のデータをとり，しかも交通量の補助測定値を用いるとよい．

いろいろな社の製品の品質比較のような場合には，各社の品物を何個ずつか取り，いろいろなテスト条件の下で調べるべきである．たとえば，3社の時計 A_1, A_2, A_3 を比較するとして，各社のもの4個ずつを持ってきて，温度を3水準，振動のあるなしを2水準，時計のおき方を3水準にとり，3時間おきに誤差を測ったデータの場合，データの総数は $3\times4\times3\times2\times3\times8=1728$ 個のデータになる．（ただしこの場合には，10 章の SN 比を求めなければならない．）

意見調査のデータのような場合には，賛成，中立，反対，意見なしというような計数分類値になることが多い．このような場合のデータは，計量値の場合の2倍～数倍程度必要になる．しかし，そのデータを職業別，年令別，性別などに分類して解析するとき，各分類の組毎に何人かの人の意見のデータがある．そのように，効果を見たい因子の水準組合せ毎にいくつかのデータがあるとき，そのデータの個数を繰返えし数という．計量値の場合には，とり上げた因子の水準組合せの数が数十以上あれば，繰返えしはなくてもよいことが多いが，計数分類値などの場合には，一般に繰返えし数が必要である．

繰返えし数は，計量分類値や計量値に比較して，計数分類値の場合にはその約2倍から 10 倍，良，不良などの2組にしか分類されていない場合には，その数倍から数百倍程度多い方が望ましい．

たとえば，殺虫剤の効果を見たい場合には，薬剤の種類が4通り，使用量3通りとして 12 通りの組合せで，できるなら 10 匹ずつ位のテストが望ましい．ただし，それも時間の因子をとり，10 秒後，20 秒後，30 秒後，1分後，2分後の各時点で生きているか，死んでいるかのデータをとれば，$4\times3\times5=60$ 通りの各点で3匹程度のデータがあれば十分であると思われる．すなわち，虫の数は $12\times3=36$ 匹程度でもよいだろう．更にできるなら，3種類の虫を 12 匹ずつ合計 36 匹をテストする方がよい．その場合，虫の種類が3水準となるから，データは $4\times3\times5\times3=180$ 通りの各条件下で0（生きている）と1（死んでいる）のデータがあるだけである．

本書では，一部のデータを除いて一般にデータの大きさが実際問題の研究レポートとしてはやや小さすぎるのが大部分である．その理由は，なるべく小さい例にしていろいろな解析法を説明するのが目的であるからで，データの大きさについては不十分のものが多い．

注

(5.1) **最適な調査や実験の大きさ**　調査や実験をするとき，どれだけの経費を用いたら最も有利かは，それらの計画において最も大切な問題である．調査や実験が特定の行動と結びつかない政府や新聞社などの調査では，かなりいい加減に調査のサイズが決定されていることは事実である．国勢調査のように全数調査が行なわれたり，時には僅かの調査で公害のあるなしなどが決定されたりしている．政府や新聞社などの調査結果は，何時，だれが，どのような問題にそれを応用するか不明のことが普通だから，調査規模がどうしてもいい加減に決定されるのは，やむを得ないことかも知れない．しかしながら，企業の損益に直結するような調査や実験の場合には，合理的に調査や実験の規模を決定すべきである．

例　嗜好調査の場合

自社のある食品，たとえばチョコレートの売上金額が，年に100億円とする．そのチョコレートについて改良品を出したい．改良品として2種類，A_1, A_2 があるが，何人の人間で嗜好調査をするのが最も望ましいか．この場合，現製品に比較して，改良品 A_1, A_2 の何れもはっきりと良いことがわかっているが，A_1, A_2 の優劣は意見が分かれていて困っているので，一般人の何人かに味見をしてもらって優劣を決めたい．ただし，味見をする人を1人増す毎に電車賃，お土産代，チョコレート代など約800円のコストがかかるものとする．

このような場合には，次のようにして味見テストの人間の数を決めることになる．

$$\lambda=\frac{\text{味見試験をする人を1人増したときのコスト}}{A_1,\ A_2\ \text{の間に誤差の標準偏差だけの差があったとき誤って悪い方を採用したときの損失}} \tag{*5.1}$$

この (*5.1) 式で分子は800円である．分母は消費者の中に，たとえば，A_1 より A_2 を好む人が σ %だけ多くいたとき，調査人員が少なかったために，誤って A_1 をよいとしてしまったときの損失である．この値は次のようにして求める．A_1 と A_2 の間に市場で嗜好率に 1% の差があったとき，間違って悪い方を採用したときの損失は

$$(\text{市場占有率が 1\% 減ることによる損失})\times(\text{平均改良期間}) \tag{*5.2}$$

(*5.2) 式で，第1項は売上げが 100 億円の 1% 減ったときの損失として，1年間の損失は

$$(\text{売上げの減少額})\times(\text{荒利益率}) \tag{*5.3}$$

このチョコレートの荒利益率を 50% とすれば，(*6.3) 式は 5000 万円/1 年ということになる．(*5.2) 式の第2項の平均改良期間は，チョコレートは平均何年間隔で改良品に変わってゆくかを大雑把に見積もったものである．平均3年間隔で改良品が上市されているときには，(*5.2) 式の値は5000万円×3 年＝1.5 億円ということになる．

ところで，この値は 1% の差のときの話であるから，$\sigma=\sqrt{p(1-p)}$ の差のときには，$p=0.5$ 前後と見積もって，σ は 50% とする．

$$\sigma\fallingdotseq 0.5=50\%$$

したがって，λ の値は

$$\lambda=\frac{800(\text{円})}{1.5\times 50(\text{億円})}\fallingdotseq 0.0000001 \tag{*5.4}$$

λ の値がわかると，最適な n は，文献(1)の 29 章から，$n=400$ 前後である．400 人を選んで A_1, A_2

の比較をすればよい．

データをとるのに調査員を行かせるとか，人を集めてテストするとか，条件を変えて実験をするとかして，特に経費のかかる場合以外は，わざわざこのような計算をしなくてもよいだろう．計量値をわざわざ調査や実験をして求めなければならないときには，次のようにデータをとるのがよい．

非常に困難な場合	1～2 反復
困難な場合	3～6 反復
普通の場合	6～15反復
容易な場合	15～30反復
特に容易な場合	30～60反復

この場合，Aが3水準，Bが5水準で，A_iB_j で2個ずつのデータがあれば，Aについて $5\times2=10$，Bについて $3\times2=6$ 回の反復で，普通の場合なら，丁度良いことになる．Aが10水準，Bが8水準，Cが4水準，Dが2水準なら，Aについて既に $8\times4\times2=64$ 反復であるから，わざわざ調査するとすれば大きすぎる．しかし，どうせあるデータならもっと多くてもデータを全部用いるべきである．

これらの詳細については，文献(1)の 29 章にゆずる．

6. 累積法と度数法

本章においては，単純計量値以外の解析法で大切な，累積法と度数法を説明する．ただし，精密累積法については文献（1）の 32 章にゆずる．

6.1 デジタル系列

ある事象を2つの状態に分ける問題は，自然，社会のあらゆる世界に至るところ存在している．良品と不良品，雨が降るか降らないか，ガンかガンでないか，勝つか負けるかなどはすべてそうである．最近になって，連続量でさえも，それを2進法で表現して，デジタル・コンピューターにのせたり，文字を2進法で表現して，テレタイプにのせたり，AM からやっと FM 放送に移ったのが，さらに音のきれいな PCM（パルス変調）通信方式に移行しようとしている．われわれは**デジタル時代**の開花期に入りつつあるといってもよい．マリナー4号も PCM を用いて火星から通信した．

2つの状態は，数字としては，0と1の2つで表わされるのが普通である．したがって，デジタル系列のデータは，0と1の数字の並んだものとして表現される．たとえば，コンベアで次々と出てくる良品と不良品の系列は，良品を0，不良品を1として，たとえば次のようになる．

良，不良，不良，良，良，良，良，不良，良，良，……

0，　1，　1，　0，0，0，0，　1，　0，0，……

いま，$y_1, y_2, \cdots\cdots$ は0か1しかとらないものとして，長さNの系列 $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_N$ を考える．

このようなデジタル系列（パルス系列）において，1をマーク，0をスペースということにする．**デジタル系列のパワーとして，マークの総数を用いて定義する**．その定義の妥当性は，通信における PCM（パルス変調）通信を考えてみればすぐわかるように，マークを出しているときのみにエネルギーが必要である．もちろんある場合にはスペースとマークをプラス，マイナスの情報として送ったり，変化量のみを送るというような方法もある．その場合でもまったく同じようにパワーを定義できるが，ここでは最もわかりやすいマークとスペースで送る場合を考えるのである．

マークは，図 6.1 のように一定の形をしている．したがって，1つのマークの持っているパワーを単位に考えれば，マークはすべて同じだからこのようなパルス系列（デジタル系列の1種）の全パワーは，マークの総数ということになる．y_1, y_2,……,y_N の中のマーク1の総数を r とすれば，次のようである．

$$r=y_1+y_2+\cdots\cdots+y_N \tag{6.1}$$

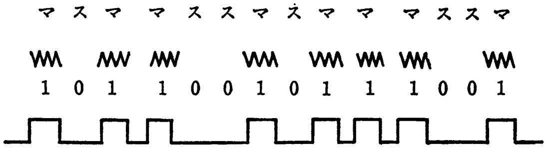


図 6.1 パルス系列

実験データの場合には，0と1の2つの状態，たとえば不良と良のデータの場合には，不良のものを良にしたり，良のものを不良にしたりするのに，ある実効的な効果が必要である．そのような効果に必要な実効的エネルギーが，パワーの単位ということになる．

ところで，PCM 通信のときを考えてみればすぐわかるように，1のみから成り立っているパルス系列は，そのエネルギーが最大であるにもかかわらず，0のみから成り立っているパルス系列とまったく同様に，情報はなにも送れないのである．すなわち，情報の輸送に有効なパワーは，1の総数ではなく，0と1が混ざっている程度でみることを，ベル研究所（現 MIT）のシャノンは明白にし，いわゆる情報量をエントロピーとして定義した．図 6.1 の全エントロピーを E とすれば，その値は $p=\dfrac{r}{N}$ として

$$E=-N\{p\log p+(1-p)\log(1-p)\} \tag{6.2}$$

で与えられる．

ところで (6.2) 式のエントロピーは，物理学，化学でも用いられており，なかなか魅力のある定義ではあるが，実際上の計算では次の2つの欠点がある．

（1）**エントロピーは，分布形（条件付き確率など）がわからないと計算できない．僅かの観測値から分布形を知ることは不可能であり，正しいかどうか不明の分布形に対する仮定を基礎に計算をすすめることは，実際的でない．**

（2）**エントロピーが，いろいろな原因系（通信理論のときは情報源と雑音）の合成結果として求められているとき，それをいろいろな原因系の成分に分解することは，原因系が多いときには計算が繁雑で，実用的でない．**

そこで，われわれは，エントロピーと同じような性質の測度として，もっと使いやすい

分散という測度を用いるのである．0，1の系列の単位当りの分散 σ^2 は，次の $p(1-p)$ で与えられる．

$$\sigma^2=p(1-p) \tag{6.3}$$

分散も，エントロピーもともに，$p=0$, $p=1$ でゼロに，$p=\frac{1}{2}$で最大になる．どちらも，0と1の混ざっている程度，バラツキの程度，変化している大きさの度合を表現している測度だから，まったく同じような性質を持っていることは当然である．

しかし，(6.3) 式の分散は，2乗のものさしであるから，数学でいうパーセバルの直交分解が，原因系が直交しているときには成立するという，優れた性質を持っている．

この場合の全変動（全分散）S_T は

$$S_T=Np(1-p)=N\times\frac{r}{N}\left(1-\frac{r}{N}\right) \tag{6.4}$$

$$=r-\frac{r^2}{N} \tag{6.5}$$

$$=(x_1{}^2+\cdots\cdots+x_N{}^2)-\frac{(x_1+\cdots\cdots+x_N)^2}{N} \tag{6.6}$$

が成立する．(6.6) 式で定義された全変動は計量値の場合と形式的に一致するから，デジタル系列でも計量値の場合の公式がそのまま使えることになる．

6.2 0, 1 のデータ解析

表 6.1 は，東京都のM小学校において，昭和 39 年と昭和 41 年における小学4年生の登校準備の自主性を調べた結果である．

表 6.1 児童の自主性のデータ

	自分でやる	親にいわれてやる	計
A_1 (昭和 39 年)	18	21	39
A_2 (昭和 41 年)	16	35	51

これから，“昭和41年になって，自主的にやる子供の数が減ったといえるか” という問題を解いてみよう．2組に分類のデータであるから，**自分でやる場合を 1，そうでない場合を 0** とすれば，表 6.1 のデータは，A_1 の場合，0が 21 人，1が 18 人，A_2 の場合，0が 35 人，1が16 人ということになる．したがって，A_1 の計は 18，A_2 の計は 16 で，単位数はそれぞれ 39 と 51 である．したがって

$$\mathrm{CF}=\frac{(18+16)^2}{39+51}=\frac{34^2}{90}=12.84 \tag{6.7}$$

$$S_A=\frac{18^2}{39}+\frac{16^2}{51}-\mathrm{CF}=0.49 \tag{6.8}$$

$$S_T=34-\frac{34^2}{90}=21.16 \tag{6.9}$$

$$S_e=S_T-S_A=20.67 \tag{6.10}$$

(6.7)～(6.10) 式から，次の分散分析表を得る．

表 6.2 分散分析表

要因	f	S	V	F_0
A	1	0.49	0.49	2.09
e	88	20.67	0.235	
T	89	21.16		

したがって，有意差はないから，表 6.2 のデータから，昭和 41 年になって自主性がなくなったという結論を出すわけにはゆかない．このような計算は，Aの水準数がいくつあっても同様にできる．有意になったような場合には，寄与率 ρ も計算するのが望ましい．

また，Aが有意になったような場合には，A_1, A_2 の平均値を求め，信頼限界を計算する．

$$\bar{A}_1=\frac{18}{39}=0.46\pm0.15 \tag{6.11}$$

$$\bar{A}_2=\frac{16}{51}=0.31\pm0.14 \tag{6.12}$$

ここに，$\bar{A}_1$ の信頼限界は次式によって求めた．$\bar{A}_2$ の場合も同様である．

$$\sqrt{F\times\frac{V_e}{n_e}}=\sqrt{3.96\times\frac{0.235}{39}}=0.15 \tag{6.13}$$

6.3 計数分類値の解析法，累積法，チョコレートの味見テスト

6.3.1 味見テストのデータ

3 社 A_1, A_2, A_3 のミルクチョコレートの味の優劣を比較するために，女性 4 人 B_1, B_2, B_3, B_4, 男性 4 人 B_5, B_6, B_7, B_8 を選び，3 社のマークがわからないようにして味見テストをして，上，中，下の何れかに分類してもらった．同様なテストを 2 回ずつやってもらったデータは表 6.3 のようであった．実際には，性別，年令別に $2\times4=8$ クラス位作り，各クラスから 10 人，合計 80 人位でテストを行なうべきである．その場合には，Bを男女，Cを年令，Rを人とすべきである．

表 6.3 のデータを，上，中，下の各組に入った度数である**密度度数**のデータ（表 6.4）になおす．

更にこれを**累積度数**のデータ（表 6.5）になおす．何故累積度数のデータにするかは，そのようにした方が上，中，下の順位まで考えた，より効率の高い解析ができるからであ

表 6.3 チョコレートの味見テストのデータ

	女 子 B_1'								男 子 B_2'							
	B_1		B_2		B_3		B_4		B_5		B_6		B_7		B_8	
A_1	中	中	下	中	中	下	中	下	下	下	中	下	中	中	中	下
A_2	上	中	中	上	上	上	上	上	中	上	上	中	中	中	上	上
A_3	上	中	上	上	中	中	上	中	中	下	中	中	下	下	下	中

表 6.4 密度度数のデータ

	B_1			B_2			B_3			B_4			B_5			B_6			B_7			B_8		
	上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下
A_1	0	2	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	2	0	1	1	0	2	0	0	1	1
A_2	1	1	0	1	1	0	2	0	0	2	0	0	1	1	0	1	1	0	0	2	0	2	0	0
A_3	1	1	0	2	0	0	0	2	0	1	1	0	0	1	1	0	2	0	0	0	2	0	1	1

る．詳しいことは注 (6.2) を見よ．累積度数とは

Ⅰ＝(上の数)

Ⅱ＝(上の数)＋(中の数)

Ⅲ＝(上の数)＋(中の数)＋(下の数)

のように累積度数をとったデータである．この場合，最後のⅢ組のデータは観測回数を表わし，要因効果とは関係しないから，Ⅰ組，Ⅱ組のみで解析する．

表 6.5 累積度数にしたデータ（最後の組のデータは除いてもよい）

	B_1			B_2			B_3			B_4			B_5			B_6			B_7			B_8			計		
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A_1	0	2	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	0	2	0	1	2	0	2	2	0	1	2	0	9	16
A_2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	1	2	2	0	2	2	2	2	2	10	16	16
A_3	1	2	2	2	2	2	0	2	2	1	2	2	0	1	2	0	2	2	0	0	2	0	1	2	4	12	16
計	2	6	6	3	5	6	2	5	6	3	5	6	1	3	6	1	5	6	0	4	6	2	4	6	14	37	48

	B_1' (女)			B_2' (男)			計		
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A_1	0	5	8	0	4	8	0	9	16
A_2	6	8	8	4	8	8	10	16	16
A_3	4	8	8	0	4	8	4	12	16
計	10	21	24	4	16	24	14	37	48

6.3.2 分 散 分 析

累積度数のⅠ組にのみ着目する．Ⅰ組に入っていれば 1，Ⅰ組に入っていなければ0の

データとすれば，それは3水準のAと8水準のBの二元配置で繰返えし2回のデータということになる．実際，I組だけのデータを再掲すれば，表 6.6 のようになる．

表 6.6　0または1の繰返えし2回のデータの和

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	計
A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_2	1	1	2	2	1	1	0	2	10
A_3	1	2	0	1	0	0	0	0	4
計	2	3	2	3	1	1	0	2	14

A_iB_j のデータは何れも0または1の値しかとらない2個の観測値の和であるから，全体の合計 14 は 3×8×2=48 個のデータの和である．

$$\mathrm{CF}=\frac{14^2}{48}=4.08 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (6.14)$$

$$S_A=\frac{1}{16}(0^2+10^2+4^2)-\mathrm{CF}=3.17 \qquad (\mathrm{f}=2) \qquad (6.15)$$

$$S_B=\frac{1}{6}(2^2+3^2+\cdots\cdots+2^2)-\mathrm{CF}=1.25 \qquad (\mathrm{f}=7) \qquad (6.16)$$

$$S_{T_1}=\frac{1}{2}(0^2+0^2+\cdots\cdots+0^2)-\mathrm{CF}=6.92 \qquad (\mathrm{f}=23) \qquad (6.17)$$

$$S_T=\text{個々の0と1の2乗和}-\frac{14^2}{48}$$

$$=14-\frac{14^2}{48}=9.92 \qquad (\mathrm{f}=47) \qquad (6.18)$$

$$S_{A\times B}=S_{T_1}-S_A-S_B=2.50 \qquad (\mathrm{f}=14) \qquad (6.19)$$

$$S_e=S_T-S_{T_1}=3.00 \qquad (\mathrm{f}=24) \qquad (6.20)$$

注 (6.1) に述べるように，累積法ではI組の変動に重み w_1, II組の変動に重み w_2 を掛けて合計する．ここに，重み w_1, w_2 はI組，II組に入った割合を p_{I}, p_{II} として，2項誤差分散の逆数で与えられる．

$$w_1=\frac{1}{p_{\mathrm{I}}(1-p_{\mathrm{I}})}=\frac{1}{\frac{14}{48}\left(1-\frac{14}{48}\right)}=\frac{48^2}{14\times 34}=4.84 \qquad (6.21)$$

$$w_2=\frac{1}{p_{\mathrm{II}}(1-p_{\mathrm{II}})}=\frac{48^2}{37\times 11}=5.66 \qquad (6.22)$$

II組についても，I組と同様に 0,1 のデータに対する変動を計算し，I組の変動に w_1 を掛け，II組の変動には w_2 を掛けて総合した変動を用いる．自由度はI組，II組の自由度の和になる．このような計算の根拠については，注 (6.1) を見よ．したがって

$$S_m=\frac{14^2}{48}\times w_1+\frac{37^2}{48}\times w_2$$

$$=\frac{196\times 4.84+1\,369\times 5.66}{48}=181.2 \qquad (f=1+1=2) \qquad (6.23)$$

$$S_A=\left(\frac{0^2+10^2+4^2}{16}-\frac{14^2}{48}\right)\times w_1+\left(\frac{9^2+16^2+12^2}{16}-\frac{37^2}{48}\right)\times w_2$$

$$=\frac{(0^2+10^2+4^2)\times 4.84+(9^2+16^2+12^2)\times 5.66}{16}-S_m$$

$$=24.0 \qquad (f=2+2=4) \qquad (6.24)$$

$$S_B=\frac{(2^2+3^2+\cdots\cdots+2^2)\times 4.84+(6^2+5^2+\cdots\cdots+4^2)\times 5.66}{6}-S_m$$

$$=11.6 \qquad (f=14) \qquad (6.25)$$

$$S_{T_1}=\frac{1}{2}\{(0^2+1^2+\cdots\cdots+0^2)\times 4.84+(2^2+2^2+\cdots\cdots+1^2)\times 5.66\}-S_m$$

$$=61.6 \qquad (f=46) \qquad (6.26)$$

$$S_{A\times B}=S_{T_1}-S_A-S_B$$

$$=61.6-24.0-11.6=26.0 \qquad (f=28) \qquad (6.27)$$

$$S_T=\left(14-\frac{14^2}{48}\right)\times w_1+\left(37-\frac{37^2}{48}\right)\times w_2$$

$$=\frac{14(48-14)}{48}\times\frac{48^2}{14(48-14)}+\frac{37(48-37)}{48}\times\frac{48^2}{37(48-37)}$$

$$=48+48=96 \qquad (f=47+47=94) \qquad (6.28)$$

計数分類値を累積法で解析する場合には，全変動 S_T は次の (6.29) 式で与えられる．

$$S_T=(\text{測定回数})\times(\text{解析している組の数}) \qquad (6.29)$$

表 6.5 のデータの場合，観測回数は 48 回で，解析している組の数は 2 組である．したがって全変動は，(6.28) 式のような計算をしなくても，$48\times 2=96$ で与えられる．

したがって，誤差変動 S_e は

$$S_e=S_T-S_{T_1}=96.0-61.6=34.4 \qquad (f=48) \qquad (6.30)$$

これから，分散分析表は表 6.7 のようになる．

表 6.7 分散分析表

要因	f	S	V	F
A	4	24.0	6.00	8.3**
B	14	11.6	0.83	
$A\times B$	28	26.0	0.93	
e	48	34.4	0.72	
T	94	96.0		

この場合には，8人の試験者の内，4人が女子で4人が男子である．女子と男子で差があるかどうかを見るために，$B_1, B_2, \cdots\cdots, B_8$ を大きく2つのグループ B_1', B_2' に分ける．

$$B_1'=B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4\ ;\quad B_2'=B_5,\ B_6,\ B_7,\ B_8$$

Bの因子を B' の効果，B_1'内の差（4人の女子間の差），B_2'内の差（4人の男子間の差）に分解する．それを表 6.5 の下段の表を用いて計算する．

$$S_{B'}=\frac{(10-4)^2\times 4.84+(21-16)^2\times 5.66}{48}$$
$$=6.6 \qquad (\mathrm{f}=2) \qquad (6.31)$$

$$S_{B_1'内}=\left\{\frac{2^2+3^2+2^2+3^2}{6}-\frac{10^2}{24}\right\}\times 4.84+\left\{\frac{6^2+5^2+5^2+5^2}{6}-\frac{21^2}{24}\right\}\times 5.66$$
$$=0.17\times 4.84+0.12\times 5.66=1.5 \qquad (\mathrm{f}=6) \qquad (6.32)$$

$$S_{B_2'内}=\left[\frac{1^2+1^2+0^2+2^2}{6}-\frac{4^2}{24}\right]\times 4.84+\left[\frac{3^2+5^2+4^2+4^2}{6}-\frac{16^2}{24}\right]\times 5.66$$
$$=3.5 \qquad (\mathrm{f}=6) \qquad (6.33)$$

$$S_{A\times B'}=\frac{(0^2+6^2+\cdots\cdots+0^2)\times 4.84+(5^2+8^2+\cdots\cdots+4^2)\times 5.66}{8}-S_m-S_A-S_{B'}$$
$$=217.3-181.2-24.0-6.6=5.5 \qquad (\mathrm{f}=4) \qquad (6.34)$$

$$S_{A\times B_1'内}=A_1B_1,\ A_1B_2,\ \cdots\cdots,\ A_3B_4\ 間の変動-S_{B_1'内}-(B_1\sim B_4\ のAの主効果)$$
$$=\left\{\left[\frac{0^2+1^2+\cdots\cdots+1^2}{2}-\frac{10^2}{24}\right]-\left[\frac{0^2+6^2+4^2}{8}-\frac{10^2}{24}\right]\right\}\times 4.84$$
$$+\left\{\left[\frac{2^2+2^2+\cdots\cdots+2^2}{2}-\frac{21^2}{24}\right]-\left[\frac{5^2+8^2+8^2}{8}-\frac{10^2}{24}\right]\right\}\times 5.66-S_{B_1'内}$$
$$=1.5\times 4.84+0.375\times 5.66-1.5=7.9 \qquad (\mathrm{f}=12) \qquad (6.35)$$

$$S_{A\times B_2'内}=\left\{\frac{0^2+1^2+\cdots\cdots+0^2}{2}-\frac{0^2+4^2+0^2}{8}\right\}\times 4.84$$
$$+\left\{\frac{0^2+2^2+\cdots\cdots+1^2}{2}-\frac{4^2+8^2+4^2}{8}\right\}\times 5.66-S_{B_2'内}$$
$$=1\times 4.84+2\times 5.66-3.5=12.7 \qquad (\mathrm{f}=12) \qquad (6.36)$$

$A\times B_1'$内は，3水準の A と4水準の B_1, B_2, B_3, B_4 の二元配置における 12 通りの実験間変動 S_{T_1} から，その二元配置の S_A と S_B を引いて求めたことになる．したがって次の等式が成立する．

$$S_B=S_{B'}+S_{B_1'内}+S_{B_2'内}$$
$$=6.6+1.5+3.5=11.6 \qquad (6.37)$$

$$S_{A\times B}=S_{A\times B'}+S_{A\times B_1'内}+S_{A\times B_2'内}$$
$$=5.5+7.9+12.7=26.1 \qquad (6.38)$$

表 6.8 きめの細かい分解をした分散分析表

要　因	f	S	V	F	S'	ρ(%)
A	4	24.0	6.00	8.5**	21.16	22.0
B 男女間	2	6.6	3.30	4.6*	5.18	5.3
B 女子間	6	1.5	○0.25			
B 男子間	6	3.5	○0.58			
$A\times$男女間	4	5.5	1.88	2.6*	4.08	
$A\times$女子間	12	7.9	○0.65			
$A\times$男子間	12	12.7	○1.06			
e	48	34.4	○0.72			
○印プール(e)	(84)	(60.0)	(0.71)		65.58	72.7
T	94	96.0			96.00	100.0

分散分析の結果は，3種の銘柄間に危険率 1% で有意な差があるが，$A\times$男女間が有意であるから，男子と女子で A_1, A_2, A_3 の優劣に違いがあることを示している．6.3.3 項に述べるように，女子は A_2, A_3 を共に優れているとするが，男子は A_3 は A_1 並で優れていないと評価している．A_3 は女子向きのチョコレートであり，A_2 は 男子，女子両方に向いたチョコレート，A_1 はどちらにも好まれないチョコレートであるということである．

交互作用$A\times$女子が有意でないことは，テストをしてくれた4人の女子の間にはチョコレートの嗜好についてほぼ同じ傾向があり，また男子の4人にもほぼ同じ傾向があることを示している．

6.3.3 推　　定

Aの主効果，B' の効果，$A\times B'$ が有意であるから，推定はAと B' の二元表で行なう．

表 6.9 A と B' の二元表

女子	累積度数 I	II	III	密度度数 上	中	下	百分率 上	中	下	計 (%)
A_1	0	5	8	0	5	3	0	62	38	100
A_2	6	8	8	6	2	0	75	25	0	100
A_3	4	8	8	4	4	0	50	50	0	100

男子	累積度数 I	II	III	密度度数 上	中	下	百分率 上	中	下	計 (%)
A_1	0	4	8	0	4	4	0	50	50	100
A_2	4	8	8	4	4	0	50	50	0	100
A_3	0	4	8	0	4	4	0	50	50	100

信頼限界は，累積度数で求める．

$$\text{女子}\quad \bar{A}_1=\frac{0}{8}=0.00\pm\sqrt{\frac{3.96\times0.71\times\frac{1}{16}\times\frac{15}{16}}{8}}=0.00\pm0.14 \qquad (6.39)$$

$$\bar{A}_2=\frac{6}{8}=0.75\pm\sqrt{\frac{3.96\times0.71\times0.75\times0.25}{8}}=0.75\pm0.26 \tag{6.40}$$

$$\bar{A}_3=\frac{4}{8}=0.50\pm\sqrt{\frac{3.96\times0.71\times0.50\times0.50}{8}}=0.50\pm0.30 \tag{6.41}$$

累積法では，重みとして $p(1-p)$ の逆数を掛けているので，分散分析表にでてくる誤差分散は，$p(1-p)$ に比例する係数，いわゆる比例定数である．したがって，推定値が $\hat{p}$ のときには $\hat{p}(1-\hat{p})$ に，比例定数である分散分析表の誤差分散 V_e を掛けて，$\hat{p}$ の近傍の誤差分散を推定することになる．すなわち $\hat{p}$ の近傍の誤差分散を V_e' とすれば

$$V_e'=V_e\times\hat{p}(1-\hat{p}) \tag{6.42}$$

この値を信頼限界の公式

$$\pm\sqrt{\frac{F\times V_e'}{n_e}} \tag{6.43}$$

に代入して，(6.40)，(6.41) 式が求められた．$\hat{p}$ がゼロのときは，形式的に (6.42) 式を用いれば V_e' がゼロになる．しかし，8回の測定で0回といっても，80 回，800 回も測定すればゼロになるかどうか不明である．しかし，8回でゼロということは，真の p が 1/16 以下であるというように考えて，p の代用値として $p=1/16$ を用いて，(6.39) 式を計算した．一般に $\hat{p}$ が0または1のときには，近似的に次の信頼限界を用いることをすすめる．ネイマンの方法を用いてもよい．

$$\pm\sqrt{F\times\frac{1}{n_e}\times V_e\times\frac{1}{2\times n_e}\times\left(1-\frac{1}{2\times n_e}\right)} \tag{6.44}$$

推定した結果は図 6.2 のように図で示すことも多い．

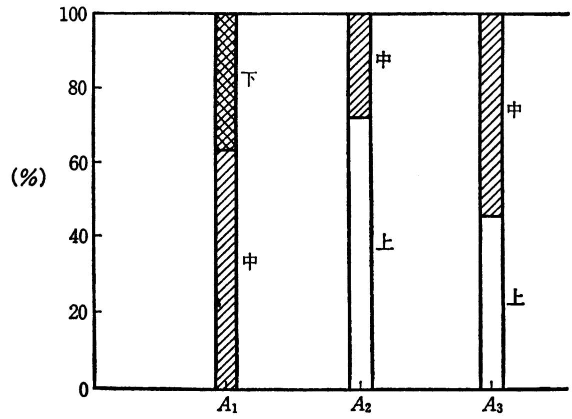


図 6.2

6.4 計量分類値，累積法，家計支出のデータ

4クラスの収入階級を下から，A_1, A_2, A_3, A_4 とし，昭和 40 年から昭和 43 年の毎年の家計支出について，全支出を 100 としたとき，次の 3 つの支出項目

（1） 食料費

（2） その他（住居，光熱，被服費）

（3） 雑費

の調査結果は表 6.10 のようであった．食料費の割合が少なくなるほど，雑費の割合が増すほど，文化水準が高いといわれている．収入階級によって，文化度の向上傾向に差があるかどうか，すなわち，収入階級間の差は小さくなりつつあるのか，変わらないのか，大きくなりつつあるのか，B の 1 次効果 × A を調べてみたい．最高収入の階級は支出内訳の百分率の合計が 100% にならず，データの信ぴょう性が疑われたので今回の計算では除外した．データは国民生活統計年報昭和 45 年版（至誠堂）によった．

解析法は計数分類値の最高次の単位がない場合と同様にする．

表 6.10 家計支出の推定

					計	（1） I	(1)+(2) II
		（1）	（2）	（3）			
A_1	B_1	42.2	27.7	30.1	100.0	42.2	69.9
	B_2	41.9	27.5	30.6	100.0	41.9	69.4
	B_3	41.3	27.8	30.9	100.0	41.3	69.1
	B_4	39.2	28.8	32.0	100.0	39.2	68.0
A_2	B_1	39.1	27.2	33.7	100.0	39.1	66.3
	B_2	38.9	27.4	33.7	100.0	38.9	66.3
	B_3	37.7	27.9	34.4	100.0	37.7	65.6
	B_4	37.5	28.3	34.2	100.0	37.5	65.8
A_3	B_1	37.7	27.2	35.1	100.0	37.7	64.9
	B_2	36.9	27.1	36.0	100.0	36.9	64.0
	B_3	35.8	27.5	36.7	100.0	35.8	63.3
	B_4	35.2	27.7	37.1	100.0	35.2	62.9
A_4	B_1	35.1	26.6	38.3	100.0	35.1	61.7
	B_2	33.9	26.4	39.7	100.0	33.9	60.3
	B_3	33.9	26.3	39.8	100.0	33.9	60.2
	B_4	32.7	27.9	39.4	100.0	32.7	60.6

表 6.11 補 助 表

	I	II		I	II
A_1	164.6	276.4	B_1	154.1	262.8
A_2	153.2	264.0	B_2	151.6	260.0
A_3	145.6	255.1	B_3	148.7	258.2
A_4	135.6	242.8	B_4	144.6	257.3
計	599.0	1038.3	計	599.0	1038.3

$$w_1=\frac{1600^2}{599\times1001}=4.27,\quad w_2=\frac{1600^2}{1038.3\times561.7}=4.39$$

$$S_m=\frac{599.0^2\times4.27+1038.3^2\times4.39}{16}=391549.62 \qquad (f=2) \qquad (6.45)$$

$$S_T=(42.2^2+41.9^2+\cdots\cdots+32.7^2)\times4.27+(69.9^2+69.4^2+\cdots\cdots+60.6^2)\times4.39-S_m$$
$$=1230.02 \qquad (f=30) \qquad (6.46)$$

$$S_A=\frac{(164.6^2+\cdots\cdots+135.6^2)\times4.27+(276.4^2+\cdots\cdots+242.8^2)\times4.39}{4}-S_m$$
$$=1143.22 \qquad (f=6) \qquad (6.47)$$

$$S_B=\frac{(154.1^2+\cdots\cdots+144.6^2)\times4.27+(262.8^2+\cdots\cdots+257.3^2)\times4.39}{4}-S_m$$
$$=72.71 \qquad (f=6) \qquad (6.48)$$

次にBの1次効果 S_{B_l} と，Bの1次効果が収入階級によって異なるかどうか，$S_{A\times B_l}$ を求める．I 組，II 組別に直交多項式の係数を利用する．

$$S_{B_l}=\frac{\begin{array}{l}(-3\times154.1-151.6+148.7+3\times144.6)^2\times4.27\\ \qquad+(-3\times262.8-260.0+258.2+3\times257.3)^2\times4.39\end{array}}{80}$$
$$=\frac{(-31.4)^2\times4.27+(-18.3)^2\times4.39}{80}$$
$$=71.00 \qquad (f=2) \qquad (6.49)$$

Aの水準別にBの1次効果の線形式を作る．

I 組　$L(A_1)=-3\times42.2-41.9+41.3+3\times39.2=-9.6$

$L(A_2)=-3\times39.1-38.9+37.7+3\times37.5=-6.0$

$L(A_3)=-3\times37.7-36.9+35.8+3\times35.2=-8.6$

$L(A_4)=-3\times35.1-33.9+33.9+3\times32.7=-7.2$

II 組　$L(A_1)=-3\times69.9-69.4+69.1+3\times68.0=-6.0$

$L(A_2)=-3\times66.3-66.3+65.6+3\times65.8=-2.2$

$L(A_3)=-3\times64.9-64.0+63.3+3\times62.9=-6.7$

$L(A_4)=-3\times61.7-60.3+60.2+3\times60.6=-3.4$

$$S_{A\times B_l}=\frac{\begin{array}{l}[(-9.6)^2+(-6.0)^2+(-8.6)^2+(-7.2)^2]\times 4.27\\ \quad+[(-6.0)^2+(-2.2)^2+(-6.7)^2+(-3.4)^2]\times 4.39\end{array}}{20}-S_{B_l}$$

$$=4.57 \qquad (\mathrm{f}=6) \qquad (6.50)$$

$$S_{B\mathrm{res}}=S_B-S_{B_l}=72.71-71.00=1.71 \qquad (6.51)$$

$$S_e=S_T-S_A-S_B-S_{A\times B_l}$$

$$=1\,230.02-1\,143.22-72.71-4.57$$

$$=9.52 \qquad (\mathrm{f}=12) \qquad (6.52)$$

これから，表 6.12 の分散分析表を得る．

表 6.12　分散分析表

要　因	f	S	V	F	S'	ρ(%)
A	6	1 143.22	190.54	241.2**	1 138.90	92.6
B l	2	71.00	35.50	44.9**	69.56	5.7
B res	4	1.71	0.43	—		
$A\times B_l$	6	4.57	0.76	—		
e	12	9.52	0.79		21.56	1.7
プールした (e)	(22)	(15.80)	(0.72)			
T	30	1 230.02			1 230.02	100.0

表 6.12 の結果は次のことを示している．所得階級によって (1), (2), (3) の消費支出割合が大きく異なっていることは良く知られている．しかし，消費支出割合が年度Bによってこの期間では直線的に変化し，その傾向はすべての所得階級でほぼ等しい ($A\times B_l$ が有意でない)．

したがって推定は次のように行なわれる．

Aの主効果

	I	II	(1)	(2)	(3)	計
$\bar{A}_1$	41.15±0.43	69.10±0.41	41.15	27.95	30.90	100.00
$\bar{A}_2$	38.30±0.42	66.00±0.41	38.30	27.70	34.00	100.00
$\bar{A}_3$	36.40±0.42	63.78±0.41	36.40	27.38	36.22	100.00
$\bar{A}_4$	33.90±0.42	60.70±0.41	33.90	26.80	39.30	100.00

この信頼限界は次式から求めた．たとえば $\bar{A}_1$ に対して

$$\sqrt{\frac{F\times V_e\times \bar{A}_1(1-\bar{A}_1)}{n_e}}=\sqrt{\frac{4.30\times 0.72\times 0.4115\times 0.5885}{4}}$$

$$=0.43 \qquad (6.53)$$

Bの1次の効果

I組　$$\hat{b}=\frac{-3\times154.1-151.6+148.7+3\times144.6}{4\times10\times1\text{ 年}}$$

$$=-0.785\pm0.190 \tag{6.54}$$

II組　$$\hat{b}=\frac{-18.3}{40}=-0.458\pm0.188 \tag{6.55}$$

信頼限界は次式による．T はI組の場合，I組の平均とする．

I組　$$\sqrt{\frac{F\times V_e\times\bar{T}(1-\bar{T})}{\mathrm{r}\cdot\mathrm{S}\cdot\mathrm{h}^2}}=\sqrt{\frac{4.30\times0.72\times0.374\times0.626}{4\times5\times1^2}}$$

$$=0.190 \tag{6.56}$$

このままの傾向がつづくとして昭和46年の推定をやってみよう．$\bar{B}=41.5$ として，それから昭和 46 年までの支出割合の変化量は

I組　$\hat{b}(B-\bar{B})=-0.785(46-41.5)=-3.53$

II組　$\hat{b}(B-\bar{B})=-0.458(46-41.5)=-2.06$

これらを A の主効果の表に加えて，表 6.13 を得る．

表 6.13　昭和 46 年の消費支出割合の予測

	I	II	(1)	(2)	(3)	計
A_1	37.62	67.04	37.62	29.42	32.96	100.00
A_2	34.77	63.94	34.77	29.17	36.06	100.00
A_3	32.87	61.72	32.87	28.85	38.28	100.00
A_4	30.37	58.64	30.37	28.27	41.36	100.00

所得階級の世帯数の予測と国民所得の伸びの予測の積を (1) 組の百分率に掛ければ，昭和 46 年における食料費に対する総支出の予測ができる．上の予測値の信頼限界を1つだけ示す．他も全く同様である．

$$A_4\text{ の (1) 組の信頼限界}=\pm\sqrt{4.30\times0.72\times0.3037\times0.6963\left[\frac{1}{4}+\frac{(46-41.5)^2}{20}+1\right]}$$

$$=\pm1.12 \tag{6.57}$$

6.5 多計数値，累積法，大小の交通事故数

6.5.1 問　　題

計数値の場合，その組が1つしかないときには，その個数をそのまま計量値として解析する方法で十分である．しかし，組の数が2つ以上の場合については，重み付きの総合した変動を求めるほうが良い．

たとえば，10 都市 $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_{10}$ における週間の交通事故を大小の 2 組に分類して，ある週 B_1 と特殊警戒をした翌週 B_2 での大小の交通事故数の統計が，表 6.14 のようだったとする．このような特殊取締りの本当の効果を見ようと思うなら都市の分類(標示因子)と確率化がかなり大切になるはずであるが，ここでは，計算法の説明であるから，それは述べないことにする．

表 6.14 大小の交通事故数

	B_1		B_2		計	
	大 (1)	小 (2)	大 (1)	小 (2)	大 (1)	小 (2)
R_1	0	4	2	5	2	9
R_2	6	18	5	20	11	38
R_3	4	16	0	15	4	31
R_4	0	11	1	12	1	23
R_5	2	15	6	13	8	28
R_6	5	21	4	19	9	40
R_7	0	7	0	4	0	11
R_8	18	25	13	19	31	44
R_9	3	9	1	6	4	15
R_{10}	2	16	2	10	4	26
計	40	142	34	123	74	265

6.5.2 分散分析

このように，大，小の事故の数とか，大，中，小のキズの数のようなものは，計数分類値と異なって，そのとり得る個数の限界が不明である．数理的には，多項ポアッソン分布というもので近似されるのだが，われわれは，分散の世界での解析を考えているのだから，次のことを仮定するにすぎない．すなわち，分散は，平均値の大きさに比例すると考えて，大，小の各組の変動を総合するときの重み，w_1, w_2 は次の値とする．

$$w_1=\frac{1}{\sigma_1{}^2}\propto\frac{1}{\text{大の平均出現数}} \tag{6.58}$$

$$w_2=\frac{1}{\sigma_2{}^2}\propto\frac{1}{\text{合計の平均出現数}} \tag{6.59}$$

この場合，都市による差を出すのに，人口や車の数で割らなくてよいとはいえない．車と車の衝突事故のようなものなら，その回数は (車の数)^2/面積 に比例するかも知れない．もし，目的が都市の交通事故数の絶対比較を行ない，交通管理等の問題を議論したいというときには，そのような値で表 6.14 の事故数を割って，そのあとで本節の計算法に入ることになる．本節の多計数値と次の 6.6 節の多計量値の解析は，何れも計量値としての計算を各組毎に行ない，重みとして，(6.58)，(6.59) 式の値を用いて総合するのである．

表 6.14 を累積度数に直したデータが表 6.15 である．

表 6.15 累積度数にしたデータ

	B_1		B_2		計	
	I	II	I	II	I	II
R_1	0	4	2	7	2	11
R_2	6	24	5	25	11	49
R_3	4	20	0	15	4	35
R_4	0	11	1	13	1	24
R_5	2	17	6	19	8	36
R_6	5	26	4	23	9	49
R_7	0	7	0	4	0	11
R_8	18	43	13	32	31	75
R_9	3	12	1	7	4	19
R_{10}	2	18	2	12	4	30
計	40	182	34	154	74	339

$$\left.\begin{aligned} w_1&=\frac{20}{74}=0.270 \\ w_2&=\frac{20}{339}=0.059 \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

$$S_m=\frac{74^2}{20}\times\frac{20}{74}+\frac{339^2}{20}\times\frac{20}{339}=413 \tag{6.61}$$

$$S_B=\frac{(40-34)^2\times0.270+(182-157)^2\times0.059}{20}=2.33 \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned} S_R&=\frac{1}{2}[(2^2+11^2+\cdots\cdots+4^2)\times0.270+(11^2+49^2+\cdots\cdots+30^2)\times0.059]-S_m \\ &=203.10 \end{aligned} \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned} S_T&=(0^2+6^2+\cdots\cdots+2^2)\times0.270+(4^2+24^2+\cdots\cdots+12^2)\times0.059-S_m \\ &=220.02 \end{aligned} \tag{6.64}$$

したがって，表 6.16 のような分散分析表を得る．

この場合，自由度が全部 2 倍になることを忘れてはならない．分散分析表を作って，検定すると，交通の特別取締り B の効果は，交通事故数の減少に関して有意でないことになる．

表 6.16 分散分析表

要因	f	S	V	F_0
B	2	2.33	1.66	2.05
R	18	203.10	11.28	13.93**
e	18	14.59	0.81	
T	38	220.02		

このような計算をするとき，大きな都市の場合には，都市を分割して，その分割地区毎に

効果を調べたり，1週間毎のデータの代りに1日毎のデータをとり，しかも曜日を因子として考えて，三元配置としたら，有意になったかも知れなかった．このような，多計数値の場合には，各データをとる単位をあまり大きくしないで，各数値の値が0～10位になるように細分することが望ましい．この場合，10 以上のデータがかなり多いということは，時間，空間の細分の仕方がまずいことになる．工程平均の推定には対数加法性を用いる．

また，BやRの効果を次のように分解することも少なくない．

$$\begin{aligned} S_B &= \text{I 組の } S_B + \text{II 組の } S_B \\ &= \frac{(40-34)^2}{20}\times 0.270 + \frac{(182-157)^2}{20}\times 0.059 \\ &= 0.49+1.84 \end{aligned} \qquad (6.65)$$

この場合，Bを自由度1ずつの B(Ⅰ)，B(Ⅱ) に分解して検定することになる．

6.6 多計量値，累積法，階級別収穫量

6.6.1 問　題

表 6.17 はある果実の収穫量を増すために，品種Aを3水準，肥料Bを5水準に変えて，二元配置法で実験した仮想例である．データは，収穫後の品物を1級，2級，等外に分類して，各組の目方を測ったものである．実際には，各組で少なくとも2本ずつ位の樹木をとり，繰返えしを入れたり，もっと多くの因子（樹木の年令，昨年の収穫量等で分類する標示因子も含めて）をとり上げたりしていれば，興味ある実験ができただろう．農業，林業，畜産，水産等においては，理論的な最高収穫量が不明のことが多いので，収穫品を階

表 6.17 階級別収穫量のデータ（単位 kg）

No.	A	B	密度量 1級	2級	等外	累積量 Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	No.	A	B	密度量 1級	2級	等外	累積量 Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
1	1	1	50	42	26	50	92	118	9	2	4	24	32	22	24	56	78
2	1	2	74	58	13	74	132	145	10	2	5	15	36	63	15	51	114
3	1	3	55	32	16	55	87	103	11	3	1	58	35	12	58	93	105
4	1	4	26	18	10	26	44	54	12	3	2	86	65	8	86	151	159
5	1	5	23	56	43	23	79	122	13	3	3	54	42	15	54	96	111
6	2	1	33	45	36	33	78	114	14	3	4	34	28	19	34	62	81
7	2	2	64	58	32	64	122	154	15	3	5	34	40	42	34	74	116
8	2	3	28	42	39	28	70	109									

級別の収量としたとき，各階級に入った品物の量の最高限界が不明である．このような階級別の量について，その値の最高可能量が不明のときには，計量分類値と異なって，多計量値といい，データ解析としては，累積法による解析法が用いられる．

表 6.18 補 助 表

	A の一元表		
	I	II	III
A_1	228	434	542
A_2	164	377	569
A_3	266	476	572
計	658	1 287	1 683

	B の一元表		
	I	II	III
B_1	141	263	337
B_2	224	405	458
B_3	137	253	323
B_4	84	162	213
B_5	72	204	352
計	658	1 287	1 683

6.6.2 分 散 分 析

6.5 節とまったく同じように計算する.

$$w_1=\frac{15}{658}=0.0228 \tag{6.66}$$

$$w_2=\frac{15}{1\,287}=0.0117 \tag{6.67}$$

$$w_3=\frac{15}{1\,683}=0.0089 \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned}S_m&=\frac{658^2}{15}\times0.0228+\frac{1\,287^2}{15}\times0.0117+\frac{1\,683^2}{15}\times0.0089\\&=3\,630.7\end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned}S_A&=\frac{1}{5}\{(228^2+164^2+266^2)\times0.0228+(434^2+377^2+476^2)\times0.0117\\&\quad+(542^2+569^2+572^2)\times0.0089\}-3\,630.7\\&=36.8\end{aligned} \tag{6.70}$$

$$\begin{aligned}S_B&=\frac{1}{3}\{(141^2+\cdots\cdots+72^2)\times0.0228+(263^2+\cdots\cdots+204^2)\times0.0117\\&\quad+(337^2+\cdots\cdots+352^2)\times0.0089\}-3\,630.7\\&=332.1\end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\begin{aligned}S_T&=(50^2+\cdots\cdots+34^2)\times0.0228+(92^2+\cdots\cdots+74^2)\times0.0117\\&\quad+(118^2+\cdots\cdots+116^2)\times0.0089-3\,630.7\\&=385.3\end{aligned} \tag{6.72}$$

表 6.19 要 因 分 析 表

要 因	f	S	V	F_0	$\rho(\%)$
A	6	36.8	6.13	12.8**	8.8
B	12	332.1	27.68	57.7**	85.1
e	24	16.4	0.68		6.1
計	42	385.3			100.0

自由度は，計量値の場合の3倍になる．6.5 節のように自由度を分解してもよい．

6.6.3 推　　定

A, B の主効果が大きく，交互作用を含む誤差は，6.1% の寄与率である．A と B の主効果のみを求めれば十分である．表 6.18 から，平均値を作り，累積度数と密度度数を作る．

表 6.20 推　　定

	累積度数 I	累積度数 II	累積度数 III	密度度数 1級	密度度数 2級	密度度数 等外
A_1	45.6	86.8	108.4	45.6	41.2	21.6
A_2	32.8	75.4	113.8	32.8	42.6	38.4
A_3	53.2	95.2	114.4	53.2	42.0	19.2
平均	43.9	85.8	112.2	43.9	41.9	26.4
B_1	47.0	87.7	112.3	47.0	40.7	24.6
B_2	74.7	135.0	152.7	74.7	60.3	17.7
B_3	45.7	84.3	107.7	45.7	38.6	23.4
B_4	28.0	54.0	71.0	28.0	26.0	17.0
B_5	24.0	68.0	117.3	24.0	44.0	49.3

最適条件 A_3B_2 の $\hat{\mu}$ は，累積度数で I, II, III 組毎に行なう．また，推定には対数加法性の公式を用いる．

$$\text{I 組}\qquad \hat{\mu}=\frac{\bar{A}_3\times\bar{B}_2}{\bar{T}}=\frac{53.2\times 74.7}{43.9}=90.5 \tag{6.73}$$

$$\text{II 組}\qquad \hat{\mu}=\frac{95.2\times 135.0}{85.8}=149.7 \tag{6.74}$$

$$\text{III 組}\qquad \hat{\mu}=\frac{114.4\times 152.7}{112.2}=155.6 \tag{6.75}$$

これから，1級，2級，等外の予想収量は

$$90.5\,\text{kg},\ 59.2\,\text{kg},\ 5.9\,\text{kg} \tag{6.76}$$

ということになる．

信頼限界は，分散が μ に比例するという考えの下に，分散分析表の $V=0.48$ に，μ を掛けたものを，改めて誤差分散に用いればよい．

$$\text{I 組}\qquad \hat{\mu}\pm\sqrt{F\times 0.68\times\hat{\mu}\times\frac{1}{n_e}} \tag{6.77}$$

において

$$\hat{\mu}=90.5$$

$$F=4.26$$

$$n_e=\frac{45}{21}=2.1$$

である．したがって

$$90.5\pm\sqrt{4.26\times0.68\times90.5\times\frac{1}{2.1}}$$

$$\mu=90.5\pm10.9 \tag{6.78}$$

同様に

Ⅱ組　$\mu=149.7\pm14.0$　(6.79)

Ⅲ組　$\mu=155.6\pm14.3$　(6.80)

6.7 計数分類値，度数法，心理調査のデータ

計数分類値，計量分類値，多計数値，多計量値で，組の間に順位的なものがないデータを解析する場合には，累積法ではなく度数法の解析が用いられる．表 6.21，6.22 の例は，昭和 36 年における T 大学の調査データである．A_1 (17才以下) と A_2 (18才以上) の都内の青年男女に対して，いま最も求めていること，最もしたいことを，男 (B_1)，女 (B_2) 別にまとめたデータである．

表 6.21　青年男女の調査データ

A	B	I (自由にしたい時間がほしい)	II (もっと勉強を，また専門にしたい)	III (人間的に確立，立派な人格を求める)	IV (何でも話し合える友人，恋人を求める)	計
1	1	44	22	5	9	80
1	2	45	17	6	12	80
2	1	33	11	26	10	80
2	2	41	11	13	15	80

表 6.22　補　助　表

	I	II	III	IV	計
A_1	89	39	11	21	160
A_2	74	22	39	25	160
計	163	61	50	46	320

	I	II	III	IV	計
B_1	77	33	31	19	160
B_2	86	28	19	27	160
計	163	61	50	46	320

度数法の場合には，密度度数のまま計算する．I, II, III, IV 各組の変動を次の重みで合計する．ただし，4 組の合計は調査数で要因効果とは関係がないので自由度は A, B も $A\times B$ も 3 である．自由度は累積法の場合と同じになる．

$$w_1=\frac{320^2}{163\times157}=4.00,\quad w_2=\frac{320^2}{61\times259}=6.48 \tag{6.81}$$

$$w_3=\frac{320^2}{50\times270}=7.59,\quad w_4=\frac{320^2}{46\times274}=8.12 \tag{6.82}$$

$$S_A=\frac{(89-74)^2\times4.00+(39-22)^2\times6.48+(11-39)^2\times7.59+(21-25)^2\times8.12}{320}$$

$$=29.0 \qquad (\mathrm{f}=3) \tag{6.83}$$

$$S_B=\frac{(77-86)^2\times4.00+(33-28)^2\times6.48+(31-19)^2\times7.59+(19-27)^2\times8.12}{320}$$

$$=6.6 \qquad (\mathrm{f}=3) \tag{6.84}$$

$$S_{A\times B}=\frac{(44+41-45-33)^2\times4.00+\cdots\cdots+(9+15-12-10)^2\times8.12}{320}$$

$$=4.6 \qquad (\mathrm{f}=3) \tag{6.85}$$

もちろん，$S_{A\times B}$ は次のようにして求めてもよい．

$$S_{A\times B}=\frac{(44^2+45^2+\cdots\cdots+41^2)\times4.00+\cdots\cdots+(9^2+12^2+\cdots\cdots+15^2)\times8.12}{80}$$

$$-\mathrm{CF}-S_A-S_B$$

$$=4.6 \qquad (\mathrm{f}=3) \tag{6.86}$$

$$S_T=\left(163-\frac{163^2}{320}\right)\times\frac{320^2}{163(320-163)}+\cdots\cdots+\left(46-\frac{46^2}{320}\right)\times\frac{320^2}{46(320-46)}$$

$$=320+320+320+320=1\,280 \qquad (\mathrm{f}=319\times3=957) \tag{6.87}$$

全変動は，（測定値の個数）×（解析している組の数）で与えられる．これから表 6.23 の分散分析表を得る．

表 6.23　度数法の分散分析

要　因	f	S	V	F_0
A	3	29.0	9.67	7.38**
B	3	6.6	2.20	1.67
$A\times B$	3	4.6	1.53	1.17
e	948	1 239.8	1.31	
プールした (e)	(954)	(1 251.0)	1.31	
T	957	1 280.0		

表 6.24　要因効果の推定

	I	II	III	IV	計(%)
A_1	56	24	7	13	100
A_2	46	14	24	16	100

要因効果の推定は，有意になったAの効果についてのみ行なう．

信頼限界は，次式で求める．たとえば A_1 のI組の場合

$$\pm\sqrt{3.85\times1.31\times\frac{1}{160}}=\pm0.18 \tag{6.88}$$

演　習　問　題

問(6.1)　5社 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の男子靴について 15 人の人間で1年間型くずれを調査したら，次のようなデータが得られた．ただし，15 人の人間をその足のサイズで小，中，大の5人ずつの3組 B_1, B_2, B_3 に分けて，それぞれの中の5人をランダムにわりつけてテストしたデータである．型くずれの最も少ないのが上である．

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	上	上	中	中	下
B_2	上	上	中	中	下
B_3	中	上	下	中	下

分散分析を行ない，結論を示せ．

（注）　実際には，少なくともこの数倍の人数で，型くずれについても3ヵ月後，6ヵ月後，9ヵ月後，1年後の4水準でデータをとるべきである．

問(6.2)　6人の学生，R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 で3社2種類ずつのインスタントラーメンの味見テストをしたデータは次のようであった（昭和 44 年調査）．

		R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
日　清	生　中　華	上 上	中 上	下 中	上 中	中 上	上 上
	出 前 一 丁	中 下	下 下	中 下	上 中	下 中	中 中
明　星	中　　麺	中 上	上 上	上 中	中 中	上 上	上 中
	チャルメラ	下 下	中 上	下 下	中 下	上 中	中 下
サンヨー	来　々　軒	中 下	下 中	上 中	中 下	中 下	中 下
	サッポロ一番	上 中	下 下	中 上	下 中	下 下	上 中

データ解析をし，有意な効果の推定をせよ．品種を6水準 A_1, A_2,……, A_6 とし，これを A_1'（日清），A_2'（明星），A_3'（サンヨー）のように分解せよ．S_A を A' の主効果，A_1'内，A_2'内，A_3'内に分解せよ．また $R\times A$ も求めよ．

問 (6.3)　大阪府の情緒障害児短期治療施設の治療効果（昭和 39 年6月末までの退所者）は次のようであった（青少年白書，1964 年）．

内容	計(人)	治療中断	治療結果 不変	治療結果 良好
日常生活	12	1	3	8
登校拒否，非行等	110	9	8	93
性格関係	48	0	10	38
精神関係	11	2	1	8

情緒障害内容によって，治療効果に有意差があるといえるか．

問 (6.4) 毛糸編物の洗浄に関する実験（市原染子，矢部章彦，繊維製品消費化学，第1巻，第2号，昭和 35 年）．

羊毛の硬化とナイロン毛糸の黄化，風合いなどの劣化に対する，洗剤 A，洗い方 B，乾燥方法 C について次のように因子をとって実験した．

A 洗剤 A_1＝モノゲン，A_2＝ピンクエマール，A_3＝トップ，
A_4＝ニッサンセブン，A_5＝ゲンブマルセル

B 洗い方 B_1＝浸漬，B_2＝つかみ洗い，B_3＝手もみ洗い

C 干し方 C_1＝日かげ干し，C_2＝日干し

黄化，硬化の2特性について，データをそれぞれ次のように分類した．

a＝変化なし
b＝やや変化する
c＝かなり変化する
d＝著しく変化する

黄化（ナイロン）

	B_1C_1	B_1C_2	B_2C_1	B_2C_2	B_3C_1	B_3C_2
A_1	a	b	a	b	a	b
A_2	a	b	a	b	a	b
A_3	a	b	a	b	a	b
A_4	b	c	b	c	b	c
A_5	b	d	b	d	b	d

硬化（羊毛）

	B_1C_1	B_1C_2	B_2C_1	B_2C_2	B_3C_1	B_3C_2
A_1	a	a	b	b	b	d
A_2	a	a	b	b	c	d
A_3	a	a	b	b	c	d
A_4	a	a	b	b	c	d
A_5	a	a	b	b	c	d

ナイロン毛糸については黄化の，羊毛製品については硬化のデータを解析せよ．他のデータは，同論文を見られたい．

問 (6.5) 太平洋側の9都市と日本海側の9都市について，消費支出を，(1) 食料費，(2) 住居，光熱，被服費，(3) 雑費の3組に分類した結果は次のようであった（昭和 40 年6月，総理府調）．

A_1	(1)	(2)	(3)	計
1 (浦)	19104	14771	22659	56534
2 (千)	20668	12758	28237	61663
3 (横)	21314	17516	22552	61382
4 (岐)	18450	18870	27705	65025
5 (静)	17035	13444	22074	52553
6 (名)	19929	12594	20538	53061
7 (和)	18494	12224	17995	48713
8 (岡)	17936	14243	17929	50108
9 (広)	18157	14025	23316	55498

A_2	(1)	(2)	(3)	計
1 (秋)	17716	16988	24466	59170
2 (山)	15367	15054	18866	49287
3 (長)	17864	17749	20037	55650
4 (新)	17554	16665	15841	50060
5 (富)	16690	14074	13980	44744
6 (金)	18850	13053	18826	50729
7 (福)	16096	12321	16296	44713
8 (鳥)	17582	13254	18779	49615
9 (松)	16939	16697	17122	50758

これから，どんな結論が下せるか．

（注） このようなデータは，個々の世帯毎のデータがあることが，解析の上では大切である．したがって，多くの統計資料は，平均や合計をとってしまっているので，解析にのせるには非常にまずい．しかし，元のデータがないのでここでは平均のデータのみを示した．

注

(6.1) 累積法，度数法の重みについて 累積法，度数法では，重みづけ変動の和が用いられる．なぜそのような重みが用いられるかを，一つの卑近な例で説明しよう．

3つの都市 A, B, C における昨年と今年のある期間の交通事故数が表 *6.1 のようであったとする．

表 *6.1 3つの都市における交通事故数

	都市 A		都市 B		都市 C	
昨年	A_1	3	B_1	30	C_1	30
今年	A_2	6	B_2	33	C_2	60

“表 *6.1 において，3つの都市における交通事故の増加の程度は，どの都市が最も著しいか．順位をつけよ”という問題を出したとき，統計的知識がなくても

1位 都市C

2位 都市A

3位 都市B

という順位をつけるだろう．少なくとも筆者のいままでの経験で，上の順位づけに反対した人はいない．これはなにを意味しているのだろうか．

もし，変化とか効果の大きさというものが差で表わされるものならば，AとBの都市の交通事故の増加の程度はいずれも3で等しいことになる．それについて，ある人は“いやBの都市のようにもともと30件もあったところが，3件増加して33件にふえても大したことはないけれど，3件しかなかったAの都市が3件増加して6件になったということは，2倍に増加したのだからたいへんな増加である．むしろ最初の値の大きさに対する増加の場合，増加率で比較すべきである”というかもしれない．それなら増加率は，Aの都市もCの都市も共に2倍になっているのだから，Aの都市とCの都市の交通事故の増加の程度は等しいとしてよいのだろうか．これについても，多くの人が自分の直感で，Cの都市の増加の程度のほうが大きいというのが普通である．

交通事故の増加の程度の比較は，差でもなければ比でもないということになる．そうならば，どういう測度で測ったらよいのだろうか．まず答えのほうを先に示す．それは次のような測度で比較するのである．

$$A\text{の都市}\qquad \frac{6-3}{\sqrt{6+3}}=1.0 \tag{*6.1}$$

$$B\text{の都市}\qquad \frac{33-30}{\sqrt{30+33}}=0.3\cdots \tag{*6.2}$$

$$C\text{の都市}\qquad \frac{60-30}{\sqrt{60+30}}=3.1\cdots \tag{*6.3}$$

すなわち，Aの都市の交通事故の増加の程度は，Bの都市の約3倍，Cの都市の約1/3である．したがって，交通事故の増加の程度は，1位 C，2位 A，3位 B ということになって，普通の人の考えと一致するのである．人間は日常の生活を通して，統計的な比較の知恵を知らず知らずの間に養っているのである．いま，上の結果の種あかしをしよう．

交通事故とか，障害数，キズの数などは，統計的にはポアッソン分布という分布で近似されるということが知られている．ポアッソン分布をする確率変数をXとすれば，Xがxなる値をとる確率が

$$P_r\{X=x\}=e^{-m}\frac{m^x}{x!}\quad (x=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots) \tag{*6.4}$$

で与えられるのがポアッソン分布をする変数である．ここにmは，この分布の平均で

$$E(X)=e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}x\times\frac{m^x}{x!}=m \tag{*6.5}$$

は，よく知られている．さらに，平均 m のポアッソン分布をする変数Xは，その分散も m になるのである．

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=E\{(X-m)^2\}\\ &=\sum_{x=0}^{\infty}(x-m)^2e^{-m}\frac{m^x}{x!}=m\end{aligned} \tag{*6.6}$$

すなわち，ポアッソン分布は，その平均と分散が等しいという著しい性質を持っている．

ポアッソン分布は，数学的には次の2つの条件の下に導かれる分布である．

(a) **まれな現象である**　ただし，数が多いから実現回数は無視できない．たとえば，私達が交通事故にあう確率が1/100 000であってその確率が小さくても，その町に100万人が住んでいたら，1日に平均10人が交通事故にあうことになる．また，ラジウム原子が次の1秒間に崩壊する確率が10^{-11}であっても，10^{12}個のラジウム原子があれば，平均10個のラジウム原子が毎秒崩壊してガイガーカウンターを鳴らすことになる．品物の表面のキズなども，表面を小さな面積の単位に分割すれば，同じこ

とがいえる.

（b） **独立である**　ある人が交通事故にあうかどうかと，他の人が交通事故にあうかどうかは関係がない．ここに関係がないとは，伝染現象や共通原因が存在していないことである．正確には，交通事故の場合には，雨の降る日は事故が多いというようなことがあれば共通原因が存在するのだから，交通事故の分布は厳密にはポアッソン分布にならない．北川敏男博士がいくつかのポアッソン分布の重合によってそのような事故数を表現する理論を，昭和 16 年の日本数学物理学会誌に発表（独立確率変数の理論の中で）されており，戦後，厚生省時代に直ちにさまざまな死因別統計に応用させてもらったのは筆者にとって忘れ得ない思い出である．ラジウム原子の崩壊の場合には，伝染現象はないから，ポアッソン分布がきれいに適合するのである．まれな現象でも，伝染病患者数や，連鎖反応がある場合の崩壊原子数などはポアッソン分布にはならない．

いま，(a) のまれな現象であるという仮定を除くと，ポアッソン分布ではなくなる．サイコロを投げたときに 1 の目の出る回数だとか，銅貨を投げたときの表の出る回数だとか，生まれる男の子の数だとかはまれな現象ではない．まれな現象であるという仮定を除くと，いわゆる 2 項分布(または多項分布)になる．2 項分布では，その出現率を p とすると，変数 X について

$$E(X)=p \tag{*6.7}$$

$$\mathrm{Var}(X)=p(1-p)=p-p^2<p \tag{*6.8}$$

となる．これは，分散は，平均値より必ず小さいことを示している．

次に，上の仮定の (b) を否定する．それは一般に伝播現象や北川博士のいわゆる複合ポアッソン分布になる．伝播現象は，かつては Furry の分布（物理学でいう宇宙線シャワーの現象）とか Polyá-Eggenberger の分布（主として伝染病患者数の統計に用いられていた）といわれていたが，現在は負の 2 項分布といわれている．昭和 23 年，伝染病患者数の分布を研究していたところ，F 分布と負の 2 項分布の関係から，F 表を用いて，負の 2 項分布の 5% 点や 1% 点の表を作ったことがある．負の 2 項分布では，その変数を X とすれば

$$E(X)=h \tag{*6.9}$$

$$\mathrm{Var}(X)=h(1+d)\quad(0>d) \tag{*6.10}$$

すなわち，分散は平均値より必ず大きい．d は伝播常数といわれているものである．負の 2 項分布は，d が大きいと原子爆弾のように爆発現象をおこすことになる．

2 項分布と負の 2 項分布の中間にポアッソン分布がある．ポアッソン分布では平均と分散が等しい．

したがって，いま，2 つの変数 X_1, X_2 が共に母平均 m_1, m_2 のポアッソン分布にしたがっている場合には

$$E(X_1)=m_1,\ \mathrm{Var}\,(X_1)=m_1 \tag{*6.11}$$
$$E(X_2)=m_2,\ \mathrm{Var}\,(X_2)=m_2$$

である．そこで，X_2-X_1 の平均と分散は

$$E(X_2-X_1)=m_2-m_1$$
$$\mathrm{Var}(X_2-X_1)=m_2+m_1 \tag{*6.12}$$

である．X_1 は m_1 の推定で，X_2 は m_2 の推定であるから

$$\frac{X_2-X_1}{\sqrt{X_1+X_2}} \tag{*6.13}$$

の分子は m_2-m_1 の推定，分母は $\sqrt{m_1+m_2}$ の推定である．すなわち，差を和の平方根で割った(*6.13) 式の測度は，X_2-X_1 の差がその標準偏差 $\sqrt{m_1+m_2}$ の何倍離れているかを示しているものさしということになる．

実際の解析では，差よりも差の2乗のほうが理論的には取り扱いやすい．それは，電圧よりは電流の強さのほうが理論上取り扱いやすいことと同じである．このことは，差の代りにその2乗 $(X_2-X_1)^2$ を，(X_2-X_1) の分散 $m_1+m_2=X_2+X_1$ で割った分散比のほうが取り扱いやすいことを示している．したがって，その値

$$F_0=\frac{(X_2-X_1)^2}{X_1+X_2} \qquad (*6.14)$$

は，分散比 F_0 を意味している．

ここには，証明をしないが，(*6.14) 式の分散比 F_0 は，近似的に分子の自由度 2/3，分母の自由度 4 の F 分布をする．

F 検定において，F 表は最初のデータの次元には無関係にいつでも使えるユニバーサルな用途を持っていた．それは，分散比をとることによって，次元のない数値にしてしまったからである．管理図法でも，3シグマ法の係数3は，すべての特性値に使えるユニバーサルな係数である．数学の世界でも3件から6件に増したときと，30件から33件に増したときでは，その原点のものさしが異なっている．いわゆるスケールを合わせたうえで，はじめて，両者の大きさの比較が公平にできることになる．

(6.2) χ^2 法と累積法　計数分類値や多計数値のデータ解析に χ^2 法が用いられてきたが χ^2 法には次の2つの大きな欠点がある．

(1) 要因効果の大きさの評価が不適当である．

たとえば，次の2つの効果

	−	＋	⧺	⧻	計
A_1	20	20	20	20	80
A_2	20	20	32	8	80

	−	＋	⧺	⧻	計
B_1	20	20	20	20	80
B_2	24	24	24	8	80

において，明らかに A より B の効果の方が大きいが，χ^2 検定では，A は有意で，B は有意にならない．

$$\chi_A{}^2=\frac{(20-20)^2}{40}+\frac{(20-20)^2}{40}+\frac{(20-32)^2}{52}+\frac{(20-8)^2}{28}$$
$$=7.91 \qquad (f=3) \qquad (*6.15)$$
$$\chi_B{}^2=\frac{(20-24)^2}{44}+\frac{(20-24)^2}{44}+\frac{(20-24)^2}{44}+\frac{(20-8)^2}{28}$$
$$=6.23 \qquad (f=3) \qquad (*6.16)$$

この欠点をなくするために累積度数をとったのである．そうすれば S_A より，S_B の方が大きな値になり，有意性の順位がわれわれの常識を満足させるのである．

(2) χ^2 法は誤差分散の評価がまずい．

これについては，たとえば文献 (1) の 17.8 節を見られたい．そこでは有意であるべきでない要因が，χ^2 法では 1% 有意になったのである．この欠点を除くためには，残差2乗和で誤差変動を求め，しかも1次誤差，2次誤差を区別することが最も大切である．累積法，度数法ではそのようにして誤差を求めているから，実際問題で常識と矛盾することはおこらないのである．

(6.3) **実効自由度** 説明を簡単にするために，2水準系で3組の計数分数値を考える．Aの効果をI組について a_1，II組について a_1+a_2 とする．もし，Aの効果がなければ，σ_1^2, σ_2^2 をI組，II組の誤差分散として

$$E(S_A)=\sigma_1^2+\sigma_2^2 \tag{*6.17}$$

となることは明白である．他の例についてもまったく同様だから1次誤差についても(*6.17)式が成立する．すなわち，累積法におけるF比は，分母，分子とも期待値はAの効果がないという前提の下に等しい．

しかし，期待値が等しいだけなら，分母，分子に他の一定の定数を掛けても同様である．われわれは，**そのような常数を適当に選んで，分母，分子の分散の2次のモーメントが，通常の分散分析における2次のモーメントのそれに等しくなるようにしよう．**

Aの効果がないという仮定の下で，S_A の分散を計算してみよう．σ_1^2 と σ_2^2 はわかっているとして，A_1, A_2; A_1', A_2' をI組，II組の和として

$$S_A=\frac{(A_1-A_2)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(A_1'-A_2')^2}{\sigma_2^2} \tag{*6.18}$$

を考える．第1項と第2項の相関係数を求める．

$$E(A_1-A_2)=0,\ E(A_1-A_2)^2=2np_1(1-p_1) \tag{*6.19}$$

$$E(A_1'-A_2')=0,\ E(A_1'-A_2')^2=2n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2) \tag{*6.20}$$

実際には，I組，II組で誤差分散をきちんと求めるべきだが，各組毎の分散分析を別々にやることが必要になり面倒なので，I組，II組の平均出現率の2項分布の誤差分散を代用して，(*6.19)，(*6.20)の公式を用いることにする．

A_1-A_2 と $A_1'-A_2'$ の共分散を求めるには，密度分布の 1，2，3 組の A_1 の値を x_1, x_2, x_3, A_2 の値を y_1, y_2, y_3 とする．$A_1=x_1$, $A_2=y_1$, $A_1'=x_1+x_2$, $A_2'=y_1+y_2$ である．実際に必要なのは，(x_1-y_1) と (x_2-y_2) との共分散である．関係式

$$x_1+x_2+x_3=n$$

$$y_1+y_2+y_3=n$$

を辺々差し引いて

$$(x_1-y_1)+(x_2-y_2)=-(x_3-y_3)$$

両辺を2乗して，期待値をとることにより

$$\begin{aligned}2E(x_1-y_1)(x_2-y_2)&=[(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)-p_1(1-p_1)-p_2(1-p_2)]2n\\&=-4np_1p_2\end{aligned} \tag{*6.21}$$

これから，$n\gg1$ で二元正規で近似できるとすれば，$2n$ は共通だから

$$\rho'=\frac{-p_1p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}}=-\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$$

$$(\rho')^2=\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}$$

$$\frac{A_1-A_2}{\sqrt{2np_1(1-p_1)}}\to N(0,\ 1)$$

$$\frac{A_1'-A_2'}{\sqrt{2n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)}}\to N(0,\ 1)$$

であるから，$n\gg1$ で

$$E\left(\frac{(A_1-A_2)^4}{4n^2p_1^2(1-p_1)^2}\right)=3 \tag{*6.22}$$

$$E\left(\frac{(A_1'-A_2')^4}{4n^2(p_1+p_2)^2(1-p_1-p_2)^2}\right)=3 \tag{*6.23}$$

一方，A_1-A_2 と $A_1'-A_2'$ の相関については，次のような計算が必要である．

$$\begin{aligned}\rho&=E\left\{\frac{(A_1-A_2)}{\sqrt{2np_1(1-p_1)}}\times\frac{(A_1'-A_2')}{\sqrt{2n(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)}}\right\}\\&=E\left\{\frac{(A_1-A_2)^2+(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{2n\sqrt{p_1(1-p_1)(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)}}\right\}\\&=\left\{\frac{p_1(1-p_1)-p_1p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)}}\right\}\end{aligned}$$

これから，$n\gg1$ で

$$\mathrm{Var}(S_A)=4\left\{1+\frac{[p_1(1-p_1)-p_1p_2]^2}{p_1(1-p_1)(p_1+p_2)(1-p_1-p_2)}\right\}=4(1+\varDelta) \tag{*6.24}$$

$$\varDelta=\frac{p_1(1-p_1-p_2)}{(1-p_1)(p_1+p_2)} \tag{*6.25}$$

したがって，$\varDelta$ を上式の値として S_A の実効自由度 ϕ を

$$\phi=2\times\frac{1}{1+\varDelta} \tag{*6.26}$$

とおいた方がよい．たとえば，全体の中で，I組が 1/3，II組が 2/3 の場合には，$p_1=p_2=1/3$ とおいて

$$\varDelta=\frac{1}{4}$$

となるから，実効自由度は

$$\phi=2\times\frac{1}{1+\frac{1}{4}}=2\times\frac{4}{5}=1.6 \tag{*6.27}$$

すなわち，自由度は 2 ではなく，1.6 でしかないことになる．実効自由度を用いて検定する方がよいが，普通の自由度を用いても殆ど差がない．さらに，著者としては，**Fによる有意性の判定に，自由度を現行のように大きく効かせることは反対で，Fは自由度のいかんにかかわらず，3とか 5 に決めてもよいのではないかとさえ思う．したがって，自由度は普通の自由度を用いることにしたのである．**

一般に，k 組に分類したときの実効自由度 ϕ は，元の自由度 f に対して

$$\phi=\frac{\mathrm{f}^2}{\mathrm{f}+2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k-1}\frac{p_i(1-p_j)}{(1-p_i)p_j}} \tag{*6.28}$$

で与えられる．p_1, p_2,…… は，累積度数での各組に入った割合である．

7. 二元配置法，一般の場合

本章においては，二元配置法のデータ解析について，繰返えし数不揃いの場合や，もっときめの細かいデータ解析の方法を解説する．

7.1 繰返えし数不揃いの場合，塩の摂取量と胃ガン

日本対ガン協会によれば，神奈川県の胃集団検診における塩辛いものの摂取頻度と胃ガンの関係を調べたデータは，表 7.1 のようであった．胃ガン群（男 102 名，女 40 名）と対照群（男 652 名，女 510 名）について，塩辛いものの摂取状況を分類したものである．

表 7.1 塩の摂取状況と胃ガン

	B_1（男）			B_2（女）		
	胃ガンでない	胃ガン	計	胃ガンでない	胃ガン	計
A_1（殆ど食べない）	176	10	186	158	5	163
A_2（時々食べる）	305	47	352	226	20	246
A_3（毎日食べる）	127	29	156	95	8	103
A_4（毎食食べる）	44	16	60	31	7	38
計	652	102	754	510	40	550

因子が1個しかないときには，因子の各水準で**繰返えし数**（**調査人数**）**が不揃い**でもそのまま解析ができるが，2因子以上の場合は，次のようにまず組合せ毎に平均を求めることになる．いま，胃ガンでない人を0，胃ガンの人を1とすれば，A_1B_1 では，186 人中 0が 176 人，1が 10 人である．したがって，平均と百分率は次のようになる．

$$\frac{10}{186}=0.054=5.4(\%)$$

表 7.2 百分率にしたデータ

	B_1	B_2	計
A_1	5.4	3.1	8.5
A_2	13.4	8.1	21.5
A_3	18.6	7.8	26.4
A_4	26.6	18.4	45.0
計	64.0	37.4	101.4

他の組合せに対しても，胃ガン患者数の百分率を求める．その結果が表 7.2 である．

7.1.1 分 散 分 析

百分率（または平均値）のデータで，あたかも繰返えしがない場合と同じに考えた変動を求める．

$$\mathrm{CF}=\frac{101.4^2}{8}=1285.24 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (7.1)$$

$$S_{T_1}=5.4^2+3.1^2+\cdots\cdots+18.4^2-\mathrm{CF}$$

$$=451.62 \qquad (\mathrm{f}=7) \qquad (7.2)$$

$$S_A=\frac{1}{2}(8.5^2+21.5^2+26.4^2+45.0^2)-\mathrm{CF}$$

$$=342.99 \qquad (\mathrm{f}=3) \qquad (7.3)$$

$$S_B=\frac{1}{8}(64.0-37.4)^2$$

$$=88.44 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (7.4)$$

$$S_{A\times B}=S_{T_1}-S_A-S_B$$

$$=20.19 \qquad (\mathrm{f}=3) \qquad (7.5)$$

次に，繰返えし間変動 S_e を求める．注（7.1）から

$$S_e=\frac{100^2}{\bar{r}}S_e' \qquad (7.6)$$

ここに，100^2 は，百分率のデータにしたため，変動の計算では 100^2 倍しなければならないからである．分母の $\bar{r}$ は，A_1B_1，A_1B_2，……，A_4B_2 の繰返えし数 186，163，……，38 の**調和平均**である．

$$\frac{1}{\bar{r}}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{186}+\frac{1}{163}+\cdots\cdots+\frac{1}{38}\right]$$

$$=0.009690 \qquad (7.7)$$

したがって調和平均 $\bar{r}$ は，(7.7) 式の逆数から 103 となる．この値は，A，B の各組合せで調査人員を等しく選ぶことができたとすれば，103 人ずつの繰返えしがあった場合の調査精度と等しいことを示している．この調査では，38 人から 352 人と調査人員が異なるので，合計して 1304 人も調べていながら，繰返えしが等しい場合の 103 人×8=824 人と解析精度が等しくなってしまうことを意味している．すなわち，繰返えし数を等しくした方が同じ調査人数なら解析精度が上がることになる．

S_e' は，繰返えし間誤差変動で，次のようにして求められる．

$$S_e'=\{A_1B_1 \text{ の繰返えし間誤差変動 } +\cdots\cdots+A_4B_2 \text{ の繰返えし間誤差変動}\}$$

$$=186\times\frac{10}{186}\left(1-\frac{10}{186}\right)+\cdots\cdots+38\times\frac{7}{38}\left(1-\frac{7}{38}\right)$$

$$=(10+\cdots\cdots+7)-\left(\frac{10^2}{186}+\cdots\cdots+\frac{7^2}{38}\right)$$
$$=142-21.542$$
$$=120.458 \qquad (f=1296) \qquad (7.8)$$

自由度 f は，A_1B_1 の繰返えし間自由度 (186−1)，……，A_4B_2 の繰返えし間自由度 (38−1) を加えたものである．もちろん，全調査人員 1304 から AB の組合せ数 8 を引いて求めてもよい．したがって

$$S_e=100^2\times0.009690\times120.458$$
$$=11672.38 \qquad (f=1296) \qquad (7.9)$$

(7.1)〜(7.9) 式から，表 7.3 の分散分析表が得られる．全変動 S_T は，合計して求める．

$$S_T=S_{T_1}+S_e \qquad (f=1303) \qquad (7.10)$$

表 7.3 分散分析表

要　因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
A	3	342.99	114.33	12.70**	315.99	2.61
B	1	88.44	88.44	9.82**	79.44	0.66
$A\times B$	3	20.19	6.73	—	—	—
e	1 296	11 672.38	9.01			96.73
プールした(e)	(1 299)	(11 692.57)	(9.00)			
T	1 303	12 124.00				100.00

この結果は，塩辛いものの摂取状況の差も，男女別も，胃ガン発生割合に大きな差があるが，男も女も塩辛いもののとり方による胃ガン患者になる割合は等しいことを示している．寄与率が小さいように見えるが，それは塩辛いものを毎日，毎食食べても胃ガンにならない人が圧倒的に多いからである．もし，塩辛いものを毎日食べなければ絶対に胃ガンにならず，毎日以上食べれば 100% 胃ガンになれば，そのときには A の寄与率は 100% ということになる．塩辛いものを食べなかったら胃ガンに絶対にならなくても，食べている人の中に胃ガンにならない人がいれば，個人による胃ガン対抗性の因子が効いているから，寄与率 100% とはならないのである．個人差の方がずっと大きい寄与率を示していることになる．

7.1.2 推　　定

分散分析表からの推定は，一般平均，A，B の主効果のみを考えて推定することになる．

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{A}_1=4.25\pm4.16 & \bar{B}_1=16.00\pm2.94 \\ \bar{A}_2=10.75\pm4.16 & \bar{B}_2=9.35\pm2.94 \\ \bar{A}_3=13.20\pm4.16 & \bar{T}=12.68\pm2.08 \\ \bar{A}_4=22.50\pm4.16 & \end{array}\right\} \qquad (7.11)$$

信頼限界は，たとえばAに対しては次のようにして求めた．

$$\pm\sqrt{\frac{3.84\times 9.00}{2}}=\pm 4.16 \tag{7.12}$$

したがって，A，B の各組合せに対する推定は次のようになる．

$$\begin{aligned} A_1B_1 \text{ の推定} &= \bar{A}_1+\bar{B}_1-T \\ &= 4.25+16.00-12.68 \\ &= 7.57\pm 4.65 \end{aligned} \tag{7.13}$$

信頼限界は，次のようにして求めた．T，A，B が有意で，それらの自由度の和は5である．

$$\sqrt{384\times 9.00\times\frac{5}{8}}=4.65 \tag{7.14}$$

他の組合せに対しても同様にして求める．

表 7.4　総括推定表（信頼限界 ±4.65）

	B_1	B_2
A_1	7.57	0.92
A_2	14.07	7.42
A_3	16.52	9.87
A_4	25.82	19.17

表 7.4 の総括推定表は，$A\times B$ のような有意でなかった要因効果は切り捨ててしまったもので，このような調査結果を集約したものを示している．しかし，この場合，毎食塩辛いものをとる男子が 25.82% も胃ガンになると考えるのは間違っている．それは，調査において，特に胃ガン患者を 102 人選んできたからである．表 7.1 は本来なら，胃ガンでない人と胃ガンの人で塩辛いものの摂取状況に差があるかどうかという解析をすべきであった．その場合には，A_1＝胃ガンでない，A_2＝胃ガン，B_1＝男，B_2＝女として，(1) 組：塩辛いものを殆ど食べない，……，(4) 組：毎食食べるとして，累積法の計算をすることになる．しかしその計算は読者に任せよう．

この場合，男子で毎食塩辛いものを食べる人がどれ位胃ガンになるかを推定するには，男子の胃ガン患者がどれ位発生するかという推定が必要である．一生の間に胃ガンにかかる割合が男子の場合 7% とすれば，毎食塩辛いものを食べる男子の場合

$$25.82\times\frac{0.07}{\frac{102}{754}}=13.10\ (\%) \tag{7.15}$$

で，この場合，あまり差はない．他についても同様である．毎日塩辛いものを食べる男子は 8 人に 1 人が一生の間に胃ガンにかかることになる．

7.2 一般の分解，物価指数のデータ

7.2.1 問　　題

つぎのデータは

A_1＝日本，A_2＝アメリカ，A_3＝カナダ，A_4＝イギリス，A_5＝西ドイツ，A_6＝フランス，A_7＝イタリア

の各国における

B_1＝1964 年 6 月末＝1964.5 年

B_2＝1964 年12月末＝1965.0 年

B_3＝1965 年 6 月末＝1965.5 年

の物価指数（1958 年＝100）である（東洋経済，統計月報，1965 年 10 月号）．

表 7.5　7カ国の物価指数のデータ

	A_1'	A_2'		A_3'				計
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	
B_1	131	107	108	116	114	108	124	808
B_2	135	108	109	118	115	109	127	821
B_3	143	109	111	121	118	112	129	843
計	409	324	328	355	347	329	380	2 472

物価指数の増加率について，国ごとの違いを考慮した解析をし，このままの増加率がつづいたときの 1966 年末の物価指数を推定せよ．

7.2.2 変動の分解

この場合，一見して考えられることは，7カ国を次の3つのグループに分けることである．

A_1'＝日本

A_2'＝アメリカ大陸の国

A_3'＝ヨーロッパの国

もちろん，A_2' の中の2カ国，アメリカとカナダの差も調べなければならないが，両国の差が小さくて有意差がないとでれば，あとで物価指数の推定のとき，両者共通の推定をすればよいことになる．A_4～A_7 についても同じことがいえる．

また，Bの効果については，それを1次と2次効果（または残りの効果）に分解することはもちろんである．

したがって，この二元配置法のデータ解析では，次の表 7.6 のような自由度（未知数）

をとりあげることになる．

表 7.6 自由度の配分

要　因		自由度
A	A'	2
	A_2'内 (A_2 と A_3 の差)	1
	A_3'内 (A_4, A_5, A_6, A_7 の差)	3
B	l	1
	res	1
$A \times B_l$	$A' \times B_l$	2
	A_2'内$\times B_l$	1
	A_3'内$\times B_l$	3
e		6
T		20

この場合，各変動の計算式は次のようになる．

$$\mathrm{CF}=\frac{2\,472^2}{21} \tag{7.16}$$

$$S_T=131^2+107^2+\cdots\cdots+129^2-\mathrm{CF} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned}S_{A'}&=\frac{(A_1')^2}{3}+\frac{(A_2')^2}{6}+\frac{(A_3')^2}{12}-\mathrm{CF}\\&=\frac{A_1{}^2}{3}+\frac{(A_2+A_3)^2}{6}+\frac{(A_4+A_5+A_6+A_7)^2}{12}-\mathrm{CF}\\&=\frac{409^2}{3}+\frac{(324+328)^2}{6}+\frac{(355+\cdots\cdots+380)^2}{12}-\mathrm{CF}\qquad(\mathrm{f}=2)\end{aligned} \tag{7.18}$$

$$S_{A_2'内}=\frac{324^2}{3}+\frac{328^2}{3}-\frac{(324+328)^2}{6}\qquad(\mathrm{f}=1) \tag{7.19}$$

$$S_{A_3'内}=\frac{355^2+\cdots\cdots+380^2}{3}-\frac{(355+\cdots\cdots+380)^2}{12}\qquad(\mathrm{f}=3) \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}S_B&=\frac{B_1{}^2+B_2{}^2+B_3{}^2}{7}-\mathrm{CF}\\&=\frac{808^2+821^2+843^2}{7}-\mathrm{CF}\qquad(\mathrm{f}=2)\end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}S_{B_l}&=\frac{(-B_1+B_3)^2}{7\times 2}\\&=\frac{(-808+843)^2}{14}\qquad(\mathrm{f}=1)\end{aligned} \tag{7.22}$$

$$S_{B\mathrm{res}}=S_B-S_{B_l}\qquad(\mathrm{f}=1) \tag{7.23}$$

$A'\times B_l$, A_2'内$\times B_l$, A_3'内$\times B_l$ の変動を求めるには，Aの水準毎に，Bの1次効果に対する対比 $L(A_1)$, ……, $L(A_7)$ を求めてから次のように計算する．

$$L(A_1)=-A_1B_1+0\times A_1B_2+A_1B_3$$
$$=-131+0+143=12$$
$$L(A_2)=-107+109=2$$
$$L(A_3)=-108+111=3$$
$$L(A_4)=-116+121=5$$
$$L(A_5)=-114+118=4$$
$$L(A_6)=-108+112=4$$
$$L(A_7)=-124+129=5$$

これから

$$S_{A'\times B_l}=\frac{L(A_1)^2}{2}+\frac{[L(A_2)+L(A_3)]^2}{4}+\frac{[L(A_4)+\cdots\cdots+L(A_7)]^2}{8}-\frac{[L(A_1)+\cdots\cdots+L(A_7)]^2}{14}$$
$$=\frac{12^2}{2}+\frac{(2+3)^2}{4}+\frac{(5+4+4+5)^2}{8}-\frac{35^2}{14}=31.25\quad(\mathrm{f}=2)\qquad(7.24)$$

$$S_{A_2'内\times B_l}=\frac{[L(A_2)]^2}{2}+\frac{[L(A_3)]^2}{2}-\frac{[L(A_2)+L(A_3)]^2}{4}$$
$$=\frac{2^2}{2}+\frac{3^2}{2}-\frac{5^2}{4}=0.25\qquad(\mathrm{f}=1)\qquad(7.25)$$

または

$$L_{A_2'内\times B_l}=\frac{(2-3)^2}{4}=0.25\qquad(\mathrm{f}=1)\qquad(7.26)$$

$$S_{A_3'内\times B_l}=\frac{L(A_4)^2+\cdots\cdots+L(A_7)^2}{2}-\frac{[L(A_4)+\cdots\cdots+L(A_7)]^2}{8}$$
$$=\frac{5^2+4^2+4^2+5^2}{2}-\frac{18^2}{8}=0.50\qquad(\mathrm{f}=3)\qquad(7.27)$$

$$S_e=S_T-[S_A'+\cdots\cdots+S_{A_3'内\times B_l}]=2.57\qquad(\mathrm{f}=6)\qquad(7.28)$$

このような計算によって，各要因効果を自由度1や自由度2などの細かい成分に分解したことになる．その場合，必ずしも自由度が1の対比にならない．

ここで大切なことは，たとえば，物価指数の上昇率について，日本とアメリカだけの比較をしたいときにも，それに対する対比

$$L=L(A_1)-L(A_2)\qquad(7.29)$$

について計算すれば求まるということである．対比は互いに直交している必要はない．ただし，直交しない対比は欄外に示すことになる．

7.2.3 分散分析表と推定

前節の計算から，分散分析表は表 7.7 のようになる．

表 7.7 分散分析表
（ただし，小数2位まで）

要因		f	S	V
A	A'	2	1 531.37	765.68**
	A_2'内	1	2.67	2.67*
	A_3'内	3	448.25	149.42**
B	B_l	1	87.50	87.50**
	B_q	1	1.93	○ 1.93
$A\times B_l$	$A'\times B_l$	2	31.25	15.62**
	A_2'内$\times B_l$	1	0.25	○ 0.25
	A_3'内$\times B_l$	3	0.50	○ 0.17
e		6	2.57	○ 0.43
(e)		(11)	(5.25)	(0.48)
T		20	2 106.29	

最終的な分散分析は，検定とか，プールするとかの結果をみてからの整理が必要で，たとえば上の表 7.7 の場合には，○印をプールして誤差（e）を作った．

$$S_{(e)}=S_{B_q}+S_{A_2'\text{内}\times B_l}+S_{A_3'\text{内}\times B_l}+S_e$$
$$=1.93+0.25+0.50+2.57$$
$$=5.25 \qquad (\mathrm{f}=11) \qquad (7.30)$$

したがって，この場合，物価上昇の傾向は，2次傾向は有意でなく，1次傾向のみが有意だが

（1） アメリカの2国 A_2, A_3 では1次傾向に有意差はない．

（2） ヨーロッパの4カ国の間にもこの期間における1次傾向の間に有意差はない．

（3） 物価上昇の1次傾向に大きく差があるのは $A'\times B_l$，日本，アメリカ大陸，ヨーロッパ間ということになる．

したがって，ここでは目的からはずれるので詳しくは述べないが，つぎの7つの式を作ればよいことになる．日本，アメリカ大陸，ヨーロッパの物価上昇の1次傾向を b_1, b_2, b_3 とすれば直交多項式の表から

$$\hat{b}_1=\frac{-1\times A_1B_1+0\times A_1B_2+1\times A_1B_3}{r(\lambda S)h}$$
$$=\frac{-1\times 131+0\times 135+1\times 143}{1\times 2\times 0.5}$$
$$=\frac{-131+143}{1}$$

$$=12 \tag{7.31}$$

$$\hat{b}_2=\frac{-1(107+108)+(109+111)}{2\times2\times0.5}$$

$$=\frac{5}{2}$$

$$=2.5 \tag{7.32}$$

$$\hat{b}_3=\frac{-(116+114+108+124)+(121+118+112+129)}{4\times2\times0.5}$$

$$=\frac{18}{4}$$

$$=4.5 \tag{7.33}$$

したがって，各国毎のこの期間における物価上昇の式は

日　本　$\bar{A}_1+\hat{b}_1(B-\bar{B})$

$$=\frac{409}{3}+12(B-1965)$$

$$=136.33+12(B-1965) \tag{7.34}$$

アメリカ　$\bar{A}_2+\hat{b}_2(B-\bar{B})$

$$=\frac{324}{3}+2.5(B-1965)$$

$$=108.00+2.5(B-1965) \tag{7.35}$$

カナダ　$109.33+2.5(B-1965)$　(7.36)

イギリス　$118.33+4.5(B-1965)$　(7.37)

西ドイツ　$115.67+4.5(B-1965)$　(7.38)

フランス　$109.67+4.5(B-1965)$　(7.39)

イタリア　$126.67+4.5(B-1965)$　(7.40)

となる．

これから，**このままの上昇がつづいたときの，たとえば日本の 1966 年末，1967 年初頭の物価の予想値は**

$$136.33+12(1967-1965)=160.33\ (\%) \tag{7.41}$$

ということになる．ほかの国については読者に任せる．

7.3　繰返えし数不揃いの場合，故障金額のデータ

7.3.1　故障金額のデータ

3 社 A_1, A_2, A_3 のある家庭電気製品を用いている家庭を何れも 50 世帯ずつ選んで，その製品の故障統計を調べたデータは表 7.8 のようであった．ただし，少なくともその

製品を 6 カ月以上使用した家庭を選び，最近 1 年間の故障による損失額を調査したものである．サービス期間中のものでもその金額を見積もってデータとした．1 年間に故障が 2 回以上あったものについては，故障金額の合計をデータとした．

表 7.8　故障による損失額のデータ（括弧内はデータ数）
B_1＝調査開始時点より 1 年前以内に購入
B_2＝調査開始時点より 1 年前以上 2 年前以内に購入
B_3＝調査開始時点より 2 年前以上 3 年前以内に購入
B_4＝調査開始時点より 3 年前以上 4 年前以内に購入

（単位 キロ円）

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0 1.5,3.0,1.0,2.5 5.0,4.0,0.8,1.4 1.8,2.0 (20)	0, 0, 0, 0, 0 0, 1.8, 3.9, 2.3 1.5,1.4,2.0,4.1 5.8,1.2 (15)	0, 0, 0, 0 6.0,2.0,1.6.1.7 2.3 (9)	0, 0, 1.8, 5.4 3.1,4.5 (6)	(50)
A_2	0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 1.6 2.5 (10)	0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 3.0, 2.4 (9)	0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 3.5, 1.0 2.4, 1.2 (16)	0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 0, 1.0, 2.0 0.8,3.6,4.1,2.2 1.5 (15)	(50)
A_3	0, 0, 0, 0, 0 2.0,1.4,3.2,2.4 1.8,1.5,4.2 (12)	0, 0, 0, 0, 0 0, 0, 1.8, 2.3 2.6,2.7,3.3,4.5 7.2,1.4 (15)	0, 0, 0, 0, 0 2.0,4.0,2.8,3.2 2.5,2.1,2.7,4.4 (13)	0, 2.0, 3.0, 3.2 2.8,2.7,4.3,3.0 5.0,2.0 (10)	(50)

7.3.2 データ解析

表 7.8 のように，A, B の水準の組合せ毎に，調査データの数が異なるということは，もっとも普通におこることである．調査データの場合には，実験の確率化がないために，データ解析の結論は，必ずしも何時でも信用できるとは限らない．しかし，調査のデータをうまく解析して，多くの有用なヒントをつかむということは非常に大切である．

このように，繰返えしの数が異なるときには，データ解析をどのようにしたらよいのだろうか．A, B の水準の各組合せに少なくとも 1 つはデータがあるとして，次のようにするのである．そうでないときには 8.3 節を見よ．

（1） 各水準組合せ毎の平均値を作る

表 7.8 の各水準組合せ毎の平均値を求めれば表 7.9 のようになる．平均の場合には，少なくとも一桁多く出したほうがよい．

表 7.9 平均値の表

	B_1	B_2	B_3	B_4	計
A_1	1.15	1.60	1.52	2.47	6.74
A_2	0.41	0.60	0.56	1.01	2.58
A_3	1.38	1.72	1.82	2.80	7.72
計	2.94	3.92	3.90	6.28	17.04

(2) 分散分析をする

ただし，7.1 節と異なって，調和平均 $\bar{r}$ を掛けた変動を求める．この場合には誤差変動は，各組合せ毎の誤差変動を加え合わせるだけでよい．

$$S_e=(A_1B_1 \text{ の繰返えし間変動})+\cdots\cdots+(A_3B_4 \text{ の繰返えし間変動})$$

$$=\left\{0^2+0^2+\cdots\cdots+2.0^2-\frac{(0+0+\cdots\cdots+2.0)^2}{20}\right\}+\cdots\cdots$$

$$+\left\{0^2+2.0^2+\cdots\cdots+2.0^2-\frac{(0+2.0+\cdots\cdots+2.0)^2}{10}\right\}$$

$$=342.21 \qquad (f=150-12=138) \qquad (7.42)$$

$$\frac{1}{\bar{r}}=\frac{1}{12}\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots+\frac{1}{10}\right] \qquad (7.43)$$

から

$$\bar{r}=11.30 \qquad (7.44)$$

$$S_m=\frac{17.04^2}{12}\times\bar{r}$$

$$=273.23 \qquad (f=2) \qquad (7.45)$$

$$S_A=\bar{r}\left\{\frac{6.74^2+2.58^2+7.72^2}{4}\right\}-S_m$$

$$=41.89 \qquad (f=1) \qquad (7.46)$$

$$S_{Bl}=\bar{r}\frac{[-3(2.94)-3.92+3.90+3(6.28)]^2}{20\times 3}$$

$$=18.88 \qquad (f=1) \qquad (7.47)$$

$$S_{Bq}=\bar{r}\frac{(2.94-3.92-3.90+6.28)^2}{4\times 3}$$

$$=1.84 \qquad (f=1) \qquad (7.48)$$

$$S_{Bc}=\bar{r}\frac{[-2.94+3(3.92)-3(3.90)+6.28]^2}{20\times 3}$$

$$=2.20 \qquad (f=1) \qquad (7.49)$$

$$S_{A\times Bl}=\bar{r}\frac{3.86^2+1.77^2+4.37^2}{20}-S_{Bl}$$

$$=2.15 \qquad (f=2) \qquad (7.50)$$

$$S_{A\times B_q}=\bar{r}\frac{0.51^2+0.26^2+0.63^2}{4}-S_{B_q}$$

$$=0.20 \qquad (f=2) \qquad (7.51)$$

$$S_{A\times B_c}=\bar{r}\frac{1.58^2+0.72^2+1.12^2}{20}-S_{B_c}$$

$$=0.21 \qquad (f=2) \qquad (7.52)$$

$$S_{T_1}=\bar{r}\{1.15^2+1.60^2+\cdots\cdots+2.80^2\}$$

$$=409.59 \qquad (f=12) \qquad (7.53)$$

これから，表 7.10 の分散分析表 (ANOVA) を得る．

表 7.10　ANOVA

要　因		f	S	V	F_0	ρ(%)
m		1	273.23	273.23	114.4	39.6
A		2	41.89	20.84	8.7**	5.4
B	l	1	18.88	18.88	7.9**	2.4
	q	1	1.84	1.84		
	c	1	2.20	2.20		
$A\times B$	$A\times B_l$	2	2.15	1.08		
	$A\times B_q$	2	0.20	0.10		
	$A\times B_c$	2	0.21	0.10		
e		138	342.21	2.48		
(e)		(146)	(348.81)	(2.39)		52.6
T		150	682.81			100.0

これから，一般的傾向が 39.6%，メーカー間の差が 5.4%，どのメーカーも古くなるにしたがって，ほぼ直線的に故障が増加していることがわかる．しかし寄与率では個体差が最も大きく，使用条件の差またはアタリハズレが大きいことを意味している．

推定は次のようにする．

$$\left.\begin{aligned}\bar{A}_1&=\frac{6.74}{4}=1.68\pm0.45\\ \bar{A}_2&=\frac{2.58}{4}=0.64\pm0.45\\ \bar{A}_3&=\frac{7.72}{4}=1.93\pm0.45\end{aligned}\right\} \qquad (7.54)$$

$$b=\frac{[-3(2.94)-3.92+3.90+3(6.28)]}{r\lambda Sh}$$

$$=\frac{10.00}{3\times10\times1}$$

$$=0.33\pm0.24 \tag{7.55}$$

したがって，どのメーカーも1年に約330円ずつ故障額が増加することがわかる．信頼限界は次のようにして求めた．

$$\pm\sqrt{\frac{F\times V_e}{4\times\bar{r}}}=\pm\sqrt{\frac{3.91\times2.39}{4\times11.30}}=\pm0.45 \tag{7.56}$$

$$\pm\sqrt{\frac{3.91\times2.39}{3\times11.30\times5\times1^2}}=\pm0.24 \tag{7.57}$$

演 習 問 題

問 (7.1) 次のデータは，W. Penfield によるもので，脳の手術を右半球でやったもの (A_1) と左半球でやったもの (A_2) について，更に右利き (B_1) と左利き (B_2) に分類して

脳の手術と失語症の関係

	手術数 n	失語症をおこしたもの r	平均(率) y
A_1B_1	157	115	0.732
A_1B_2	18	13	0.722
A_2B_1	196	1	0.005
A_2B_2	15	1	0.067
計	386	130	1.576

手術後失語症をおこしたものの数を調べたものである．分散分析をして，結果を解釈せよ．ただし

$$S_e=130-\left(\frac{115^2}{157}+\frac{13^2}{18}+\frac{1^2}{196}+\frac{1^2}{15}\right)$$
$$=36.30$$
$$\frac{1}{\bar{r}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{157}+\frac{1}{18}+\frac{1}{196}+\frac{1}{15}\right)$$

から $\bar{r}\fallingdotseq30$ とせよ．

問 (7.2) 平山雄氏によれば，いろいろな国における胃ガン発生率に対して，社会の階級

	(日)	(米)	(英)
A_1	0.90	0.70	0.58
A_2	0.75	0.91	0.70
A_3	1.00	1.03	1.02
A_4	1.02	1.06	1.12
A_5	1.08	1.24	1.29

A_1（最下），A_2，A_3，A_4，A_5（最上）別の胃ガン発生率の割合は前頁の表のようである．階級による胃ガン発生割合（の比）が異なるといえるか．

B_1＝日，B_2＝米，B_3＝英 とし，Aを等間隔と考え，$A_l \times B$, $A_q \times B$を求め，残りを誤差として分散分析をせよ．

問（7.3） A_1＝外国品，A_2＝自社品，A_3＝国内他社品について，各社の製品の温度による特性の変化を見るために，温度Bを4水準

$$B_1=-30,\ B_2=0,\ B_3=30,\ B_4=60\ (°C)$$

に変えて，A_1 については繰返えし数 1，A_2 については繰返えし数 5，A_3 については繰返えし数2で引張り強さの測定をしたデータは次のようであった．Aを外国品と国内品（A'），自社品と国内他社品（A''）に分解して解析をせよ．ただし，データの単位は kg/mm^2 で仮平均 80 を引いてある．

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	20	8	0	−9
A_2	22	12	−2	−12
	25	8	0	−14
	28	10	3	−13
	25	9	0	−16
	26	12	1	−12
A_3	17	6	−8	−20
	23	8	−6	−18
	20	4	−3	−22

問（7.4） 収入階級を5階級 A_1(少)，A_2，A_3，A_4，A_5(多)；$B_1=40$，$B_2=41$，$B_3=42$，$B_4=44$（昭和の年度）として，住居費の支出は次のようであった（単位 円）．

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
B_1	3571	4441	5058	5699	6155
B_2	3807	5017	5489	6480	6870
B_3	4512	5788	6562	7283	7434
B_4	5833	6996	7892	9112	9983

A, B を適当に分解し，データ解析をせよ．

問（7.5） 3種類の石鹼，A_1＝牛乳，A_2＝花王，A_3＝ミツワの意匠について，女子学生210人を，各ブランド毎に，B_1＝好意を持つもの，B_2＝中立のもの，B_3＝好意を持たないものに分け，各人の意見によって各意匠を上，中，下の3組に分類して貰った．

A_1	上	中	下	計
B_1	20	13	39	72
B_2	16	25	31	72
B_3	19	12	35	66
計	55	50	105	210

A_2	上	中	下	計
B_1	41	17	15	73
B_2	30	24	20	74
B_3	33	15	15	63
計	104	56	50	210

A_3	上	中	下	計
B_1	38	24	10	72
B_2	42	15	15	72
B_3	34	18	14	66
計	114	57	39	210

どのようにデータ解析をしたらよいか．また，実際に解析を行ない，結論を示せ．

注

(7.1) 繰返えし数不揃いに対する対策　繰返えし数不揃いに対する本章に示した方法は，繰返えしの誤差変動を最小にするいわゆる Yates の方法を改良したものである．Yates の方法は有意な要因を多く出しすぎる傾向があるが，本章の方法は平均としてほぼ正しい危険率となる．繰返えし数が異なるときそれは，調和平均を等しい繰返えし数と考えた場合と同じ比較の精度と考えてよいからである．調和平均 $\bar{r}$ で繰返えし変動を割る 7.1 節の方法より，$\bar{r}$ を要因変動に掛ける 7.3 節の方法の方が望ましい．計算の手間の上で後者の方が余計にかかるから，筆算なら前者を，コンピューターなら後者の方がよい．

8. 三元配置法

本章においては，三元及び三元以上の場合のデータ解析を説明する．営業のデータは殆ど三元以上になることが普通である．しかし，計算の方法は二元配置の応用でしかないので，紙数の都合上，2,3 の例を示すにとどめる．

8.1 百貨店の売上高

8.1.1 データと変数変換

表8.1のデータは，日本全国の百貨店における品種別，年度別，月別の三元配置のデータである．電力，電話，交通等では，年度別，季節別，曜日別，時間別のデータを必要とするので四元配置になる．この場合，データが余りにも厖大になりそうなら，交通調査などは，毎季節から1週間のみをとってくるというような程度のデータでも良いだろう．その他に，特殊事情（天候，災害，盆暮，団地形成）もあるが，それらについては，一定の指数を作っておいて，あとで掛けることが必要になる．単位を 10 億円にとり，対数変換したデータを 1000 倍したものである．

ただし，A, B, C は次の3因子である．

A＝商品の種類　A_1＝衣料品，A_2＝身回品，A_3＝雑貨，A_4＝家庭用品，A_5＝食料品

B＝年度　B_1＝昭和 34 年, B_2＝35年, B_3＝36年, B_4＝37年, B_5＝38年, B_6＝39年

C＝月　C_1＝1 月，C_2＝2 月，……，C_{12}＝12 月

データは，日本百貨店協会の資料による．また，データ解析の主目的は，売上げの伸びが，商品によってどの程度異なっているかということと，売上げの伸びが，月によって異

表 8.1　売上高の対数

A_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	計
B_1	951	952	1 122	1 059	1 035	1 057	1 188	948	966	1 160	1 198	1 523	13 159
B_2	1 015	1 017	1 181	1 136	1 099	1 129	1 273	1 015	1 046	1 228	1 264	1 602	14 005
B_3	1 093	1 088	1 264	1 229	1 189	1 220	1 365	1 111	1 114	1 305	1 354	1 669	15 001
B_4	1 178	1 164	1 339	1 286	1 251	1 284	1 417	1 173	1 192	1 369	1 409	1 714	15 776
B_5	1 227	1 239	1 408	1 342	1 307	1 357	1 457	1 228	1 295	1 427	1 453	1 766	16 506
B_6	1 275	1 307	1 446	1 391	1 361	1 371	1 500	1 268	1 317	1 470	1 523	1 801	17 030
計	6 739	6 767	7 760	7 443	7 242	7 418	8 200	6 743	6 930	7 959	8 201	10 075	91 477

A_2	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	計
B_1	124	130	348	316	305	307	403	253	190	340	312	632	3 660
B_2	188	176	394	407	373	369	483	305	305	431	386	735	4 552
B_3	272	272	502	504	462	471	579	407	375	541	471	825	5 681
B_4	373	342	591	582	563	575	662	489	489	593	548	884	6 691
B_5	441	438	679	648	636	664	727	574	599	667	611	951	7 635
B_6	525	542	737	706	699	690	776	644	650	746	702	1 011	8 428
計	1 923	1 900	3 251	3 163	3 038	3 076	3 630	2 672	2 608	3 318	3 030	5 038	36 647

A_3	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	計
B_1	396	398	525	513	418	387	524	458	380	428	415	785	5 627
B_2	439	455	574	591	484	453	619	535	462	511	494	882	6 499
B_3	525	550	674	699	591	577	741	564	563	610	589	975	7 658
B_4	619	625	759	761	666	657	804	710	645	671	654	1 037	8 608
B_5	678	709	844	839	737	744	895	785	719	744	732	1 110	9 536
B_6	744	785	898	881	808	794	947	858	784	824	815	1 173	10 311
計	3 401	3 522	4 274	4 284	3 704	3 612	4 530	3 910	3 553	3 788	3 699	5 962	48 239

A_4	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	計
B_1	364	384	513	545	531	547	649	520	476	597	595	884	6 605
B_2	430	462	587	631	617	625	749	605	565	687	683	987	7 628
B_3	525	560	687	738	717	736	866	719	679	799	798	1 075	8 899
B_4	614	644	760	816	803	815	928	794	747	861	867	1 125	9 774
B_5	674	734	843	876	859	899	992	854	823	925	937	1 190	10 606
B_6	739	816	905	943	949	931	1 067	935	905	988	1 014	1 240	11 432
計	3 346	3 600	4 295	4 549	4 476	4 553	5 251	4 427	4 195	4 857	4 894	6 501	54 944

A_5	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	計
B_1	476	465	428	387	521	498	856	731	470	567	548	1 155	7 102
B_2	538	524	611	612	580	561	955	782	543	627	618	1 246	8 197
B_3	606	605	700	694	655	654	1 056	870	621	705	701	1 334	9 201
B_4	681	666	783	753	737	737	1 116	937	695	772	780	1 400	10 057
B_5	744	751	862	827	806	831	1 204	1 005	780	841	850	1 471	10 972
B_6	812	831	917	872	863	884	1 274	1 062	833	916	936	1 541	11 741
計	3 857	3 842	4 301	4 145	4 162	4 165	6 461	5 387	3 942	4 428	4 433	8 147	57 270

補助表　BとCの二元表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	計
B_1	2 311	2 329	2 936	2 820	2 810	2 796	3 620	2 910	2 482	3 092	3 068	4 979	36 153
B_2	2 610	2 634	3 347	3 377	3 153	3 137	4 079	3 242	2 921	3 484	3 445	5 452	40 881
B_3	3 021	3 075	3 827	3 864	3 614	3 658	4 607	3 671	3 352	3 960	3 913	5 878	46 440
B_4	3 465	3 441	4 232	4 198	4 020	4 068	4 927	4 103	3 768	4 266	4 258	6 160	50 906
B_5	3 764	3 871	4 636	4 532	4 343	4 495	5 275	4 446	4 216	4 604	4 583	6 488	55 255
B_6	4 095	4 281	4 903	4 793	4 680	4 670	5 564	4 767	4 489	4 944	4 990	6 766	58 942
計	19 266	19 631	23 881	23 584	22 622	22 824	28 072	23 139	21 228	24 350	24 257	35 723	288 577

なっているかどうかを見ようというのである．

表 8.1 には，縦横の合計，B と C の二元表が示されている．三元配置の場合には，A とBの二元表，AとCの二元表，BとCの二元表の 3 つの二元表を作る．

8.1.2 変動の分解

因子Bを1次，2次，3次と，残りの効果に分解する．6水準の直交多項式から

$$L(B_l)=-5B_1-3B_2-B_3+B_4+3B_5+5B_6 \tag{8.1}$$

$$L(B_q)=5B_1-B_2-4B_3-4B_4-B_5+5B_6 \tag{8.2}$$

$$L(B_c)=-5B_1+7B_2+4B_3-4B_4-7B_5+5B_6 \tag{8.3}$$

したがって，変動は次のようにして求める．

$$\mathrm{CF}=\frac{288\,577^2}{360}=231\,324\,136 \tag{8.4}$$

$$S_A=\frac{91\,477^2+\cdots\cdots+57\,270^2}{72}-\mathrm{CF}=23\,352\,830 \tag{8.5}$$

$$S_B=\frac{36\,153^2+\cdots\cdots+58\,942^2}{60}-\mathrm{CF}=6\,236\,948 \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}S_{B_l}&=\frac{[-5(36\,153)-\cdots\cdots+5(58\,942)]^2}{60\times 70}\\&=\frac{161\,533^2}{4\,200}=6\,212\,598\end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}S_{B_q}&=\frac{[5(36\,153)-\cdots\cdots+5(58\,942)]^2}{60\times 84}\\&=\frac{(-10\,045)^2}{5\,040}=20\,020\end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned}S_{B_c}&=\frac{[-5(36\,153)+\cdots\cdots+5(58\,942)]^2}{60\times 180}\\&=\frac{(-4\,537)^2}{10\,800}=1\,906\end{aligned} \tag{8.9}$$

$$S_{B\mathrm{res}}=S_B-S_{B_l}-S_{B_q}-S_{B_c}=2\,424 \tag{8.10}$$

$$S_C=\frac{19\,266^2+\cdots\cdots+35\,723^2}{30}-\mathrm{CF}=6\,918\,798 \tag{8.11}$$

交互作用についても，B_l, B_q, B_c との交互作用を求める．たとえば，$S_{A\times B_l}$ はAの水準毎に，Bの対比を求めると

$$\left.\begin{aligned}L(A_1)&=-5(13\,159)-3(14\,005)-\cdots\cdots+5(17\,030)=27\,633\\L(A_2)&=-5(3\,660)-3(4\,552)-\cdots\cdots+5(8\,428)=34\,099\\&\vdots\\L(A_5)&=-5(7\,102)-3(8\,197)-\cdots\cdots+5(11\,741)=32\,376\end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

したがって

$$S_{A\times B_l}=\frac{27\,633^2+34\,099^2+\cdots\cdots+32\,376^2}{12\times 70}-S_{B_l}=34\,667 \tag{8.13}$$

同様にして，$A\times B_q$, $A\times B_c$ の変動を求めた上で，(8.14)式の $S_{A\times B}$ からそれらを全部

引いて，$S_{B\mathrm{res}\times A}$ を求める．

$$S_{A\times B}=\frac{13159^2+\cdots\cdots+11741^2}{12}-\mathrm{CF}-S_A-S_B=39368 \tag{8.14}$$

他の2因子交互作用も全く同様である．$S_{A\times B_l\times C}$ は，AC の水準組合せ毎に，B の1次項の対比を求める．

$$\left.\begin{aligned}L(A_1C_1)&=-\ 5(951)-3(1015)-\cdots\cdots+5(1275)=2341\\L(A_1C_2)&=-\ 5(952)-3(1017)-\cdots\cdots+5(1307)=2517\\&\vdots\\L(A_5C_{12})&=-5(1155)-3(1246)-\cdots\cdots+5(1541)=2671\end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

$$\begin{aligned}S_{A\times B_l\times C}&=\frac{2341^2+2517^2+\cdots\cdots+2671^2}{70}-S_{B_l}-S_{A\times B_l}-S_{C\times B_l}\\&=18835\end{aligned} \tag{8.16}$$

B_q, B_c についても同様にして AC の水準組合せ毎に対比を計算して変動を求める．これらの計算はかなり大変で，コンピューターの使用が有用になる．計算結果は表8.2のようになる．有意であっても，その寄与率が小さいものは関係式で考慮しないのが普通であ

表 8.2 分散分析表

要因		f	S	V	S'	$\rho(\%)$
A		4	23 352 830	5 838 208**	23 352 453	61.87
B	l	1	6 212 598	6 212 598**	6 212 504	16.46
	q	1	20 020	20 020**	19 926	0.05
	c	1	1 906	1 906**	1 812	0.00
	res	2	2 424	1 212**	2 236	0.00
C		11	6 918 798	628 982**	6 917 065	18.33
$A\times B$	$A\times B_l$	4	34 667	8 667**	34 290	0.09
	$A\times B_q$	4	1 922	480**	1 545	0.00
	$A\times B_c$	4	1 608	402**	1 231	0.00
	$A\times B_{\mathrm{res}}$	8	1 178	147**	—	
$A\times C$		44	1 124 638	25 560**	1 120 493	2.97
$C\times B$	$C\times B_l$	11	10 201	927**	9 065	0.02
	$C\times B_q$	11	11 993	1 090**	10 957	0.03
	$C\times B_c$	11	5 929	539**	4 893	0.01
	$C\times B_{\mathrm{res}}$	22	3 089	140*	1 017	0.00
$A\times C\times B$	$A\times C\times B_l$	44	18 835	428**	14 790	0.04
	$A\times C\times B_q$	44	11 456	260**	7 311	0.02
	$A\times C\times B_c$	44	5 454	124	—	
e		88	6 567	74.6	—	
(e)		(140)	(13 199)	94.2	(33 829)	0.90
T		359	37 746 110			
プールした(e)		(295)	(102 579)	(347.7)		

る．有意であるということは，その項が残された高次の項などの平均の大きさに比較して無視できないことを示しているのにすぎない．寄与率が 0.05% 未満のものは誤差に入れて公式を作ることにしよう．

8.1.3 予　　測

この場合，Aの主効果，Bの１次項，$A\times B_l$, C の主効果，$A\times C$ の５つの項で寄与率 99.72% の公式が得られる．$A\times B_l$ は，商品の種類で，平均的な売上高の伸びが異なっていることを示している．また，$A\times C$ は，商品の種類で，月別の売上高の差にかなりの違いがあることを意味している．

したがって，この期間における売上高は次の式で表現することになる．品種 A_i の年度Bにおける C_k 月の売上高は

$$\hat{\mu}=\overline{A_iC_k}+\hat{b}_i(B-\bar{B}) \tag{8.17}$$

$\overline{A_iC_k}$ はAとCの二元表の平均から求められ，$\hat{b}_i$ は品種 A_i 毎のBの１次項の対比から求められる．

表 8.3 $\overline{A_iC_j}/1\,000$ の表

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
A_1	1.123	1.128	1.293	1.240	1.207	1.236	1.367	1.124	1.155	1.326	1.367	1.679
A_2	0.320	0.317	0.542	0.527	0.506	0.513	0.605	0.445	0.435	0.553	0.505	0.840
A_3	0.567	0.587	0.712	0.714	0.617	0.602	0.755	0.667	0.592	0.631	0.616	0.994
A_4	0.558	0.600	0.714	0.758	0.746	0.759	0.875	0.738	0.699	0.810	0.816	1.084
A_5	0.643	0.640	0.717	0.691	0.694	0.694	1.077	0.898	0.657	0.738	0.739	1.358

また，A_i 毎のBの１次係数 $\hat{b}_i$ は

$$\left.\begin{array}{ll}
A_1 & \hat{b}_1=\dfrac{L(A_1)}{r\lambda Sh}=\dfrac{27.633}{12\times 35\times 1}=0.0658\pm 0.0025 \\[2ex]
A_2 & \hat{b}_2=\dfrac{34.099}{420}=0.0812\pm 0.0025 \\[2ex]
A_3 & \hat{b}_3=\dfrac{33.481}{420}=0.0797\pm 0.0025 \\[2ex]
A_4 & \hat{b}_4=\dfrac{37.944}{420}=0.0808\pm 0.0025 \\[2ex]
A_5 & \hat{b}_5=\dfrac{32.476}{420}=0.0771\pm 0.0025
\end{array}\right\} \tag{8.18}$$

ただし，元の単位に直してある．信頼限界は次式によった．

$$\sqrt{\frac{F\times V_e}{rSh^2}}=\sqrt{\frac{3.87\times 0.0003477}{12\times\dfrac{35}{2}\times 1^2}}=0.0025 \tag{8 19}$$

したがって，予測式は，たとえば品種 A_1 の場合，次のようになる．

$$A_1 \qquad \hat{\mu}=\overline{A_1C_k}+0.0658(B-36.5)\pm0.0406 \tag{8.20}$$

昭和41年の売上高の予測の場合には，$B=41$ とする．(8.20) 式の第2項を表 8.3 の A_1 のデータに代入する．A_2, ……, A_5 についても同様にして代入すると，表 8.4 が得られる．

表 8.4　昭和 41 年の売上高の推定値
(上段対数，下段真数（単位 億円))

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
A_1	1.419	1.424	1.589	1.496	1.503	1.532	1.663	1.420	1.451	1.622	1.663	1.975
	262	265	388	313	318	340	460	263	283	419	460	944
A_2	0.685	0.682	0.907	0.892	0.871	0.878	0.970	0.810	0.800	0.918	0.870	1.205
	48.4	48.1	80.7	78.0	74.3	75.5	93.3	64.6	63.1	82.8	74.1	160.3
A_3	0.926	0.946	1.071	1.073	0.976	0.961	1.114	1.026	0.951	0.990	0.975	1.353
	84.3	88.3	117.2	118.3	94.6	91.4	130.0	106.2	89.3	97.7	94.4	225.4
A_4	0.922	0.964	1.078	1.122	1.110	1.123	1.239	1.102	1.063	1.174	1.180	1.448
	84	92	120	132	129	133	173	126	116	149	151	281
A_5	0.990	0.987	1.064	1.038	1.041	1.041	1.424	1.245	1.004	1.085	1.086	1.705
	98	97	116	109	110	110	265	176	101	122	122	507

表 8.4 の上段のデータの信頼限界はすべて

$$\pm0.0406 \tag{8.21}$$

である．この真数は

$$10^{\pm0.0406}=(1.098)^{\pm1}\fallingdotseq\pm9.8\ (\%) \tag{8.22}$$

たとえば，A_1C_1 の 262 億円に対しては

$$262(1\pm0.098)=262\pm26\ (\text{億円}) \tag{8.23}$$

ということになる．

もし，B_q, B_c, B_{res} が非常に大きいときには，景気，不景気の変化や，はげしいシェアの変化があることを示している．その場合の信頼限界はBの1次項以外をすべて1次誤差分散として，他の誤差分散と区別することが望ましい．したがって，予測値 $\hat{\mu}$ の信頼限界は次のようになる．

$$\pm\sqrt{F(1,\ 4)\times V_1\times\frac{(B-36.5)^2}{1050}+F(1,\ 291)\times V_2\times\left[\frac{1}{6}+\frac{4(B-\bar{B})^2}{1050}+1\right]} \tag{8.24}$$

ここに

$$V_1=\frac{S_B-S_{B_l}}{4} \tag{8.25}$$

$$F(1,\ 4) = \text{分子の自由度 } 1,\ \text{分母は } V_1 \text{ の自由度 } 4 \text{ の} F \text{の } 5\% \text{ 値} \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned} 1050 &= (B \text{ の主効果の反復数 } 72) \times S \times h^2 \\ &= 60 \times \frac{35}{2} \times 1^2 \end{aligned} \tag{8.27}$$

$$V_2 = \frac{B\text{関係以外の誤差にプールした変動の和}}{\text{それらのプールした自由度の和}} \tag{8.28}$$

$$F(1,\ 291) = \text{分子の自由度 } 1,\ \text{分母の自由度 } 291 \text{ の} F\text{表の } 5\% \text{ 値} \tag{8.29}$$

$$\frac{4}{1050} = \frac{1}{210} - \frac{1}{1050} \tag{8.30}$$

このような計算は，時間的変化のBには将来の経済変動やシェア変化が含まれるが，その他の要因にはそのような効果は含まれないと考えられるときで，Bの効果と他の要因を区別した方がよい場合に用いられる．

8.2 タバコの味見試験

8.2.1 データと補助表

表 8.5 は 5 種類のタバコ

A_1＝しんせい，A_2＝いこい，A_3＝ハイライト，A_4＝ロングピース，A_5＝ エポック

の味見テストを 4 人の人間 R_1, R_2, R_3, R_4 で行なったデータである．ただし

B_1＝そのたばこをただちに吸った場合

B_2＝各人が平生吸っているタバコを吸った直後に吸った場合

味は，上，中，下の 3 クラスに分類した．またテストは 2 回ずつ行なった．

表 8.5 タバコの味見テストのデータ

A	B	R_1 上	R_1 中	R_1 下	R_2 上	R_2 中	R_2 下	R_3 上	R_3 中	R_3 下	R_4 上	R_4 中	R_4 下
1	1	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2
1	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2
2	1	0	0	2	0	0	2	0	2	0	0	0	2
2	2	0	0	2	0	0	2	0	2	0	0	0	2
3	1	2	0	0	1	1	0	2	0	0	0	1	1
3	2	1	1	0	0	2	0	2	0	0	1	1	0
4	1	2	0	0	2	0	0	2	0	0	0	0	2
4	2	1	1	0	2	0	0	2	0	0	1	1	0
5	1	1	1	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0
5	2	2	0	0	2	0	0	2	0	0	2	0	0

実際の調査としては，データが不足で，もちろん少なくとも 20 人位，それも男女別，30 才以下，31～50 才，51 才以上というように年令別にとり，各組合せから 5 人ずつ位の人を集めるべきである．ただし，その場合，A，B，性別，年令クラス別の四元配置になる．

まず，累積度数を作る．

Ⅰ組＝上

Ⅱ組＝上＋中

Ⅲ組＝上＋中＋下

表 8.6 累積度数にしたデータと補助表

A	B	R_1 Ⅰ	R_1 Ⅱ	R_2 Ⅰ	R_2 Ⅱ	R_3 Ⅰ	R_3 Ⅱ	R_4 Ⅰ	R_4 Ⅱ	計 Ⅰ	計 Ⅱ
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2
2	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2
3	1	2	2	1	2	2	2	0	1	5	7
3	2	1	2	0	2	2	2	1	2	4	8
4	1	2	2	2	2	2	2	0	0	6	6
4	2	1	2	2	2	2	2	1	2	6	8
5	1	1	2	0	2	2	2	2	2	5	8
5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	8	8
計		9	12	7	12	12	16	6	9	34	49

AR の二元表

A	R	Ⅰ	Ⅱ	A	R	Ⅰ	Ⅱ
1	1	0	0	4	1	3	4
1	2	0	0	4	2	4	4
1	3	0	0	4	3	4	4
1	4	0	0	4	4	1	2
2	1	0	0	5	1	3	4
2	2	0	0	5	2	2	4
2	3	0	4	5	3	4	4
2	4	0	0	5	4	4	4
3	1	3	4				
3	2	1	4				
3	3	4	4				
3	4	1	3				

BR の二元表

B	R	Ⅰ	Ⅱ
1	1	5	6
1	2	3	6
1	3	6	8
1	4	2	3
2	1	4	6
2	2	4	6
2	3	6	8
2	4	4	6

Bの一元表

B	Ⅰ	Ⅱ
1	16	23
2	18	26

Aの一元表

A	Ⅰ	Ⅱ
1	0	0
2	0	4
3	9	15
4	12	14
5	13	16

8.2.2 分散分析

I組，II組の重み w_1, w_2 を求める．

$$w_1=\frac{80^2}{34\times 46}=4.09$$

$$w_2=\frac{80^2}{49\times 31}=4.21$$

$$\mathrm{CF}=\frac{34^2\times 4.09+49^2\times 4.21}{80}=185.58 \qquad (\mathrm{f}=2)$$

$$S_A=\frac{(0^2+\cdots\cdots+13^2)\times 4.09+(0^2+\cdots\cdots+16^2)\times 4.21}{16}-\mathrm{CF}$$

$$=97.67 \qquad (\mathrm{f}=8) \qquad (8.31)$$

$$S_B=\frac{(16-18)^2\times 4.09+(23-26)^2\times 4.21}{80}=0.68 \qquad (\mathrm{f}=2) \qquad (8.32)$$

$$S_{A\times B}=\frac{(0^2+0^2+\cdots\cdots+8^2)\times 4.09+(0^2+0^2+\cdots\cdots+8^2)\times 4.21}{8}-\mathrm{CF}-S_A-S_B$$

$$=3.20 \qquad (\mathrm{f}=8) \qquad (8.33)$$

$$S_R=\frac{(9^2+7^2+12^2+6^2)\times 4.09+(12^2+12^2+16^2+9^2)\times 4.21}{10}-\mathrm{CF}$$

$$=9.51 \qquad (\mathrm{f}=6) \qquad (8.34)$$

$$S_{A\times R}=\frac{(0^2+\cdots\cdots+4^2)\times 4.09+(0^2+\cdots\cdots+4^2)\times 4.21}{4}-\mathrm{CF}-S_A-S_R$$

$$=22.94 \qquad (\mathrm{f}=24) \qquad (8.35)$$

$$S_{B\times R}=\frac{(5^2+3^2+\cdots\cdots+4^2)\times 4.09+(6^2+6^2+\cdots\cdots+6^2)\times 4.21}{10}-\mathrm{CF}-S_B-S_R$$

$$=2.45 \qquad (\mathrm{f}=6) \qquad (8.36)$$

$$S_{T_1}=\frac{1}{2}\{(0^2+0^2+\cdots\cdots+2^2)\times 4.09+(0^2+0^2+\cdots\cdots+2^2)\times 4.21\}-\mathrm{CF}$$

$$=145.62 \qquad (\mathrm{f}=78) \qquad (8.37)$$

$$S_T=160 \qquad (\mathrm{f}=158) \qquad (8.38)$$

$$S_{e_1}=S_{T_1}-(S_A+S_B+\cdots\cdots+S_{B\times R})$$

$$=9.18 \qquad (\mathrm{f}=24) \qquad (8.39)$$

$$S_{e_2}=S_T-S_{T_1}=14.38 \qquad (\mathrm{f}=80) \qquad (8.40)$$

したがって，分散分析表は表 8.7 のようになる．

e_1 が e_2 で有意なので，A, B, ……, $B\times R$ は e_1 でテストする．B, $A\times B$, $B\times R$ は e_1 にプールして，プールした誤差分散 (e_1) を作って，分散比 F_0 を求めると，A, R が

表 8.7 分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
A	8	97.67	12.21	31.4**	94.57	59.1
B	2	0.68	0.34	—		
$A\times B$	8	3.20	0.40	—		
R	6	9.51	1.58	4.07**	7.18	4.5
$A\times R$	24	22.94	0.96	2.47*	13.64	7.5
$B\times R$	6	2.45	0.45			
(e_1)	(40)	(15.51)	(0.388)		16.20	10.1
e_1	24	9.18	0.382	2.01**		
e_2	80	14.38	0.180		28.44	17.8
T	158	160.00			160.00	100.0

1% 有意，$A\times R$ は 5% 有意である．$A\times R$ に有意な差があることは，人によって好みの差があることを示しているが，その程度は寄与率で 7.5% でしかない．Aの主効果の大きいのに比較するとずっと小さいから，銘柄による好みの差はすべての人でほぼ一定していることになる．

Bの主効果や $A\times B$ が存在しないから，銘柄の優劣は前にタバコを吸ったかどうかとは関係がない．

8.2.3 推　定

A, R, $A\times R$ が何れも有意だから，AとRの二元表の推定をする．

A	R	I	II	上	中	下
1	1	0	0	0	0	4
1	2	0	0	0	0	4
1	3	0	0	0	0	4
1	4	0	0	0	0	4
2	1	0	0	0	0	4
2	2	0	0	0	0	4
2	3	0	4	0	4	0
2	4	0	0	0	0	4
3	1	3	4	3	1	0
3	2	1	4	1	3	0
3	3	4	4	4	0	0
3	4	1	3	1	2	1
4	1	3	4	3	1	0
4	2	4	4	4	0	0
4	3	4	4	4	0	0
4	4	1	2	1	1	2
5	1	3	4	3	1	0
5	2	2	4	2	2	0
5	3	4	4	4	0	0
5	4	4	4	4	0	0

この結果は，A_1, A_2 がまずいタバコであり，A_4, A_5 がうまいタバコであり，A_3 がその中間ということになる．人による差が若干あるが，大勢に差はないことを示している．実際にはグラフを画くとよい．

8.3 後分類で繰返えし数が不揃いの場合，頭痛薬のテスト

8.3.1 問 題（仮想例）

ある頭痛薬 A_2 の効果を調べるのに，今までの頭痛薬 A_1 を対照として，病院に来る頭痛患者を，来る順に A_1 か A_2 をランダムに割り当てた．最初に A_1 が当たればその次の患者に A_2 を，第3番目の患者に改めて，A_1 か A_2 かをランダムに与えるようにした．患者の性，年令，頭痛の程度，他の病気などが効果に関係あるかも知れないので，それらをカルテに記録しておいた．ここでは，説明を短くするために，性と年令のみを考慮した解析法を示すが，他のファクターがあっても，まったく同様である． データは，各患者について，3時間後に頭痛がなおっていれば 1，なおっていなければ 0 とした．これも，完全になおったときには良，ややなおったときには中，変わらないときには不良として，8章の累積法の計算をしたほうがもっとよいし，時間についても，1時間後，2時間後，3時間後，5時間後のデータをとったほうがよい．そのようにしても因子が1つ増して計算の手間が増すだけである．

データを A_1, A_2 ; B_1（男），B_2（女）; C_1（年令 30 才以下），C_2（31～50才），C_3（51才以上）として分類したデータは表8.8のようであった．患者の総数は結局100人であった．上段はなおった人間の数，下段は患者数である．

表 8.8 頭痛薬の実験データ

A_1

	C_1	C_2	C_3	
B_1	6/8	13/15	4/7	30
B_2	2/4	6/11	2/5	20
				50

A_2

	C_1	C_2	C_3	
B_1	9/10	10/12	10/12	34
B_2	0/0	7/10	4/6	16
				50

表 8.8 のようなデータの場合，**どの桝目にも一応の数があるならば，治癒率になおしてから，あとは 5.5 節の方法に従えばよい．** 表 8.8 の $A_2B_2C_1$ の例のように，0人のところがあるときには，そうはゆかない．その場合には，他の組合せのところは率になおすが，$A_2B_2C_1$ のところは欠測と考えるのである．$A_2B_2C_1$ 以外を率になおしたデータは表 8.9 のようになる．

表 8.9 率 (%) にしたデータ

A_1

	C_1	C_2	C_3
B_1	75	87	57
B_2	50	55	40

A_2

	C_1	C_2	C_3
B_1	90	83	83
B_2	x	70	67

欠測値の推定法を用いて，xの代用値を求める．三元配置の場合には，次の公式による．

（1） **未知数が1個の場合** $A_iB_jC_k$ で欠測，A, B, C を a, b, c 水準として

$$x=\frac{-a(A_i)-b(B_j)-c(C_k)+ab(A_iB_j)+ac(A_iC_k)+bc(B_jC_k)+(T)}{(a-1)(b-1)(c-1)} \tag{8.41}$$

ここに，(A_i), (A_iB_j), (T) 等は，A_i の計（欠測を含まない），A_iB_j の計（欠測を含まない），合計（欠測を含まない）等である．x の値を代入して，あとは，全変動と S の自由度を1減らすだけである．

（2） **未知数が2個以上のとき** たとえば，未知数が3個のときには，それを x, y, z とする．y, z にあった観測値の平均値を入れ，xのみを欠測とし，(8.41) 式を用いて，xの第1近似値を出す．次に，zはその平均値，xは第1近似値を用いて，yに (8.41) 式を適用して，yの第1近似値を出す．次に，zの第1近似値を出す．次に，y, z の第1近似値を入れ，xの第2近似値を出すというように，順に収束するまでやる．実際には，第2近似値までで十分である．

この問題の場合，欠測値は1つだから，(8.41) 式を用いる．

$$(A_2)=90+83+83+70+67=393$$

$$(B_2)=50+55+40+70+67=282$$

$$(C_1)=75+50+90=215$$

$$(A_2B_2)=70+67=137$$

$$(A_2C_1)=90$$

$$(B_2C_1)=50$$

$$(T)=757$$

$$x=\frac{-2\times393-2\times282-3\times215+4\times137+6\times90+6\times50+757}{(2-1)(2-1)(3-1)}$$

$$=75 \tag{8.42}$$

これを表 8.9 に代入して，仮の平均 70 を引いて，表 8.10 の補助表を得る．

表 8.10 補 助 表

A_1

	C_1	C_2	C_3	計
B_1	5	17	−13	9
B_2	−20	−15	−30	−65
計	−15	2	−43	−56

A_2

	C_1	C_2	C_3	計
B_1	20	13	13	46
B_2	(5)	0	−3	2
計	25	13	10	48

A_1+A_2

	C_1	C_2	C_3	計
B_1	25	30	0	55
B_2	−15	−15	−33	−63
計	10	15	−33	−8

8.3.2 分 散 分 析

あとは，前節とまったく同様に行なう．

$$\mathrm{CF}=\frac{(-8)^2}{12}=5$$

$$S_A=\frac{(-56-48)^2}{12}=901 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (8.43)$$

$$S_B=\frac{(55+63)^2}{12}=1160 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (8.44)$$

$$S_C=\frac{10^2+15^2+(-33)^2}{4}-\mathrm{CF}=348 \qquad (\mathrm{f}=2) \qquad (8.45)$$

$$S_{A\times B}=\frac{(9+2+65-46)^2}{12}=75 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (8.46)$$

$$S_{A\times C}=\frac{(-15)^2+2^2+(-43)^2+25^2+13^2+10^2}{2}-\mathrm{CF}-S_A-S_C=231$$

$$(\mathrm{f}=2) \qquad (8.47)$$

$$S_{B\times C}=\frac{25^2+30^2+0^2+(-15)^2+(-15)^2+(-33)^2}{2}-\mathrm{CF}-S_B-S_C=18$$

$$(\mathrm{f}=2) \qquad (8.48)$$

$$S_{T_1}=5^2+17^2+\cdots\cdots+0^2+(-3)^2-\mathrm{CF}=2775 \qquad (\mathrm{f}=11) \qquad (8.49)$$

$$S_{e_1}=S_{T_1}-(S_A+S_B+\cdots\cdots+S_{B\times C}^{*})=32 \qquad (\mathrm{f}=1) \qquad (8.50)$$

次に，7.1 節で示したように，繰返えし間誤差変動 S_{e_2} を求める．繰返えし間誤差変動は，最初の表 8.8 において，A, B, C の水準組合せ毎に誤差変動を求めて和を作ることになる．

表 8.11　組合せ毎の誤差変動（$A_2B_2C_1$ は除く）

$A_1B_1C_1$	$\frac{6}{8}$	$8\times\frac{6}{8}\left(1-\frac{6}{8}\right)=6-\frac{6^2}{8}$
$A_1B_1C_2$	$\frac{13}{15}$	$15\times\frac{13}{15}\left(1-\frac{13}{15}\right)=13-\frac{13^2}{15}$
⋮		⋮
$A_2B_2C_3$	$\frac{4}{6}$	$6\times\frac{4}{6}\left(1-\frac{4}{6}\right)=4-\frac{4^2}{6}$

したがって，このような変動の和 S_e' は次のようになる．

$$S_e'=(6+13+\cdots\cdots+4)-\left(\frac{6^2}{8}+\frac{13^2}{15}+\cdots\cdots+\frac{4^2}{6}\right) \tag{8.51}$$

$$=73-51.04=21.96 \tag{8.52}$$

この自由度は，もちろん

$$f=(8-1)+(15-1)+\cdots\cdots+(6-1)=89 \tag{8.53}$$

である．

ところで，(8.52) 式の S_e' をその2次誤差変動とすることはできない．7.1 節に述べたように，S_e' を調和平均 $\bar{r}$ で割ること，またこの場合には率を 100 倍して百分率にしているから，変動は 100^2 倍しなければならない．

$$S_{e_2}=\frac{100^2}{\bar{r}}S_e' \tag{8.54}$$

ところで

$$\frac{1}{\bar{r}}=\frac{1}{11}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots+\frac{1}{6}\right)=0.128 \tag{8.55}$$

したがって

$$S_{e_2}=10000\times0.128\times21.96$$

$$=28120 \qquad (f=89) \tag{8.56}$$

もし，A, B, C の水準組合せ数が十分多いときには，または，S_{e_1} の自由度が十分大きい（10 以上）ときには，S_{e_2} の計算は省略してもよい．しかし，いまのように，S_{e_1} の自由度が1のような場合には，S_{e_2} の計算をやったほうがずっと有利になる．したがって，分散分析表は，表 8.12 のようになる．

分散分析の結果は，B の主効果のみが有意で，薬の効果 A は認められない．かなり精度が悪い実験である．この実験の場合，試料数がやや不足であるが，次のようにすれば，もっと精度が高まったと思われる．

（1）　患者の容体として，診断時の頭痛の程度で 2〜3 組に分類，他の病気のあるなしで2組に分類する．しかし，この方法は，欠測を多数生じさせるから，必ずしも良い方法

表 8.12 分散分析表

要因	f	S	V	F_0
A	1	901	901	3.07
B	1	1 160	1 160	3.94*
C	2	348	174	
$A \times B$	1	75	75	
$A \times C$	2	231	116	
$B \times C$	2	18	9	
e_1	1	32	32	
e_2	89	28 120	316	
T	99	30 895		
(e)	(97)	(28 834)	(296)	

ではなく，むしろその場合には，有意でなかったCの分類をやめて，Bと容体で再分類する．

（2） 投薬後の3時間目のみでなく，2時間目，4時間目，6時間目というように，時間についても3水準をとり，A, B, C と別の因子として，四元配置の計算（ただし，2因子交互作用まででよい）をすべきであった．そうすれば，もっとはっきり効果がわかったことと思われる．

（3） 投薬後3時間だけのデータでも，その症状を

Ⅰ組＝完全に回復

Ⅱ組＝ほぼ回復

Ⅲ組＝少しは良くなった

Ⅳ組＝変わらない

と4組に分類して，6章の累積法を用いれば，効果はもっとはっきりわかったことと思われる．

8.3.3 推　　定

標示因子Bの効果を推定しても価値が少ないが，ここでは有意でなかったがAも入れて，その推定方法と信頼限界を示す．

$$\left.\begin{aligned}\bar{A}_1&=70+\frac{-56}{6}=60.7\pm13.9\\ \bar{A}_2&=70+\frac{48}{6}=78.0\pm13.9\end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{B}_1&=70+\frac{55}{6}=79.2\pm13.9\\ \bar{B}_2&=70+\frac{-63}{6}=59.5\pm13.9\end{aligned}\right\} \tag{8.58}$$

信頼限界は，有効反復数を6として，次の公式を用いるのである．

$$\pm\sqrt{F\times V_e\times\frac{1}{6}}=\pm\sqrt{3.94\times296\times\frac{1}{6}}=\pm13.9 \tag{8.59}$$

このことは，A_1 と A_2 でその効果の差について，本当は 40% も A_2 が良いかも知れないし，数% A_1 のほうが良いかも知れないことを示している．A_1 と A_2 の平均の差には

$$\pm13.9\times\sqrt{2}=\pm19.6 \tag{8.60}$$

の誤差が信頼度 95% であることになる．B_1 と B_2 の差はこれより大きいから，危険率5%で有意差があったことになる．

また，B_1, B_2 毎に A_2 を用いたときの頭痛のよくなる割合を推定したいときには，次の式による．

$$\hat{\mu}_1=\bar{B}_1+\bar{A}_2-\bar{T}\pm\sqrt{F\times V_e\times\frac{1}{4}} \tag{8.61}$$

$$\hat{\mu}_2=\bar{B}_2+\bar{A}_2-\bar{T}\pm\sqrt{F\times V_e\times\frac{1}{4}} \tag{8.62}$$

計算は読者に任せよう．

誤差分散 V_e に $\hat{\mu}_1(1-\hat{\mu}_1)$ を掛けて修正した方がより良いが，平均値の差が小さいので掛けなかった．もっと大きいときには，修正した誤差分散で信頼限界を作るのがよい．

演 習 問 題

問 (8.1)　3社 A_1, A_2, A_3 の歯みがきについて，B_1=チューブ，B_2=半ねりの製品の清涼感の良し悪しを5人，R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 で調べたデータは次のようであった．繰返えし数は2回である．

		R_1			R_2			R_3			R_4			R_5		
A	B	上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下	上	中	下
1	1	0	2	0	0	1	1	0	0	2	0	1	1	0	1	1
1	2	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	2	0
2	1	0	2	0	2	0	0	1	1	0	1	1	0	2	0	0
2	2	1	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0	2	0	1	1
3	1	0	0	2	0	2	0	0	1	1	0	2	0	0	0	2
3	2	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	2	0	0	1	1

分散分析を行ない，結論を示せ．

問 (8.2)　3社 $A_1=N$, $A_2=M$, $A_3=U$ 社のインスタントコーヒーについて，ミルク

の種類Bを B_1=クリープ, B_2=ニド, B_3=ブライトの3種類に変えて, 8人の人間 R_1, R_2, ……, R_8 で1回ずつテストしたデータは次のようであった.

A	B	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
1	1	中	上	中	中	上	中	下	中
1	2	中	下	下	中	中	下	下	中
1	3	上	下	上	上	上	上	中	中
2	1	下	中	中	中	中	中	中	中
2	2	下	下	中	下	中	中	下	中
2	3	中	中	上	中	中	上	中	中
3	1	下	上	中	下	下	中	上	中
3	2	下	中	下	中	下	下	中	中
3	3	中	中	上	中	下	下	中	下

分散分析をし, 有意な要因を推定せよ. (ただし, $w_1=7.20$, $w_2=4.84$ とせよ. $S_A=7.0$, $S_B=17.3$, $S_R=8.0$, $S_{A\times B}=7.6$, $S_{A\times R}=34.3$, $S_{B\times R}=36.8$, $S_e=33.1$ である.)

問 (8.3) 次のデータは, $A_1=6$ 才, $A_2=9$ 才, $A_3=12$ 才, $A_4=15$ 才, $A_5=18$ 才, $A_6=21$ 才の, 男 (B_1), 女 (B_2) 別平均身長のデータである. 学校保健統計調査報告書 (文部省) 昭和 39 年による. ただし, C_1=昭和 31 年, $C_2=33$ 年, $C_3=35$ 年, $C_4=37$ 年, $C_5=39$ 年である.

B_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
C_1	110.6	125.4	139.5	159.2	165.3	165.9
C_2	110.9	126.1	140.8	160.3	165.6	166.1
C_3	111.7	126.8	141.9	161.2	166.3	166.5
C_4	112.4	127.6	142.9	162.2	166.7	167.0
C_5	113.2	128.5	144.1	163.2	167.3	167.4

B_2	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
C_1	109.6	124.7	141.6	151.9	154.3	154.6
C_2	109.9	125.5	142.8	152.3	154.4	154.6
C_3	110.6	126.3	144.0	152.7	154.7	154.7
C_4	111.4	127.1	144.9	153.3	154.8	155.1
C_5	112.2	128.0	146.1	153.9	155.3	155.3

(1) 男と女によって, 身長の年度に対する伸び率が異なるといえるか. また, $A\times C_l$ はどうか.

(2) $C_l\times B$, $C_l\times A$ を考えた分散分析をし, 結論を出せ. また, このままの伸びがつ

づいたときの昭和 50 年度の年令別身長の予測をせよ．

注

(8.1)　交互作用について　　A と B の二元配置法について，交互作用がないものとして

$$y_{ij}=m+a_i+b_i+\varepsilon_{ij} \tag{*5.1}$$

ここに ε_{ij} は平均 0，分散 σ^2 の正規分布に従う独立な確率変数として，理論を構成する統計の本が少なくないが，交互作用がないということは，実際にはあり得ない．また，誤差について母平均 0，分散 σ^2 の正規分布すなわち $N(0, \sigma^2)$ と仮定するのも実際的ではなく，$N(0, \sigma^2)$ であることがわかっていることはない．すなわち，y_{ij} を $m+a_i+b_j$ で表現しようということは，研究担当者の考えであり，そのような表現方法の誤差の大きさの合理的な評価の計算法を提供すべきである．経験によれば交互作用は小さいことが多いとか，正規分布で近似できることが多いとかいういい方で研究者をごまかそうとするのは，まったく小児病の症状である．物理学や化学における公式も，分子間の相互作用とか周辺効果を省略して誘導したものが少なくない．それは，研究者のまったく自由である．しかし，そのような省略に伴う高次の項がないかどうかを調べることではない．高次の項はあるに決まっているのだが，その大きさの評価が大切なのである．公式から得られた値と実際の観測値のくい違いの大きさをその残差 2 乗和で評価しようというわけである．

実験データの場合でも，交互作用はあるに決まっているのだが，その大きさの評価ができていれば，結論を誤ることはないのである．

9. 共分散分析

本章においては，A, B などの直交した因子の他に，3章に示したような回帰変数xが共存する場合のデータ解析法を示す．実際問題の非常に多くは本章の場合になる．補助変数が多いときには，シミュレーションによる回帰分析（12 章）が必要になるだろう．

9.1 プールの入場者数の解析

ある年における7月下旬から，8月中旬にかけての，週別，曜日別の不快指数xと，あるプールの入場者数yは表9.1のようであった．ただし，火曜日は休日である．

表 9.1 入場者数のデータ（上段は不快指数，下段は入場者数）

	B_1(月)	B_2(水)	B_3(木)	B_4(金)	B_5(土)	B_6(日)
A_1(第1週)	70 227	78 508	75 539	79 459	78 500	80 698
A_2(第2週)	75 356	72 328	84 555	70 317	84 627	82 766
A_3(第3週)	83 560	82 577	70 228	78 483	72 399	74 634

この場合，不快指数xは，**補助因子**と呼ばれている．3章の回帰分析のところで述べたように，xは他の因子と直交していない．県別，年別の県民所得と，ある製品の1人当りの普及率とか，煙草消費量と肺ガンによる死亡率とかを解析したいときには，県民所得とか煙草消費量は補助因子xである．年別，月別，支店別の売場面積を x，単位面積当りの従業員数を z，単位面積当りの衣料品の売上金額をyとすれば，xとzは何れも補助因子である．

補助因子が1個か2個までなら，本章の共分散分析が用いられるが，もっと多いときには，シミュレーションによる計算実験を用いないと，多重共線性であやしい結果が得られるだろう．

補助因子が1個，目的変数が1個の場合は，yに関する変動の計算のほかに，xに対する変動と，xとyの共変動を計算する．計算の手間を少なくするために，xから仮平均75，yから仮平均 500(人）を引いた加工データを作る．コンピューターを用いるなら，加工

データにしない方がよい.

表 9.2 加工データ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	計
A_1	x	−5	3	0	4	3	5	10
	y	−273	8	39	−41	0	198	−69
A_2	x	0	−3	9	−5	9	7	17
	y	−144	−172	55	−183	127	266	−51
A_3	x	8	7	−5	3	−3	−1	9
	y	60	77	−272	−17	−101	134	−119
計	x	3	7	4	2	9	11	36
	y	−357	−87	−178	−241	26	598	−239

9.1.1 変動, 共変動の計算

y に対する変動を (yy), x に対する変動を (xx), x と y の共変動を (xy) で示す. 共変動は x と y の 2 乗の代りに積がくる. したがって, 共変動はマイナスになることもある.

$$\mathrm{CF}(xx)=\frac{36^2}{18}=72 \tag{9.1}$$

$$\mathrm{CF}(xy)=\frac{36\times(-239)}{18}=-478 \tag{9.2}$$

$$\mathrm{CF}(yy)=\frac{(-239)^2}{18}=3\,173 \tag{9.3}$$

$$S_T(xx)=(-5)^2+3^2+\cdots\cdots+(-1)^2-\mathrm{CF}(xx)=414 \tag{9.4}$$

$$S_T(xy)=(-5)\times(-273)+3\times8+\cdots\cdots+(-1)\times134-\mathrm{CF}(xy)=399\,504 \tag{9.5}$$

$$S_T(yy)=(-273)^2+8^2+\cdots\cdots+134^2-\mathrm{CF}(yy)=3\,173 \tag{9.6}$$

$$S_A(xx)=\frac{10^2+17^2+9^2}{6}-72=6 \tag{9.7}$$

$$S_A(xy)=\frac{10\times(-69)+17\times(-51)+9\times(-119)}{6}-(-478)=40 \tag{9.8}$$

$$S_A(yy)=\frac{(-69)^2+(-51)^2+(-119)^2}{6}-3\,173=414 \tag{9.9}$$

$$S_B(xx)=\frac{3^2+7^2+\cdots\cdots+11^2}{3}-72=21 \tag{9.10}$$

$$S_B(xy)=\frac{3\times(-357)+7\times(-87)+\cdots\cdots+11\times598}{3}-(-478)=1\,791 \tag{9.11}$$

$$S_B(yy)=\frac{(-357)^2+(-87)^2+\cdots\cdots+598^2}{3}-3\,173=191\,181 \tag{9.12}$$

$$S_e(xx)=S_T(xx)-S_A(xx)-S_B(xx)=387 \tag{9.13}$$

$$S_e(xy)=S_T(xy)-S_A(xy)-S_B(xy)=8\,290 \tag{9.14}$$

$$S_e(yy)=S_T(yy)-S_A(yy)-S_B(yy)=207\,909 \tag{9.15}$$

(9.1)〜(9.15) 式の計算は，目的変数 y に関する変動の計算式さえわかれば，x に対する変動は y の代りに x を用いたものであり，x と y の共変動は y の2乗のところに，その y の値に対応する x の値との積を持ってくるだけでよい．どんな複雑な配置のデータでも全く同じようにして変動の計算ができる．これらの計算結果は，表9.3のように変動，共変動の表としてまとめられる．

表 9.3 変動，共変動の表

要因	f	(xx)	(xy)	(yy)
A	2	6	40	414
B	5	21	1 791	191 181
e	10	387	8 290	207 909
T	17	414	10 121	399 504
$A+e$	12	393	8 330	208 323
$B+e$	15	408	10 081	399 090

9.1.2 分散分析表

あとで，計算に用いるので，各要因と誤差変動の和も求めておく．しからば，まず x が単位量（この場合，不快指数で1ということになる）変化したとき，y がどれだけ変化するかは，次の (9.16) 式で求められる．その推定値を $\hat{b}$ とすれば

$$\hat{b}=\frac{S_e(xy)}{S_e(xx)}=\frac{8\,290}{387}$$

$$=21.2\pm5.96 \tag{9.16}$$

この結果は，不快指数が1だけ増加するとプールの入場者数が約 21 人増すことを意味している．入場者人員を，時期（この場合，最も暑い3週間であるから，その間の差はないかも知れない）と曜日と不快指数で表現しようというわけであるが，不快指数 x は，秩序正しく変化しているわけではないので，その効果は，$S_A(yy)$，$S_B(yy)$，$S_e(yy)$ の何れにも混入している．しかし，$S_e(yy)$ には，x の効果と誤差しか入っていないので，$S_e(yy)$ は，次のように分解することができる．$S_e(yy)$ の中に含まれている不快指数の効果は，結局 (9.16) 式の $\hat{b}$（これは y の線形式である）の変動である．その値は，線形式の変動の求め方から

$$S_x=\frac{S_e(xy)^2}{S_e(xx)}=\frac{8\,330^2}{393}$$

$$=177\,582 \qquad (\mathrm{f}=1) \tag{9.17}$$

したがって，$S_e(yy)$ から (9.17) 式の値を引いて，A, B, x の効果を除いた誤差変動 S_e は次式で求められる．

$$S_e = S_e(yy) - S_x$$

$$= 207\,909 - 177\,582 = 30\,327 \qquad (\mathrm{f}=9) \qquad (9.18)$$

$S_e(yy)$ の自由度は 10 だが，S_δ の自由度が 1 であるので，それを引いて S_e の自由度は (10−1)=9 となった．誤差変動以外の要因の場合，すなわち $S_A(yy)$ や $S_B(yy)$ の中から，xによる部分を除く（ただし，xと A, xと B は直交していないので，xの効果と共にAやBの効果も一部交絡されて取り除かれてしまうのだが）には，次の (9.19), (9.20) 式のような計算を必要とする．

$$S_A = S_A(yy) + S_e(yy) - \frac{[S_A(xy) + S_e(xy)]^2}{S_A(xx) + S_e(xx)} - S_e$$

$$= 208\,323 - \frac{8\,330^2}{293} - 30\,327$$

$$= 1\,434 \qquad (\mathrm{f}=2+10-1-9=2) \qquad (9.19)$$

$$S_B = S_{B+e}(yy) - \frac{[S_{B+e}(xy)]^2}{S_{B+e}(xx)} - S_e$$

$$= 399\,090 - \frac{10\,081^2}{408} - 30\,327$$

$$= 119\,678 \qquad (\mathrm{f}=6) \qquad (9.20)$$

誤差変動の自由度は 1 だけ減ったが，要因の自由度は不変である．全変動 $S_T(yy)$ から，S_A, S_B, S_x を引いても，誤差変動 S_e にならない．その理由は，x と A, x と B が直交していないためである．要因が直交していないことによって生じた変動の部分は交絡部分と呼ばれ，本書では**交絡項**と呼び，記号では (x, A, B) または res で示そう．

したがって，分散分析表は，表 9.4 のようになる．

表 9.4 分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	ρ(%)
A (週)	2	1 434	717	—	—	
B (曜日)	5	119 678	23 936	7.10**	105 243	26.3
x (回帰)	1	177 582	177 582	52.69**	174 695	43.7
(x, A, B)(交絡項)	(0)	70 483			70 483	17.6
e	9	30 327	3 370			
T	17	399 504				
(プールした e)	(11)	(31 761)	(2 887)		49 083	12.4

交絡項には，誤差分散が入っていないので，その値がそのまま純変動の推定値になる．

9.1.3 整理した分散分析表

A の効果は存在しないか，存在しても小さいと考えられるから，因子 A がないとし，二元のデータを曜日 B と不快指数 x のみを要因と考えて計算しなおすこともできる．その場合，S_A は誤差に入るから，分散分析表は，表 9.5 のようになる．

表 9.5 整理した分散分析表

要因	f	(xx)	(xy)	(yy)
B	5	21	1 791	191 181
e	12	393	8 330	208 323
T	17	414	10 121	399 504
$B+e$	17	414	10 121	399 504

$$S_e=208\,323-\frac{8\,330^2}{393}$$

$$=31\,761 \qquad (f=11) \qquad (9.21)$$

$$S_B=399\,504-\frac{10\,121^2}{414}-S_e$$

$$=120\,317 \qquad (f=5) \qquad (9.22)$$

$$S_x=\frac{8\,330^2}{393}$$

$$=176\,562 \qquad (f=1) \qquad (9.23)$$

$$S_{\mathrm{res}}=S_T-S_B-S_x-S_e$$

$$=399\,504-120\,317-176\,562-31\,761$$

$$=70\,864 \qquad (f=0) \qquad (9.24)$$

したがって，要因分析表は表 9.6 のようになる．

表 9.6 整理した分散分析表

要因	f	S	V	F_0	$\rho(\%)$
B	5	120 317	24 063	8.3*	26.5
x	1	176 562	176 562	61.2**	43.5
res	0	70 864	—		17.7
e	11	31 761	2 887		12.3
T	17	399 504			100.0

9.1.4 推　　定

要因効果の推定は，回帰係数の推定，補助変数 x の影響を除いた要因効果の推定，有意要因の水準組合せと任意の与えられた x の値に対する推定の順に行なわれる．

$$\hat{b}=\frac{S_e(xy)}{S_e(xx)}\pm\sqrt{\frac{F\times V_e}{S_e(xx)}}$$
$$=\frac{8\,330}{393}\pm\sqrt{\frac{4.84\times 2\,887}{393}}$$
$$=21.2\pm 6.0 \tag{9.25}$$

B_1, B_2, ……, B_6 で x の値が異なっているから，不快指数 x を特定の値（普通，平均の値 $\bar{x}$）に揃えたときの曜日の効果を求める必要がある．$\bar{x}=75+\frac{36}{18}=77.0$ である．

$$\left.\begin{aligned}
\bar{B}_1&=500+\frac{-357}{3}-21.2\left(75+\frac{3}{3}-77.0\right)=402\pm 68\\
\bar{B}_2&=500+\frac{-87}{3}-21.2\left(75+\frac{7}{3}-77.0\right)=465\pm 68\\
\bar{B}_3&=500+\frac{-178}{3}-21.2\left(75+\frac{4}{3}-77.0\right)=455\pm 68\\
\bar{B}_4&=500+\frac{-241}{3}-21.2\left(75+\frac{2}{3}-77.0\right)=448\pm 69\\
\bar{B}_5&=500+\frac{26}{3}-21.2\left(75+\frac{9}{3}-77.0\right)=488\pm 68\\
\bar{B}_6&=500+\frac{598}{3}-21.2\left(75+\frac{11}{3}-77.0\right)=661\pm 69
\end{aligned}\right\} \tag{9.26}$$

信頼限界は，たとえば $\bar{B}_1$ に対しては，係数の2乗和が $\left[\frac{1}{3}+\frac{(76-77)^2}{S_e(xx)}\right]$ になることを用いて

$$\pm\sqrt{F\times V_e\left\{\frac{1}{3}+\frac{(76.0-77.0)^2}{S_e(xx)}\right\}}$$
$$=\pm\sqrt{4.84\times 2\,887\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{393}\right\}}$$
$$=\pm 68 \tag{9.27}$$

次に，不快指数が 70, 75, 80, 85 と変化したときの入場者数の予測は次のようになる．紙数の都合上，B_1 と B_6 についてのみ行なう．

$$\begin{array}{lll}
x & B_1\text{ の場合} & B_6\text{ の場合}\\
70 & 402+21.2(70-77)=254\pm 140 & 661+21.2(70-77)=513\pm 146\\
75 & 402+21.2(75-77)=360\pm 135 & 661+21.2(75-77)=419\pm 137\\
80 & 402+21.2(80-77)=466\pm 137 & 661+21.2(80-77)=725\pm 136\\
85 & 402+21.2(85-77)=572\pm 145 & 661+21.2(85-77)=831\pm 141
\end{array} \tag{9.28}$$

信頼限界は，次のようにして求めたものである．B_1 の場合 $\bar{B}_1(x)$ を B_1 の x の平均として

$$\pm\sqrt{F\times V_e\left\{\frac{1}{3}+\frac{[x-\bar{B}_1(x)]^2}{S_e(xx)}+1\right\}}$$

$$=\pm\sqrt{4.84\times 2887\left\{\frac{1}{3}+\frac{(70-76.0)^2}{393}+1\right\}}$$

$$=\pm 140 \tag{9.29}$$

この場合，実際の入場者人員を予測するには，不快指数 x の予測が先行する．不快指数の予報の精度を更に考慮する必要があるが，それについては回帰式のところを参照されたい．

9.2 マーケッテングの例

9.2.1 補助因子のあるデータ

企業の大切な仕事の一つにマーケッテングの合理化がある．マーケッテングは，最初の一個をいかにして買わせるかということである．ある家庭用品について，次のようなマーケッテング実験が行なわれた．

A 値引なし，あり　　A_1=値引なし，A_2=値引あり

B マネキン販売なし，あり　　B_1=マネキン販売なし，B_2=マネキン販売あり

この場合，次の3通りの組合せだけを実験した．

A_1B_1=マネキン販売も値引きもしない．

A_2B_1=マネキン販売はしないけれど，値引きをした．

A_1B_2=値引きをしないけれど，月曜日の1日だけマネキン販売をした．

ほぼ同じ規模の3つのスーパーを使って，A_1B_1，A_2B_1，A_1B_2 の条件の下でテスト販売の実験を1週間つづけたときの売上個数のデータは，表9.7のようであった．ただし，マ

表 9.7 テスト販売のデータ
（上段は x，下段は売上個数）

	C_1(月)	C_2(火)	C_3(水)	C_4(木)	C_5(金)	C_6(土)	C_7(日)	計
A_1B_1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	3	1	9
A_2B_1	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	3	2	2	2	2	1	16
A_1B_2	1	0	0	0	0	0	0	1
	52	6	6	4	5	5	5	83
計	1	0	0	0	0	0	0	1
	57	10	9	7	8	10	7	108

ネキン販売をしたときには，その日だけ一般に多く売れるので，その効果を見るために，補助変数として，次のxをとった．

$x=0$（マネキン販売がない日），$x=1$（マネキンが販売した日）

このような補助変数は，特定な催しもののあるなしの効果などの場合に用いられる．

A_1B_2 の条件の販売では，最初の販売日である月曜日にマネキンが販売し，52個の売上げがあった．火曜日以降はマネキンはいないが，月曜日のアフターエフェクトで売れていると考えられる．したがって，マネキン販売の効果をマネキンが販売した日の効果（補助変数xの効果）と残りの効果に分けるために，補助変数xを用いたのである．アフターエフェクトについては，場合によっては指数関数を用いて，そのダンピング係数を推定することもある．しかしそのような計算法については別の機会にする．

9.2.2 分散分析

$$S_m(xx)=\frac{1^2}{21}=0.048 \tag{9.30}$$

$$S_m(xy)=\frac{1\times 108}{21}=5.143 \tag{9.31}$$

$$S_m(yy)=\frac{108^2}{21}=555.43 \tag{9.32}$$

$$\begin{aligned}S_{AB}(xx)&=\frac{0^2+0^2+1^2}{7}-S_m(xx)\\&=0.095\end{aligned} \tag{9.33}$$

$$\begin{aligned}S_{AB}(xy)&=\frac{0\times 9+0\times 16+1\times 83}{7}-S_m(xy)\\&=6.714\end{aligned} \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned}S_{AB}(yy)&=\frac{9^2+16^2+83^2}{7}-S_m(yy)\\&=476.85\end{aligned} \tag{9.35}$$

$$\begin{aligned}S_C(xx)&=\frac{1^2+0^2+\cdots\cdots+0^2}{3}-S_m(xx)\\&=0.286\end{aligned} \tag{9.36}$$

$$\begin{aligned}S_C(xy)&=\frac{1\times 57+0\times 10+\cdots\cdots+0\times 7}{3}-S_m(xy)\\&=13.857\end{aligned} \tag{9.37}$$

$$\begin{aligned}S_C(yy)&=\frac{57^2+10^2+\cdots\cdots+7^2}{3}-S_m(yy)\\&=675.24\end{aligned} \tag{9.38}$$

$$S_T(xx)=0^2+0^2+\cdots\cdots+0^2-S_m(xx)$$
$$=0.952 \tag{9.39}$$
$$S_T(xy)=0\times1+0\times1+\cdots\cdots+0\times5-S_m(xy)$$
$$=46.857 \tag{9.40}$$
$$S_T(yy)=1^2+1^2+\cdots\cdots+5^2-S_m(yy)$$
$$=2\,368.57 \tag{9.41}$$
$$S_e(xx)=S_T(xx)-S_{AB}(xx)-S_C(xx)$$
$$=0.571 \tag{9.42}$$
$$S_e(xy)=S_T(xy)-S_{AB}(xy)-S_C(xy)$$
$$=26.286 \tag{9.43}$$
$$S_e(yy)=S_T(yy)-S_{AB}(yy)-S_C(yy)$$
$$=1216.48 \tag{9.44}$$

この場合，A の効果と B の効果を別々に求めたいことになるが，両効果は直交しないので，そのような計算は分散分析表の欄外で行なうのが普通である．$A_1B_1(x)$，$A_1B_1(y)$ は A_1B_1 に対する x や y の合計を示す記号として，次のようにして求める．

$$S_A(xx)=\frac{[A_1B_1(x)-A_2B_1(x)]^2}{14}$$
$$=\frac{(0-0)^2}{14}$$
$$=0 \tag{9.45}$$
$$S_A(xy)=\frac{[A_1B_1(x)-A_2B_1(x)][A_1B_1(y)-A_2B_1(y)]}{14}$$
$$=\frac{(0-0)(9-16)}{14}$$
$$=0 \tag{9.46}$$
$$S_A(yy)=\frac{[A_1B_1(y)-A_2B_1(y)]^2}{14}$$
$$=\frac{(9-16)^2}{14}$$
$$=3.50 \tag{9.47}$$
$$S_B(xx)=\frac{[A_1B_1(x)-A_1B_2(x)]^2}{14}$$
$$=\frac{(0-1)^2}{14}$$
$$=0.071 \tag{9.48}$$

$$S_B(xy)=\frac{(0-1)(9-83)}{14}$$
$$=5.286 \tag{9.49}$$
$$S_B(yy)=\frac{(9-83)^2}{14}$$
$$=391.14 \tag{9.50}$$

これから変動，共変動の表は，表9.8のようになる.

表 9.8 変動，共変動の表

要因		f	(xx)	(xy)	(yy)
	(AB)	2	0.095	6.714	476.85
	C	6	0.286	13.857	675.24
	e	12	0.571	26.286	1 216.48
	T	20	0.952	46.857	2 368.57
欄外	A	1	0.000	0.000	3.50
	B	1	0.071	5.286	391.14

まず，マネキンが販売した日の効果（アフターエフェクトからの差）はxの係数bを推定することで求まる.

$$\hat{b}=\frac{S_e(xy)}{S_e(xx)}=\frac{26.286}{0.571}$$
$$=45.9\pm2.6 \tag{9.51}$$

信頼限界はあとで説明する．マネキン販売の日の効果はアフターエフェクトより更に46(±3) 個余計に売れることを示している．xの効果を除いた変動の計算をする.

$$S_e=S_e(yy)-\frac{S_e(xy)^2}{S_e(xx)}$$
$$=1216.48-\frac{26.286^2}{0.571}$$
$$=6.40 \tag{9.52}$$
$$S_{(AB)}=S_{(AB)}(yy)+S_e(yy)-\frac{[S_{(AB)}(xy)+S_e(xy)]^2}{S_{(AB)}(xx)+S_e(xx)}-S_e$$
$$=476.85+1216.48-\frac{(6.714+26.286)^2}{0.095+0.571}-6.40$$
$$=1693.33-1635.14-6.40$$
$$=51.79 \tag{9.53}$$
$$S_A=3.50+1216.48-\frac{(0.000+26.286)^2}{(0.000+0.571)}-6.40$$
$$=3.50 \tag{9.54}$$

$$S_B=391.14+1216.48-\frac{(5.286+26.286)^2}{0.071+0.571}-6.40$$
$$=48.59 \tag{9.55}$$

$$S_C=675.24+1216.48-\frac{(13.857+26.286)^2}{0.286+0.571}-6.40$$
$$=4.97 \tag{9.56}$$

y の全変動からの残りの変動 S_{res} は

$$S_{\mathrm{res}}=S_T(yy)-S_{(AB)}-S_C-S_e$$
$$=2368.57-51.79-4.97-6.40$$
$$=2305.41 \tag{9.57}$$

また，上記の S_{res} の中の一部である x の効果は次式で求まる．

$$S_x=\frac{S_e(xy)^2}{S_e(xx)}=\frac{26.286^2}{0.571}$$
$$=1210.08 \tag{9.58}$$

A, B, x の効果は他の要因と直交していないので欄外に掲げる．

表 9.9 分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
(AB)	2	51.79	25.90	38.7**	50.45	2.1
C	6	4.97	0.83	—		
res	1	2305.41	2305.41	3440.9**	2304.74	97.3
e	11	6.40	0.58		13.38	0.6
T	20	2368.57				100.0
A	1	3.50	3.50	5.2*	2.83	0.1
B	1	48.59	48.59	72.5**	47.92	2.0
x	1	1210.08	1210.08	1806.1**	1209.41	51.1
プール(e)	17	11.37	0.67			

この結果は，res の効果が大きいことがわかる．しかし res の中には x の効果，A, B の効果が入り混じっている．res の中で間違いなく x の効果としてよいのは，51.1% で，残りの 46.2% は，原因の解明に使えないものである．しかしながら，C の効果は有意でないのだから，そのことを用いて表 9.9 を次のように書き換えた方がよい．

表 9.8 で，C の効果を e にプールする．

$$\hat{b}=\frac{40.143}{0.857}\pm\sqrt{4.45\times0.67\times\frac{1}{0.857}}$$
$$=46.8\pm1.9 \tag{9.59}$$

$$S_e=1891.72-\frac{40.143^2}{0.857}$$

$$=1891.72-1880.35$$

$$=11.37 \tag{9.60}$$

$$S_{(AB)}=476.85+1891.72-\frac{(6.714+40.143)^2}{0.095+0.857}-11.37$$

$$=161.62 \tag{9.61}$$

$$S_A=3.50+1891.72-\frac{(0.000+40.143)^2}{0.000+0.857}-11.37$$

$$=3.50 \tag{9.62}$$

$$S_B=391.14+1891.72-\frac{(5.286+40.143)^2}{0.071+0.857}-11.37$$

$$=47.57$$

$$S_x=\frac{40.143^2}{0.857}=1880.35 \tag{9.63}$$

したがって，有意でないCの効果を誤差にプールした分散分析表は表9.10のようになる．

表 9.10　整理した分散分析表

要因	f	S	V	F_0	S'	$\rho(\%)$
(AB)	2	161.62	80.81	119.7**	160.28	6.8
res	1	2195.58	2195.58	3277.0**	2194.91	92.7
e	17	11.37	0.67		13.38	0.5
T	20	2368.57			2368.57	100.0
A	1	3.50	3.50	5.2*	2.83	0.1
B	1	47.57	47.57	71.0**	46.90	2.0
x	1	1880.35	1880.35	2806.5**	1879.68	79.4

9.2.3 推　　定

一般平均 m, A, B の効果を推定しよう．bは (9.59) 式で既に求めてある．m, B の推定値を求めるには，マネキン販売をした日の効果を修正する必要がある．

$$\hat{m}=T-\hat{b}\bar{x}=\frac{108}{21}-46.8\times\frac{1}{21}$$

$$=5.1-2.2$$

$$=2.9\pm0.4 \tag{9.64}$$

信頼限界は，次式から求めた．

$$\sqrt{F\times V_e[T\text{の単位数}+(\bar{x})^2\beta\ \text{の単位数}]}$$

$$=\sqrt{4.45\times0.67\left[\frac{1}{21}+\left(\frac{1}{21}\right)^2\times\frac{1}{0.857}\right]}$$

$$=0.4 \tag{9.65}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{A_1B_1}&=\frac{9}{7}=1.3\pm0.7\\ \overline{A_2B_1}&=\frac{16}{7}=2.3\pm0.7\end{aligned}\right\} \tag{9.66}$$

信頼限界は次式による．

$$\sqrt{4.45\times0.67\times\frac{1}{7}}=0.7 \tag{9.67}$$

$$\overline{A_1B_1}=\frac{9}{7}=1.3\pm0.7 \tag{9.68}$$

$$\overline{A_1B_2}=\frac{83}{7}-\hat{b}\bar{B}_2(\bar{x})=11.9-46.8\times\frac{1}{7}$$

$$=5.2\pm0.7 \tag{9.69}$$

$\bar{B}_2$ の信頼限界は次式によった．

$$\sqrt{4.45\times0.67\left[\frac{1}{7}+\left(\frac{1}{7}\right)^2\times\frac{1}{0.857}\right]}=0.7 \tag{9.70}$$

したがって，A, B, x の各組合せに対する工程平均の推定値は次のようになる．

組合せ	マネキン販売の日	
A_1B_1	1.3	—
A_2B_1	2.3	—
A_1B_2	5.2	52.0
A_2B_2	6.2	53.0

ここに，A_2B_2 の $\hat{\mu}$ は，マネキン販売日でない日の平均売上個数の推定値

$$\hat{\mu}=\overline{A_1B_1}+(\overline{A_2B_1}-\overline{A_1B_1})+(\overline{A_1B_2}-\overline{A_1B_1})$$

$$=\overline{A_2B_1}+\overline{A_1B_2}-\overline{A_1B_1}=2.3+5.2-1.3=6.2 \tag{9.71}$$

に，マネキン販売の効果

$$\hat{\beta}(1-0)=46.8\times1=46.8 \tag{9.72}$$

を加えたものである．

演 習 問 題

問 (9.1) 過去3週間 A_1, A_2, A_3 の月曜 (B_1) から土曜日 (B_6) までの，ある新聞スタンドにおける某新聞の売上部数 y と，その日の天候 x は次のようであった．ただし，x は次のように計量化した．

$x=0$　晴または曇

$x=1$　小雨またはときどき雨

$x=2$　雨

上段 x,　下段 y

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	0	0	2	0	1	0
	45	28	10	33	24	18
A_2	1	0	0	0	0	2
	28	18	22	25	27	6
A_3	2	2	1	0	0	0
	18	7	13	22	25	14

（1）　xを計量値と考えて，共分散分析をし，有意要因の推定をせよ．

（2）　今日は月曜日である．天気予報によると雨である．何部仕入れたらよいか．

（注）　もし定期購読者があるときには，その部数は別に計算するのがよい．

問（9.2）　十都道府県における一人当り県民所得（x, 単位 キロ円）と，1人当りのビールの販売量（y, 単位 l）は次のようであった．

	B_1 (1965 年)		B_2 (1966 年)		B_3 (1967 年)	
	x	y	x	y	x	y
A_1（北海道）	207	19.3	256	21.1	306	23.2
A_2（秋　田）	176	14.9	236	15.4	279	18.3
A_3（東　京）	367	35.2	445	36.0	505	40.2
A_4（新　潟）	189	15.6	238	16.6	277	19.6
A_5（愛　知）	247	20.1	308	21.4	354	25.4
A_6（大　阪）	336	30.6	394	32.2	447	36.5
A_7（広　島）	202	20.5	271	23.2	313	28.1
A_8（徳　島）	182	11.1	238	12.5	280	14.8
A_9（福　岡）	207	18.9	257	20.0	296	23.1
A_{10}（鹿児島）	145	11.3	174	12.1	200	13.9

（1）　xを補助変数，yを目的変数とした共分散分析をし，結果を解釈せよ．

（2）　xを補助変数，$y'=y/x$ を目的変数とした共分散分析をし，(1) と比較せよ．

（3）　もし，この期間でビールの値上げがあったとき，その効果を推定するには，どのようにデータをとり，どのように解析したらよいと思うか．

問（9.3）　次のデータは，日本百貨店協会によるもので，昭和 39 年度における 6 大都

市（A_1）とその他の都市（A_2）における，毎月の売場面積 100 m² 当りの従業員数 x（人）と売上高 y（単位 千円）を示したものである．B_1 は 1 月，……，B_{12} は 12 月である．

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
A_1	x	5.55	5.60	5.73	6.06	5.83	5.86	5.82	5.76	5.67	5.64	5.63	5.53
	y	2875	3320	4363	4072	3804	3774	5897	3486	3334	4133	4424	9432
A_2	x	5.30	5.31	5.54	5.75	5.70	5.65	5.61	5.57	5.52	5.46	5.35	5.32
	y	1764	1696	2287	2094	1906	1857	2468	2300	1795	2158	2273	4799

共分散分析を行ない，100 m² 当りの従業員数を 1 人増したときの売上高の増加額を求めよ．その結果からこの方法の問題点と改善法を述べよ．

10. SN 比 (1), 計量値の場合

本章においては，いろいろな測定法，試験法などの比較を合理的に行なう方法として，SN 比の解説をする．測定法の評価測度として，分散分析の最も重要な応用分野である．

10.1 SN 比 と は

科学，技術の発達の 70% は，測定法，試験法の開発や能率化によるといわれている．能率のよい測定，試験，分析法があれば，いろいろな試作品を作ったり実験をしたりしていろいろな方法の優劣が簡単にわかり，科学技術の進歩をはやめることができるからである．

ところで，測定，試験，分析方法自体の開発や合理化を行なうには，いろいろな測定法，さまざまな試験法，分析法を提案して，それらの優劣を定量的に比較することが大切である．**測定法，試験法，分析法の優劣**は，次の 3 項目を比較検討しておき，場合によってそれぞれを使いわけることである．

(1) **エスエヌ比**

(2) **測定値を求めるのに必要な時間**

(3) **測定値を求めるのに必要なコスト**

ここで，(1) のエスエヌ比は，品物の場合の品質に当たる概念で，測定法，試験法，分析法などの良し悪しを示すものである．(2) は，品物の場合の納期に対応し，測定値を出すのに必要な時間で，ときには予測のように事前に推定したいことも少なくない．(3) は，1 つの測定値を出すのに必要なコストで，品物の場合の生産コストに対応する概念である．

(2)，(3) については，特別に説明する必要がない．測定法，試験法，分析法などの品質測定法の良し悪しの比較のためのエスエヌ比，更に分離，診断，誤動作などの情報を伴う判断，動作，制御などのエスエヌ比について説明する．

時間の測定機である時計，電波の測定機である通信機，メーター，遠心分離機，成分抽出装置などの分野では，それらの機械や装置の品質そのものが，エスエヌ比で表わされる．

通信工学の世界では昔から **Signal**（信号）対 **Noise**（雑音）比が，通信方式の良し悪しの比較に用いられてきた．その比は，Signal と Noise の頭文字を用いて **SN 比**（**エスエヌ比**）と略称されている．

通信工学とは，送信側の情報を効率よく受信側に送るためのシステムを研究するもの，と定義することができる．たとえば，一定の周波数の電波を用いて情報を能率よく送るために，情報の変調方法，送信機の改善，アンテナ，受信機の改善が研究され，AM，FM，PCM などのすぐれた通信方式が用いられるようになってきた．

電気通信では，送信機，ケーブル，空中，アンテナ，受信機のあらゆる段階で，送信信号を攪乱する雑音が入ってくる．また，送信信号の乱反射，送信通路の差などによるゴーストやフェーデングのような信号のひずみや信号の消失などがおこる．一定の使用電力の下で，いかに正しい情報を受信したかを評価する測度として，受信側のアウトプットのパワーを信号のパワーと雑音のパワーに分け，その比を用いて通信系の良し悪しの比較が行なわれてきたのである．

$$\textbf{通信系の SN 比}\quad \eta=\frac{\textbf{信号のパワー}}{\textbf{雑音のパワー}}$$

上式の SN 比を求めるにはたとえば，受信側で全出力のパワーを測定し，送信をやめたときの雑音のパワーを測定し，差から信号のパワーを求め，その比から計算することもできる．

SN 比とは，受信側で受信した全出力を信号の部分と雑音の部分に分けて，その比を求めることである．受信機とは，信号と雑音の混合したものの中から，信号のみを能率よくつかまえる一種の測定機あるいは検出装置である．

ところで，通信以外のどんな測定の場合でも，測定値 y の値には，測定したい目的特性の値によって影響された部分と，誤差といわれている他の原因によって影響された部分を含んでいる．測定値 y の値を目的特性によって影響された部分すなわち信号と，それ以外によって影響された部分すなわち雑音に分けて，SN 比を求め，測定方法の評価の測度とすることが考えられる．そのためには，1つ以上の測定値が得られたとき，その全体のパワーである全二乗和

$$S_T=y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2 \tag{10.1}$$

を信号の部分 S_M と誤差の部分 S_e に分けて，SN 比を計算する方法を開発しなければならない．

データの全二乗和をいろいろな原因系の効果に分解する計算は，2次形式の応用として変動の分解といわれ，データ解析として本書で説明してきたものである．変動の分解を利

用して，最も簡単な場合のSN比の求め方とその比較について解説する．10章，11章は，SN比を求めて，いろいろな測定法，試験法，官能検査，信頼性などのテスト方法を合理的に研究する方法を与えるものである．

10.2 硬 度 計 の 例

データの統計的処理は，誤差とか，バラツキの問題を取り扱う手法である．したがって誤差がその中心的問題である試験，分析，測定，検査（さらに，公式，予測，診断，通信なども同じ種類の問題である）に対して，データの統計的処理はもっとも役立つはずである．著者がそのような考え方の下で試験，分析，測定などの誤差に統計的計算法を整理したエスエヌ比を紹介してから数年の日数がたった．

データの統計解析にエスエヌ比という言葉を用いることについては，1962年筆者がプリンストン大学にいた頃，J.W. Tukey 教授なども何回もつかっていたが，エスの意味についてのはっきりした見通しが無かったために，誤差対誤差の比に用いられているだけだったのである．エスエヌ比がアメリカなどの外国で普及していない原因はそこにあると思われる．

エスエヌ比の技術的意味づけは10.3節で説明したいと思う．たとえば化学分析などに応用したい人は，10.3節から読みはじめても良いだろう．初めに最も簡単な一つの例によって，分散分析からエスエヌ比までの統計計算のやり方の解説を行ない，10.3節からの本論への準備とする．

10.2.1 硬度計の問題（トヨタ自動車工業生産技術部，門野氏による）

硬度計に簡易迅速に硬度測定が可能な A_1（V型）と A_2（U型）がある．2つの硬度計を比較するために3つの材料（M_1=FCD 55, M_2=FC 20, M_3=SK 4）を，2名の人（B_1, B_2）で，硬度測定したデータは，表10.1の通りであった．

表 10.1 硬度測定のデータ

		M_1			M_2			M_3		
A_1(V型)	B_1	165	175	205	125	135	133	168	182	190
	B_2	130	158	170	125	148	163	190	212	192
A_2(U型)	B_1	170	183	192	152	170	160	225	221	221
	B_2	178	193	181	159	170	170	208	208	221

ただし，各材料について，2人の測定者がそれぞれの硬度計で3回ずつ繰返えし測定をしたので，各桝目には3つずつのデータがあることになる．

表 10.2　補 助 表

A_1 のデータ

	M_1			計	M_2			計	M_3			計	総計
B_1	−5	5	35	35	−45	−35	−37	−117	−2	12	20	30	−52
B_2	−40	−12	0	−52	−45	−22	−7	−74	20	42	22	84	−42
計				−17				−191				114	−94

A_2 のデータ

	M_1			計	M_2			計	M_3			計	総計
B_1	0	13	22	35	−18	0	−10	−28	55	51	51	157	164
B_2	8	23	11	42	−11	0	0	−11	38	38	51	127	158
計				77				−39				284	322

表 10.1 のデータから仮の平均170を引いて，表 10.2 のような補助表を作る．

この場合大切なことは，A_1 の硬度計と A_2 の硬度計を比較するのであるから，A_1, A_2 別々に分散分析をしなければならないということである．A_1 と A_2 のようにどちらが硬度計として良いかを見たい因子は，制御因子と呼ばれる．制御因子とは，水準を持っていて，どの水準が良いかを，それらの水準ごとにエスエヌ比を求め，最適水準を選ぶためにとり上げられた因子である．定量分析の場合には，とる試料の量，とり方，縮分の方法，試薬の種類，入れ方などはすべて制御因子である．

10.2.2　エスエヌ比の計算

表 10.1 のようなデータが得られたとき，M_1 という同じ品物を 3 回測定したとき，測定のたびに値が異なるということは，その測定法がバラツキの大きい精度の悪い測定法であることを意味する．したがって，そのように同じ品物を繰り返えして測定したときの繰返えし間のバラツキは，小さいことが望ましい．

それならば，バラツキが小さいだけでよいだろうか．異なった品物の差は大きく出なければならないのである．測定値というものは，目的特性に比例するものであれば，目盛（読み）の間隔を調整すればいつでも使えることになる．異なったものの差をどれ位大きく測るかは普通感度の大きさといわれている．いまの場合，三つの品物 M_1, M_2, M_3 があるのだが，M_1 と M_2 の差，M_1 と M_3 の差，M_2 と M_3 の差をどれだけ大きく測っているかで，感度の大きさを見ていることになる．M_1, M_2, M_3 の間の差は M 間の変動である．

$$S_M=\frac{(M_1\text{ の計})^2+(M_2\text{ の計})^2+(M_3\text{ の計})^2}{\text{単位数}}-\text{修正項}$$

$$=\frac{(-17)^2+(-191)^2+114^2}{6}-\frac{(-94)^2}{18}$$

$$=7803 \qquad (\mathrm{f}=2) \qquad (10.2)$$

一方，データの全変動 S_T は

$$S_T=(-5)^2+5^2+35^2+\cdots\cdots+22^2-\mathrm{CF}$$
$$=12901 \qquad (\mathrm{f}=17) \qquad (10.3)$$

全変動 S_T の中には，３種の品物の差，２人の測定者の差，繰返えし間の誤差などの，18 個のデータを測定していた間に変化したすべての原因の影響の効果が入っている．ところで S_M は品物間の差の変動であるから，S_T から S_M を引いたものは，測定者の差や繰返えしの間のバラツキなどの原因の効果を示している．測定者が変わったら測定値が異なってでてくる硬度計はまずい硬度計である．良い硬度計とは誰がやっても正しい値になるものでなければならない．いまの場合，正しい値が不明なのだから，人による差や，繰返えし間の誤差が少ないものが良いことになる．

このことは，S_T から S_M を引いた誤差変動 S_e が小さいことが望ましいことを意味している．

$$S_e=S_T-S_M=12901-7803$$
$$=5098 \qquad (\mathrm{f}=15) \qquad (10.4)$$

(10.2)～(10.4) 式より，表 10.3 のような分散分析表が得られる．

表 10.3　硬度計 A_1 の分散分析表

要因	f	S	V	$E(V)$
M	2	7803	3902	$\sigma^2+6\sigma_M{}^2$
e	15	5098	339.9	σ^2
T	17	12901		

σ^2 は自由度１（１回の測定）当りの誤差の大きさであり，$V_e=339.9$ は σ^2 の推定値である．$V_M=3902$ は品物間の分散 $\sigma_M{}^2$ の６倍に σ^2 を加えた $(\sigma^2+6\sigma_M{}^2)$ の推定値である．$\sigma_M{}^2$ は M_1, M_2, M_3 の三つの品物の硬度を，硬度計 A_1 で測ったときの真値 m_1, m_2, m_3 の間の差の２乗の，自由度１当りの大きさを意味する．

$$\sigma_M{}^2=\frac{(m_1-\bar{m})^2+(m_2-\bar{m})^2+(m_3-\bar{m})^2}{2} \qquad (10.5)$$

ただし

$$\bar{m}=\frac{1}{3}(m_1+m_2+m_3) \qquad (10.6)$$

$\sigma_M{}^2$ は，品物間の差の大きさをその測定法 A_1 がどれ位大きく評価しているかを示すものさしで，測定法における感度（顕微鏡の倍率の２乗に対応する）の大きさを示している．

実際に得られた V_M には誤差も含まれている．V_M の中には σ^2 が1個と $\sigma_M{}^2$ の6倍が含まれている．

したがって，$\sigma_M{}^2$ を求めたいときには

$$\hat{\sigma}_M{}^2=\frac{1}{6}(V_M-V_e) \tag{10.7}$$

として求めれば良いことになる．

これから A_1 硬度計のエスエヌ比を $\eta(A_1)$ として

$$\eta(A_1)=\frac{\text{感度}}{\text{誤差}} \tag{10.8}$$

を計算すればよい．感度は，品物の間の差をどれ位大きく区別しているかであり，通信でいう信号のパワーに当たる．また誤差は品物以外の他のいろいろな原因による誤差の大きさを示すもので，通信では目的としている信号の情報以外の雑音の大きさを意味している．通信においては信号の大きさを雑音の大きさで割ったものは，昔から信号対雑音比といわれ，SN 比と略記されていた．SN 比に対する良い名前が無いので，筆者は数年前からエスエヌ比という言葉をそのまま使っている．

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma_e{}^2}\fallingdotseq\frac{\hat{\sigma}_M{}^2}{V_e}\\&=\frac{\frac{1}{6}(V_M-V_e)}{V_e}\end{aligned} \tag{10.9}$$

これはまた，V_M と V_e の分散比を F_0 とおいた

$$F_0=\frac{V_M}{V_e} \tag{10.10}$$

を用いて

$$\eta=\frac{1}{6}(F_0-1) \tag{10.11}$$

としてもよい．

A_1 の場合のエスエヌ比 $\eta(A_1)$ は

$$\begin{aligned}\eta(A_1)&=\frac{\frac{1}{6}(V_M-V_e)}{V_e}\\&=\frac{\frac{1}{6}(3902-339.9)}{339.9}\\&=1.747\end{aligned} \tag{10.12}$$

ところでエスエヌ比のように相対的な大きさを示すには，$\eta(A_1)$ の値 1.747 そのもの

を用いるよりも，$\eta(A_1)$ の常用対数の 10 倍である **db（デシベル）** という単位で示す方が便利なことが多い．デシベルというのは，もともとは通信の世界でエスエヌ比の単位として，電話の発明者 Bell の名前に因んで 10 倍の大きさを表わすのに 1 Bell, 100 倍で 2 Bell, 1000 倍で 3 Bell, 1/10 で −1 Bell という単位を用いたのがその始まりである．dB はその 1/10, cB (センチベル) はその 1/100 の単位を意味したが，現在は B を小文字で書いて db, cb と表示する．たとえば，最近の建築基準法では，壁がどれ位の遮音力があるかを指定するのに，20 db 以上といったら，10 db で 10 倍，20 db だから 100 倍ということになり，その壁の一方の側の音は，他の側では 1/100 の大きさになってこちら側に聞こえることを意味している．

デシベルの値は常用対数表さえあれば，それを 10 倍して求めれば良い．デシベルの表については付表 5 を参照されたい．

$$\eta(A_1)=2.4\ \text{(db)} \tag{10.13}$$

同様に，硬度計 A_2 の場合のエスエヌ比を計算する．表 10.2 の A_2 のデータから

修正項 $\quad \mathrm{CF}=\dfrac{322^2}{18}=5760$

品物間変動
$$S_M=\frac{77^2+(-39)^2+284^2}{6}-\mathrm{CF}$$
$$=14684-5760$$
$$=8924 \qquad (f=2) \tag{10.14}$$

全変動
$$S_T=0^2+13^2+22^2+\cdots\cdots+51^2-\mathrm{CF}$$
$$=15628-5760=9868 \qquad (f=17) \tag{10.15}$$

誤差変動
$$S_e=S_T-S_M$$
$$=944 \qquad (f=15) \tag{10.16}$$

(10.14)〜(10.16) 式から分散分析表は表 10.4 のようになる．

表 10.4　硬度計 A_2 の分散分析表

要因	f	S	V	$E(V)$
M	2	8924	4462	$\sigma^2+6\sigma_M^2$
e	15	944	62.9	σ^2
T	17	9868		

これから A_2 の場合のエスエヌ比 $\eta(A_2)$ は

$$\eta(A_2)=\frac{\frac{1}{6}(V_M-V_e)}{V_e}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}(4462-62.9)}{62.9}$$

$$=11.66 \qquad (10.17)$$

したがって，硬度計 A_2 のエスエヌ比 $\eta(A_2)$ は 11.66 で，デシベル単位では

$$\eta(A_2)=10.7\ (\mathrm{db}) \qquad (10.18)$$

これから，A_1 硬度計より A_2 硬度計の方が

$$\eta(A_2)-\eta(A_1)=10.7-2.4$$

$$=8.3\ (\mathrm{db}) \qquad (10.19)$$

だけエスエヌ比が良いことになる．デシベルの差を利得（ゲイン，gain）という．したがって A_1 硬度計より，A_2 硬度計の方が 8.3 デシベル，利得があるということになる．

8.3 デシベルは，真数では 6.9 倍良いことを意味する．対数値が 0.83 の真数として 6.9 を求めてもよいし，元のエスエヌ比の比として 6.9 を求めることもできる．

$$\frac{\eta(A_2)}{\eta(A_1)}=\frac{11.66}{1.747}$$

$$\fallingdotseq 6.9 \qquad (10.20)$$

A_1 より A_2 が 6.9 倍良いということは，ある品物の硬度を測定するのに，A_2 の硬度計で 1 回測定した硬度の値と同じだけの精度の測定値を出すのに，A_1 の硬度計では，6.9 回（約 7 回）硬度測定を行なって平均をとらなければならないことを意味する．

A_1 硬度計の方が 1 個の測定値を出すのに，A_2 型の 1/10 の時間と 1/10 のコストで出せるなら，A_1 型の方が良い硬度計ということになる．k 種の測定器具の比較や，測定法の比較の場合には，それらのエスエヌ比 η_i ($i=1, 2, \cdots\cdots, k$)，測定値を出すのに必要な時間 t_i，1 個の測定値を出すのに必要なコスト C_i の 3 つの値を出さない限り，自分の問題にどの測定器具や測定法を使用するのが最も有利かという問題は解けない．したがって，硬度計のメーカーは，材質，形状などについてどうしたらエスエヌ比が大きくなるかをいろいろの測定対象に対して研究し，良い硬度計を作ることが大切である．

10.2.3　エスエヌ比の信頼限界と有意差検定

A_1 硬度計より A_2 硬度計の方が 6.9 倍，8.3 デシベルだけ利得が大きいことを示した．しかし，その差 8.3 デシベルのゲインには果して有意差があるかどうかという検定をしてみたいことも少なくないだろう．

エスエヌ比の間の有意差検定は，分散比の比の分布となって，直接その検定をすることは分布が複雑で困難である．そこで，**エスエヌ比 η の信頼限界**を求め，信頼限界から有意

差を検定するという便宜的な方法を採用するのである.

エスエヌ比の近似的な信頼限界は, (10.22) 式で与えられる. 一般式をあげるために, 品物 M の反復数を r, 品物間の分散 V_M の自由度を f_1, 誤差分散 V_e の自由度を f_2 とする. しからばエスエヌ比

$$\eta=\frac{\frac{1}{r}(V_M-V_e)}{V_e} \tag{10.21}$$

の信頼度 95% の信頼限界 (の近似式) は次式で与えられる.

$$\frac{1}{r}\left(\frac{F_0}{F_l}-1\right)\leq\eta\leq\frac{1}{r}(F_0\times F_u-1) \tag{10.22}$$

ここに

$$r=M \text{ の反復数} \tag{10.23}$$

$$F_0=\frac{V_M}{V_e} \tag{10.24}$$

$$F_l=\text{分子の自由度 } \mathrm{f}_1\times F_0^2\text{, 分母の自由度 } \mathrm{f}_2 \text{ の付表 4 の } F \text{ 表の 2.5\% 点} \tag{10.25}$$

$$F_u=\text{分子の自由度 } \mathrm{f}_2\text{, 分母の自由度 } \mathrm{f}_1\times F_0^2 \text{ の付表 4 の } F \text{ 表の 2.5\% 点} \tag{10.26}$$

(10.22) 式の誘導を注 (10.1) にあげるから, 数学的証明に興味のある人は, 注も見られたい.

この公式を $\eta(A_1)$, $\eta(A_2)$ にあてはめてみよう.

A_1 の場合

$$\eta(A_1)=\frac{\frac{1}{6}(3\,902-339.9)}{339.9} \tag{10.27}$$

であるから

$$r=6$$

$$F_0=\frac{V_M}{V_e}=\frac{3\,902}{339.9}=11.48 \tag{10.28}$$

$$\mathrm{f}_1\times F_0^2=2\times 11.48^2=264 \tag{10.29}$$

$$\mathrm{f}_2=15 \tag{10.30}$$

付表 4 から, $\mathrm{f}_1=264$, $\mathrm{f}_2=15$ の F の 2.5% 点を求めて

$$F_l=2.43 \tag{10.31}$$

付表 4 から $\mathrm{f}_1=15$, $\mathrm{f}_2=264$ の F の 2.5% 点を求めて

$$F_u=1.88 \tag{10.32}$$

したがって，$\eta(A_1)$ の信頼限界は (10.22) 式から次のようになる．

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{11.48}{2.43}-1\right\}\leq\eta(A_1)\leq\frac{1}{6}\{11.48\times1.88-1\} \tag{10.33}$$

$$0.62\leq\eta(A_1)\leq3.43 \tag{10.34}$$

(10.34) 式をデシベル単位で示せば，0.62 のデシベルは -2.1 (db)，3.43 のデシベルは 5.3 (db) だから

$$-2.1\,\mathrm{db}\leq\eta(A_1)\leq5.3\,\mathrm{db} \tag{10.35}$$

$\eta(A_1)$ そのもののデシベルは 2.4(db) だから，$\eta(A_1)$ の信頼限界を次のように書き表わす．

$$\eta(A_1)=2.4^{-4.5}_{+2.9}\ (\mathrm{db}) \tag{10.36}$$

同様に A_2 に対するエスエヌ比の信頼限界を求める．

A_2 の場合

$$r=6 \tag{10.37}$$

$$F_0=\frac{4\,462}{62.9}=70.94 \tag{10.38}$$

$$f_1\times F_0{}^2=2\times70.94^2$$

$$=10\,065 \tag{10.39}$$

$$f_2=15 \tag{10.40}$$

$$F_l=2.40 \tag{10.41}$$

$$F_u=1.83 \tag{10.42}$$

$$\frac{1}{6}\left\{\frac{70.94}{2.40}-1\right\}\leq\eta(A_2)\leq\frac{1}{6}\{70.94\times1.83-1\} \tag{10.43}$$

$$4.76\leq\eta(A_2)\leq21.47 \tag{10.44}$$

デシベル単位では

$$6.8\,\mathrm{db}\leq\eta(A_2)\leq13.3\,\mathrm{db} \tag{10.45}$$

$$\eta(A_2)=10.7^{-3.9}_{+2.6}\ (\mathrm{db}) \tag{10.46}$$

(10.36)，(10.46) 式から $\eta(A_1)$ の上限は 5.3 デシベル，$\eta(A_2)$ の下限は 6.8 デシベルであるから，A_1 と A_2 に有意差があることになる．しかし，この方法では，もし，A_1 の中心値が 2.4(db) ではなくて，4.4(db) なら有意差がないことになる．一般的にいって，2つの推定値 $\bar{A}_1$ と $\bar{A}_2$ の信頼限界の幅が同じで，たとえば ε であるとすると

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A}_1 \pm \varepsilon \\ \bar{A}_2 \pm \varepsilon\end{array}\right\} \tag{10.47}$$

のとき，$\bar{A}_1$ と $\bar{A}_2$ に有意差があるかないかは，$(\bar{A}_1-\bar{A}_2)$ が $\sqrt{2}\varepsilon$ 以上の差であるかないかと同じことである．もし，ε が等しくないときには

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A}_1 \pm \varepsilon_1 \\ \bar{A}_2 \pm \varepsilon_2\end{array}\right\} \tag{10.48}$$

の有意差問題は $(\bar{A}_1-\bar{A}_2)$ を $\sqrt{\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2}$ と比較することになる．

この問題では

$$\begin{aligned}\eta(A_2)-\eta(A_1)&=10.7-2.4\\&=8.3 \text{ (db)}\end{aligned} \tag{10.49}$$

を $\eta(A_2)$ の方が $\eta(A_1)$ より大きいのだから，$\eta(A_1)$ について大きい方の信頼限界の幅の値 $+2.9$(db)，$\eta(A_2)$ について下限の方の信頼限界の幅の値 -3.9(db) を用いて比較する．

$$\sqrt{(+2.9)^2+(-3.9)^2} \fallingdotseq 4.9 \tag{10.50}$$

したがって，8.3 は 4.9 より大きいから有意差があったことになる．危険率は 5% である．危険率を 1% にしたいなら，信頼度 99% の信頼限界を用いなければならない．上式において，2.5% の F 表の値を用いたのは，エスエヌ比 η の信頼限界において，上側，下側の両方に 2.5% ずつの危険率，合計して 5% の危険率になるからである．

10.3　アルコールの定量分析の例

10.3.1　エスエヌ比とは

10.2 節で，硬度計の優劣を比較するのに，品物間の差をどれ位大きく測るかという感度と，同じ品物を何回か測ったときの誤差分散の比を，エスエヌ比 η として用いる方法を示した．

$$\eta=\frac{\text{品物間の差の分散}}{\text{誤差分散}} \tag{10.51}$$

しかし，前節だけでは，SN 比の物理的意味の説明が不十分だと思われるので，SN 比の技術的意味を，いままでの測定法との関係の下にもう少し詳しく述べることにする．

ある品物中の水分を測定する場合を考える．水分そのものを直接測らなくても，水分と 1 次関係にあるどんな特性（たとえば電気的特性）でも，あとで述べる方法で水分の推定ができるからかまわないことになる．水分を x，1 次関係にある特性を y とする．x と y の 1 次関係には次の 2 つの場合がおこる．

$$y=\beta x \tag{10.52}$$

$$y=\alpha+\beta x \tag{10.53}$$

統計学の世界では，(10.52) 式からxを推定する方法を**比推定**，(10.53) 式からxを推定する方法を**回帰推定**という．しかし，そのような特殊な専門用語を使用するのは面倒だからここでは用いないことにする．

xが 1%，2%，3% とわかっている品物について，それと１次関係にある特性yを測った結果が図 10.1 のようであったとする．

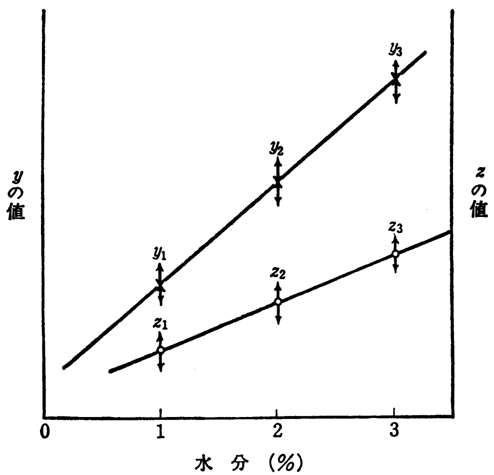


図 10.1　水分xとyの関係

この場合，xに対するyの値の方向係数（１次係数）をβとすれば，βの大きさが大きいほど感度が良いといわれている．βは顕微鏡などにおける倍率に当たっている．しかしβの値が大きくても，水分が 1% のものを何回も測ったときのyの値のバラツキが大きくては困る．すなわち，同じ水分のものを何回も測定したときのyの値の誤差分散 σ^2 の値が大きくてはだめである．それはちょうど安物の顕微鏡のように，倍率だけは上がっても，像がボケたり，歪んだりしてはだめであることと同じである．

いま，水分に関係する別の特性 z（もし，特性zと水分xの関係が直線的でなく，zが水分の指数関数 $\alpha' \exp[\beta' x]$ に比例する場合には，zの対数をとっておく．したがって関係式が１次関係でないことが予想された場合には，そのような変換後の値で議論するから，以下いつでも想定の上では１次関係とする）があって，その１次係数が β' で，分散が $(\sigma')^2$ であるときには，特性値yと特性値zは，どちらが水分xの測定値として良い

特性値だろうか.

だれでも，そのような比較の場合には，次の比

$$\eta=\frac{1\text{次係数の}2\text{乗}}{\text{誤差分散}} \tag{10.54}$$

を用いればよいと思うだろう. (10.54) 式の比は SN 比といわれるもので，もともとは

$$\eta=\frac{\text{信号のパワー}}{\text{雑音のパワー}} \tag{10.55}$$

として，通信において信号のパワーを雑音のパワーで割ったものとして，長い間用いられてきた大切な特性である.

水分 x に対して y と z のエスエヌ比は次のようになる.

$$y\text{のエスエヌ比}\qquad \eta_y=\frac{\beta^2}{\sigma^2} \tag{10.56}$$

$$z\text{のエスエヌ比}\qquad \eta_z=\frac{(\beta')^2}{(\sigma')^2} \tag{10.57}$$

(10.56), (10.57) 式における β, β', σ, σ' は本来は正確な値でなければならないのだが, 実際にはいくつかのわずかな観測値から β, β', σ, σ' を推定しなければならない. したがって，実際にエスエヌ比 η を計算するには次の 10.3.2 項のようにしなければならない.

10.3.2 エスエヌ比の計算

ある食料品中のアルコール分の定量を, ガスクロマトグラフ法（ガスクロ法と略称する）によって求めるために，その食品中のアルコール量を x(%) として，それにアルコール濃度が $(x+0.3)\%$, $(x+0.6)\%$, $(x+0.9)\%$ になるようにアルコールを添加して，4種の試料 M_1, M_2, M_3, M_4 を作った. すなわち，四つの試料は次のようである.

M_1＝アルコールを未知量 $x\%$ 含んだもの

M_2＝アルコールを $(x+0.3)\%$ 含んだもの

M_3＝アルコールを $(x+0.6)\%$ 含んだもの

M_4＝アルコールを $(x+0.9)\%$ 含んだもの

いま，ガスクロ法として

A_1＝サンプリング後の保持時間　10分

A_2＝サンプリング後の保持時間　20分

の2水準を作り，A_1, A_2 の二つの方法で M_1, M_2, M_3, M_4 の品物を2人の人間 R_1, R_2 で1回ずつ測定した結果は表 10.5 のようであった.（実際には，2人でなく，4人位でやらないと，比較の精度が十分にならない.）

表 10.5　二つのガスクロ法による分析データ

A_1	M_1	M_2	M_3	M_4	計
R_1	0.46	0.96	1.48	1.79	
R_2	0.48	0.92	1.36	1.56	
計	0.94	1.88	2.84	3.35	9.01

A_2	M_1	M_2	M_3	M_4	計
R_1	1.12	1.93	2.58	3.06	
R_2	1.08	1.94	2.60	3.10	
計	2.20	3.87	5.18	6.16	17.41

A_1, A_2 のおのおのについて分散分析をする．その場合，人間による差や，M の効果が1次式からはずれている程度は誤差と考えられる．したがって，データの全変動を $\boldsymbol{M}$ **の1次効果**と残りの誤差に分ければよいことになる．M の1次効果は，付表7の公式を用いて計算する．電動計算機を用いたので，仮平均を引かないで計算したが，筆算の場合には，仮平均を引いて計算した方がよいだろう．

A_1 の場合

$$\text{全変動}\quad S_T=0.46^2+0.96^2+\cdots\cdots+1.56^2-\frac{9.01^2}{8}$$

$$=1.7402 \qquad (f=7) \qquad (10.58)$$

M の1次効果の計算には，付表7の**回帰推定の公式**を用いる．付表7で，等間隔4水準の公式として，$k=4$ の S_β を用いる．

$$y_1=M_1 \text{ の計}=0.94$$
$$y_2=M_2 \text{ の計}=1.88$$
$$y_3=M_3 \text{ の計}=2.84$$
$$y_4=M_4 \text{ の計}=3.35$$

で，いずれも2個のデータの和であるから

$$r_0=2$$

これから

$$S_{M_l}=S_\beta=\frac{(-3y_1-y_2+y_3+3y_4)^2}{20r_0}$$

$$=\frac{(-3\times0.94-1.88+2.84+3\times3.35)^2}{20\times2}$$

$$=\frac{8.19^2}{40}$$

$$=1.6769 \qquad (f=1) \qquad (10.59)$$

$$S_e=S_T-S_\beta$$

$$=1.7402-1.6769$$

$$=0.0633 \qquad (f=6) \qquad (10.60)$$

これから，表 10.6 のような分散分析表を得る．

表 10.6 A_1 の分散分析表

要　因	f	S	V	$E(V)$
M_l	1	1.6769	1.6769	$\sigma^2+5r_0h_0^2\beta^2$
e	6	0.0633	0.0106	σ^2
T	7	1.7402		

誤差分散の桁は S_e よりも少なくとも 1 桁多く出した方がよいが，V_e の有効数字が 3 桁もあるときには，有効数字 3 桁で止めてよい．もし，$S_e=0.0125$ のようなら，$V_e=0.00208$ とすべきである．分散の期待値の中で，1 次係数 β の 2 乗に，$5r_0h_0^2$ がかかっているのは，$5r_0h_0^2$ が β の推定に対する反復数であるからである．この係数は初心者には難しいようであるが，β の推定式，付表 7 の公式

$$\beta=\frac{-3y_1-y_2+y_3+3y_4}{10r_0h_0} \qquad (10.61)$$

において，その係数の 2 乗和（すなわち単位数）の逆数が反復数 r になる．

$$r=\frac{1}{\text{単位数}}$$

$$=\frac{1}{\text{線形式の係数の 2 乗和}}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{10r_0h_0}\right)^2\{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2\}r_0}$$

$$=5r_0h_0^2 \qquad (10.62)$$

実際には，V_β の期待値が不明でも，η を求める公式が付表 7 にあるのだから，それを利用すればよい．

付表 7 の公式から

$$\eta=\frac{\frac{1}{5r_0h_0^2}\{V_\beta-V_e\}}{V_e}$$

$$=\frac{\frac{1}{5\times 2\times (0.3)^2}\{1.6769-0.0106\}}{0.0106}$$

$$=\frac{1.8514}{0.0106}$$

$$=174.7$$

$$=22.4\ (\mathrm{db}) \qquad (10.63)$$

同様に A_2 のエスエヌ比を計算する.

$$S_T=1.12^2+1.93^2+\cdots\cdots+3.10^2-\frac{17.41^2}{8}$$

$$=4.4108 \qquad (f=7) \qquad (10.64)$$

$$S_\beta=\frac{[-3(2.20)-3.87+5.18+3(6.16)]^2}{40}$$

$$=4.3494 \qquad (f=1) \qquad (10.65)$$

$$S_e=S_T-S_\beta$$

$$=0.0614 \qquad (f=6) \qquad (10.66)$$

$$V_e=\frac{0.0614}{6}$$

$$=0.0102 \qquad (10.67)$$

$$\eta(A_2)=\frac{\frac{1}{5\times 2\times 0.3^2}(4.3494-0.0102)}{0.0102}$$

$$=472.7$$

$$=26.7\ (\mathrm{db}) \qquad (10.68)$$

したがって, A_1 と A_2 のエスエヌ比は次のようになった.

	η(db)	利得(db)
A_1	22.4	0
A_2	26.7	4.3

この場合, A_1 より A_2 の方が 4.3 db, 約 2.7 倍精度がよいということになる. A_1 と A_2 の誤差分散はほぼ等しいのにもかかわらず, エスエヌ比がこれほど大きく異なるということは, 感度, すなわち β の大きさが, A_2 の方が約 2.7 倍近く大きかったからである.

表 10.5 のデータでは精度が不足である. 多くの場合誤差分数 V_e の自由度を少なくとも 20 ぐらいにした方が望ましい. したがって, この場合のように誤差分散の自由度が 6

ぐらいだと，4.3 db ぐらいの差では A_1, A_2 の間に差があるかどうか疑問である．そのような場合には，A_1, A_2 のエスエヌ比に対して，信頼限界を求めたり，有意差検定をすることが役に立つことになる．

10.3.3 エスエヌ比の比較

エスエヌ比の信頼限界の公式

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{F_0}{F_l}-1\right\} \leq \eta \leq \frac{1}{r}\{F_0 \times F_u - 1\} \tag{10.69}$$

において，r はエスエヌ比 η の計算に用いた反復数で

$$\begin{aligned} r &= 5r_0h_0^2 \\ &= 5\times2\times0.3^2 \\ &= 0.9 \end{aligned} \tag{10.70}$$

である．他は，10.2 節と同じようにして求まる．

A_1 の場合

$$F_0 = \frac{1.6769}{0.0106} = 158.2 \tag{10.71}$$

$$\mathrm{f}_1 \times F_0{}^2 = 1\times158.2^2 = 25027 \tag{10.72}$$

$$\mathrm{f}_2 = 6 \tag{10.73}$$

$$F_l = 4.85 \tag{10.74}$$

$$F_u = 3.09 \tag{10.75}$$

$$\frac{1}{0.9}\left\{\frac{158.2}{4.85}-1\right\} \leq \eta \leq \frac{1}{0.9}\{158.2\times3.09-1\}$$

これから

$$35.1 \leq \eta \leq 542$$

デシベル単位で

$$15.4 \leq \eta(A_1) \leq 27.3 \ (\mathrm{db}) \tag{10.76}$$

A_2 の場合

$$F_0 = \frac{4.3494}{0.0102} = 426.4 \tag{10.77}$$

$$\mathrm{f}_1 \times F_0{}^2 = 1\times426.4^2 = 181825 \tag{10.78}$$

$$\mathrm{f}_2 = 6 \tag{10.79}$$

$$F_l = 4.85 \tag{10.80}$$

$$F_u = 3.09 \tag{10.81}$$

$$\frac{1}{0.9}\left\{\frac{426.4}{4.85}-1\right\} \leq \eta(A_2) \leq \frac{1}{0.9}\{426.4\times3.09-1\}$$

$$96.6 \leq \eta(A_2) \leq 1\,457$$

デシベル単位で

$$19.8 \leq \eta(A_2) \leq 31.6 \text{ (db)} \tag{10.82}$$

したがって, A_1 と A_2 の比較は (10.83), (10.84) 式のようになる.

エスエヌ比

$$A_1 \quad 22.4^{-7.0}_{+4.9} \text{ (db)} \tag{10.83}$$

$$A_2 \quad 26.7^{-6.9}_{+4.9} \text{ (db)} \tag{10.84}$$

A_1 と A_2 の間の有意差検定は, A_1 の方のプラス側の信頼限界の幅 4.9 と A_2 の方のマイナス側の信頼限界の幅 −6.9 の 2 乗和の平方根と, A_1 と A_2 のエスエヌ比の差を比較する.

$$\sqrt{(4.9)^2+(-6.9)^2}=8.5 \tag{10.85}$$

この値は, 差 (26.7−22.4)=4.3 デシベルより大きいから, A_1 と A_2 の間には有意差は認められないことになる.

10.3.4 含有率の推定

A_1 法, A_2 法のおのおので, アルコール含有量xを推定してみよう. それには, 付表7の公式を用いる.

A_1 の場合

$$m=\frac{T}{8}=\frac{9.01}{8}=1.126 \tag{10.86}$$

$$\beta=\frac{-3y_1-y_2+y_3+3y_4}{10r_0h_0}$$

$$=\frac{-3(0.94)-1.88+2.84+3(3.35)}{10\times2\times0.3}=1.365 \tag{10.87}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-1.5\times h_0=\frac{1.126}{1.365}-1.5\times0.3$$

$$=0.82-0.45=0.37 \text{ (\%)} \tag{10.88}$$

また, この信頼限界は付表7のxに対する n_e を用いて

$$\text{真の含有量}=x\pm\sqrt{F\times V_e\times\frac{1}{n_e}} \tag{10.89}$$

ここに, F は分子の自由度1 (これは1個の含有量を推定するためで, その自由度はいつでも1である), 分母の自由度が誤差分散 V_e の自由度の 5% F値. いまの場合, 分子の自由度 1, 分母の自由度6であるから, その F の値は 5.99 である. V_e は誤差分散の値, $1/n_e$ は付表7のxに対する公式から得られる.

$$x=0.37$$

$$F_6^1(0.05)=5.99$$

$$V_e=0.0106$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_e}&=\left\{\frac{1}{4r_0}+\frac{1}{5r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\\&=\left\{\frac{1}{4\times2}+\frac{1}{5\times2\times0.3^2}\left(\frac{1.126}{1.365}\right)^2\right\}\times\left(\frac{1}{1.365}\right)^2\\&=\left\{\frac{1}{8}+\frac{(0.824)^2}{0.9}\right\}\times\frac{1}{1.365^2}\\&=0.472\end{aligned}\tag{10.90}$$

を代入して

$$\begin{aligned}\text{真のアルコール含有量}&=0.37\pm\sqrt{F_6^1\times V_e\times\left(\frac{1}{n_e}\right)}\\&=0.37\pm\sqrt{5.99\times0.0106\times0.472}\\&=0.37\pm0.17\end{aligned}\tag{10.91}$$

A_2 の場合

$$m=\frac{17.41}{8}=2.18\tag{10.92}$$

$$\beta=\frac{-3\times2.20-3.87+5.18+3\times6.16}{10\times2\times0.3}=2.20\tag{10.93}$$

$$x=\frac{2.18}{2.20}-1.5\times0.3=0.54\tag{10.94}$$

したがって，A_2 法によるアルコールの含有量の真値 M は

$$\begin{aligned}M&=x\pm\sqrt{F\times V_e\times\left\{\frac{1}{4r_0}+\frac{1}{5r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right\}\left(\frac{1}{\beta}\right)^2}\\&=0.54\pm\sqrt{5.99\times0.0102\times\left\{\frac{1}{4\times2}+\frac{1}{5\times2\times0.3^2}\times\left(\frac{2.18}{2.20}\right)^2\right\}\frac{1}{2.20^2}}\\&=0.54\pm0.12\end{aligned}\tag{10.95}$$

もし，A_1 法，A_2 法による x の推定値の間に有意差があるかどうかを見たいときには，それぞれの信頼限界の幅の2乗の和の平方根と二つの推定値の差を比較すればよい．

$$\text{二つの推定値の差}=0.54-0.37=0.17\tag{10.96}$$

$$\begin{aligned}\text{二つの信頼限界の幅の 2 乗和の平方根}&=\sqrt{(0.17)^2+(0.12)^2}\\&=0.21\end{aligned}\tag{10.97}$$

(10.97) 式より (10.96) 式の方が小さいから，二つの推定値の間には有意差はないことになる．

また，A_1 の方法を用いて，ある品物の一回の測定値 y から，アルコールの含有量を推定したときの信頼限界は，単位数に1が加わって次のようになる．ただし，かたよりはゼロとする．β の単位数を r_0S として

$$\text{真値}=\frac{y}{\beta}\pm\sqrt{F\times\left[1+\frac{1}{r_0\cdot S\cdot h_0^2}\left(\frac{y}{\beta}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\beta}\right)^2} \tag{10.98}$$

10.4　摩耗試験の例

次の例は，参考文献 (1) の 25.5 節からとったリレー用積層板の摩耗試験* である．表 10.7 は，40 種類の異なった製造条件** (直交表 L_{32} と L_8 の直和実験) で作った40枚の積層板について洋白線で摩擦をして摩耗させた結果の摩耗データである．

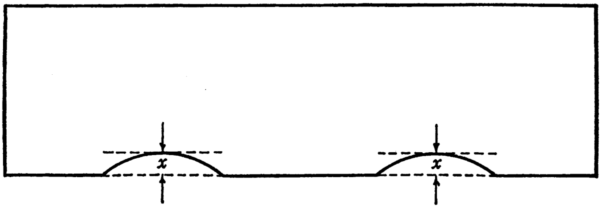


図 10.2　摩耗試験の拡大図

積層板を洋白線で2カ所摩耗させた結果は，たとえば図 10.2 のようになる．図 10.2 の品物をプロジェクターで拡大し，**摩耗深さ**を読みとる．各板について2カ所ずつ測ったので，1〜40 の各板について2つずつ測定値があることになる．それが表 10.7 の x_1，x_2 である．

一方，摩耗深さそのものではなく，摩耗量としては，**摩耗面積**のほうが良いのではないかという意見が出た．しかし，摩耗面積を直接プロジェクターで拡大して測定するのは読

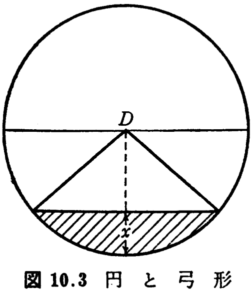


図 10.3　円 と 弓 形

* 日本電気三田工場　　** 住友ベークライト尼崎工場

表 10.7 摩耗試験のデータ

積層板の製造条件	摩耗深さのデータ (単位 0.001mm) x_1	x_2	換算による摩耗面積のデータ (単位 0.01 mm^2) y_1	y_2
1	98	120	2.85	3.82
2	88	88	2.43	2.43
3	93	110	2.64	3.37
4	130	115	4.49	3.60
5	95	125	2.74	4.06
6	140	145	4.75	5.00
7	125	118	4.06	3.76
8	93	85	2.63	2.33
9	90	88	2.53	2.43
10	78	78	2.03	2.03
11	95	85	2.74	2.33
12	105	118	3.16	3.72
13	88	98	2.43	2.85
14	83	88	2.23	2.43
15	128	113	4.17	3.48
16	90	113	2.53	3.48
17	128	130	4.17	4.49
18	120	110	3.82	3.37
19	123	95	3.93	2.74
20	0	113	0	3.48
21	115	123	3.60	3.93
22	118	130	3.76	4.49
23	103	80	3.05	2.13
24	128	105	4.17	3.16
25	90	78	3.53	2.03
26	115	108	3.60	3.28
27	93	103	2.64	3.05
28	103	135	3.06	4.52
29	108	123	3.28	3.93
30	103	120	3.06	3.82
31	135	120	4.52	3.82
32	115	130	3.60	4.49
33	133	138	4.39	4.68
34	105	90	3.16	2.53
35	88	110	2.43	3.37
36	95	100	2.74	2.95
37	98	108	2.85	3.28
38	93	78	2.64	2.03
39	113	125	3.48	4.06
40	93	100	2.64	2.95

* 20 番ゼロという値については，技術的に棄てるかどうかが明白でなかったので，棄てていない．

（注） 統計的な方法で棄てるかどうかを決めるのには大きな疑問がある．統計的棄却法をこういうところで使うのは間違っている．

みとりが困難であるから，図 10.3 の関係を利用して，摩耗深さのデータから，計算で出そうというのである．

この図 10.3 の場合，D は摩耗試験に用いた洋白線の直径である．したがって，摩耗深さが x になった摩耗面積を，斜線の弓形部分のものとして計算して出そうというわけである．その換算式は初等幾何の問題で

$$\text{摩耗面積}\quad y=\left(\frac{D}{2}\right)^2\left[\cos^{-1}\left(1-\frac{2x}{D}\right)-2\left(1-\frac{2x}{D}\right)\sqrt{\frac{x}{D}\left(1-\frac{x}{D}\right)}\right] \qquad (10.99)$$

を各xの値毎に計算すればよい．実際には，xの各値について表を作り，その表を用いてyが求められた．それが表 10.7 の y_1, y_2 の値である．

この場合，このような試験方法が，ある種の摩耗を測っていることは，誰でも納得するに違いない．しかし，ワイヤースプリング・リレーに用いられたときの摩耗そのものを代表しているかどうかの妥当性となると，疑問が全然ないというわけにはゆかない．この場合，上のような洋白線でこすることによる摩耗が少ない品物は，ワイヤースプリング・リレーに組み込まれた場合でも摩耗が少ないだろうから，妥当性もあると考えてよさそうだが，リレーに組み込まれてからの摩耗と完全な対応関係にあるかどうか，は疑問ということになる．

妥当性に少しの疑問があっても，摩耗深さxと摩耗面積yとの妥当性の程度はまったく等しい．すなわち，xで妥当ならyでも妥当ということになる．このようにある値xとそれから単調な変換で移れる特性値yとの妥当性は等しいのだから，xとyの優劣は，エスエヌ比のみで比較することが可能になる．

表 10.7 の実験例を用いて，摩耗深さxと摩耗面積yのエスエヌ比を比較してみよう．

（1） 摩耗深さのエスエヌ比

積層板の 40 枚を M_1, M_2, ……, M_{40} とする．

$$S_M=\frac{1}{2}[(98+120)^2+(88+88)^2+\cdots\cdots+(93+100)^2]-\frac{(\text{合計})^2}{80}$$

$$=23839 \qquad (f=39) \qquad (10.100)$$

$$V_M=\frac{S_M}{39}=611.3 \qquad (10.101)$$

$$S_e=\frac{1}{2}[(98-120)^2+(88-88)^2+\cdots\cdots+(93-100)^2]$$

$$=10834 \qquad (f=40) \qquad (10.102)$$

$$V_e=\frac{10834}{40}=270.8 \qquad (10.103)$$

したがって，エスエヌ比 η_1 は

$$\eta_1=\frac{\frac{1}{2}(611.3-270.8)}{270.8}$$

$$=0.63$$

$$=-2.0\,(\text{db}) \qquad (10.104)$$

（2） 摩耗面積のエスエヌ比

$$S_M=\frac{1}{2}[(2.85+3.82)^2+(2.43+2.43)^2+\cdots\cdots+(2.64+2.95)^2]-\frac{(\text{合計})^2}{80}$$

$$=42.0647 \qquad (f=39) \tag{10.105}$$

$$V_M=\frac{42.0647}{39}=1.136 \tag{10.106}$$

$$S_e=\frac{1}{2}[(2.85-3.82)^2+(2.43-2.43)^2+\cdots\cdots+(2.64-2.95)^2]$$

$$=15.0049 \qquad (f=40) \tag{10.107}$$

$$V_e=\frac{15.0049}{40}=0.3751 \tag{10.108}$$

$$\eta_2=\frac{\frac{1}{2}(V_M-V_e)}{V_e}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1.136-0.3751)}{0.3751}$$

$$=0.938$$

$$=-0.3\,(\text{db}) \tag{10.109}$$

したがって，摩耗面積のほうが摩耗深さより

$$-0.3-(-2.0)=1.7\,(\text{db}) \tag{10.110}$$

だけエスエヌ比が良いことになる．このことはyのほうがxより約1.5倍エスエヌ比が良いことになるから，各テストピースについて3カ所摩耗試験を行ない，摩耗深さxを測り，その平均をとったときの精度と，各テストピースについて2カ所のみ摩耗試験を行ない，摩耗深さxを測り，換算式でyを求め，平均をとったときの精度が等しいことを示している．したがって，どちらのほうが手間が少ないかを問題にすれば良い．xからyへの換算は，換算表ができさえすれば，数秒の時間で求まる．もう一カ所摩耗試験をするには，多くの時間と経費がかかることになるから，この場合摩耗面積でデータを表現すべきである．

このように，ある特性値xがおおむね妥当と考えられるとき，その特性xの単調な関数

$$y=f(x) \tag{10.106}$$

のエスエヌ比をxのエスエヌ比と比較することによって，試験方法の能率化をはかることはしばしばやって見る価値のあるものである．**エネルギー不滅の原理が成立することを考えれば，おおむね有効なエネルギー量あるいは実効的仕事量のようなものをとったとき，エスエヌ比が最も大きくなるのではないだろうか．**それは著者のもっている予想である．

たとえば，この積層板の摩耗試験の例では

(1) 摩耗深さ x の場合

$$r=2 \text{（各積層板について繰返えし数は 2 である）}$$

$$F_0=\frac{V_M}{V_e}=\frac{611.3}{270.8}$$

$$=2.26$$

$$f_1=39$$

$$f_2=40$$

$$f_1\times F_0^2=39\times 2.26^2=199$$

$$F_l=1.69$$

$$F_u=1.56$$

したがって

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{2.26}{1.69}-1\right\}\leq\eta_1\leq\frac{1}{2}\{2.26\times 1.56-1\}$$

$$0.17\leq\eta_1\leq 1.26$$

または，デシベルを用いて，0.17＝−7.7 (db)，1.26＝1.0 (db) だから

$$\eta_1=-2.0^{-5.7}_{+3.0}\,(\mathrm{db}) \tag{10.111}$$

(2) 摩耗面積の場合

$$r=2$$

$$F_0=\frac{1.136}{0.3751}=2.88$$

$$f_1=39$$

$$f_2=40$$

$$f_1\times F_0^2=39\times 2.88^2=324$$

$$F_l=1.68$$

$$F_u=1.53$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{2.88}{1.68}-1\right\}\leq\eta_2\leq\frac{1}{2}\{2.88\times 1.53-1\}$$

$$0.36\leq\eta_2\leq 1.70$$

$$\eta_2=-0.3^{-4.1}_{+2.6}\,(\mathrm{db}) \tag{10.112}$$

(10.111), (10.112) 式に示したように，誤差の自由度がかなりあっても，エスエヌ比の信頼限界には，数デシベル程度，すなわち 3 分の 1 位かも知れないし，2 倍かも知れない程度の誤差があるのが普通である.

演 習 問 題

問 (10.1)　ある成分の比色分析において，発色剤 A を

$$A_1=8 \qquad A_2=10 \qquad A_3=12$$

の3水準にとり，2つの品物 M_1, M_2 の吸光度を4回ずつ測った結果は次のようであった.

	A_1	A_2	A_3
M_1	0.104, 0.100 0.101, 0.096	0.121, 0.119 0.116, 0.123	0.138, 0.142 0.144, 0.136
M_2	0.113, 0.110 0.103, 0.104	0.136, 0.138 0.128, 0.125	0.149, 0.148 0.143, 0.144

エスエヌ比を求め

(1)　発色剤の最適量を求めよ.

(2)　エスエヌ比の信頼限界を求めよ.

問 (10.2)　タイヤのダイナミックアンバランス量を測定する3種のバランサーマシン A_1, A_2, A_3 がある．あるタイヤのアンバランス量を x(未知) とする．そのタイヤのアンバランス量を故意に直線的に変える方法として，タイヤの一定の場所にパッチをはりつける方法がある．いまそのようなパッチとして，アンバランス量が $+0.5\,\mathrm{kg}\,\omega$ (ω は角速度)，$+1.0\,\mathrm{kg}\,\omega$ になるようにして，R_1, R_2 の2人で測定したデータは次のようであった ($h=0.5\,\mathrm{kg}\,\omega$ である).

		$M_1=x$	$M_2=x+h$	$M_3=x+2h$
A_1	R_1	0.15	0.75	1.20
	R_2	0.10	0.65	1.15
A_2	R_1	0.20	0.60	1.10
	R_2	0.10	0.60	1.20
A_3	R_1	0.25	1.00	1.60
	R_2	0.60	0.70	1.40

(1)　A_1, A_2, A_3 の SN 比を比較せよ.

(2)　A_1, A_2, A_3 の各マシンで x を推定し，その信頼限界を求めよ.

問 (10.3)　2つの時計 A_1, A_2 について，時報に合わせ，その後3時間おきに誤差を測ったデータは次のようであった．ただし，測定は2回行なわれた.

(1)　A_1 と A_2 ではどちらが何倍良い時計であるかを，M の1次効果を信号とし，残りを誤差分散とした SN 比から求めよ.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
A_1	5	12	16	25	31	36	40	43
	3	9	12	18	19	21	27	30
A_2	−5	−2	−5	0	5	−3	−6	−8
	6	4	−2	8	5	4	6	0

（２） 時計の誤差の比較の試験方法を計画せよ．

注

(10.1) SN 比の信頼限界　SN 比の信頼限界の近似式を求めよう．分散比 F_0

$$F_0=\frac{\text{要因変動}\div\text{要因の自由度}}{\text{誤差変動}\div\text{誤差の自由度}}$$

において，要因変動を S_M，その自由度を f_1，誤差変動を S_e，その自由度を f_2 とする．

S_M と S_e の期待値について

$$E(S_M)=f_1\sigma^2+f_1r\sigma_M{}^2 \tag{*10.1}$$

$$E\{S_e\}=f_2\sigma^2 \tag{*10.2}$$

が成立する．もちろん S_M は品物間の変動である．

S_e は自由度 f_2 のカイ 2 乗分布である（少なくとも近似的にそういう分布であると仮定する）が，S_M は非心カイ 2 乗分布（少なくとも近似的にそうであると仮定する）である．自由度 f_2 のカイ 2 乗分布のモーメントについて

$$E\left(\frac{S}{\sigma^2}\right)=f_2 \tag{*10.3}$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S}{\sigma^2}\right)=2f_2 \tag{*10.4}$$

が成立する．S_M には一定の値 $r_1\sigma_M{}^2$ の部分があるのだが，区間 (0, ∞) で分布するのだから，S_M に適当な定数を掛け，1 次，2 次のモーメントがカイ 2 乗分布の場合の関係 (*10.3)，(*10.4) 式になるようにしてカイ 2 乗分布で近似しようというのである．正規分布で近似する代りに，マイナスを含まないカイ 2 乗で近似するほうが，より実際的であると考えられるのである．

$$E\left(\frac{S_M}{\sigma^2}\right)=f_1+f_1r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2} \tag{*10.5}$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_M}{\sigma^2}\right)\fallingdotseq 2f_1 \tag{*10.6}$$

であるから，S_M に定数 K を掛けたものの期待値と分散は

$$E\left(\frac{KS_M}{\sigma^2}\right)=K\left(f_1+f_1r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right) \tag{*10.7}$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{KS_M}{\sigma^2}\right)=2f_1K^2 \tag{*10.8}$$

である．(*10.8) 式の値が (*10.7) 式の値の 2 倍になるように K を決めれば

$$K\left(f_1+f_1r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right)=f_1K^2$$

これから

$$K=1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2} \tag{*10.9}$$

これを (*10.7) 式に代入すれば

$$E\left\{\frac{\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]}{\sigma^2}S_M\right\}=\mathrm{f}_1\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]^2 \tag{*10.10}$$

すなわち

$$\chi^2=\frac{\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]}{\sigma^2}S_M \tag{*10.11}$$

は近似的に自由度が $\mathrm{f}_1\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]^2$ のカイ 2 乗分布をすることになる. したがって

$$F=\frac{\frac{\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]}{\sigma^2}S_M\div\text{その自由度}}{\frac{S_e}{\sigma^2}\div\mathrm{f}_2}=\frac{\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]S_M\div\mathrm{f}_1\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]^2}{V}$$

$$=\frac{\frac{S_M}{\mathrm{f}_1}\times\frac{1}{\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]}}{V} \tag{*10.12}$$

は, 近似的に分子の自由度 $\mathrm{f}_1[1+r\sigma_M{}^2/\sigma^2]^2$, 分母の自由度 f_2 の F 分布をすることになる.

実際には $1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}$ は不明だが

$$E\left(\frac{S_M}{\mathrm{f}_1}\right)=\sigma^2+r\sigma_M{}^2 \tag{*10.13}$$

$$E\left(\frac{S_e}{\mathrm{f}_2}\right)=\sigma^2 \tag{*10.14}$$

だから

$$F_0=\frac{S_M/\mathrm{f}_1}{S_e/\mathrm{f}_2}\doteqdot\frac{\sigma^2+r\sigma_M{}^2}{\sigma^2}=1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2} \tag{*10.15}$$

である.

これから (*10.12) 式の F は近似的に分子の自由度 $\mathrm{f}_1F_0{}^2$, 分母の自由度 f_2 の F 分布をする. したがって F の値は信頼度 95% で

$$\frac{1}{F_u(0.025)}\leq F\leq F_l(0.025) \tag{*10.16}$$

が成立する. (*10.12) 式の F を代入すれば

$$\frac{1}{F_u(0.025)}\leq\frac{\frac{\frac{S_M}{\mathrm{f}_1}}{\left[1+r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\right]}}{V}\leq F_l(0.025) \tag{*10.17}$$

各項の逆数をとり F_0 を掛け, 各辺から 1 を引いて

$$F_u(0.025)\times F_0-1\geq r\frac{\sigma_M{}^2}{\sigma^2}\geq\frac{F_0}{F_l(0.025)}-1 \tag{*10.18}$$

$\eta=\sigma_M{}^2/\sigma^2$ とおき, r で割れば

$$\frac{1}{r}\left(\frac{F_0}{F_l}-1\right)\leq\eta\leq\frac{1}{r}(F_u\times F_0-1) \tag{*10.19}$$

(10.2)　推定値 x の有効反復数 n_e の求め方

$$\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}}=\frac{m+\hat{m}-m}{\beta+\hat{\beta}-\beta}=\frac{m}{\beta}\left[1+\frac{\hat{m}-m}{m}\right]\left[1+\frac{\hat{\beta}-\beta}{\beta}\right]^{-1}$$

$$=\frac{m}{\beta}\left[1+\frac{\hat{m}-m}{m}\right]\left[1-\frac{\hat{\beta}-\beta}{\beta}+\cdots\cdots\right] \tag{*10.20}$$

$(\hat{m}-m)/m$，$(\hat{\beta}-\beta)/\beta$ が，十分小さいならば，(*10.20) 式は

$$\fallingdotseq\frac{m}{\beta}\left[1+\frac{\hat{m}-m}{m}\right]\left[1-\frac{\hat{\beta}-\beta}{\beta}\right]\fallingdotseq\frac{m}{\beta}+\frac{\hat{m}-m}{\beta}+\frac{m}{\beta^2}(\hat{\beta}-\beta) \tag{*10.21}$$

したがって，x の分散は，近似的に (*10.21) 式の分散であり

$$\mathrm{Var}(x)\fallingdotseq\frac{1}{\beta^2}\mathrm{Var}(\hat{m}-m)+\frac{m^2}{\beta^4}\mathrm{Var}(\hat{\beta}-\beta)$$

$$\fallingdotseq\left[\frac{1}{kr}+\frac{1}{rSh^2}\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right)^2 \tag{*10.22}$$

である．

これから，次の公式が得られる．

$$x=\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}}-\frac{k-1}{2}h_0\pm\sqrt{F\times V_e\left[\frac{1}{kr}+\frac{1}{rSh^2}\cdot\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\beta}}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right)^2} \tag{*10.23}$$

11. SN 比 (2)，官能検査などの計量値でない場合

定性分析，うまい，大差なし，まずいなどの定性的評価の場合の SN 比の解析法を示し，定性的評価方法の改善を議論する．

11.1 銘柄の識別テスト

次のデータは，木村文比古君（当時青山学院大学経営工学科3年）の調査によるデータである．

3種類のウイスキーを

M_1＝ブラックアンドホワイト（スコッチウイスキー）

M_2＝サントリーオールド（サントリーウイスキー）

M_3＝オールドテーラー（バーボンウイスキー）

とする．同君の意見によるとサントリーは少々いぶした樽のにおいがするが，スコッチはいぶりくさ さがややうすく，かおりが口中に広がってゆくそうである．バーボンは，アメリカのウイスキーで，ライ麦を原料としているので，薬くさいようなにおいとややきつい口当りがあるのではっきりと区別がつきやすいそうである．

いま，上記の3種の銘柄の区別がどの程度できるかについて，3人の人間

A_1＝ウイスキーを常に飲んでいる人

A_2＝ウイスキーをたまにしか飲まない人

A_3＝全然ウイスキーの味を知らない人

で，名前当てをしてもらった．

テストの方法は，上記の3種のウイスキーの味を覚えさせるために名前を教えて味見をさせる．味見がすんだ後で水で口の中を洗い，においを消してもらう．そのあとで M_1, M_2, M_3 の3種のウイスキーの名前を当ててもらう．表 11.1 はそれを毎日1反復ずつ10日間やってもらったデータである．

11.1.1 度数法による解析

表 11.1 のような名前当ての場合には，度数法による解析を用いて，エスエヌ比が求め

られる．ただし，度数法が用いられるのは，M_1, M_2, M_3 の間に，何も順序のない場合で，チョコレートの銘柄当て，次に出すジャンケンのカミ，イシ，ハサミのどれかを当てる問題などである．

表 11.1　ウイスキーの銘柄当てのテスト（数字はMの水準）

A_1 のデータ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
実　際	3	1	2	1	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
答えたもの	3	1	2	1	3	2	1	2	3	2	3	1	3	1	2

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
実　際	3	3	2	2	2	1	3	2	3	1	2	3	1	1	2
答えたもの	3	3	1	2	2	1	3	2	3	1	2	3	1	1	2

A_2 のデータ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
実　際	1	2	1	1	3	2	3	2	3	3	3	1	3	1	2
答えたもの	1	1	3	2	3	2	3	1	3	1	3	1	3	2	2

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
実　際	2	3	2	1	2	1	3	2	2	3	1	3	1	1	2
答えたもの	1	3	3	2	1	2	1	2	2	3	3	1	3	3	1

A_3 のデータ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
実　際	1	2	2	1	3	1	1	2	2	3	2	3	1	3	1
答えたもの	1	2	1	1	3	3	2	2	1	3	1	3	1	3	1

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
実　際	2	3	3	1	1	2	2	3	3	2	2	3	1	3	1
答えたもの	2	3	1	1	2	2	2	3	3	1	2	3	2	2	2

天気予報の場合には，もし天候を５組

M_1＝晴れ

M_2＝晴れたり曇ったり

M_3＝曇り

M_4＝曇り時に雨

M_5＝雨

に分類したときには，そこに一定の順序がある．それは，味見試験の場合，まずい，ややまずい，差がない，ややうまい，うまいとする場合と同じである．そのような順序がある場合には，度数法でなくて 11.3 節に述べる累積法で計算しなければならない．また，胃ガンの診断のような場合でも

M_1＝胃ガン

M_2＝胃ガンの疑いあり，精密検診を要す

M_3＝胃ガンの疑いなし

としたときには，順序があるから，累積法の計算になる．それは，M_1 を M_3 と誤った場合と，M_1 を M_2 と誤った場合では誤りの重要度が全く異なるからである．度数法は，そのような序列が全く無い場合にのみ用いられる解析法である．

11.1.2 味見試験のデータ解析

表 11.1 のデータを整理すると表 11.2 のようになる．

表 11.2 整理したデータ

A_1 のデータ

Output / Input	(1) M_1	(2) M_2	(3) M_3	計
M_1	9	1	0	10
M_2	1	9	0	10
M_3	0	0	10	10
計	10	10	10	30

A_2 のデータ

Output / Input	(1) M_1	(2) M_2	(3) M_3	計
M_1	2	4	4	10
M_2	5	4	1	10
M_3	3	0	7	10
計	10	8	12	30

A_3 のデータ

Output / Input	(1) M_1	(2) M_2	(3) M_3	計
M_1	5	4	1	10
M_2	4	6	0	10
M_3	1	1	8	10
計	10	11	9	30

A_1 の場合

いま，アウトプットすなわち実験データにおいて，(1) 組（スコッチウイスキーと答えたもの）のデータを考える．(1) 組に入っていれば 1，入っていなければ 0 というデータに対して，S_M を

$$S_M=\frac{9^2+1^2+0^2}{10}-\frac{10^2}{30} \tag{11.1}$$

で定義する．

同様に，(2) 組と (3) 組についても，それらの組に入っていれば 1，入っていなければ 0 というデータに対して，S_M は次のようにして求められる．

$$S_M=\frac{1^2+9^2+0^2}{10}-\frac{10^2}{30} \tag{11.2}$$

$$S_M=\frac{0^2+0^2+10^2}{10}-\frac{10^2}{30} \tag{11.3}$$

(11.1)，(11.2)，(11.3) 式の 3 つの変動を総合して，1 つの S_M を求めるには，それらのものさしを合わせる必要がある．その場合，6 章で述べたように，各組の誤差分散の逆数で重みを定義すればよい．しかしながら，(1)，(2)，(3) の各組ごとに分散分析をし，誤差分散を求め，それらの値の逆数から重み w_1, w_2, w_3 を求めるには，3 回分散分析を行ない，そのあとで総合の分散分析をしなければならないことになる．

4 回もの分散分析を強要するなら，実際家はたまったものではない．したがって，分散分析をすることなしに，(1)，(2)，(3) の各組の誤差分散を求めることはできないかという問題になる．(1) 組に入っていると答えた割合は，30 回中，10 回なのだから，それはまれな現象ではない．したがって，(1) 組の誤差分散 $\sigma_{\mathrm{I}}{}^2$ は，ポアッソンの誤差分散ではなく，2 項の誤差分散を用いた方が望ましいことになる．

$$\sigma_{\mathrm{I}}{}^2=p_{\mathrm{I}}(1-p_{\mathrm{I}})=\frac{10}{30}\left(1-\frac{10}{30}\right) \tag{11.4}$$

したがって，その重み w_1 は

$$w_1=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{I}}{}^2}=\frac{30^2}{10\times 20}=4.5 \tag{11.5}$$

同様に，第 (2)，第 (3) 組の重み w_2, w_3 は

$$w_2=4.5 \tag{11.6}$$

$$w_3=4.5 \tag{11.7}$$

これから，総合した S_M は

$$S_M=\left(\frac{9^2+1^2+0^2}{10}-\frac{10^2}{30}\right)\times w_1+\left(\frac{1^2+9^2+0^2}{10}-\frac{10^2}{30}\right)\times w_2+\left(\frac{0^2+0^2+10^2}{10}-\frac{10^2}{30}\right)\times w_3$$

$$=\frac{(9^2+1^2+0^2)\times4.5+(1^2+9^2+0^2)\times4.5+(0^2+0^2+10^2)\times4.5}{10}$$

$$-\frac{10^2\times4.5+10^2\times4.5+10^2\times4.5}{30}$$

$$=118.80-45.00$$

$$=73.80 \qquad (\mathrm{f}=2+2=4) \qquad (11.8)$$

(1) 組の全変動は

$$S_T=10-\frac{10^2}{30} \qquad (11.9)$$

同様に (2), (3) の各組の全変動も

$$S_T=10-\frac{10^2}{30} \qquad (11.10)$$

$$S_T=10-\frac{10^2}{30} \qquad (11.11)$$

(11.9), (11.10), (11.11) 式は A_1 のデータでは偶然同じになったが, 一般には A_2, A_3 の場合のように同じにはならない.

$$S_T=\left(10-\frac{10^2}{30}\right)\times w_1+\left(10-\frac{10^2}{30}\right)\times w_2+\left(10-\frac{10^2}{30}\right)\times w_3$$

$$=90 \qquad (\mathrm{f}=29\times2=58) \qquad (11.12)$$

したがって, 誤差変動 S_e は, (11.12) 式の全変動 S_T から (11.8) 式の品物間の変動 S_M を引いて

$$S_e=S_T-S_M=90-73.80=16.20 \qquad (\mathrm{f}=54) \qquad (11.13)$$

分散分析表は表 11.3 のようになる. ただし, 分散の期待値において, σ^2 は元の分散が $p(1-p)$ に比例する比例定数を, ${\sigma_M}^2$ は 2 項誤差分散をものさしとしたときの自由度 1 当りの大きさを表わす分散である.

表 11.3 A_1 の 分 散 分 析

要 因	f	S	V	$E(V)$
M	4	73.80	18.45	$\sigma^2+10{\sigma_M}^2$
e	54	16.20	0.300	σ^2
T	58	90.00		

$$\eta=\frac{{\sigma_M}^2}{\sigma^2}\doteqdot\frac{\frac{1}{10}(V_M-V_e)}{V_e}$$

$$=\frac{\frac{1}{10}(18.45-0.300)}{0.300}$$

$$=6.05$$
$$=7.8\ (\mathrm{db}) \qquad (11.14)$$

同様にして，A_2，A_3 のエスエヌ比を求める．

A_2 の場合

$$\left.\begin{aligned} w_1&=\frac{30^2}{10(30-10)}=4.50 \\ w_2&=\frac{30^2}{8(30-8)}=5.11 \\ w_3&=\frac{30^2}{12(30-12)}=4.17 \end{aligned}\right\} \qquad (11.15)$$

$$\mathrm{CF}=\frac{10^2\times 4.50+8^2\times 5.11+12^2\times 4.17}{30}$$
$$=45.91 \qquad (f=2) \qquad (11.16)$$

$$S_M=\frac{2^2+5^2+3^2}{10}\times 4.50+\frac{4^2+4^2+0^2}{10}\times 5.11+\frac{4^2+1^2+7^2}{10}\times 4.17-\mathrm{CF}$$
$$=60.97-45.91$$
$$=15.06 \qquad (f=4) \qquad (11.17)$$

$$S_T=3\times 30=90 \qquad (f=58) \qquad (11.18)$$

$$S_e=90-15.06=74.94 \qquad (f=54) \qquad (11.19)$$

$$V_M=\frac{S_M}{4}=\frac{15.06}{4}=3.68 \qquad (11.20)$$

$$V_e=\frac{S_e}{54}=\frac{74.94}{54}=1.39 \qquad (11.21)$$

$$\eta_1=\frac{\frac{1}{10}(3.68-1.39)}{1.39}$$
$$=0.165$$
$$=-7.8\ (\mathrm{db}) \qquad (11.22)$$

A_3 の場合

$$\left.\begin{aligned} w_1&=\frac{30^2}{10(30-10)}=4.50 \\ w_2&=\frac{30^2}{11(30-11)}=4.31 \\ w_3&=\frac{30^2}{9(30-9)}=4.76 \end{aligned}\right\} \qquad (11.23)$$

$$\mathrm{CF}=\frac{10^2\times 4.50+11^2\times 4.31+9^2\times 4.76}{30} \qquad (11.24)$$

$$=45.21$$

$$S_M=\frac{(5^2+4^2+1^2)\times4.50+(4^2+6^2+1^2)\times4.31+(1^2+0^2+8^2)\times4.76}{10}-\mathrm{CF}$$

$$=27.47 \qquad (\mathrm{f}=4) \qquad (11.25)$$

$$S_T=90 \qquad (\mathrm{f}=58) \qquad (11.26)$$

$$S_e=90-27.47$$

$$=62.53 \qquad (\mathrm{f}=54) \qquad (11.27)$$

$$V_M=\frac{27.47}{4}=6.87 \qquad (11.28)$$

$$V_e=\frac{62.53}{54}=1.16 \qquad (11.29)$$

$$\eta=\frac{\frac{1}{10}(6.87-1.16)}{1.16}=0.492$$

$$=-3.1\ (\mathrm{db}) \qquad (11.30)$$

11.1.3 結　論

3人の人間，A_1，A_2，A_3 の銘柄当てのエスエヌ比は

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\ \ 7.8\ (\mathrm{db})\\A_2&=-7.8\ (\mathrm{db})\\A_3&=-3.1\ (\mathrm{db})\end{aligned}\right\} \qquad (11.31)$$

となった．数値としては，A_1 は A_2 より 15.6 デシベル，36 倍，A_3 より 10.9 デシベル，12.3 倍判別力が大きいことを意味する．計量値の場合は，1 桁精度が高いと 20 デシベルエスエヌ比が大きいのだが，この場合 A_1 の人は，A_2 の人 36 人で調査したものと同じ位の精度の高い判別能力を持っていることになる．

A_1，A_2，A_3 間に有意な差があるかどうかは，エスエヌ比の信頼限界から求める．

A_1 の場合

$$V_M=18.45$$

$$V_e=0.300$$

$$F_0=\frac{18.45}{0.300}=61.5$$

$$\mathrm{f}_1\times F_0^2=4\times61.5^2=15.130$$

$$F_l=1.52$$

$$F_u=1.42$$

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{61.5}{1.52}-1\right\}\leq\eta\leq\frac{1}{10}\{61.5\times1.42-1\}$$

$$3.95 \leq \eta \leq 8.63$$

$$6.0 \leq \eta \leq 9.4 \text{ (db)} \tag{11.32}$$

A_2 の場合

$$V_M = 3.68$$

$$V_e = 1.39$$

$$F_0 = \frac{3.68}{1.39} = 2.65$$

$$\mathrm{f}_1 \times F_0{}^2 = 4 \times 2.65^2 = 28$$

$$F_l = 1.88$$

$$F_u = 2.00$$

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{2.65}{1.88} - 1\right\} \leq \eta \leq \frac{1}{10}\{2.65 \times 2.00 - 1\}$$

$$0.043 \leq \eta \leq 0.43$$

$$-13.7 \leq \eta \leq -3.7 \text{ (db)} \tag{11.33}$$

A_3 の場合

$$V_M = 6.87$$

$$V_e = 1.16$$

$$F_0 = \frac{6.87}{1.16} = 5.93$$

$$\mathrm{f}_1 \times F_0{}^2 = 4 \times 5.93^2 = 140$$

$$F_l = 1.60$$

$$F_u = 1.53$$

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{5.93}{1.60} - 1\right\} \leq \eta \leq \frac{1}{10}\{5.93 \times 1.53 - 1\}$$

$$0.27 \leq \eta \leq 0.81$$

$$-5.7 \leq \eta \leq -0.9 \text{ (db)} \tag{11.34}$$

したがって, A_1, A_2, A_3 のエスエヌ比は, 表 11.4 のようになる.

表 11.4 A_1, A_2, A_3 のエスエヌ比

A_1	$7.8^{-1.8}_{+1.6}$	(db)
A_2	$-7.8^{-6.0}_{+4.1}$	(db)
A_3	$-3.1^{-2.6}_{+2.2}$	(db)

A_1 と A_2 の有意差検定

A_1 のマイナス側，$7.8-18=6.0$ と，A_2 のプラス側，$-7.8+4.1=-3.7$ の間に差があるから，A_1 と A_2 には危険率 5% で有意な差がある．

A_1 と A_3 の有意差検定

A_1 のマイナス側，$7.8-1.8=6.0$ と，A_3 のプラス側，$-3.1+2.2=-0.9$ の間に差があるから，A_1 と A_3 も危険率 5% で有意差がある．

A_2 と A_3 の有意差検定

A_2 のプラス側，$-7.8+4.1=-3.7$ と，A_3 のマイナス側，$-3.1-2.6=-5.7$ の間には，差はないから，さらに次の計算をする．A_2 と A_3 のエスエヌ比 η の差

$$-3.1-(-7.8)=4.7 \text{ (db)} \tag{11.35}$$

と，A_2 のプラス側と A_3 のマイナス側の信頼幅の2乗和の平方根とを比較する．

$$\sqrt{(+4.1)^2+(-2.6)^2}=4.9 \tag{11.36}$$

A_2 と A_3 のエスエヌ比の間には危険率 5% で有意な差はないことになる．

11.2 ビールの味による識別能力テスト，繰返えし数不揃いの場合

タバコを飲む人とタバコを飲まない人で，ビールの味見試験の識別能力がいくら異なるかを，エスエヌ比を計算して求める．前者から8人，後者から5人の人を選び，2回にわたって3種のビールについて判定させた．

（1） 制御因子 A_1＝タバコを飲む人
A_2＝タバコを飲まない人

（2） 信号因子 M_1＝ア サ ヒ
M_2＝キ リ ン
M_3＝サントリー

（3） 誤差因子 R_1＝第 1 回 目
R_2＝第 2 回 目

11.2.1 デ ー タ

各人に，まず銘柄を知らせた上で，M_1, M_2, M_3 を飲ませた．そのあと口をすすいだのち，3種のビール（実は3種とも同じ銘柄かも知れないし，全部異なっているかも知れない）を飲ませて銘柄を当てさせたものである．

表 11.5　デ ー タ

A_1 のデータ

アウトプット（縦の見出し：インプット）

R_1	M_1	M_2	M_3	計
M_1	4	4	1	9
M_2	4	3	2	9
M_3	2	0	4	6
計	10	7	7	24

R_2	M_1	M_2	M_3	計
M_1	5	4	1	10
M_2	2	4	1	7
M_3	1	0	6	7
計	8	8	8	24

計	M_1	M_2	M_3	計
M_1	9	8	2	19
M_2	6	7	3	16
M_3	3	0	10	13
計	18	15	15	48

A_2 のデータ

アウトプット（縦の見出し：インプット）

R_1	M_1	M_2	M_3	計
M_1	4	0	0	4
M_2	1	3	0	4
M_3	0	0	7	7
計	5	3	7	15

R_2	M_1	M_2	M_3	計
M_1	2	1	0	3
M_2	1	5	0	6
M_3	2	1	3	6
計	5	7	3	15

計	M_1	M_2	M_3	計
M_1	6	1	0	7
M_2	2	8	0	10
M_3	2	1	10	13
計	10	10	10	30

11.2.2　エスエヌ比の計算

度数法で計算する.

(1)　A_1 のエスエヌ比

重み w_1, w_2, w_3 を求める.

$$w_1=\frac{48^2}{18\times(48-18)}=4.267$$

$$w_2=\frac{48^2}{15\times33}=4.655$$

$$w_3=\frac{48^2}{15\times33}=4.655$$

全変動 S_T は

$$S_T=\left(18-\frac{18^2}{48}\right)w_1+\left(15-\frac{15^2}{48}\right)w_2+\left(15-\frac{15^2}{48}\right)w_3$$

$$=48+48+48$$

$$=144 \qquad (f=94) \qquad (11.37)$$

品物間の変動 S_M は

$$S_M=\left(\frac{9^2}{19}+\frac{6^2}{16}+\frac{3^2}{13}-\frac{18^2}{48}\right)\times w_1+\left(\frac{8^2}{19}+\frac{7^2}{16}+\frac{0^2}{13}-\frac{15^2}{48}\right)\times w_2$$

$$+\left(\frac{2^2}{19}+\frac{3^2}{16}+\frac{10^2}{13}-\frac{15^2}{48}\right)\times w_3$$

$$=0.453\times4.267+1.743\times4.655+3.779\times4.655$$

$$=27.64 \qquad (f=4) \qquad (11.38)$$

$$S_e=S_T-S_M=144-27.64=116.36 \qquad (f=90) \qquad (11.39)$$

これらの，A_1 の分散分析表は表 11.6 のようになる．

表 11.6 A_1 の分散分析表

要因	S	f	V	$E(V)$
M	27.64	4	6.91	$\sigma^2+\bar{r}\sigma_M^2$
e	116.36	90	1.29	σ^2
T	144.00	94		

ここに，$\bar{r}$ は，異なった繰返えし数 19，16，13 の調和平均で，次の式で求める．

$$\frac{1}{\bar{r}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{16}+\frac{1}{13}\right)$$

$$=0.0640 \qquad (11.40)$$

$$\eta=\frac{\frac{1}{\bar{r}}(V_M-V_e)}{V_e}=\frac{0.0640(6.91-1.29)}{1.29}$$

$$=0.279$$

$$=-5.4 \text{ (db)} \qquad (11.41)$$

(2) A_2 のエスエヌ比

$$w_1=\frac{30^2}{10\times 20}=4.5$$

$$w_2=\frac{30^2}{10\times 20}=4.5$$

$$w_3=\frac{30^2}{10\times 20}=4.5$$

$$S_T=30+30+30$$

$$=90 \qquad (f=94) \qquad (11.42)$$

$$S_M=\left(\frac{6^2}{7}+\frac{2^2}{10}+\frac{2^2}{13}-\frac{10^2}{30}\right)w_1+\left(\frac{1^2}{7}+\frac{8^2}{10}+\frac{1^2}{13}-\frac{10^2}{30}\right)w_2+\left(\frac{0^2}{7}+\frac{0^2}{10}+\frac{10^2}{13}-\frac{10^2}{30}\right)w_3$$

$$=2.518\times 4.5+3.287\times 4.5+4.359\times 4.5$$

$$=45.74 \qquad (f=4) \qquad (11.43)$$

$$S_e=90.00-45.74=44.26 \qquad (f=54) \qquad (11.44)$$

表 11.7 A_2 の分散分析表

要因	S	f	V	$E(V)$
M	45.74	4	11.44	$\sigma^2+\bar{r}\sigma_M^2$
e	44.26	54	0.820	σ^2
T	90.00	58		

$$\frac{1}{\bar{r}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}\right)$$
$$=0.1066 \tag{11.45}$$

$$\eta=\frac{\frac{1}{\bar{r}}\left(V_M-V_e\right)}{V_e}$$
$$=\frac{0.1066(11.44-0.820)}{0.820}$$
$$=1.38$$
$$=1.4\ (\mathrm{db}) \tag{11.46}$$

11.2.3 結　　論

前節から，たばこを飲む人，飲まない人のエスエヌ比は次のように求められた．

	η	db	利　得
A_1	0.278	-5.6	-7.0
A_2	1.38	1.4	0.0

タバコを飲む人は，飲まない人に比較して，-7.3 db, 約 5.4 分の 1 の判別力しかないことになる．

（1） 有意差検定

A_1, A_2 の間に有意な差があるかどうかを，エスエヌ比の信頼限界から求める．

A_1 の場合

$$\frac{1}{\bar{r}}=0.0640,\quad F_0=\frac{6.91}{1.29}=5.36,\quad \mathrm{f}_1=4,\quad \mathrm{f}_2=90$$

$$\mathrm{f}_1\times F_0^2=4\times 5.36^2=115$$

$$F_l=1.50$$

$$F_u=1.49$$

であるから

$$0.0640\left\{\frac{5.36}{1.50}-1\right\}\leq\eta\leq 0.0640\{5.36\times 1.49-1\}$$
$$0.165\leq\eta\leq 0.447$$
$$-7.2\leq\eta\leq -3.5\ (\mathrm{db})$$
$$\eta(A_1)=-5.6^{-1.6}_{+2.1}\ (\mathrm{db}) \tag{11.47}$$

A_2 の場合

$$\frac{1}{\bar{r}}=0.1066,\quad F_0=\frac{11.44}{0.820}=13.95,\quad \mathrm{f}_1=4,\quad \mathrm{f}_2=54$$

$$f_1 \times F_0{}^2 = 4 \times 13.95^2 = 778$$

$$F_l = 1.63$$

$$F_u = 1.53$$

であるから

$$0.1066\left\{\frac{13.95}{1.63} - 1\right\} \leq \eta \leq 0.1066\{13.95 \times 1.53 - 1\}$$

$$0.806 \leq \eta \leq 2.17$$

$$-0.9 \leq \eta \leq 3.4 \ (\mathrm{db})$$

$$\eta(A_2) = 1.4^{-2.3}_{+2.0} \ (\mathrm{db}) \tag{11.48}$$

A_1 の上限値 -3.5 db は A_2 の下限値 -0.9 db より小さいから A_1 と A_2 には有意な差がある.

11.3　累積法の場合，コーヒーの味覚テスト

11.1，11.2 節で度数法の計算方法を示した．度数法は，銘柄当てなどの序列の無い場合の判別能力などに用いられる．ジャンケンで，次に相手がカミ，イシ，ハサミのどれを出すかを推定（予測）する場合も度数法になる．しかしながら，品物を上位，中位，下位に分類したり，風合いを良い，中位，悪いと3組に分類する場合には，良いを中位と判断する誤りよりは，良いを悪いと判断する誤りの方が重大である．したがって，データの解析ではそのような重大さの違いを考慮した解析が重要になる．それが本節の累積法によるSN 比である.

11.3.1　簡　単　な　例

次の例は，長勇君（当時青山学院大学経営工学科2年）のコーヒーの味覚テストのデータである．表 11.8 は

　A：コーヒーの種類　$A_1=N$ 社，$A_2=M_1$ 社，$A_3=M_2$ 社

　B：ミルクの種類　$B_1=$クリープ，$B_2=$牛乳（雪印）

の二元配置で作られた6種類のコーヒーについて，6人の人間 R_1, R_2, ……, R_6 に味覚を上，中，下に分類してもらったデータである．試験の目的は，インスタントコーヒー3種の比較と，クリープと牛乳のどちらがよりおいしいかを見るためであった．しかし，ここでは，エスエヌ比の比較のデータとしては，少なくともこの2倍位のデータがほしいが，6人の人間の味覚テストに対するエスエヌ比を比較してみよう．第1日目と第2日目の2回にわたって，分類してもらったデータは，表 11.8 のようである.

表 11.8　味覚テストのデータ

	R_1		R_2		R_3		R_4		R_5		R_6	
A_1B_1	中	下	中	下	中	下	中	上	中	中	中	上
A_1B_2	上	中	上	上	上	上	上	上	上	中	上	中
A_2B_1	下	中	下	中	下	上	下	中	下	下	下	上
A_2B_2	中	下	中	中	上	中	下	下	下	下	中	中
A_3B_1	下	下	中	下	中	下	下	下	中	下	下	中
A_3B_2	下	中	中	上	下	下	下	下	中	中	下	下

R_1 のエスエヌ比

	上	中	下	I	II	III
$M_1=A_1B_1$	0	1	1	0	1	2
$M_2=A_1B_2$	1	1	0	1	2	2
$M_3=A_2B_1$	0	1	1	0	1	2
$M_4=A_2B_2$	0	1	1	0	1	2
$M_5=A_3B_1$	0	0	2	0	0	2
$M_6=A_3B_2$	0	1	1	0	1	2
計	1	5	6	1	6	12

累積法では，最後の組は計算しない．

$$w_1=\frac{12^2}{1\times 11}=13.1$$

$$w_2=\frac{12^2}{6\times 6}=4.0$$

$$\mathrm{CF}=\frac{1^2\times w_1+6^2\times w_2}{12}$$

$$=\frac{13.1+36\times 4.0}{12}=13.1 \qquad (f=2) \qquad (11.49)$$

$$S_T=\left(1-\frac{1^2}{12}\right)\times\frac{12^2}{1\times 11}+\left(6-\frac{6^2}{12}\right)\times\frac{12^2}{6\times 6}$$

$=12+12$

$=$試験回数$\times$解析している組数

$=12\times 2$

$$=24.0 \qquad (11.50)$$

$$S_M=\frac{(0^2+1^2+0^2+0^2+0^2+0^2)\times 13.1+(1^2+2^2+1^2+1^2+0^2+1^2)\times 4.0}{2}-\mathrm{CF}$$

$$=\frac{13.1+32.0}{2}-13.1=9.5 \qquad (11.51)$$

$$S_e=S_T-S_M=24.0-9.5=14.5 \tag{11.52}$$

$$V_M=\frac{S_M}{10}=\frac{9.5}{10}=0.95 \tag{11.53}$$

$$V_e=\frac{14.5}{12}=1.21 \tag{11.54}$$

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{\frac{1}{2}(V_M-V_e)}{V_e}=\frac{\frac{1}{2}(0.95-1.21)}{1.21}\\&=-0.11\\&=0\ \text{（とする）}\end{aligned} \tag{11.55}$$

エスエヌ比ηは，理論的には，負になることはないのだが，誤差があるために負になることがある．その場合には，エスエヌ比ηはゼロ，db で $-\infty$ とするのが普通である．

R_2 のエスエヌ比

	上	中	下	I	II	III
A_1B_1	0	1	1	0	1	2
A_1B_2	2	0	0	2	2	2
A_2B_1	0	1	1	0	1	2
A_2B_2	0	2	0	0	2	2
A_3B_1	0	1	1	0	1	2
A_3B_2	1	1	0	1	2	2
計	3	6	3	3	9	12

$$w_1=\frac{12^2}{3\times 9}=5.3$$

$$w_2=\frac{12^2}{9\times 3}=5.3$$

$$\mathrm{CF}=\frac{3^2\times 5.3+9^2\times 5.3}{12}=398$$

$$S_T=12\times 2=24.0$$

$$S_M=\frac{5\times 5.3+15\times 5.3}{2}-\mathrm{CF}=13.2$$

$$S_e=24.0-13.2=10.8$$

$$V_M=\frac{13.2}{10}=1.32$$

$$V_e=\frac{10.8}{12}=0.90$$

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}(1.32-0.90)}{0.90}$$

$$=0.23$$

$$=-6.4\ (\mathrm{db}) \qquad (11.56)$$

R_3 のエスエヌ比

	上	中	下	I	II	III
A_1B_1	0	1	1	0	1	2
A_1B_2	2	0	0	2	2	2
A_2B_1	1	0	1	1	1	2
A_2B_2	1	1	0	1	2	2
A_3B_1	0	1	1	0	1	2
A_3B_2	0	0	2	0	0	2
計	4	3	5	4	7	12

$$w_1=\frac{12^2}{4\times 8}=4.5$$

$$w_2=\frac{12^2}{7\times 5}=4.1$$

$$\mathrm{CF}=\frac{4^2\times 4.5+7^2\times 4.1}{12}=22.7$$

$$S_T=24.0$$

$$S_M=\frac{6\times 4.5+11\times 4.1}{2}-\mathrm{CF}=13.3$$

$$S_e=24.0-13.3=10.7$$

$$V_M=\frac{13.3}{10}=1.33$$

$$V_e=\frac{10.7}{12}=0.89$$

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}(1.33-0.89)}{0.89}$$

$$=0.25$$

$$=-6.0\ (\mathrm{db}) \qquad (11.57)$$

R_4 のエスエヌ比

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}(1.92-0.40)}{0.40}$$

$$=1.90$$

$$=2.8\ (\mathrm{db}) \qquad (11.58)$$

R_5 のエスエヌ比

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}(1.54-0.72)}{0.72}$$
$$=0.57$$
$$=-2.4\ (\mathrm{db}) \tag{11.59}$$

R_6 のエスエヌ比

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}(1.47-0.78)}{0.78}$$
$$=0.44$$
$$=-3.6\ (\mathrm{db}) \tag{11.60}$$

したがって，6人の人間のエスエヌ比の一覧表は表 11.9 のようになる．

表 11.9 味覚テストのエスエヌ比

	η	db		η	db
R_1	0.00	$-\infty$	R_4	1.90	2.8
R_2	0.23	-6.4	R_5	0.57	-2.4
R_3	0.25	-6.0	R_6	0.44	-3.6

官能検査では，人間が試験機であるから，各人ごとのエスエヌ比が重要になる．R_1 の人はコーヒーの味の識別能力が全く無いのかも知れないということになる．R_2～R_6 の人は識別能力があるのだから，R_1 の人のデータを除いて，残りの人で味の優劣に対する分散分析をした方がよい．

演 習 問 題

問 (11.1)　2人の人間 A_1, A_2 のタバコに対する判定能力を調べるために，M_1＝ピース，M_2＝ホープ，M_3＝ハイライトについて，10回にわたり名前当てをさせた結果は次のようであった．

	判定 A_1	M_1	M_2	M_3	計
実際	M_1	6	2	2	10
	M_2	4	4	2	10
	M_3	3	1	6	10
	計	13	7	10	30

A_2	M_1	M_2	M_3	計
M_1	8	2	0	10
M_2	1	7	2	10
M_3	2	2	6	10
計	11	11	8	30

A_1 と A_2 の SN 比を比較せよ．

問 (12.2)　3社 M_1, M_2, M_3 のチョコレートについて何れもミルク，ブラックの2種類 V_1, V_2 がある．女性4人，男性 10 人で味見をし，上，中，下に分けたデータは次のようであった．

	A_1 (女子)				A_2 (男子)			
	上	中	下	計	上	中	下	計
M_1V_1	2	0	2	4	0	5	5	10
M_1V_2	0	3	1	4	0	6	4	10
M_2V_1	1	3	0	4	6	4	0	10
M_2V_2	0	2	2	4	1	5	4	10
M_3V_1	3	1	0	4	0	5	5	10
M_3V_2	1	1	2	4	4	5	1	10

A_1, A_2 の SN 比を比較し，結果を説明せよ．

問 (12.3)　官能検査について，妥当性と SN 比の意味を考えよ．

12. 計算実験（シミュレーションによる計算法）と市場実験

統計解析，数値計算などのデータ解析も高度のものになると，回帰分析，共分散分析，多元配置的な計算のみではうまくゆかない．基本的に多変数近似法である直交表による計算実験が有要になる．この問題を一般的に説明することは紙数の制限からできない．直交表の知識を仮定して，ほんの入口を紹介することにしよう．

12.1 シミュレーションによる回帰分析，事務の作業分析の例

月ロケットを打ち上げたとき，ロケットが完全に目標軌道をたどっているなら問題はない．もし，目標軌道からはずれるようなことがあったとき，われわれがやらなければならないことに２つの面がある．

（１） 軌道修正．

（２） 次の打上げのときには，目標軌道からのずれが少なくなるようにする．

この中で (1) は当面すぐ行なわなければならない処置である．しかし修正処置だけをうまくやったのでは，次の打上げのときにも同じような誤りがおこることになる．次回の打上げのときには，目標軌道からのずれが小さくなるようにするには，自分達の計算式の誤りを修正しなければならない．すなわち，ロケットの軌道の計算式の中で，空気抵抗を0.01% 過少に見積もったのか，軌道計算式の中のある項の係数の大きさを過大に見積もりすぎたのか，またはロケットの出力のパワーを10000 分の１小さく見積もったためなのかを知りたいことになる．

実験は一回だけの打上げしかなくても，１時間おきにロケットの位置を観測すれば，２日間で 48 組の空間座標 x, y, z の値が得られる．空気抵抗とか，項の係数とかをいろいろに変えた下での計算値と観測値の差の２乗和を求め，その値が有意に小さくなる計算式を見つけ出そうというわけである．この場合，１回の実験しかしなくても，計算公式の方をいろいろに変えて多くの計算値を出すことになる．すなわち，自分の方の式を変えてみるという実験である．このような方法を計算実験とか，シミュレーションによる回帰分析

とか，シミュレーションによる関数近似ということにする．

12.1.1　事務の作業分析の例

この会社には，全国に 188 の支店がある．支店のある係が行なっている仕事の種類を 10 種類（第 10 番目として，その他としてもよい）に分類し，ある日（またはある週，ある月）のそれらの仕事をやった件数を x_1, x_2, ……, x_{10} とする．i 番目（$i=1, 2, \cdots\cdots, 10$）の仕事の標準作業時間を a_i，余裕時間を m とする．しからば，その日のその係の全作業時間 y（これは出勤人員に昼休みを除いた勤務時間を掛けたものでよい．残業があるときにはそれらも加える）を次のように表わすことにした．

$$y=m+a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_{10}x_{10} \tag{12.1}$$

188 の支店について，ある日の仕事の件数と，その日の総労働時間を報告してもらったデータは，表 12.1 のようであった．

表 12.1　事務処理件数と合計作業時間

支店＼事務	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	作業時間（分）
1	32	60	2	94	0	269	95	20	1	79	1 555
2	5	7	13	1	31	6	32	3	5	1	1 645
3	47	31	23	4	146	40	78	3	4	1	1 915
4	62	64	37	4	59	77	525	34	45	3	1 230
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
188	55	74	75	5	96	97	52	44	9	2	2 250

12.1.2　最小 2 乗法の欠点

188 組のデータに，最小 2 乗法を適用して回帰式を求めた結果は次のようになった．

$$\begin{aligned} y=&646.50+8.77x_1+4.82x_2+1.37x_3+10.22x_4+2.36x_5+0.63x_6\\ &+0.49x_7+1.05x_8-1.99x_9+19.70x_{10}\ \text{（分）} \end{aligned} \tag{12.2}$$

$$\sigma=409\ \text{（分）} \tag{12.3}$$

この場合，x_9 の係数がマイナスになったということは困ったことである．また，仕事の担当者は，事務 x_1 と事務 x_2 の作業時間には 1 件当りたかだか 30% 位の差はあるかも知れないが，8.77 分と 4.82 分のように 2 倍近い差があるのはおかしいという意見であった．最小 2 乗法を適用するとき，未知数 m, a_1, a_2, ……, a_{10} は区間 $(-\infty, +\infty)$ のすべての値をとり得るという前提の下で計算している．また，x_1 の事務件数が多い支店では x_2 の事務件数も多いというように，x_1, x_2, ……, x_{10} のとる値の間には高度の相関があるのが普通である．そのような場合には，未知数 a_1, a_2, ……, a_{10} の推定精度が悪くなり，殆どでたらめに近い係数の値が得られることになる．

最小2乗法のそのような欠点を除くには，次の2つの点を考慮した未知数推定法を開発しなければならない.

（1） **未知数の存在範囲について制限を与える.**

（2） **担当者の予想値と計算して出した推定値の間に大きな差(有意な差)がない限り，担当者の予想値を正解とする.**

この2つの条件を満たす解析法が，次に述べる計算実験，またはシミュレーションによる回帰分析である．実際の計算には DAP-S のようなプログラムが有用である.

12.1.3 シミュレーションによる回帰分析

まず，未知数について，それらの存在範囲の最小値，中央値，最大値の3水準を作る．これらの範囲は正確な限り，できるだけ範囲を狭くとった方がよい．この場合，mについては水準を作らず，a_1, a_2, ……, a_{10} について表 12.2 のように水準をとった.

表 12.2 水準の初期値（単位 分）

$a_{11}=1.00$	$a_{12}=4.00$	$a_{13}=7.00$
$a_{21}=1.00$	$a_{22}=4.00$	$a_{23}=7.00$
$a_{31}=0.00$	$a_{32}=2.00$	$a_{33}=4.00$
$a_{41}=0.00$	$a_{42}=2.00$	$a_{43}=4.00$
$a_{51}=0.00$	$a_{52}=2.50$	$a_{53}=5.00$
$a_{61}=0.00$	$a_{62}=2.00$	$a_{63}=4.00$
$a_{71}=0.00$	$a_{72}=2.00$	$a_{73}=4.00$
$a_{81}=0.00$	$a_{82}=2.00$	$a_{83}=4.00$
$a_{91}=0.00$	$a_{92}=5.00$	$a_{93}=10.00$
$a_{10\,1}=0.00$	$a_{10\,2}=10.00$	$a_{10\,3}=20.00$

これらを**直交表** L_{27} の第1列から，第 10 列に表 12.3 のようにわりつけた．この場合，交互作用を平等化するため，L_{36} のような直交表の方が良い．直交表 L_{27} は，次の 27 種類の回帰式の計算を指示している.

$$\text{No. 1}\quad y=m+a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots\cdots+a_{10\,1}x_{10}$$
$$=m+1.00x_1+1.00x_2+\cdots\cdots+0.00x_{10} \tag{12.4}$$

$$\text{No. 2}\quad y=m+a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots\cdots+a_{10\,2}x_{10}$$
$$=m+1.00x_1+1.00x_2+\cdots\cdots+10.00x_{10} \tag{12.5}$$

$$\vdots$$

$$\text{No. 27}\quad y=m+a_{13}x_1+a_{23}x_2+\cdots\cdots+a_{10\,3}x_{10}$$
$$=m+7.00x_1+7.00x_2+\cdots\cdots+20.00x_{10} \tag{12.6}$$

188 組の x_1, x_2, ……, x_{10} の値を No. 1 の式の右辺に代入し，左辺の総労働時間 y の

表 12.3　直交表 L_{27} によるわりつけ

列 / No.	a_1 1	a_2 2	a_3 3	a_4 4	a_5 5	a_6 6	a_7 7	a_8 8	a_9 9	a_{10} 10	11	12	13	T	S
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	266 316	46 898 232
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	122 274	48 861 379
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	−21 767	131 920 490
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	195 725	40 614 392
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1	51 684	56 253 320
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2	13 287	121 268 533
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2	125 134	45 902 091
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3	86 738	47 202 613
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	−57 304	131 210 776
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	68 875	104 242 034
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1	102 248	47 833 678
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2	83 309	48 955 768
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2	12 102	116 739 979
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3	107 409	40 503 988
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1	41 806	49 487 758
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1	58 970	108 980 770
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2	107 612	42 421 082
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	26 739	57 322 744
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	53 186	65 667 385
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3	34 248	97 985 023
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1	67 620	39 847 867
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1	10 054	55 218 117
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	19 180	106 172 080
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3	67 823	43 715 547
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3	43 281	64 383 925
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1	−22 322	115 036 656
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2	77 985	35 893 469

観測値との差を求めれば，188 個の m の推定値 ε_1, ε_2, ……, ε_{188} が得られる．ε_1, ε_2, ……, ε_{188} の合計を T, 変動を S とする．

$$T=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots+\varepsilon_{188} \tag{12.7}$$

$$S=\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\cdots+\varepsilon_{188}^2-\frac{T^2}{188} \tag{12.8}$$

もし，No. 1 の式が実際によくあてはまる式ならば，ε_1, ε_2, ……, ε_{188} の値の間にはそれほど大きなバラツキはないことになる．したがって，S の値は比較的小さい値になるべきである．ただし，店の規模差が非常に大きいときには，上の ε の代りに，余裕時間は総作業時間の平方根に比例するという考えで出した次の ε を求める方がよいだろう．

$$\varepsilon=\frac{y-(a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots\cdots+a_{10\ 1}x_{10})}{\sqrt{a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots\cdots+a_{10\ 1}x_{10}}} \tag{12.9}$$

同様に No. 2 から No. 27 までの式に対してもTとSの値を求める．

実際の計算は，DAP-S によって横山巽子氏が求めたものである．データは，表 12.3 のデータ欄に示してある．

これからあとの計算は，普通の直交表の場合と同様に，各列の水準別にSの値の合計を作ることになる．それが表 12.4 である．

表 12.4　水準別のSの和

水準 / a	1	2	3
1	670 131 820	616 487 790	623 920 050
2	632 211 840	629 973 700	648 354 110
3	641 510 430	634 481 770	634 547 460
4	649 725 870	630 361 100	630 452 700
5	648 646 910	602 269 810	659 622 940
6	608 374 740	601 736 960	700 427 960
7	383 630 340	493 353 010	103 556 330
8	635 939 830	631 679 530	642 920 290
9	602 906 500	627 241 280	680 391 880
10	647 669 640	643 546 650	619 323 370

各未知数について，3 水準間の比較をする．たとえば a_{11} と a_{12} の比較は，両者のSの和，670131820 と 616487790 の差を 9 で割ったものを，最小 2 乗法の誤差分数 V_e で割ることになる．最小 2 乗法の回帰式の係数は信用できなくても，誤差分散は信用できるのである．

$$F_0=\frac{\frac{1}{9}(670\,131\,820-616\,487\,790)}{166\,927}$$
$$=35.7$$

分散比がどれだけあったら，有意差があることにするかは意見の分かれるところである．推定論の立場からは，$F_0=2\sim3$ でもよいと考えられるが，ここではFは通常のF表を用いることにした．この場合，分子の自由度 1，分散の自由度 (188−11)=177 のF表の値と比較して，危険率 1% で有意差があることになる．

3 水準間の有意差検定には 13 通りの場合が生ずる．その 13 通りの各場合に対して，第 2 回目の水準が表 12.5 のようにとられる．

表 12.5 は No. 1 のように 3 水準間に有意差がなかったら，もう一度その同じ 3 水準で，

第2回目の計算を行なうことを示している．No. 2は，第1水準と第2水準に有意差はなく，第3水準とは何れも有意に変動が小さいときには，第1水準，第1水準と第2水準の中間（1.5），第2水準を改めて，第2回目の第1，第2，第3水準に選ぶことを示している．2.5は第2水準と第3水準の中間値の水準という意味である．

表 12.5 新しい水準のつくり方

第2回目の計算のための水準のとり方（数字は水準，等式は有意差なし，不等式は有意差あり）				
No.	場合	新しい水準		
1	1=2=3	1	2	3
2	1=2<3	1	1.5	2
3	1=2>3	2	2.5	3
4	1=3>2	1.5	2	2.5
5	1=3<2	1	2	3
6	2=3>1	1	1.5	2
7	2=3<1	2	2.5	3
8	1<2<3	1	1.5	2
9	1<3<2	1	2	3
10	2<1<3	1.5	2	2.5
11	2<3<1	1.5	2	2.5
12	3<1<2	1	2	3
13	3<2<1	2	2.5	3

第2回目の計算実験を行ない，同様の繰返えしを行なう．このようにしてすべての水準間に有意な差がなくなるときまで，計算実験をつづけることになる．ただし，もともとのデータに桁違いなどの誤りがあると，収束がうまくゆかないことがおこる．それを防ぐためには，20回で計算をストップする，20回目の計算値と観測値の差を支店毎に調べる，等の吟味を行なうのがよい．

この問題の場合には，第4回目で有意差はなくなった．最後の回の3水準の中に，もし，自分の最初の予想値が入っていれば，それを最適解，自分の予想値が含まれていないときには，変動が最小になった水準の値を最適解とする．この場合その式は次のようであった．

$$y=608.85+5.50x_1+4.00x_2+3.00x_3+4.00x_4+2.50x_5+1.25x_6$$
$$+0.50x_7+1.50x_8+1.25x_9+20.0x_{10}\ (分) \tag{12.10}$$
$$\sigma=420\ (分) \tag{12.11}$$

この結果には，最小2乗解のような矛盾を含んでいないのである．そしてそのことは実際家にとって非常に大切なことである．

12.2 経営における企画問題への応用

12.2.1 計 算 実 験

直交表による計算は，多変数の効果（差分）を求める問題として，企画，技術，科学，数学の各分野でおこる数値計算の問題に応用することができる．たとえば，設計上その効果を調べたい多数のパラメーターを含む連立偏微分方程式の解法などにうまく利用できる．ここには，経営企画への簡単な応用例を紹介するにとどめる．ある期，たとえば第 92 期の途中までの経験から，第 93 期の企画問題を考える．

企画を立てるとは，いろいろな経済条件や手段を与えて，その下での利益額を試算することである．実際の企画では，60 前後の因子が考えられるが，ここでは表 12.6 の 13 個の因子のみを考えたものとする．

表 12.6 因 子 と 水 準

因子 ＼ 水準	1	2	3	備考
A 売上げの伸び率 (%)	2.0	5.0	8.0	
B 投資額(M¥)	1 200	1 600	2 000	検収
C 稼働率 (%)	88	90	92	直接員
D 労務費伸び率 (%)	12.0	13.0	15.0	
E 1カ月実働時間 (hrs)	188	200	212	
F 直材原低率 (%)	0.1	−0.2	−0.5	
G 工数率 (%)	0.0	−5.0	−10.0	
H 間材原低率 (%)	0.10	−0.05	−0.20	
I 製品在庫 (月)	0.45	0.65	0.85	
J 短期借入比率 (%)	19.0	22.0	25.0	
K 長期借入返済率 (%)	22.0	25.0	28.0	
L 原材料在庫 (月)	0.45	0.65	0.85	
M 仕掛品在庫 (月)	0.45	0.65	0.85	

因子の水準の中で，第 2 水準は最も可能性の高い予想値，または本命と考えている手段である．たとえば，Aの第 2 水準の 5% は，いままでの平均伸び率に最近の事情を考慮した予想伸び率で，第 1 水準はその 3% 減，第 3 水準はその 3% 増というようにして水準を作ったものである．60 因子の中の残りの 47 因子については，予想値に固定して計算することになる．もし，それらの 47 因子の中にも，水準を変えてみたいものがあれば，3 水準を作って以下の計算をすることになる．

この 13 個の因子を直交表の L_{27} にわりつけたのが，次の表 12.7 である．

No. 1 は，すべての因子を第 1 水準にとったときの第 93 期の利益額（単位 百万円）の計算値である．このような計算式は，経理計算そのものであるから，その式は加減乗除の

表 12.7　わりつけとデータ

No. ＼ 列番	A 1	B 2	C 3	D 4	E 5	F 6	G 7	H 8	I 9	J 10	K 11	L 12	M 13	データ
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	723
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	759
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	793
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	703
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1	800
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2	792
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2	726
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3	717
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1	712
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	885
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1	744
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2	845
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2	1 000
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3	788
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1	939
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1	885
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2	744
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	859
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	968
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3	1 069
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1	941
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1	857
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	976
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3	824
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3	945
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1	1 100
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2	880

組合せの長い式でしかない．しかし，その式が長いために，中の変数が変化したとき利益がどうなるかの見通しが立ちにくいことになる．その中のある変数を変化させたとき，利益額がどうなるかを，他の変数を第2水準に固定して出したとしても，その値が他の変数が第2水準からずれたときにどうなるかの予想がつかないことになる．ある変数の水準を変えるとどれ位利益額が変わる（差分値）かについて，他の変数の値が第1水準，第2水準，第3水準の範囲で動いても，これだけありますということを断言したいのである．他の変数の条件がこういうときには，売上げの伸びが1％増えると利益額はこれだけ増えますといっても，他の変数の条件が変わったときは，どうなるか全然不明では，信頼性のはっきりしない推定値ということになる．他の変数の条件が第1水準から第3水準の範囲で変化しても，各因子の効果はこれだけは確実にありますというものだけを，企画時に計算

しておくことが望ましいのである.

そのために直交表にわりつけて計算するのである. 27 の各組合せに対して計算した利益額が表 12.7 のデータ欄に示してある. 単位はメガ円, 百万円である.

12.2.2 分散分析と推定

各効果について, 変動の計算をする. たとえばAの場合

$$A_1=723+759+\cdots\cdots+712=6725$$

$$A_2=885+744+\cdots\cdots+859=7689$$

$$A_3=968+1069+\cdots\cdots+880=8560$$

$$S_{A_l}=\frac{(-A_1+A_3)^2}{r(\lambda^2S)}=\frac{(-6725+8560)^2}{9\times2}$$

$$=187068 \tag{12.12}$$

$$S_{A_q}=\frac{(6725-2\times7689+8560)^2}{9\times6}$$

$$=160 \tag{12.13}$$

他の因子の効果についても全く同様に計算をする. また全変動 S_T は

$$S_T=723^2+759^2+\cdots\cdots+880^2-\frac{22974^2}{27}$$

$$=325709 \tag{12.14}$$

この場合1次効果のみが有意である. A, B, C, D, F, G, I の1次項の係数を $b(A)$, ……, $b(I)$ で示す.

$$b(A)=\frac{-A_1+A_3}{r(\lambda S)h_A}\pm\sqrt{\frac{F\times V_e}{rSh_A{}^2}}$$

$$=\frac{-6725+8560}{9\times2\times3}\pm\sqrt{\frac{4.38\times359}{9\times2\times3^2}}$$

$$=34.0\pm3.1 \tag{12.15}$$

すなわち, 売上金額が 1% 伸びると, 約 3400 万円の利益の増である. そしてその値はB以下の条件が, とり上げられた水準の範囲内で変わっても, 約 9% 位しか変わらないことを示している. 有意でない要因は, どの水準でも ±13 M¥ 以上の損得にならないから無視する.

$$b(B)=-2.21 \quad (\text{1億円当り}) \tag{12.16}$$

$$b(C)=12.22 \quad (\text{1\%当り}) \tag{12.17}$$

$$b(D)=-22.7 \quad (\text{1\%当り}) \tag{12.18}$$

$$b(F)=-110.1 \quad (\text{1\%当り}) \tag{12.19}$$

$$b(G)=12.66 \quad (\text{1\%当り}) \tag{12.20}$$

$$b(I)=94.4 \qquad (1\%当り) \qquad (12.21)$$

となる．したがって，A, B, C, D, F, G, I と利益額 y の関係式は

$$y=850.9+34.0(A-5.0)-2.21(B-16)+12.22(C-90)-22.7(D-13.33)$$
$$-110.6(F+0.2)+12.66(G+5.0)+94.4(I-0.65) \qquad (12.22)$$

表 12.8 分散分析表

要　因	f	S	V
A l	1	187 068**	同左
A q	1	160○	〃
B l	1	1 404*	〃
B q	1	74○	〃
C l	1	10 756**	〃
C q	1	216○	〃
D l	1	24 065**	〃
D q	1	530○	〃
E l	1	636○	〃
E q	1	254○	〃
F l	1	19 800**	〃
F q	1	182○	〃
G l	1	72 106**	〃
G q	1	128○	〃
H l	1	940○	〃
H q	1	3○	〃
I l	1	3 698**	〃
I q	1	486○	〃
J l	1	1○	〃
J q	1	913○	〃
K l	1	660○	〃
K q	1	104○	〃
L l	1	235○	〃
L q	1	346○	〃
M l	1	774○	〃
M q	1	170○	〃
e	0	0	〃
○印プール(e)	(19)	(6 812)	(359)
T	26	325 709	

この場合，(12.22)式の使い方は非常に難しい．たとえば投資額を1億円増すと 2.21 M￥のコストアップになるのだが，そのためにいくらGの工数が減るかをみなければならないからである．もしその投資が，省力化のためだけで売上げ等に関係がなく，1億円の投資で，直接員の 0.3% を減らすことができるときには，投資による効果は

$$-2.21+12.66\times 0.3=-2.21+3.80=1.59 \qquad (12.23)$$

で，約159万円の利益増が見込まれることになる．このような計算に使ったり，売上げが予定より伸びなかったときの損失の増大を見積もったりするのに (12.23) 式は役立つのである．

12.3　市場実験，新聞広告実験

簡単な市場実験は，9章でも論じたが，因子が多い場合の実験の仕方を説明しておく．

12.3.1　新聞広告の場合

新聞広告の問題として説明するが，雑誌広告，折込広告，看板，映画館などにおけるスライド，チラシ，小売店対策などにも少し変えただけで使うことができる．記述を容易にするために，新聞広告の例にしたのである．

販売部のスタッフの役割の1つは，もっとも有利な新聞広告の仕方を見出すことである．誰が考えても，少なくとも次のような諸問題を，間違いなく解決することは重要なことである．

(1)　何新聞がもっともよいか．

すなわち，広告の媒体としてのもっとも有利な新聞を決めることである．各種商業新聞の読者層が，ある新聞は比較的インテリ階級に読まれているとか，また他の新聞は農村の読者層が他の新聞より多いとか，一般に異なっているということは，よく知られている事実である．

また，新聞によって配布される部数や，それを見る人間の数が異なり，広告掲載費も異なる．したがって，自社製品の売上げにもっとも有効な新聞社はどれであり，2番目はどれであるというようなことを知っておく必要がある．さらに，A新聞とB新聞は，読者のオーバーラップが少ないから，両方に同時に広告しても，オーバーラップからくる損失はこれぐらいであるというようなことも知っておく必要があるだろう．

(2)　広告のデザインをどうするか．

広告のデザインをどうするかは，目につきやすいということだけでなく，その広告をみてその品物を購入する気を起こさせたり，購入者に好感を持たせるようなものでなければならない．したがって

a.　キャッチフレーズ中心のものにするか

b.　美しい女性や，有名人の写真を中心にしたらよいか

c.　漫画を中心にしたらよいか

d.　解説記事中心のものにしたらよいか

などについて，十分研究をしなければならない．著者の経験によれば，デザインの方針によって，驚くほど大きな売上量の差をもたらすことがあるのである．どれにしても大して経費が異ならないのだから，どの方針でゆくかによって，売上げが 20% も異なるかも知れないのだから，それらの各方針によって，どれぐらい売上げが異なるかを，正確な数字で調べておくことは，非常に大切である．

（3） 広告の大きさや頻度を変えたら，売上量がどのように変わるか．

たとえば，200 万円の広告をしても，それによって売上げが1億円も増し，それに伴ういろいろな経費を差し引いても純益が600万円も増えるならば，それだけの広告費は損はなく，利益を増してくれるのである．さらに広告費を増した場合はどうなるかを調べ，もっともよい広告の経費を決めることも重要である．また，同じ広告費を使うにしても，月1回の大きい広告にするか，半分の広告を月2回にするかは，同様に重要な問題である．

（4） 新聞のどの面がよいか．

（5） 掲載場所は，記事中か，記事下か，一般にどこがよいか．

（6） ウィークデイがよいか，土日がよいか．

（7） 朝夕刊のどちらがよいか．

（8） 月中と月末とどちらがよいか．

これらは，広告担当者にとって，是非とも決めなければならない問題である．

(1)～(8) のような問題を，経験や市場分析によって解くこともある程度可能だろうが，ここには，実験をし，実証的なデータをとって解決する方法を述べることにする．

12.3.2 因子と水準

前項に述べたような，比較したいいくつかの方法を持っている各ファクターは，実験の場合と同じく因子と呼ばれている．(2) の a, b, c, d のように，4種類の方針を比較したいときに，その因子は4水準であるという．今調査の仕方を説明するために，次の7個の因子を，とり上げたとしよう．それら各因子を A, B, C, D, E, F, G とする．

A: 媒体

A_1=X 紙による現在の方法

A_2=X 紙の代りに，Y紙を使ったとき

B: 広告のデザイン

B_1=キャッチフレーズ中心

B_2=美しい女性の写真を中心

B_3=漫画を中心

B_4＝解説記事を中心

C: 広告の大きさ

C_1＝3 段 1/2

C_2＝3 段 1/4

D: 頻度

C_1 については，D_1＝月 1 回，D_2＝月 2 回

C_2 については，D_1＝月 2 回，D_2＝月 4 回

すなわち，Dは頻度なのであるが，D_1 は少ない方，D_2 は多い方で，C_1 なら 1 回と 2 回，C_2 なら 2 回と 4 回を比較する．

E: 地方紙

E_1＝地方紙Zを併用しないとき

E_2＝地方紙Zを併用したとき

F: 曜日

F_1＝ウィークデイ

F_2＝土日

G: 価格記入の有無

G_1＝価格を記入しない

G_2＝価格を記入する

一般に，交互作用に対してあまり神経質になる必要はない．著者の経験によればそのような交互作用はあってもそれほど大きくなく，簡単に見出せる場合でない限り，交互作用をだすために，あまり複雑な大規模な実験をするのはうまい方法ではない．

さらに，層別因子として

V: 自社製品の普及度

V_1＝よい県

V_2＝悪い県

R: 県の性格

R_1＝大都市または工業率の高い方の県

R_2＝その他

の 2 つをとり上げたものとしよう．

12.3.2 いろいろな注意

広告の場合にも，1 次因子，2 次因子などの区別が必要になることが少なくない．たと

えば，ラジオ，テレビなどによる宣伝の場合には，空間的にかなり広い面積の地域に，同時に同じ種類の宣伝が行なわれる．たとえ，府県ごとにある地方放送を使うにしても，その受信地域の最小単位は，府県とか，その半分ぐらいになる．しかしながら，ラジオと同時に，宣伝車による売込み，チラシによる販売などの宣伝の実験もやりたいときには，宣伝車の使い方，たとえば乗車人員，放送の仕方，配布するチラシの種類などや，チラシの配り方，チラシの大きさ，内容，色，折込用の媒体，折込費の支給のありなしなどは，せまい地区ごとに異なった手がうてるのだから，２次因子，３次因子ということになる．もちろん，ラジオ広告についての実験のみが目的であれば，他の広告については，特別なことはせずに，普通のように行なっていればよいのである．

その代り，**標示因子のとり上げ方と実験の確率化**が，工場の実験よりももっと重要である．標示因子としては，自社製品の売上量のパーセント，人口１人当りの売上高，普及度などが大地域に対してとり上げられ，少し小さな地区では，その地域のいろいろな特殊性，たとえば，商店街，住宅街，混合街，工場街，農業地区などに層別することになる．さらに小売店を対象とする実験は，薬品，電気製品，繊維製品などの場合，買い手が店主の言葉に左右されることが多いので，非常に重要なことになるが，その場合には小売店の自社製品に対する協力程度，規模，自社製品の取扱い率，地域条件などが重要な層別因子になる．小売店に対する制御因子は，もちろんマージンの考え方，看板，ネオン灯などの広告用品の配布，招待戦術，支払い方法，特約店化などの因子である．因子によっては小売店に対する実験に秘密を要するものがあるので，実験上いろいろな手段を講じなければならないだろう．とくに，自社製品の値段をどうするかの問題である．たとえば，地域によって自社製品の配布数量を変えるとか，特売方式をうまくとらせることによって値段を無理なく変えて実験するなどは，そのような序の口のやり方である．

また，実験の確率化や，景気変動に関する取扱いをどのようにするかについては，わりつけの項をみられたい．

12.3.3　わりつけの方法

わりつけをどうするかについては，制御と層別因子に関する限り，普通の実験となんら異ならない．前述の新聞広告の場合ならば，$2^8\times 4^1$ 型であるから，直交表 $L_{16}(2^{15})$ にわりつけることにする．その場合，実験の単位をどうするかは，可能な限り，小地区が実験単位になるようにすべきであるが，新聞広告の場合には，最小限，府県版，地方新聞を使うことになるから，どうしても，府県より単位を小さくすることはできない．しかし，読者が広告内容として，漫画を好むか，キャッチフレーズを好むかは，どの新聞を用いても大

差のない結果がでるのが普通で，A新聞ならキャッチフレーズの方が売上げが増すが，漫画は殆ど増さない．しかしB新聞では逆であるなどという交互作用は少ないので，どんな地方新聞を使っても，媒体をどうするかということを除いては，たいてい全国的に客観的な結論がでるのである．全国的な媒体が問題になる週刊誌，業界紙などによる広告の場合には，媒体間の優劣を，場合によっては，時間方向に3カ月ぐらいを1単位とすることによって，実験をやらなければならないことになる．特殊な景品進呈などによって，読者カードを返送させる方法も一方法だが，そのような人達が本当に製品購入の決定をやる人達であるかどうかは，著者の経験では疑わしいことが多かった．

いま，各因子を次のようにわりふったものとする．

$$\left.\begin{array}{l} A \to 1 \\ B \to 2,\ 4,\ 6 \end{array}\right\} A\times B \to 3,\ 5,\ 7$$

$$C \to 8$$

$$D \to 9$$

$$E \to 10$$

$$F \to 11$$

$$G \to 12$$

$$V \to 13$$

$$R \to 14$$

すなわち，V_iR_j のおのおのから4県ずつ選んで，合計 16 の府県に異なった広告内容の新聞を配ることになる．

たとえば No. 10 のわりつけは

	A	B	AB	B	AB	B	BA	C	D	E	F	G	V	R	e
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
No. 10	2	1	2	—	2	—	2	2	1	2	1	2	1	2	1

V_1R_2 に属する県を1つ選んで，その県には $A_2B_1C_2D_1E_2F_1G_2$ の広告，すなわち Y 紙 (A_2) に，キャッチフレーズ中心の広告 (B_1) を，3段 1/4 (C_2) で，月2回 (D_1)，ウィークデイ (F_1) に，価格記入の方法 (G_2) でだす．その場合，その地方紙 Z にも同様な広告を併行して行なうことになる (E_2)．No. 1 から No. 16 のそれぞれに対して，上のような広告のインストラクションを作らなければならない．更にホール・ソート・カードに上のようなことを記入した方がよい．

12.3.4 調査対象の選択

調査の対象の選択は，それら各府県から通常数軒の小売店を選ぶことになる．たとえば，各府県から，市を２カ所ランダムに選び，それぞれの市内からあまり離れていない２軒ぐらいの小売店を選ぶ．別に市部以外の情報を得るために，その選ばれた２個の都市の近くの町村から，1～2 の小売店を選ぶべきである．それを１軒選んだときには，１府県から小売店が合計６軒選ばれたことになる．

そのような６軒を調査対象になっている他の 15 府県についても選ぶ．合計 15×6=90 軒の小売店が調査されることになる．

調査対象の選択は，ランダムであるよりは，調査のやりやすさに重点をおいて選択する方が望ましい．たとえば，東京都内におけるラジオの売上げを増やすための折込み広告の効果をみる実験においては，東京都内の小売店の地図を作成し，それらの各小売店を数店含むようなブロックに分けるのである．それらの各ブロック内の小売店の数は，必ずしも同じである必要はなく，あるブロックでは７軒，あるブロックでは９軒あってもかまわない．たとえばブロックを 16 カ所ランダムに選んだ後，各ブロックから小売店を４軒選ぶものとする．その場合，選ばれた 16 カ所の小売店の精密な名簿を作り，各ブロック毎にそれらの小売店を，自社に協力的なところ，他社の勢力の強いところとか，規模の大小などによって層に分け，各層すなわち標示因子の各水準から１軒ずつ，計４軒を調査対象に選択するのである．

調査拒否に出会うこともあり得るから，選ばれたブロックについては，現場に行って細かい状況を実験前に調べておいた方がよい．

12.3.5 調 査 項 目

調査内容は，毎月の品目別売上数量である．値引がしばしば行なわれている品物については，同時に売上価格も記入するようにした方がよいだろう．毎月の品目別売上数量を，手紙１本やっただけで教えてくれる小販売店は少ないから，調査員を月１回行かせるようにすべきである．あまり細かい品目は必要でないことが多いから，主力製品とその他の製品に分けた方がよいだろう．

その小売店に対しては，あらかじめそのような調査をすることの許可を受けるべきである．

また，調査データの解析に必要なのは，実験に入るまえの 3～6 カ月の売上高と，実験に入ってからの少なくとも３カ月間の売上高である．

すなわち，店によって規模や地域条件が非常に異なるから，店の個体差を除くために，分析の対象になるデータを，次の比率

$$Y=\frac{\text{実験各月の売上量}}{\text{過去3カ月〜6カ月間の平均の売上量}}$$

にしたいからである．

時期の問題は，あまり深く考える必要はない．何となれば，時期が異なっても，一般にどのような広告の内容が喜ばれるかの傾向に，変化があまりあるはずがないからである．ただ，冷菓，風邪薬などの季節的な品物についての調査を，反対の季節にやらない方がよいことは当り前である．

毎月の売上げを同じ日に調べる必要はないから，1人で数県調査を受け持つことも不可能ではない．数人の調査員の数カ月の調査で，以上の調査を終わらせることができる．

売上げのほかに，いろいろな苦情や，他社製品についてのデータもとっておいた方がよいこともあるが，ここではあまりふれないことにする．

12.3.6 解析の仕方

データの解析の仕方は，普通の実験の場合と同じである．数値計算はすべて，ホール・ソート・カードに記入してやった方がよい．新聞広告の例の場合には，自由度は表 12.9 のようになる．

表 12.9 要因分析

要因	自由度	要因	自由度
一般平均	1	$T\times G$	1
A	1	$T\times V$	1
B	3	$T\times R$	1
$A\times B$	3	e_2	1
C	1	T_1 内（ブロック）	16
D	1	T_2 内（ブロック）	16
E	1	T_1 内（ブロック内）	32
F	1	月	2
G	1	月$\times A$	2
V	1	月$\times B$	6
R	1	月$\times A\times B$	6
1次誤差 e_1	1	月$\times C$	2
T（市内と市外）	1	月$\times D$	2
$T\times A$	1	月$\times E$	2
$T\times B$	3	月$\times F$	2
$T\times A\times B$	3	月$\times G$	2
$T\times C$	1	月$\times V$	2
$T\times D$	1	月$\times R$	2
$T\times E$	1	月$\times T$	2
$T\times E$	1	e_3	160

表 12.9 の分析は，3カ月のデータが集まってからのものだが，1カ月のデータが集まった場合にも分析すべきである．その場合には，月の入った要因がなくなるだけで，それ以外の自由度の配分は変わらない．

12.3.7 推　定

結果の推定をしたり，曲線を求めたりすることは，普通の実験の場合と同様である．なお，しばしば変化を好む人が多いから，女性の写真の方が広告効果が高いとでても，1，2年なら殆ど間違いないとしてよいが，その後は必ずしもそうではないから，因子の水準としては交互にいろいろな広告をする場合も考えておいた方がよいだろう．また，いくら経費をかけたらいくら売れるということがわかっても，必要以上に売るのは無意味であるから，自社製品が常にわずかばかり市場に不足気味になる程度に生産した方がよいことも多い．すなわち，売上高の予想自体はあまり重要でなく，何時も生産高と売上量のバランスを中心にして考えなければならない．**売上高に対する推定よりは，売上げを自由にコントロールできる販売技術を持っている**ことがもっと重要である．

演 習 問 題

問（12.1） 電々公社の保全の陣容をどうするかについて，現在の保全人員が10名，工事用車輌が2台，自動二輪車が6台あるとする．毎日の保全計画は，昨日までに修理できなかった障害と，午前9時までに受けつけた障害について，それをA級とB級に分け，A級かB級かによって

A級障害チーム＝4 人，工事用車輌1台と自動二輪車1台

B級障害チーム＝2 人，工事用車輌1台または自動二輪車2台

を出動させるものとする．B級障害のときは，2人と工事用車輌1台でもよいし，工事用車輌が出はらっているときには，2人と自動二輪車2台のチームでもよい．何れも午前中に1件が片づくものとする．午前中に出動できなかった障害と，午前中に発生したものについては，午後の初めに出動計画を作るものとする．

いま，現在の保全の陣容について，現在（A_1）と，もう少し大きくしたとき（A_2）で，保全サービスがどうなるかを比較する問題を考える．

A_1＝現在の陣容

A_2＝人間を2人増し，工事用車輌を1台増す

A_1 と A_2 で，どれ位，サービスが違うかを調べるのに，過去 20 日間のA級，B級の障害発生件数が次のようであったとして，午前9時までの障害の中で，午後廻しになった件数，午後1時までの発生件数の中で，翌日廻しになった件数を調べる．障害とかクレームのサービスとは，後廻しにされる件数をなるべく少なくすることである．机上実験を行ない，午後廻し，または翌日廻しになった件数が，A_1，A_2 でどうなるかを求めよ．

20 日間の障害発生件数

	日	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	R_{17}	R_{18}	R_{19}	R_{20}
1級	前	2	2	3	0	1	4	6	0	2	9	4	0	2	0	1	0	2	0	1	0
	後	0	1	0	1	1	0	2	0	3	4	3	1	0	0	0	0	1	2	0	0
2級	前	3	0	5	2	1	0	10	3	3	10	2	7	4	2	4	0	1	3	0	2
	後	1	0	3	1	0	2	8	1	6	8	4	5	2	1	0	0	3	4	0	2

問 (12.2) 上場されている適当な数の会社の9月末，3月末の株価 y' をそれより半年前の株価 y_0 で割った比の対数

$$y=\log\frac{y'}{y_0}$$

を目的変数とし，その値 y に対して，3月の株価については前年の9月の，9月の株価についてはその年の3月の，売上利益率 A, 売上金額の延び率 B, 配当率 C, 配当率の変化率 D の4つの変数で予測する回帰式を計算実験で作れ.

参　考　文　献

本書は，入門書であるので，本書の内容に関する参考文献そのものは必要がないと思われる．さまざまな統計資料については，本文中に出所を示しておいたし，それぞれの分野の人達にとって自分の分野の実験データや統計資料のガイドが必要であるはずがない．したがって，ここには，本書の程度から発展して，高級な方法，専門分野への適用例，一般の数理を学ぼうとされる読者への案内の意味でいくつかの文献を示すにとどめた．

実験計画法のわりつけ，特に直交表を用いる方法については

（1） 田口玄一：実験計画法 上，下　　丸善　1962.

（2） 小西省三：例解実験計画法　　日刊工業　1965.

前文でも述べたように，本書は前者の解説版ともいうべきもので，実験，調査，シミュレーション等をやられる人は読んでほしいと思う．また，本書を読んだあとでは，それほど難しくはない．後者も，直交表のわりつけについて正確で懇切な説明があり，電機関係の例も多い．

実験計画法や統計解析の実施例については，次のような文献がある．

（3） 小林隆司：実験計画法　　日本ゴム協会　1966.

電線やプラスチック関係への適用例の紹介が多い．

（4） 木村俊夫：実験計画法の手ほどき　　南江堂　1963.

心理，教育，作業分析などの世界で興味ある例が多い．

（5） 田口常弥：実務家のためのデータ解析入門　　日刊工業　1963.

営業，生産管理などの事務部門への適用例や解説が多い．

実験計画法の数理面，すなわち，直交表の作り方や統計理論については，次の文献が詳しい．

（6） 増山元三郎：実験計画法　　岩波全書　1956.

（7） 竹内　啓：数理統計学　　東洋経済　1963.

市場調査の方法などについては，次のものが，玉石混淆ではあるが何でも揃っている．

（8） 調査計画便覧編集委員会：調査計画便覧　　日刊工業　1963.

SN 比関係については，次の文献が期待される．

(9) SN 比分科会：SN 比マニアル　日本規格協会　1972.

統計解析のコンピューターによる解析法については，電々公社の科学技術計算サービス中にも，改訂後取り入れられた DAP-G, DAP-S などがある.

(10) 田口，横山：DAP-G, DAP-S, DAP-SN　日本規格協会　1971.

情報理論などを含む情報科学の最近の動向については，次の厖大な講座がある.

(11) 情報科学講座編集委員会：情報科学講座　全63冊　共立出版　1966〜.

付表　統計解析数値表

ここには，本文で使用されている数表を一括して集録した.

付表１　２乗表（平方根もこの表から求める）

付表２　常用対数表

付表３　*F*表（5%，1%）

表付４　*F*表（2.5%）

付表５　デシベル（db）表

付表６　直交多項式

付表７　SN 比関係公式

付表８　直交表

付表の使い方　解説

1.　付表 1　　2 乗表の使い方

計算例 1　　2.57 の 2 乗を求めよ．

付表 1 から，257 の 2 乗を 66049 と求め，暗算で小数 4 位の数にするため，下から 4 位の所に小数点をつけ，6.6049 と求める．

計算例 2　　81.52，0.0764 の平方根を求めよ*．

81.52 の平方根の最初の桁の数値 9 を暗算で求め，最高位が 9 の数の 2 乗が8152…に最も近い数を付表 1 から求める．n が 903 のところが 815200 に最も近い数だから，位取りを暗算で求め，答を 9.03 とする．

$$\sqrt{81.52}=9.03$$

$\sqrt{0.0764}$ は 0.2…となる筈だから，2…の 2 乗が 76400 に最も近い数を付表 1 の 2 乗表から 276 と見つける．したがって

$$\sqrt{0.0764}=0.276$$

2.　付表 2　　常用対数表の使い方

計算例 1　　5.82，68040，0.0015293 の常用対数を求めよ．

a.　5.82 の対数は，付表 2 から 582 に対応する値を 7649 と読む．この値は小数位の部分すなわち仮数だから，この場合，0.7649 が求める値である．

b.　68040 の対数は，指標が 4 となる．したがって，あとは 6.804 に対する対数値すなわち仮数を求めればよい．6.800 の対数値 0.8325 に，右側の比例部分の上段 4 に対応する値 3 を読みとり，それを 0.8325 の最後の桁に足して，4.8328 と求める．

c.　0.0015293 の常用対数は，まず指標が −3，それに 1.5293 の対数値を加える．1.52 の対数値は 0.1818，それに 93 の端数は 9 と考え，9 に対する比例部分 26（または 9.3 に対する比例部分 27）を加えると 0.1844 となる．したがって

$$\log 0.0015293=-3+0.1844=-2.8156$$

計算例 2　　対数値が 0.5425，8.6326，−4.5255 の真数を求めよ．

0.5425 に最も近い小さい真数は 3.48．しかし，これとは対数値で 0.5425−0.5416=

---

*　一寸馴れると，平方根を求めるのに，2 乗表の方が平方根表より速くて正確である．

0.0009 の差がある．比例部分の表で差 9 に対する上段の数値 7 を加えて，3.487 が求める真数である．

8.6326 の真数は，先ず 0.6326 の真数を 4.286 と求め，10^8 倍して，428600000 と求める．

−4.5255 の真数は，−4.5255＝−5＋0.4745 である．0.4745 の真数 2.982 に10^{-5} を掛けて，0.00002982 と求める．

3．付表 3，付表 4　　F 表の使い方

計算例 1　　分子の自由度 $f_1=1$, 分母の自由度 10 の F 表の 5%，1% 値を求めよ．

付表 3 から 5% 値 4.96，1% 値 10.04 を得る．

計算例 2　　分子の自由度 300，分母の自由度 20 の F 表の 2.5% 値を求めよ．

$f_1=120,\ f_2=20$ の $F(0.025)=2.16$；$f_1=\infty,\ f_2=20$ の $F(0.025)=2.09$

2 つの f_1 の間を逆数補間する．

$$f_1=300 \text{ の } F=2.09+\frac{120}{300}(2.16-2.09)=2.12$$

4．付表 5　　デシベル表の使い方

計算例 1　　18.5，0.0625 のデシベルを求めよ．

1.85 の db は付表 4 から 2.67 db，これに 10 db を加えて 12.67 db，6.25 の db は付表 4 から 7.96 db，これに −20 db を加えて −12.04 db となる．

5．付表 6　　直交多項式の使い方

計算例 1.　　A_1, A_2, ……, A_5 は等間隔 h の 5 水準の因子 A の水準別の r 個の和である．A の 1 次，2 次，3 次項の係数の推定式，信頼限界の式，変動の計算式を求めよ．

A の 1 次，2 次，3 次項の係数を b_1, b_2, b_3 とする．付表 6 の $k=5$ 水準から

$$\hat{b}_1=\frac{-2A_1-A_2+A_4+2A_5}{r\times 10\times h}\pm\sqrt{\frac{F\times V_e}{r\times 10\times h^2}}$$

$$\hat{b}_2=\frac{2A_1-A_2-2A_3-A_4+2A_5}{r\times 14\times h^2}\pm\sqrt{\frac{F\times V_e}{r\times 14\times h^4}}$$

$$\hat{b}_3=\frac{-A_1+2A_2-2A_4+A_5}{r\times 12\times h^3}\pm\sqrt{\frac{F\times V_e}{r\times\frac{72}{5}\times h^6}}$$

$$S_{\hat{b}_1}=\frac{(-2A_1-A_2+A_4+2A_5)^2}{r\times 10}$$

$$S_{\hat{b}_2}=\frac{(2A_1-A_2-2A_3-A_4+2A_5)^2}{r\times 14}$$

$$S_{\hat{b}_3}=\frac{(-A_1+2A_2-2A_4+A_5)^2}{r\times 10}$$

i 次の係数の推定値の分母には $r\cdot\lambda S\cdot h^i$，信頼限界の平方根内の分母には $r\cdot S\cdot h^{2i}$，変動の分母には $r\cdot\lambda^2 S$ がくる．

6．付表 7　SN 比関係公式の使い方

計算例 1　目方の真値 m_1, m_2 が不明の 2 個の品物について，あるはかりで $M_1=m_1-m_2$, $M_2=m_1$, $M_3=m_1+m_2$ を測ったデータは次のようであった．SN 比を求めよ．

M_1	M_2	M_3
15.3	26.4	37.7

付表 7 で等間隔 3 水準のところで，$h_0=m_2$ を単位間隔として

$$S_\beta=\frac{(-y_1+y_3)^2}{2r_0}=\frac{(-15.3+37.7)^2}{2\times 1}=250.88$$

$$S_e=0.007 \qquad (\mathrm{f}=1)$$

$$\eta=\frac{\dfrac{1}{2r_0h_0^2}(S_\beta-V_e)}{V_e}=\frac{\dfrac{1}{2\times 1}(250.88-0.007)}{0.007}$$

$$=17919.5$$

計算例 2　真値不明のある成分の濃度 M を 1/2, 1/4 にしてある定量法で目盛を読んだデータは次のようであった．$M_1=M/4$, $M_2=M/2$, $M_3=M$ である．

	M_1	M_2	M_3
読み	9.2	18.6	38.2

SN 比を求めよ．

付表 7 で不等間隔の公式を用いる．$r_1=r_2=r_3=1$ で，M を単位の濃度間隔とする．

$$x_1=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=1$$

$$y_1=9.2,\ y_2=18.6,\ y_3=38.2$$

として，x の変動，y の変動，x と y の共変動を求める．

$$S(xx)=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)^2=0.2917$$

$$S(xy)=\frac{1}{4}\times 9.2+\frac{1}{2}\times 18.6+1\times 38.2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)(9.2+18.6+38.2)$$

$$=11.30$$

$$S(yy)=9.2^2+18.6^2+38.2^2-\frac{1}{3}(9.2+18.6+38.2)^2$$

$$=437.84$$

$$S_\beta=\frac{S(xy)^2}{S(xx)}=\frac{11.30^2}{0.2917}=437.74 \qquad (\mathrm{f}=1)$$

$$S_e=S(yy)-S_\beta=0.10 \qquad (\mathrm{f}=1)$$

$$\eta=\frac{\frac{1}{S(xx)}(S_\beta-V_e)}{V_e}=\frac{\frac{1}{0.2917}(437.74-0.10)}{0.10}$$

$$=15003=41.76\ (\mathrm{db})$$

7.　付表 8　　直交表の使い方

文献（1）参照.

付表 1. 2 乗 表

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	51	2601	101	10201	151	22801	201	40401
2	4	52	2704	102	10404	152	23104	202	40804
3	9	53	2809	103	10609	153	23409	203	41209
4	16	54	2916	104	10816	154	23716	204	41616
5	25	55	3025	105	11025	155	24025	205	42025
6	36	56	3136	106	11236	156	24336	206	42436
7	49	57	3249	107	11449	157	24649	207	42849
8	64	58	3364	108	11664	158	24964	208	43264
9	81	59	3481	109	11881	159	25281	209	43681
10	100	60	3600	110	12100	160	25600	210	44100
11	121	61	3721	111	12321	161	25921	211	44521
12	144	62	3844	112	12544	162	26244	212	44944
13	169	63	3969	113	12769	163	26569	213	45369
14	196	64	4096	114	12996	164	26896	214	45796
15	225	65	4225	115	13225	165	27225	215	46225
16	256	66	4356	116	13456	166	27556	216	46656
17	289	67	4489	117	13689	167	27889	217	47089
18	324	68	4624	118	13924	168	28224	218	47524
19	361	69	4761	119	14161	169	28561	219	47961
20	400	70	4900	120	14400	170	28900	220	48400
21	441	71	5041	121	14641	171	29241	221	48841
22	484	72	5184	122	14884	172	29584	222	49284
23	529	73	5329	123	15129	173	29929	223	49729
24	576	74	5476	124	15376	174	30276	224	50176
25	625	75	5625	125	15625	175	30625	225	50625
26	676	76	5776	126	15876	176	30976	226	51076
27	729	77	5929	127	16129	177	31329	227	51529
28	784	78	6084	128	16384	178	31684	228	51984
29	841	79	6241	129	16641	179	32041	229	52441
30	900	80	6400	130	16900	180	32400	230	52900
31	961	81	6561	131	17161	181	32761	231	53361
32	1024	82	6724	132	17424	182	33124	232	53824
33	1089	83	6889	133	17689	183	33489	233	54289
34	1156	84	7056	134	17956	184	33856	234	54756
35	1225	85	7225	135	18225	185	34225	235	55225
36	1296	86	7396	136	18496	186	34596	236	55696
37	1369	87	7569	137	18769	187	34969	237	56169
38	1444	88	7744	138	19044	188	35344	238	56644
39	1521	89	7921	139	19321	189	35721	239	57121
40	1600	90	8100	140	19600	190	36100	240	57600
41	1681	91	8281	141	19881	191	36481	241	58081
42	1764	92	8464	142	20164	192	36864	242	58564
43	1849	93	8649	143	20449	193	37249	243	59049
44	1936	94	8836	144	20736	194	37636	244	59536
45	2025	95	9025	145	21025	195	38025	245	60025
46	2116	96	9216	146	21316	196	38416	246	60516
47	2209	97	9409	147	21609	197	38809	247	61009
48	2304	98	9604	148	21904	198	39204	248	61504
49	2401	99	9801	149	22201	199	39601	249	62001
50	2500	100	10000	150	22500	200	40000	250	62500

付表 1.（つづき）

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
251	63001	301	90601	351	123201	401	160801	451	203401
252	63504	302	91204	352	123904	402	161604	452	204304
253	64009	303	91809	353	124609	403	162409	453	205209
254	64516	304	92416	354	125316	404	163216	454	206116
255	65025	305	93025	355	126025	405	164025	455	207025
256	65536	306	93636	356	126736	406	164836	456	207936
257	66049	307	94249	357	127449	407	165649	457	208849
258	66564	308	94864	358	128164	408	166464	458	209764
259	67081	309	95481	359	128881	409	167281	459	210681
260	67600	310	96100	360	129600	410	168100	460	216100
261	68121	311	96721	361	130321	411	168921	461	212521
262	68644	312	97344	362	131044	412	169744	462	213444
263	69169	313	97969	363	131769	413	170569	463	214369
264	69696	314	98596	364	132496	414	171396	464	215296
265	70225	315	99225	365	133225	415	172225	465	216225
266	70756	316	99856	366	133956	416	173056	466	217156
267	71289	317	100489	367	134689	417	173889	467	218089
268	71824	318	101124	368	135424	418	174724	468	219024
269	72361	319	101761	369	136161	419	175561	469	219961
270	72900	320	102400	370	136900	420	176400	470	220900
271	73441	321	103041	371	137641	421	177241	471	221841
272	73984	322	103684	372	138384	422	178084	472	222784
273	74529	323	104329	373	139129	423	178929	473	223729
274	25076	324	104976	374	139876	424	179776	474	224676
275	75625	325	105625	375	140625	425	180625	475	225625
276	76176	326	106276	376	141376	426	181476	476	226576
277	76729	327	106929	377	142129	427	182329	477	227529
278	77284	328	107584	378	142884	428	183184	478	228484
279	77841	329	108241	379	143641	429	184041	479	229441
280	78400	330	108900	380	144400	430	184900	480	230400
281	78961	331	109561	381	145161	431	185761	481	231361
282	79524	332	110224	382	145924	432	186624	482	232324
283	80089	333	110889	383	146689	433	187489	483	233289
284	80656	334	111556	384	147456	434	188356	484	234256
285	81225	335	112225	385	148225	435	189225	485	235225
286	81796	336	112896	386	148996	436	190096	486	236196
287	82369	337	113569	387	149769	437	190969	487	237169
288	82944	338	114244	388	150544	438	191844	488	238144
289	83521	339	114921	389	151321	439	192721	489	239121
290	84100	340	115600	390	152100	440	193600	490	240100
291	84681	341	116281	391	152881	441	194481	491	241081
292	85264	342	116964	392	153664	442	195364	492	242064
293	85849	343	117649	393	154449	443	196249	493	243049
294	86436	344	118336	394	155236	444	197136	494	244036
295	87025	345	119025	395	156025	445	198025	495	245025
296	87616	346	119716	396	156816	446	198916	496	246016
297	88209	347	120409	397	157609	447	199809	497	247009
298	88804	348	121104	398	158404	448	200704	498	248004
299	89401	349	121801	399	159201	449	201601	499	249001
300	90000	350	122500	400	160000	450	202500	500	250000

付表 1. (つづき)

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
501	251001	551	303601	601	361201	651	423801	701	491401
502	252004	552	304704	602	362404	652	425104	702	492804
503	253009	553	305809	603	363609	653	426409	703	494209
504	254016	554	306916	604	364816	654	427716	704	495616
505	255025	555	308025	605	366025	655	429025	705	497025
506	256036	556	309136	606	367236	656	430336	706	498436
507	257049	557	310249	607	368449	657	431649	707	499849
508	258064	558	311364	608	369664	658	432964	708	501264
509	259081	559	312481	609	370881	659	434281	709	502681
510	260100	560	313600	610	372100	660	435600	710	504100
511	261121	561	314721	611	373321	661	436921	711	505521
512	262144	562	315844	612	374544	662	438244	712	506944
513	263169	563	316969	613	375769	663	439569	713	508369
514	264196	564	318096	614	376996	664	440896	714	509796
515	265225	565	319225	615	378225	665	442225	715	511225
516	266256	566	320356	616	379456	666	443556	716	512656
517	267289	567	321489	617	380689	667	444889	717	514089
518	268324	568	322624	618	381924	668	446224	718	515524
519	269361	569	323761	619	383161	669	447561	719	516961
520	270400	570	324900	620	384400	670	448900	720	518400
521	271441	571	326041	621	385641	671	450241	721	519841
522	272484	572	327184	622	386884	672	451584	722	521284
523	273529	573	328329	623	388129	673	452929	723	522729
524	274576	574	329476	624	389376	674	454276	724	524176
525	275625	575	330625	625	390625	675	455625	725	525625
526	276676	576	331776	626	391876	676	456976	726	527076
527	277729	577	332929	627	393129	677	458329	727	528529
528	278784	578	334084	628	394384	678	459684	728	529984
529	279841	579	335241	629	395641	679	461041	729	531441
530	280900	580	336400	630	396900	680	462400	730	532900
531	281961	581	337561	631	398161	681	463761	731	534361
532	283024	582	338724	632	399424	682	465124	732	535824
533	284089	583	339889	633	400689	683	466489	733	537289
534	285156	584	341056	634	401956	684	467856	734	538756
535	286225	585	342225	635	403225	685	469225	735	540225
536	287296	586	343396	636	404496	686	470596	736	541696
537	288369	587	344569	637	405769	687	471969	737	543169
538	289444	588	345744	638	407044	688	473344	738	544644
539	290521	589	346921	639	408321	689	474721	739	546121
540	291600	590	348100	640	409600	690	476100	740	547600
541	292681	591	349281	641	410881	691	477481	741	549081
542	293764	592	350464	642	412164	692	478864	742	550564
543	294849	593	351649	643	413449	693	480249	743	552049
544	295936	594	352836	644	414736	694	481636	744	553536
545	297025	595	354025	645	416025	695	483025	745	555025
546	298116	596	355216	646	417316	696	484416	746	556516
547	299209	597	356409	647	418609	697	485809	747	558009
548	300301	598	357604	648	419904	698	487204	748	559504
549	301401	599	358801	649	421201	699	488601	749	561001
550	302500	600	360000	650	422500	700	490000	750	562500

付表 1. （つづき）

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
751	564001	801	641601	851	724201	901	811801	951	904401
752	565504	802	643204	852	725904	902	813604	952	906304
753	567009	803	644809	853	727609	903	815409	953	908209
754	568516	804	646416	854	729316	904	817216	954	910116
755	570025	805	648025	855	731025	905	819025	955	912025
756	571536	806	649636	856	732736	906	820836	956	913936
757	573049	807	651249	857	734449	907	822649	957	915849
758	574564	808	652864	858	736164	908	824464	958	917764
759	576081	809	654481	859	737881	909	826281	959	919681
760	577600	810	656100	860	739600	910	828100	960	921600
761	579121	811	657721	861	741321	911	829921	961	923524
762	580644	812	659344	862	743044	912	831744	962	925444
763	582169	813	660969	863	744769	913	833569	963	927369
764	583696	814	662596	864	746496	914	835396	964	929296
765	585225	815	664225	865	748225	915	837225	965	931225
766	586756	816	665856	866	749956	916	839056	966	933156
767	588289	817	667489	867	751689	917	840889	967	935089
768	589824	818	669124	868	753424	918	842724	968	937024
769	591361	819	670761	869	755161	919	844561	969	938961
770	592900	820	672400	870	756900	920	846400	970	940900
771	594441	821	674041	871	758641	921	848241	971	942841
772	595984	822	675684	872	760384	922	850084	972	944784
773	597529	823	677329	873	762129	923	851929	973	946729
774	599076	824	678976	874	763876	924	853776	974	948676
775	600625	825	680625	875	765625	925	855625	975	950625
776	602176	826	682276	876	767376	926	857476	976	952576
777	603729	827	683929	877	769129	927	859329	977	954529
778	605284	828	685584	878	770884	928	861184	978	956484
779	606841	829	687241	879	772641	929	863041	979	958441
780	608400	830	688900	880	774400	930	864900	930	960400
781	609961	831	690561	881	776161	931	866761	981	962361
782	611524	832	692224	882	777924	932	868624	982	964324
783	613089	833	693889	883	779689	933	870489	983	966289
784	614656	834	695556	884	781456	934	872356	984	968256
785	616225	835	697225	885	783225	935	874225	985	970225
786	617796	836	698896	886	784996	936	876096	986	972196
787	619369	837	700569	887	786769	937	877969	987	974169
788	620944	838	702244	888	788544	938	879844	988	976144
789	622521	839	703921	889	790321	939	881721	989	978121
790	624100	840	705600	890	792100	940	883600	990	980100
791	625681	841	707281	891	793881	941	885481	991	982081
792	627264	842	708964	892	795664	942	887364	992	984064
793	628849	843	710649	893	797449	943	889249	993	986049
794	630436	844	712336	894	799236	944	891136	994	988036
795	632025	845	714025	895	801025	945	893025	995	990025
796	633616	846	715716	896	802816	946	894916	996	992016
797	635209	847	717409	897	804609	947	896809	997	994009
798	636804	848	719104	898	806404	948	898704	998	996004
799	638401	849	720801	899	808201	949	900601	999	998001
800	640000	850	722500	900	810000	950	902500	1000	1000000

付表 2. 常 用 対 数 表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						4	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5924	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6850	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

(注) 対数のとり方

i) 真数が2桁の場合，左側の列にその数をとり，上の行の0とクロスするところをよめばよい．

ii) 真数が3桁の場合，左側の列に上2桁の数をとり，下1桁を上の行の0～9にとり，クロスすると

付表 2.（つづき）

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	3779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

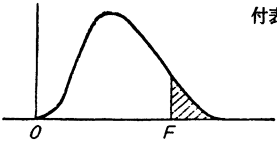
ころをよめばよい。

iii）真数が4桁の場合，上3桁について ii）と同様に行ない，4桁目を上の行の右1～9にとり，クロスしたところの数値を上3桁に対する数値に加えればよい。

付表 3.　F 表 (5%, 1%)

f_2: 分母の分散の自由度

f_1 / f_2	分子の分散										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161 4052	200 4999	126 5403	225 5625	230 5764	234 5859	237 5928	239 5981	241 6022	242 6056	243 6082
2	18.51 98.49	19.00 99.01	19.16 99.17	19.25 99.25	19.30 99.30	19.33 99.33	19.36 99.34	19.37 99.36	19.38 99.38	19.39 99.40	19.40 99.41
3	10.13 34.12	9.55 30.81	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.88 27.67	8.84 27.49	8.81 27.34	8.78 27.23	8.76 27.13
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 15.98	6.26 15.52	6.16 15.21	6.09 14.98	6.04 14.80	6.00 14.66	5.96 14.54	5.93 14.45
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.88 10.45	4.82 10.27	4.78 10.15	4.74 10.05	4.70 9.96
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.21 8.26	4.15 8.10	4.10 7.98	4.06 7.87	4.03 7.79
7	5.59 12.25	4.74 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.79 7.00	3.73 6.84	3.68 6.71	3.63 6.62	3.60 6.54
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.50 6.19	3.44 6.03	3.39 5.91	3.34 5.82	3.31 5.74
9	5.12 10.56	4.26 8.02	3.86 6.99	3.63 6.42	3.48 6.06	3.37 5.80	3.29 5.62	3.23 5.47	3.18 5.35	3.13 5.26	3.10 5.18
10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.14 5.21	3.07 5.06	3.02 4.95	2.97 4.85	2.94 4.78
11	4.84 9.65	3.98 7.20	3.59 6.22	3.36 5.67	3.20 5.32	3.09 5.07	3.01 4.88	2.95 4.74	2.90 4.63	2.86 4.54	2.82 4.46
12	4.75 9.33	3.88 6.93	3.49 5.95	3.26 5.41	3.11 5.06	3.00 4.82	2.92 4.65	2.85 4.50	2.80 4.39	2.76 4.30	2.72 4.22
13	4.67 9.07	3.80 6.70	3.41 5.74	3.18 5.20	3.02 4.86	2.92 4.62	2.84 4.44	2.77 4.30	2.72 4.19	2.67 4.10	2.63 4.02
14	4.60 8.86	3.74 6.51	3.34 5.56	3.11 5.03	2.96 4.69	2.85 4.46	2.77 4.28	2.70 4.14	2.65 4.03	2.60 3.94	2.56 3.86
15	4.54 8.68	3.68 6.36	3.29 5.42	3.06 4.89	2.90 4.56	2.79 4.32	2.70 4.14	2.64 4.00	2.59 3.89	2.55 3.80	2.51 3.73
16	4.49 8.53	3.63 6.23	3.24 5.29	3.01 4.77	2.85 4.44	2.74 4.20	2.66 4.03	2.59 3.89	2.54 3.78	2.49 3.69	2.45 3.61
17	4.45 8.40	3.59 6.11	3.20 5.18	2.96 4.67	2.81 4.34	2.70 4.10	2.62 3.93	2.55 3.79	2.50 3.68	2.45 3.59	2.41 3.52
18	4.41 8.28	3.55 6.01	3.16 5.09	2.93 4.58	2.77 4.25	2.66 4.01	2.58 3.85	2.51 3.71	2.46 3.60	2.41 3.51	2.37 3.44
19	4.38 8.18	3.52 5.93	3.13 5.01	2.90 4.50	2.74 4.17	2.63 3.94	2.55 3.77	2.48 3.63	2.43 3.52	2.38 3.43	2.34 3.36
20	4.35 8.10	3.49 5.85	3.10 4.94	2.87 4.43	2.71 4.10	2.60 3.87	2.52 3.71	2.45 3.56	2.40 3.45	2.35 3.37	2.31 3.30
21	4.32 8.02	3.47 5.78	3.07 4.87	2.84 4.37	2.68 4.04	2.57 3.81	2.49 3.65	2.42 3.51	2.37 3.40	2.32 3.31	2.28 3.24
22	4.30 7.94	3.44 5.72	3.05 4.82	2.82 4.31	2.66 3.99	2.55 3.76	2.47 3.59	2.40 3.45	2.35 3.35	2.30 3.26	2.26 3.18
23	4.28 7.88	3.42 5.66	3.03 4.76	2.80 4.26	2.64 3.94	2.53 3.71	2.45 3.54	2.38 3.41	2.32 3.30	2.28 3.21	2.24 3.14
24	4.26 7.82	3.40 5.61	3.01 4.72	2.78 4.22	2.62 3.90	2.51 3.67	2.43 3.50	2.36 3.36	2.30 3.25	2.26 3.17	2.22 3.09
25	4.24 7.77	3.38 5.57	2.99 4.68	2.76 4.18	2.60 3.86	2.49 3.63	2.41 3.46	2.34 3.32	2.28 3.21	2.24 3.13	2.20 3.05
26	4.22 7.72	3.37 5.53	2.89 4.64	2.74 4.14	2.59 3.82	2.47 3.59	2.39 3.42	2.32 3.29	2.27 3.17	2.22 3.09	2.18 3.02
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11



細字は F分布の 5 %点
太字は F分布の 1 %点

の　自　由　度　f_1

12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
244 **6106**	245 **6142**	246 **6169**	248 **6208**	249 **6234**	250 **6258**	251 **6286**	252 **6302**	253 **6323**	253 **6334**	254 **6352**	254 **6361**	254 **6366**
19.41 **99.42**	19.42 **99.43**	19.43 **99.44**	19.44 **99.45**	19.45 **99.46**	19.46 **99.47**	19.47 **99.48**	19.47 **99.48**	19.48 **99.49**	19.49 **99.49**	19.49 **99.49**	19.50 **99.50**	19.50 **99.50**
8.74 **27.05**	8.71 **26.92**	8.69 **26.83**	8.66 **26.69**	8.64 **26.60**	8.62 **26.50**	8.60 **26.41**	8.58 **26.30**	8.57 **26.27**	8.56 **26.23**	8.54 **26.18**	8.54 **26.14**	8.53 **26.12**
5.91 **14.37**	5.87 **14.24**	5.84 **14.15**	5.80 **14.02**	5.77 **13.93**	5.74 **13.83**	5.71 **13.74**	5.70 **13.69**	5.68 **13.61**	5.66 **13.57**	5.65 **13.52**	5.64 **13.48**	5.63 **13.46**
4.68 **9.89**	4.64 **9.77**	4.60 **9.68**	4.56 **9.55**	4.53 **9.47**	4.50 **9.38**	4.46 **9.29**	4.44 **9.24**	4.42 **9.17**	4.40 **9.13**	4.38 **9.07**	4.37 **9.04**	4.36 **9.02**
4.00 **7.72**	3.96 **7.60**	3.92 **7.52**	3.87 **7.39**	3.84 **7.31**	3.81 **7.23**	3.77 **7.14**	3.75 **7.09**	3.72 **7.02**	3.71 **6.99**	3.69 **6.94**	3.68 **6.90**	3.67 **6.88**
3.57 **6.47**	3.52 **6.35**	3.49 **6.27**	3.44 **6.15**	3.41 **6.07**	3.38 **5.98**	3.34 **5.90**	3.32 **5.85**	3.29 **5.78**	3.28 **5.75**	3.25 **5.70**	3.24 **5.67**	3.23 **5.65**
3.28 **5.67**	3.23 **5.56**	3.20 **5.48**	3.15 **5.36**	3.12 **5.28**	3.08 **5.20**	3.05 **5.11**	3.03 **5.06**	3.00 **5.00**	2.98 **4.96**	2.96 **4.91**	2.94 **4.88**	2.93 **4.86**
3.07 **5.11**	3.02 **5.00**	2.98 **4.92**	2.93 **4.80**	2.90 **4.73**	2.86 **4.64**	2.82 **4.56**	2.80 **4.51**	2.77 **4.45**	2.76 **4.41**	2.73 **4.36**	2.72 **4.33**	2.71 **4.31**
2.91 **4.71**	2.86 **4.60**	2.82 **4.52**	2.77 **4.41**	2.74 **4.33**	2.70 **4.25**	2.67 **4.17**	2.64 **4.12**	2.61 **4.05**	2.59 **4.01**	2.56 **3.96**	2.55 **3.93**	2.54 **3.91**
2.79 **4.40**	2.74 **4.29**	2.70 **4.21**	2.65 **4.10**	2.61 **4.02**	2.57 **3.94**	2.53 **3.86**	2.50 **3.80**	2.47 **3.74**	2.45 **3.70**	2.42 **3.66**	2.41 **3.62**	2.40 **3.60**
2.69 **4.16**	2.64 **4.05**	2.60 **3.98**	2.54 **3.86**	2.50 **3.78**	2.46 **3.70**	2.42 **3.61**	2.40 **3.56**	2.36 **3.49**	2.35 **3.46**	2.32 **3.41**	2.31 **3.38**	2.30 **3.36**
2.60 **3.96**	2.55 **3.85**	2.51 **3.78**	2.46 **3.67**	2.42 **3.59**	2.38 **3.51**	2.34 **3.42**	2.32 **3.37**	2.28 **3.30**	2.26 **3.27**	2.24 **3.21**	2.22 **3.18**	2.21 **3.16**
2.53 **3.80**	2.48 **3.70**	2.44 **3.62**	2.39 **3.51**	2.35 **3.43**	2.31 **3.34**	2.27 **3.26**	2.24 **3.21**	2.21 **3.14**	2.19 **3.11**	2.16 **3.06**	2.14 **3.02**	2.13 **3.00**
2.48 **3.67**	2.43 **3.56**	2.39 **3.48**	2.33 **3.36**	2.29 **3.29**	2.25 **3.20**	2.21 **3.12**	2.18 **3.07**	2.15 **3.00**	2.12 **2.97**	2.10 **2.92**	2.08 **2.89**	2.07 **2.87**
2.42 **3.55**	2.37 **3.45**	2.33 **3.37**	2.28 **3.26**	2.24 **3.18**	2.20 **3.10**	2.16 **3.01**	2.13 **2.96**	2.09 **2.89**	2.07 **2.86**	2.04 **2.80**	2.02 **2.77**	2.01 **2.75**
2.38 **3.45**	2.33 **3.35**	2.29 **3.27**	2.23 **3.16**	2.19 **3.08**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.08 **2.86**	2.04 **2.79**	2.02 **2.76**	1.99 **2.70**	1.97 **2.67**	1.96 **2.65**
2.34 **3.37**	2.29 **3.27**	2.25 **3.19**	2.19 **3.07**	2.15 **3.00**	2.11 **2.91**	2.07 **2.83**	2.04 **2.78**	2.00 **2.71**	1.98 **2.68**	1.95 **2.62**	1.93 **2.59**	1.92 **2.57**
2.31 **3.30**	2.26 **3.19**	2.21 **3.12**	2.15 **3.00**	2.11 **2.92**	2.07 **2.84**	2.02 **2.76**	2.00 **2.70**	1.96 **2.63**	1.94 **2.60**	1.91 **2.54**	1.90 **2.51**	1.88 **2.49**
2.28 **3.23**	2.23 **3.13**	2.18 **3.05**	2.12 **2.94**	2.08 **2.86**	2.04 **2.77**	1.99 **2.69**	1.96 **2.63**	1.92 **2.56**	1.90 **2.53**	1.87 **2.47**	1.85 **2.44**	1.84 **2.42**
2.25 **3.17**	2.20 **3.07**	2.15 **2.99**	2.09 **2.88**	2.05 **2.80**	2.00 **2.72**	1.96 **2.63**	1.93 **2.58**	1.89 **2.51**	1.87 **2.47**	1.84 **2.42**	1.82 **2.38**	1.81 **2.36**
2.23 **3.12**	2.18 **3.02**	2.13 **2.94**	2.07 **2.83**	2.03 **2.75**	1.98 **2.67**	1.93 **2.58**	1.91 **2.53**	1.87 **2.46**	1.84 **2.42**	1.81 **2.37**	1.80 **2.33**	1.78 **2.31**
2.20 **3.07**	2.14 **2.97**	2.10 **2.89**	2.04 **2.78**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.91 **2.53**	1.88 **2.48**	1.84 **2.41**	1.82 **2.37**	1.79 **2.32**	1.77 **2.28**	1.76 **2.26**
2.18 **3.03**	2.13 **2.93**	2.09 **2.85**	2.02 **2.74**	1.98 **2.66**	1.94 **2.58**	1.89 **2.49**	1.86 **2.44**	1.82 **2.36**	1.80 **2.33**	1.76 **2.27**	1.74 **2.23**	1.73 **2.21**
2.16 **2.99**	2.11 **2.89**	2.06 **2.81**	2.00 **2.70**	1.96 **2.62**	1.92 **2.54**	1.87 **2.45**	1.84 **2.40**	1.80 **2.32**	1.77 **2.29**	1.74 **2.23**	1.72 **2.19**	1.71 **2.17**
2.15 **2.96**	2.10 **2.86**	2.05 **2.77**	1.99 **2.66**	1.95 **2.58**	1.90 **2.50**	1.85 **2.41**	1.82 **2.36**	1.78 **2.28**	1.76 **2.25**	1.72 **2.19**	1.70 **2.15**	1.69 **2.13**
12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞

付表 3. （つづき）

f_2 ＼ f_1	分子の分散										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
27	4.21 **7.68**	3.35 **5.49**	2.96 **4.60**	2.73 **4.11**	2.57 **3.79**	2.46 **3.56**	2.37 **3.39**	2.30 **3.26**	2.25 **3.14**	2.20 **3.06**	2.16 **2.98**
28	4.20 **7.64**	3.34 **5.45**	2.95 **4.57**	2.71 **4.07**	2.56 **3.76**	2.44 **3.53**	2.36 **3.36**	2.29 **3.23**	2.24 **3.11**	2.19 **3.03**	2.15 **2.95**
29	4.18 **7.60**	3.33 **5.52**	2.93 **4.54**	2.70 **4.04**	2.54 **3.73**	2.43 **3.50**	2.35 **3.33**	2.28 **3.20**	2.22 **3.03**	2.18 **3.00**	2.14 **2.92**
30	4.17 **7.56**	3.32 **5.39**	2.92 **4.51**	2.69 **4.02**	2.53 **3.70**	2.42 **3.47**	2.34 **3.30**	2.27 **3.17**	2.21 **3.06**	2.16 **2.98**	2.12 **2.90**
32	4.15 **7.50**	3.30 **5.34**	2.90 **4.46**	2.67 **3.97**	2.51 **3.66**	2.40 **3.42**	2.32 **3.25**	2.25 **3.12**	2.19 **3.01**	2.14 **2.94**	2.10 **2.86**
34	4.13 **7.44**	3.28 **5.29**	2.88 **4.42**	2.65 **3.93**	2.49 **3.61**	2.38 **3.38**	2.30 **3.21**	2.23 **3.08**	2.17 **2.97**	2.12 **2.89**	2.08 **2.82**
36	4.11 **7.39**	3.26 **5.25**	2.86 **4.38**	2.63 **3.89**	2.48 **3.58**	2.36 **3.35**	2.28 **3.18**	2.21 **3.04**	2.15 **2.94**	2.10 **2.86**	2.06 **2.78**
38	4.10 **7.35**	3.25 **5.21**	2.85 **4.34**	2.62 **3.86**	2.46 **3.54**	2.35 **3.32**	2.26 **3.15**	2.19 **3.02**	2.14 **2.91**	2.09 **2.82**	2.05 **2.75**
40	4.08 **7.31**	3.23 **5.18**	2.84 **4.31**	2.61 **3.83**	2.45 **3.51**	2.34 **3.29**	2.25 **3.12**	2.18 **2.99**	2.12 **2.88**	2.07 **2.80**	2.04 **2.73**
42	4.07 **7.27**	3.22 **5.15**	2.83 **4.29**	2.59 **3.80**	2.44 **3.49**	2.32 **3.26**	2.24 **3.10**	2.17 **2.96**	2.11 **2.86**	2.06 **2.77**	2.02 **2.70**
44	4.06 **7.24**	3.21 **5.12**	2.82 **4.26**	2.58 **3.78**	2.43 **3.46**	2.31 **3.24**	2.23 **3.07**	2.16 **2.94**	2.10 **2.84**	2.05 **2.75**	2.01 **2.68**
46	4.05 **7.21**	3.20 **5.10**	2.81 **4.24**	2.57 **3.76**	2.42 **3.44**	2.30 **3.22**	2.22 **3.05**	2.15 **2.92**	2.09 **2.82**	2.04 **2.73**	2.00 **2.66**
48	4.04 **7.19**	3.19 **5.08**	2.80 **4.22**	2.56 **3.74**	2.41 **3.42**	2.30 **3.20**	2.21 **3.04**	2.14 **2.90**	2.08 **2.80**	2.03 **2.71**	1.99 **2.64**
50	4.03 **7.17**	3.18 **5.06**	2.79 **4.20**	2.56 **3.72**	2.40 **3.41**	2.29 **3.18**	2.20 **3.02**	2.13 **2.88**	2.07 **2.78**	2.02 **2.72**	1.98 **2.62**
55	4.02 **7.12**	3.17 **5.01**	2.78 **4.16**	2.54 **3.68**	2.38 **3.37**	2.27 **3.15**	2.18 **2.98**	2.11 **2.85**	2.05 **2.75**	2.00 **2.66**	1.97 **2.59**
60	4.00 **7.08**	3.15 **4.98**	2.76 **4.13**	2.52 **3.65**	2.37 **3.34**	2.25 **3.12**	2.17 **2.95**	2.10 **2.82**	2.04 **2.72**	1.99 **2.63**	1.95 **2.56**
65	3.99 **7.04**	3.14 **4.95**	2.75 **4.10**	2.51 **3.62**	2.36 **3.31**	2.24 **3.09**	2.15 **2.93**	2.08 **2.79**	2.02 **2.70**	1.98 **2.61**	1.94 **2.54**
70	3.98 **7.01**	3.13 **4.92**	2.74 **4.08**	2.50 **3.60**	2.35 **3.29**	2.32 **3.07**	2.14 **2.91**	2.07 **2.77**	2.01 **2.67**	1.97 **2.59**	1.93 **2.51**
80	3.96 **6.96**	3.11 **4.88**	2.72 **4.04**	2.48 **3.56**	2.33 **3.25**	2.21 **3.04**	2.12 **2.87**	2.05 **2.74**	1.99 **2.64**	1.95 **2.55**	1.91 **2.48**
100	3.94 **6.90**	3.09 **4.82**	2.70 **3.98**	2.46 **3.51**	2.30 **3.20**	2.19 **2.99**	2.10 **2.82**	2.03 **2.69**	1.97 **2.59**	1.92 **2.51**	1.88 **2.43**
125	3.92 **6.84**	3.07 **4.78**	2.68 **3.94**	2.44 **3.47**	2.29 **3.17**	2.17 **2.95**	2.08 **2.79**	2.01 **2.65**	1.95 **2.56**	1.90 **2.47**	1.86 **2.40**
150	3.91 **6.81**	3.06 **4.75**	2.67 **3.91**	2.43 **3.44**	2.27 **3.13**	2.16 **2.92**	2.07 **2.76**	2.00 **2.62**	1.94 **2.53**	1.89 **2.44**	1.85 **2.37**
200	3.89 **6.76**	3.04 **4.71**	2.65 **3.88**	2.41 **3.41**	2.26 **3.11**	2.14 **2.90**	2.05 **2.73**	1.98 **2.60**	1.92 **2.50**	1.87 **2.41**	1.83 **2.34**
400	3.86 **6.70**	3.02 **4.66**	2.62 **3.83**	2.39 **3.36**	2.23 **3.06**	2.12 **2.85**	2.03 **2.69**	1.96 **2.55**	1.90 **2.46**	1.85 **2.37**	1.81 **2.29**
1000	3.85 **6.66**	3.00 **4.62**	2.61 **3.80**	2.38 **3.34**	2.22 **3.04**	2.10 **2.82**	2.02 **2.66**	1.95 **2.53**	1.89 **2.43**	1.84 **2.34**	1.80 **2.26**
∞	3.84 **6.64**	2.99 **4.60**	2.60 **3.78**	2.37 **3.32**	2.21 **3.02**	2.09 **2.80**	2.01 **2.64**	1.94 **2.51**	1.88 **2.41**	1.83 **2.32**	1.79 **2.24**
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

細字はF分布の5％点
太字はF分布の1％点

の　自　由　度　f_1

12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
2.13 **2.93**	2.08 **2.83**	2.03 **2.74**	1.97 **2.63**	1.93 **2.55**	1.88 **2.47**	1.84 **2.38**	1.80 **2.33**	1.76 **2.25**	1.74 **2.21**	1.71 **2.16**	1.68 **2.12**	1.67 **2.10**
2.12 **2.90**	2.06 **2.80**	2.02 **2.71**	1.96 **2.60**	1.91 **2.52**	1.87 **2.44**	1.81 **2.35**	1.78 **2.30**	1.75 **2.22**	1.72 **2.18**	1.69 **2.13**	1.67 **2.09**	1.65 **2.06**
2.10 **2.87**	2.05 **2.77**	2.00 **2.68**	1.94 **2.57**	1.90 **2.49**	1.85 **2.41**	1.80 **2.32**	1.77 **2.27**	1.73 **2.19**	1.71 **2.15**	1.68 **2.10**	1.65 **2.06**	1.64 **2.03**
2.09 **2.84**	2.04 **2.74**	1.99 **2.66**	1.93 **2.55**	1.89 **2.47**	1.84 **2.38**	1.79 **2.29**	1.76 **2.24**	1.72 **2.16**	1.69 **2.13**	1.66 **2.07**	1.64 **2.03**	1.62 **2.01**
2.07 **2.80**	2.02 **2.70**	1.97 **2.62**	1.91 **2.51**	1.86 **2.42**	1.82 **2.34**	1.76 **2.25**	1.74 **2.20**	1.69 **2.12**	1.67 **2.08**	1.64 **2.02**	1.61 **1.98**	1.59 **1.96**
2.05 **2.76**	2.00 **2.66**	1.95 **2.58**	1.89 **2.47**	1.84 **2.38**	1.80 **2.30**	1.74 **2.21**	1.71 **2.15**	1.67 **2.08**	1.64 **2.04**	1.61 **1.98**	1.59 **1.94**	1.57 **1.91**
2.03 **2.72**	1.98 **2.62**	1.93 **2.54**	1.87 **2.43**	1.82 **2.35**	1.78 **2.26**	1.72 **2.17**	1.69 **2.12**	1.65 **2.04**	1.62 **2.00**	1.59 **1.94**	1.56 **1.90**	1.55 **1.87**
2.02 **2.69**	1.96 **2.59**	1.92 **2.51**	1.85 **2.40**	1.80 **2.32**	1.76 **2.22**	1.71 **2.14**	1.67 **2.08**	1.63 **2.00**	1.60 **1.97**	1.57 **1.90**	1.54 **1.86**	1.53 **1.84**
2.00 **2.66**	1.95 **2.56**	1.90 **2.49**	1.84 **2.37**	1.79 **2.29**	1.74 **2.20**	1.69 **2.11**	1.66 **2.05**	1.61 **1.97**	1.59 **1.94**	1.55 **1.88**	1.53 **1.84**	1.51 **1.81**
1.99 **2.64**	1.94 **2.54**	1.89 **2.46**	1.82 **2.35**	1.78 **2.26**	1.73 **2.17**	1.68 **2.08**	1.64 **2.02**	1.60 **1.94**	1.57 **1.91**	1.54 **1.85**	1.15 **1.80**	1.49 **1.78**
1.98 **2.62**	1.92 **2.52**	1.88 **2.44**	1.81 **2.32**	1.76 **2.24**	1.72 **2.15**	1.66 **2.06**	1.63 **2.00**	1.58 **1.92**	1.56 **1.88**	1.52 **1.82**	1.50 **1.78**	1.48 **1.75**
1.97 **2.60**	1.91 **2.50**	1.87 **2.42**	1.80 **2.30**	1.75 **2.22**	1.71 **2.13**	1.65 **2.04**	1.62 **1.98**	1.57 **1.90**	1.54 **1.86**	1.51 **1.80**	1.48 **1.76**	1.46 **1.72**
1.96 **2.58**	1.90 **2.48**	1.86 **2.40**	1.79 **2.28**	1.74 **2.20**	1.70 **2.11**	1.64 **2.02**	1.61 **1.96**	1.56 **1.88**	1.53 **1.84**	1.50 **1.78**	1.47 **1.73**	1.45 **1.70**
1.95 **2.56**	1.90 **2.46**	1.85 **2.39**	1.78 **2.26**	1.74 **2.18**	1.69 **2.10**	1.63 **2.00**	1.60 **1.94**	1.55 **1.86**	1.52 **1.82**	1.48 **1.76**	1.46 **1.71**	1.44 **1.68**
1.93 **2.53**	1.88 **2.43**	1.83 **2.35**	1.76 **2.23**	1.72 **2.15**	1.67 **2.06**	1.61 **1.96**	1.58 **1.90**	1.52 **1.82**	1.50 **1.78**	1.46 **1.71**	1.43 **1.66**	1.41 **1.64**
1.92 **2.50**	1.86 **2.40**	1.81 **2.32**	1.75 **2.20**	1.70 **2.12**	1.65 **2.03**	1.59 **1.93**	1.56 **1.87**	1.50 **1.79**	1.48 **1.74**	1.44 **1.68**	1.41 **1.63**	1.39 **1.60**
1.90 **2.47**	1.85 **2.37**	1.80 **2.30**	1.73 **2.18**	1.68 **2.09**	1.63 **2.00**	1.57 **1.90**	1.54 **1.84**	1.49 **1.76**	1.46 **1.71**	1.42 **1.64**	1.39 **1.60**	1.37 **1.56**
1.89 **2.45**	1.84 **2.35**	1.79 **2.28**	1.72 **2.15**	1.67 **2.07**	1.62 **1.98**	1.56 **1.88**	1.53 **1.82**	1.47 **1.74**	1.45 **1.69**	1.40 **1.62**	1.37 **1.56**	1.35 **1.53**
1.88 **2.41**	1.82 **2.32**	1.77 **2.24**	1.70 **2.11**	1.65 **2.03**	1.60 **1.94**	1.54 **1.84**	1.51 **1.78**	1.45 **1.70**	1.42 **1.65**	1.38 **1.57**	1.35 **1.52**	1.32 **1.49**
1.85 **2.36**	1.79 **2.26**	1.75 **2.19**	1.68 **2.06**	1.63 **1.98**	1.57 **1.89**	1.51 **1.79**	1.48 **1.73**	1.42 **1.64**	1.39 **1.59**	1.34 **1.51**	1.30 **1.46**	1.28 **1.43**
1.83 **2.33**	1.77 **2.23**	1.72 **2.15**	1.65 **2.03**	1.60 **1.94**	1.55 **1.85**	1.49 **1.75**	1.45 **1.68**	1.39 **1.59**	1.36 **1.54**	1.31 **1.46**	1.27 **1.40**	1.25 **1.37**
1.82 **2.30**	1.76 **2.20**	1.71 **2.12**	1.64 **2.00**	1.59 **1.91**	1.54 **1.83**	1.47 **1.72**	1.44 **1.66**	1.37 **1.56**	1.34 **1.51**	1.29 **1.43**	1.25 **1.37**	1.22 **1.33**
1.80 **2.28**	1.74 **2.17**	1.69 **2.09**	1.62 **1.97**	1.57 **1.88**	1.52 **1.79**	1.45 **1.69**	1.42 **1.62**	1.35 **1.53**	1.32 **1.48**	1.26 **1.39**	1.22 **1.83**	1.19 **1.28**
1.78 **2.23**	1.72 **2.12**	1.67 **2.04**	1.60 **1.92**	1.54 **1.84**	1.49 **1.74**	1.42 **1.64**	1.38 **1.57**	1.32 **1.47**	1.28 **1.42**	1.22 **1.32**	1.16 **1.24**	1.13 **1.19**
1.76 **2.20**	1.70 **2.09**	1.65 **2.01**	1.58 **1.89**	1.53 **1.81**	1.47 **1.71**	1.41 **1.61**	1.36 **1.54**	1.30 **1.44**	1.26 **1.38**	1.19 **1.28**	1.13 **1.19**	1.08 **1.11**
1.75 **2.18**	1.69 **2.07**	1.64 **1.99**	1.57 **1.87**	1.52 **1.79**	1.46 **1.69**	1.40 **1.59**	1.35 **1.52**	1.28 **1.41**	1.24 **7.36**	1.17 **1.25**	1.11 **1.15**	1.00 **1.00**
12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞

付表 4. *F* 表 (2.5%)

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	648.	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	963.	969.	977.	985.	993.	997.	1001.	1006.	1010.	1014.	1018.
2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9
4	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.58	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

付表 5.　デシベル表，1≦η≦10.00 の場合（対数の 10 倍）

η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル
1.00	0.00	1.50	1.76	2.00	3.01	2.50	3.98	3.00	4.77	3.50	5.44
01	0.04	51	1.79	01	3.03	51	4.00	01	4.79	51	5.45
02	0.09	52	1.81	02	3.05	52	4.01	02	4.80	52	5.47
03	0.13	53	1.85	03	3.08	53	4.03	03	4.81	53	5.48
04	0.17	54	1.88	04	3.10	54	4.05	04	4.83	54	5.49
1.05	0.21	1.55	1.90	2.05	3.12	2.55	4.06	3.05	4.84	3.55	5.50
06	0.25	56	1.93	06	3.14	56	4.08	06	4.86	56	5.51
07	0.29	57	1.96	07	3.16	57	4.10	07	4.87	57	5.53
08	0.33	58	1.99	08	3.18	58	4.12	08	4.89	58	5.54
09	0.37	59	2.01	09	3.20	59	4.13	09	4.90	59	5.55
1.10	0.41	1.60	2.04	2.10	3.22	2.60	4.15	3.10	4.91	3.60	5.56
11	0.45	61	2.07	11	3.24	61	4.17	11	4.93	61	5.58
12	0.49	62	2.10	12	3.26	62	4.18	12	4.94	62	5.59
13	0.53	63	2.12	13	3.28	63	4.20	13	4.96	63	5.60
14	0.57	64	2.15	14	3.30	64	4.22	14	4.97	64	5.61
1.15	0.61	1.65	2.18	2.15	3.32	2.65	4.23	3.15	4.98	3.65	5.62
16	0.64	66	2.20	16	3.34	66	4.25	16	5.00	66	5.64
17	0.68	67	2.23	17	3.36	67	4.27	17	5.01	67	5.65
18	0.72	68	2.25	18	3.38	68	4.28	18	5.02	68	5.66
19	0.76	69	2.28	19	3.40	69	4.30	19	5.04	69	5.67
1.20	0.79	1.70	2.30	2.20	3.42	2.70	4.31	3.20	5.05	3.70	5.68
21	0.83	71	2.33	21	3.44	71	4.33	21	5.07	71	5.69
22	0.86	72	2.36	22	3.46	72	4.35	22	5.08	72	5.71
23	0.90	73	2.38	23	3.48	73	4.36	23	5.09	73	5.72
24	0.93	74	2.40	24	3.50	74	4.38	24	5.11	74	5.73
1.25	0.97	1.75	2.43	2.25	3.52	2.75	4.39	3.25	5.12	3.75	5.74
26	1.00	76	2.46	26	3.54	76	4.41	26	5.13	76	5.75
27	1.04	77	2.48	27	3.56	77	4.42	27	5.14	77	5.76
28	1.07	78	2.50	28	3.58	78	4.44	28	5.16	78	5.77
29	1.11	89	2.53	29	3.60	79	4.46	29	5.17	79	5.79
1.30	1.14	1.80	2.55	2.30	3.62	2.80	4.47	3.30	5.18	3.80	5.80
31	1.17	81	2.58	31	3.64	81	4.49	31	5.20	81	5.81
32	1.21	82	2.60	32	3.66	82	4.50	32	5.21	82	5.82
33	1.24	83	2.62	33	3.67	83	4.52	33	5.22	83	5.83
34	1.27	84	2.65	34	3.69	84	4.53	34	5.24	84	5.84
1.35	1.30	1.85	2.67	2.35	3.71	2.85	4.55	3.35	5.25	3.85	5.85
36	1.34	86	2.70	36	3.73	86	4.56	36	5.26	86	5.87
37	1.37	87	2.72	37	3.75	87	4.58	37	5.28	87	5.88
38	1.40	88	2.74	38	3.77	88	4.59	38	5.29	88	5.89
39	1.43	89	2.76	39	3.78	89	4.61	39	5.30	89	5.90
1.40	1.46	1.90	2.79	2.40	3.80	2.90	4.62	3.40	5.32	3.90	5.91
41	1.49	91	2.81	41	3.82	91	4.64	41	5.33	91	5.92
42	1.52	92	2.83	42	3.84	92	4.65	42	5.34	92	5.93
43	1.55	93	2.86	43	3.86	93	4.67	43	5.35	93	5.94
44	1.58	94	2.88	44	3.87	94	4.68	44	5.37	94	5.96
1.45	1.61	1.95	2.90	2.45	3.89	2.95	4.70	3.45	5.38	3.95	5.97
46	1.64	96	2.92	46	3.91	96	4.71	46	5.39	96	5.98
47	1.67	97	2.94	47	3.93	97	4.73	47	5.40	97	5.99
48	1.70	98	2.97	48	3.94	98	4.74	48	5.42	98	6.00
49	1.73	99	2.99	49	3.96	99	4.76	49	5.43	99	6.01

付表 5. （つづき）

η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル
4.00	6.02	4.50	6.53	5.00	6.99	5.50	7.40	6.00	7.78	6.50	8.13
01	6.03	51	6.54	01	7.00	51	7.41	01	7.79	51	8.14
02	6.04	52	6.55	02	7.01	52	7.42	02	7.80	52	8.14
03	6.05	53	6.56	03	7.02	53	7.43	03	7.80	53	8.15
04	6.06	54	6.57	04	7.02	54	7.44	04	7.81	54	8.16
4.05	6.07	4.55	6.58	5.05	7.03	5.55	7.44	6.05	7.82	6.55	8.16
06	6.09	56	6.59	06	7.04	56	7.45	06	7.83	56	8.17
07	6.10	57	6.60	07	7.05	57	7.46	07	7.83	57	8.18
08	6.11	58	6.61	08	7.06	58	7.47	08	7.84	58	8.18
09	6.12	59	6.62	09	7.07	59	7.47	09	7.85	59	8.19
4.10	6.13	4.60	6.63	5.10	7.08	5.60	7.48	6.10	7.85	6.60	8.19
11	6.14	61	6.64	11	7.08	61	7.49	11	7.86	61	8.20
12	6.15	62	6.65	12	7.09	62	7.50	12	7.87	62	8.21
13	6.16	63	6.66	13	7.10	63	7.50	13	7.87	63	8.21
14	6.17	64	6.67	14	7.11	64	7.51	14	7.88	64	8.22
4.15	6.18	4.65	6.68	5.15	7.12	5.65	7.52	6.15	7.89	6.65	8.23
16	6.19	66	6.68	16	7.12	66	7.53	16	7.90	66	8.23
17	6.20	67	6.69	17	7.13	67	7.54	17	7.90	67	8.24
18	6.21	68	6.70	18	7.14	68	7.54	18	7.91	68	8.25
19	6.22	69	6.71	19	7.15	69	7.55	19	7.92	69	8.25
4.20	6.23	4.70	6.72	5.20	7.16	5.70	7.56	6.20	7.92	6.70	8.26
21	6.24	71	6.73	21	7.17	71	7.57	21	7.93	71	8.27
22	6.25	72	6.74	22	7.18	72	7.57	22	7.94	72	8.27
23	6.26	73	6.75	23	7.18	73	7.58	23	7.94	73	8.28
24	6.27	74	6.76	24	7.19	74	7.59	24	7.95	74	8.29
4.25	6.28	4.75	6.77	5.25	7.20	5.75	7.60	6.25	7.96	6.75	8.29
26	6.29	76	6.78	26	7.21	76	7.60	26	7.97	76	8.30
27	6.30	77	6.78	27	7.22	77	7.61	27	7.97	77	8.31
28	6.31	78	6.79	28	7.23	78	7.62	28	7.98	78	8.31
29	6.32	79	6.80	29	7.23	79	7.63	29	7.99	79	8.32
4.30	6.33	4.80	6.81	5.30	7.24	5.80	7.63	6.30	7.99	6.80	8.32
31	6.34	81	6.82	31	7.25	81	7.64	31	8.00	81	8.33
32	6.35	82	6.83	32	7.26	82	7.65	32	8.01	82	8.34
33	6.36	83	6.84	33	7.27	83	7.66	33	8.01	83	8.34
34	6.37	84	6.85	34	7.28	84	7.66	34	8.02	84	8.35
4.35	6.38	4.85	6.86	5.35	7.28	5.85	7.67	6.35	8.03	6.85	8.36
36	6.39	86	6.87	36	7.29	86	7.68	36	8.04	86	8.36
37	6.40	87	6.88	37	7.30	87	7.69	37	8.04	87	8.37
38	6.41	88	6.88	38	7.31	88	7.69	38	8.05	88	8.37
39	6.42	89	6.89	39	7.32	89	7.70	39	8.06	89	8.38
4.40	6.43	4.90	6.90	5.40	7.32	5.90	7.71	6.40	8.06	6.90	8.39
41	6.44	91	6.91	41	7.33	91	7.72	41	8.07	91	8.39
42	6.45	92	6.92	42	7.34	92	7.72	42	8.08	92	8.40
43	6.46	93	6.93	43	7.35	93	7.73	43	8.08	93	8.41
44	6.47	94	6.94	44	7.36	94	7.74	44	8.09	94	8.41
4.45	6.48	4.95	6.95	5.45	7.36	5.95	7.75	6.45	8.10	6.95	8.42
46	6.49	96	6.95	46	7.37	96	7.75	46	8.10	96	8.43
47	6.50	97	6.96	47	7.38	97	7.76	47	8.11	97	8.43
48	6.51	98	6.97	48	7.39	98	7.77	48	8.12	98	8.44
49	6.52	99	6.98	49	7.40	99	7.77	49	8.12	99	8.44

付表 5. （つづき）

η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル	η	デシベル
7.00	8.45	7.50	8.75	8.00	9.03	8.50	9.29	9.00	9.54	9.50	9.78
01	8.46	51	8.76	01	9.04	51	9.30	01	9.55	51	9.79
02	8.46	52	8.76	02	9.04	52	9.30	02	9.55	52	9.79
03	8.47	53	8.77	03	9.05	53	9.31	03	9.56	53	9.80
04	8.48	54	8.77	04	9.05	54	9.31	04	9.56	54	9.80
7.05	8.48	7.55	8.78	8.05	9.06	8.55	9.32	9.05	9.57	9.55	9.80
06	8.49	56	8.79	06	9.06	56	9.32	06	9.57	56	9.81
07	8.49	57	8.79	07	9.07	57	9.33	07	9.58	57	9.81
08	8.50	58	8.80	08	9.07	58	9.33	08	9.58	58	9.82
09	8.51	59	8.80	09	9.08	59	9.34	09	9.59	59	9.82
7.10	8.51	7.60	8.81	8.10	9.08	8.60	9.34	9.10	9.59	9.60	9.82
11	8.52	61	8.81	11	9.09	61	9.35	11	9.60	61	9.83
12	8.53	62	8.82	12	9.10	62	9.35	12	9.60	62	9.83
13	8.53	63	8.83	13	9.10	63	9.36	13	9.61	63	9.84
14	8.54	64	8.83	14	9.11	64	9.36	14	9.61	64	9.84
7.15	8.54	7.65	8.84	9.15	9.11	8.65	9.37	9.15	9.61	9.65	9.84
16	8.55	66	8.84	16	9.12	66	9.37	16	9.62	66	9.85
17	8.56	67	8.85	17	9.12	67	9.38	17	9.62	67	9.85
18	8.56	68	8.85	18	9.13	68	9.38	18	9.63	68	9.86
19	8.57	69	8.86	19	9.13	69	9.39	19	9.63	69	9.86
7.20	8.57	7.70	8.86	8.20	9.14	8.70	9.39	9.20	9.64	9.70	9.87
21	8.58	71	8.87	21	9.14	71	9.40	21	9.64	71	9.87
22	8.59	72	8.88	22	9.15	72	9.40	22	9.65	72	9.88
23	8.59	73	8.88	23	9.15	73	9.41	23	9.65	73	9.88
24	8.60	74	8.89	24	9.16	74	9.41	24	9.66	74	9.89
7.25	8.60	7.75	8.89	9.25	9.16	8.75	9.42	9.25	9.66	9.75	9.89
26	8.61	76	8.90	26	9.17	76	9.42	26	9.67	76	9.89
27	8.62	77	8.90	27	9.18	77	9.43	27	9.67	77	9.90
28	8.62	78	8.91	28	9.18	78	9.43	28	9.68	78	9.90
29	8.63	79	8.92	29	9.19	79	9.44	29	9.68	89	9.91
7.30	8.63	7.80	8.92	8.30	9.19	8.80	9.44	9.30	9.68	9.80	9.91
31	8.64	81	8.93	31	9.20	81	9.45	31	9.69	81	9.92
32	8.64	82	8.93	32	9.20	82	9.45	32	9.69	82	9.92
33	8.65	83	8.94	33	9.21	83	9.46	33	9.70	83	9.93
34	8.66	84	8.94	34	9.21	84	9.46	34	9.70	84	9.93
7.35	8.66	7.85	8.95	8.35	9.22	8.85	9.47	9.35	9.71	9.85	9.93
36	8.67	86	8.95	36	9.22	86	9.47	36	9.71	86	9.94
37	8.68	87	8.96	37	9.23	87	9.48	37	9.72	87	9.94
38	8.68	88	8.97	38	9.23	88	9.48	38	9.72	88	9.95
39	8.69	89	8.97	39	9.24	89	9.49	39	9.72	89	9.95
7.40	8.69	7.90	8.98	8.40	9.24	8.90	9.49	9.40	9.73	9.90	9.96
41	8.70	91	8.98	41	9.25	91	9.50	41	9.74	91	9.96
42	8.70	92	8.99	42	9.25	92	9.50	42	9.74	92	9.96
43	8.71	93	8.99	43	9.26	93	9.51	43	9.74	93	9.97
44	8.72	94	9.00	44	9.26	94	9.51	44	9.75	94	9.97
7.45	8.72	7.95	9.00	8.45	9.27	8.95	9.52	9.45	9.75	9.95	9.98
46	8.73	96	9.01	46	9.27	96	9.52	46	9.76	96	9.98
47	8.73	97	9.01	47	9.28	97	9.53	47	9.76	97	9.99
48	8.74	98	9.02	48	9.28	98	9.53	48	9.77	98	9.99
49	8.74	99	9.02	49	9.29	99	9.54	49	9.77	99	9.99
7.50	8.75	8.00	9.03	8.50	9.29	9.00	9.54	9.50	9.78	10.00	10.00

付表 6. 直　交　多　項　式

等間隔のときの直交多項式

$b_1, b_2,$ …… は1次，2次，……の係数．
k 水準 i 次の係数 b_i を推定するには，b_iの欄の係数
$W_1, W_2,$ …… を用いて行なう．

推　定　　$\hat{b}_i=\dfrac{W_1A_1+\cdots\cdots+W_kA_k}{r\cdot\lambda S\cdot h^i}$

変　動　　$S_{\hat{b}_i}=\dfrac{(W_1A_1+\cdots\cdots+W_kA_k)^2}{r\cdot\lambda^2S}$

単位数　　$\hat{b}_i$ の単位数$=\dfrac{1}{r\cdot S\cdot h^{2i}}$

No. of Levels 水準数 / Coefficients 係数	$k=2$	$k=3$		$k=4$			$k=5$			
	b_1	b_1	b_2	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_4
W_1	−1	−1	1	−3	1	−1	−2	2	−1	1
W_2	1	0	−2	−1	−1	3	−1	−1	2	−4
W_3		1	1	1	−1	−3	0	−2	0	6
W_4				3	1	1	1	−1	−2	−4
W_5							2	2	1	1
λ^2S	2	2	6	20	4	20	10	14	10	70
λS	1	2	2	10	4	6	10	14	12	24
S	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{2}{3}$	5	4	$\frac{9}{5}$	10	14	$\frac{72}{5}$	$\frac{283}{35}$
λ	2	1	3	2	1	$\frac{10}{3}$	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{12}$

付表 6.（つづき）

	$k=6$					$k=7$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	−5	5	−5	1	−1	−3	5	−1	3	−1
W_2	−3	−1	7	−3	5	−2	0	1	−7	4
W_3	−1	−4	4	2	−10	−1	−3	1	1	−5
W_4	1	−4	−4	2	10	0	−4	0	6	0
W_5	3	−1	−7	−3	−5	1	−3	−1	1	5
W_6	5	5	5	1	1	2	0	−1	−7	−4
W_7						3	5	1	3	1
$\lambda^2 S$	70	84	180	28	252	28	84	6	154	84
λS	35	56	108	48	120	28	84	36	264	240
S	$\frac{35}{2}$	$\frac{112}{3}$	$\frac{324}{5}$	$\frac{576}{7}$	$\frac{400}{7}$	28	84	216	$\frac{3168}{7}$	$\frac{4800}{7}$
λ	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{21}{10}$	1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{20}$

	$k=8$					$k=9$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	−7	7	−7	7	−7	−4	28	−14	14	−4
W_2	−5	1	5	−13	23	−3	7	7	−21	11
W_3	−3	−3	7	−3	−17	−2	−8	13	−11	−4
W_4	−1	−5	3	9	−15	−1	−17	9	9	−9
W_5	1	−5	−3	9	15	0	−20	0	18	0
W_6	3	−3	−7	−3	17	1	−17	−9	9	9
W_7	5	1	−5	−13	−23	2	−8	−13	−11	4
W_8	7	7	7	7	7	3	7	−7	−21	−11
W_9						4	28	14	14	4
$\lambda^2 S$	168	168	264	616	2184	60	2772	990	2002	468
λS	84	168	396	1056	3102	60	924	1188	3432	3120
S	42	168	594	$\frac{12672}{7}$	$\frac{31200}{7}$	60	308	$\frac{7128}{5}$	$\frac{41184}{7}$	20800
λ	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{20}$

付表 6. (つづき)

	$k=10$					$k=11$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	−9	6	−42	18	−6	−5	15	−30	6	−3
W_2	−7	2	14	−22	14	−4	6	6	−6	6
W_3	−5	−1	35	−17	−1	−3	−1	22	−6	1
W_4	−3	−3	31	3	−11	−2	−6	23	−1	−4
W_5	−1	−4	12	18	−6	−1	−9	14	4	−4
W_6	1	−4	−12	18	6	0	−10	0	6	0
W_7	3	−3	−31	3	11	1	−9	−14	4	4
W_8	5	−1	−35	−17	1	2	−6	−23	−1	4
W_9	7	2	−14	−22	−14	3	−1	−22	−6	−1
W_{10}	9	6	42	18	6	4	6	−6	−6	−6
W_{11}						5	15	30	6	3
$\lambda^2 S$	330	132	8580	2860	780	110	858	4290	286	156
λS	165	264	5148	6864	7800	110	858	5148	3432	6240
S	$\frac{165}{2}$	528	$\frac{15444}{5}$	$\frac{82368}{5}$	78000	110	858	$\frac{30888}{5}$	41184	249600
λ	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{10}$	1	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{40}$

	$k=12$					$k=13$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	−11	55	−33	33	−33	−6	22	−11	99	−22
W_2	−9	25	3	−27	57	−5	11	0	−66	33
W_3	−7	1	21	−33	21	−4	2	6	−96	18
W_4	−5	−17	25	−13	−29	−3	−5	8	−54	−11
W_5	−3	−29	19	12	−44	−2	−10	7	11	−26
W_6	−1	−35	7	28	−20	−1	−13	4	64	−20
W_7	1	−35	−7	28	20	0	−14	0	84	0
W_8	3	−29	−19	12	44	1	−13	−4	64	20
W_9	5	−17	−25	−13	29	2	−10	−7	11	26
W_{10}	7	1	−21	−33	−21	3	−5	−8	−54	11
W_{11}	9	25	−3	−27	57	4	2	−6	−96	−18
W_{12}	11	55	33	33	33	5	11	0	−66	−33
W_{13}						6	22	11	99	22
$\lambda^2 S$	572	12012	5148	8008	15912	182	2002	572	68068	6188
λS	286	4004	7722	27456	106080	182	2002	3432	116688	106080
S	143	$\frac{4004}{3}$	11583	$\frac{658944}{7}$	707200	182	2002	20592	$\frac{1400256}{7}$	$\frac{12729600}{7}$
λ	2	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{20}$	1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{120}$

付表 6.（つづき）

	$k=14$					$k=15$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	−13	13	−143	143	−143	−7	91	−91	1001	−1001
W_2	−11	7	−11	−77	187	−6	52	−13	−429	1144
W_3	−9	2	66	−132	132	−5	19	35	−869	979
W_4	−7	−2	98	−92	−28	−4	−8	58	−704	44
W_5	−5	−5	95	−13	−139	−3	−29	61	−249	−751
W_6	−3	−7	67	63	−145	−2	−44	49	251	−1000
W_7	−1	−8	24	108	−60	−1	−53	27	621	−675
W_8	1	−8	−24	108	60	0	−56	0	756	0
W_9	3	−7	−67	63	145	1	−53	−27	621	675
W_{10}	5	−5	−95	−13	139	2	−44	−49	251	1000
W_{11}	7	−2	−98	−92	28	3	−29	−61	−249	751
W_{12}	9	2	−66	−132	−132	4	−8	−58	−704	−44
W_{13}	11	7	11	−77	−187	5	19	−35	−869	−979
W_{14}	13	13	143	143	143	6	52	13	−429	−1144
W_{15}						7	91	91	1001	1001
$\lambda^2 S$	910	728	97240	136136	235144	280	37128	39780	6466460	10581480
λS	455	1456	58344	233376	1007760	280	12376	47736	2217072	10077600
S	$\frac{455}{2}$	2912	$\frac{175032}{5}$	$\frac{2800512}{7}$	$\frac{30232800}{7}$	280	$\frac{12376}{3}$	$\frac{286416}{5}$	$\frac{26604864}{35}$	$\frac{201552000}{21}$
λ	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{30}$	1	3	$\frac{5}{6}$	$\frac{35}{12}$	$\frac{21}{20}$

付表 6. (つづき)

	$k=16$					$k=17$				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	−15	35	−455	273	−143	−8	40	−28	52	−104
W_2	−13	21	− 91	− 91	143	−7	25	− 7	−13	19
W_3	−11	9	143	−221	143	−6	12	7	−39	104
W_4	− 9	− 1	267	−201	33	−5	1	15	−39	39
W_5	− 7	− 9	301	−101	− 77	−4	− 8	18	−24	− 36
W_6	− 5	−15	265	23	−131	−3	−15	17	− 3	− 83
W_7	− 3	−19	179	129	−115	−2	−20	13	17	− 88
W_8	− 1	−21	63	189	− 45	−1	−23	7	31	− 55
W_9	1	−21	− 63	189	45	0	−24	0	36	0
W_{10}	3	−19	−179	129	115	1	−23	− 7	31	55
W_{11}	5	−15	−265	23	131	2	−20	−13	17	88
W_{12}	7	− 9	−301	−101	77	3	−15	−17	− 3	83
W_{13}	9	− 1	−267	−201	− 33	4	− 8	−18	−24	36
W_{14}	11	9	−143	−221	−143	5	1	−15	−39	− 39
W_{15}	13	21	91	− 91	−143	6	12	− 7	−39	−104
W_{16}	15	35	455	273	143	7	25	7	−13	− 91
W_{17}						8	40	28	52	104
$\lambda^2 S$	1360	5712	1007760	470288	201552	408	7752	3876	16796	100776
λS	680	5712	302328	806208	2015520	408	7752	23256	201552	2015520
S	340	5712	$\frac{906984}{10}$	$\frac{9674492}{7}$	20155200	408	7752	139536	2418624	40310400
λ	2	1	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{10}$	1	1	$\frac{6}{1}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$

付表 6. （つづき）

	$k=18$					$k=19$		
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3
W_1	−17	68	−68	68	−884	−9	51	−204
W_2	−15	44	−20	−12	676	−8	34	− 68
W_3	−13	23	13	−47	871	−7	19	28
W_4	−11	5	33	−51	429	−6	6	89
W_5	− 9	−10	42	−36	−156	−5	− 5	120
W_6	− 7	−22	42	−12	−588	−4	−14	126
W_7	− 5	−31	35	13	−733	−3	−21	112
W_8	− 3	−37	23	33	−583	−2	−26	83
W_9	− 1	−40	8	44	−220	−1	−29	44
W_{10}	1	−40	− 8	44	220	0	−30	0
W_{11}	3	−37	−23	33	583	1	−29	− 44
W_{12}	5	−31	−35	13	733	2	−26	− 83
W_{13}	7	−22	−42	−12	588	3	−21	−112
W_{14}	9	−10	−42	−36	156	4	−14	−126
W_{15}	11	5	−33	−51	−429	5	− 5	−120
W_{16}	13	23	−13	−47	−871	6	6	− 89
W_{17}	15	44	20	−12	−676	7	19	− 28
W_{18}	17	68	68	68	884	8	34	68
W_{19}						9	51	204
$\lambda^2 S$	1938	23256	23256	28424	6953544	570	13566	213180
λS	969	15504	69768	341088	23178480	570	13566	255816
S	$\frac{696}{2}$	10336	209304	4093056	77261600	570	13566	$\frac{1534896}{5}$
λ	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{10}$	1	1	$\frac{5}{6}$

付表 6. (つづき)

	$k=19$		$k=20$				
	b_4	b_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
W_1	612	−102	−19	57	−969	1938	−1938
W_2	− 68	68	−17	39	−357	− 102	1122
W_3	−388	98	−15	23	85	−1122	1802
W_4	−453	58	−13	9	377	−1402	1222
W_5	−354	− 3	−11	− 3	539	−1187	187
W_6	−168	− 54	− 9	−13	591	− 687	− 771
W_7	42	− 79	− 7	−21	553	− 77	−1351
W_8	227	− 74	− 5	−27	445	503	−1441
W_9	352	− 44	− 3	−31	287	948	−1076
W_{10}	396	0	− 1	−33	99	1188	− 396
W_{11}	352	44	1	−33	− 99	1188	396
W_{12}	227	74	3	−31	−287	948	1076
W_{13}	42	79	5	−27	−445	503	1441
W_{14}	−168	54	7	−21	−553	− 77	1351
W_{15}	−354	3	9	13	−591	− 687	771
W_{16}	−453	− 58	11	− 3	−539	−1187	− 187
W_{17}	−388	− 98	13	9	−377	−1402	−1222
W_{18}	− 68	− 68	15	23	− 85	−1122	−1802
W_{19}	612	102	17	39	357	− 102	−1122
W_{20}			19	57	969	1938	1938
$\lambda^2 S$	2288132	89148	2660	17556	4903140	22881320	31201800
$S\lambda$	3922512	3565920	1330	17556	1470942	15690048	89148000
S	$\frac{47070144}{7}$	142636800	665	17556	$\frac{4412826}{10}$	$\frac{376561152}{35}$	$\frac{1782960000}{7}$
λ	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{40}$	2	1	$\frac{10}{3}$	$\frac{35}{24}$	$\frac{7}{20}$

付表 7. SN 比関係公式

k=水準数, r_0=反復数, h_0=間隔, n_e=有効反復数, η=エスエヌ比
m=平均値の推定, β=1次係数の推定, x=含有量, 測定値等の推定値
$y_1, \cdots\cdots, y_k$ は r_0 個 ($r_0=1$ でもよい) の和とする. h_0 未知のときは, $h_0=1$ とする.

(1) $k=2$, 2水準の場合

$$m=\frac{1}{2r_0}(y_1+y_2),\quad \beta=\frac{1}{r_0h_0}(-y_1+y_2)\qquad \left(\beta \text{ の } n_e=\frac{r_0}{2}h_0^2\right)$$

$$S_\beta=\frac{(-y_1+y_2)^2}{2r_0},\quad \eta=\frac{\dfrac{2}{r_0h_0^2}(S_\beta-V_e)}{V_e}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-0.5\,h_0,\quad \frac{1}{n_e}=\left[\frac{1}{2r_0}+\frac{2}{r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right]\frac{1}{(\beta)^2}\qquad (x \text{ の})$$

(2) $k=3$, 3水準の場合

$$m=\frac{1}{3r_0}(y_1+y_2+y_3),\quad \beta=\frac{1}{2r_0h_0}(-y_1+y_3)\qquad (\beta \text{ の } n_e=2r_0h_0^2)$$

$$S_\beta=\frac{(-y_1+y_3)^2}{2r_0},\quad \eta=\frac{\dfrac{1}{2r_0h_0^2}(S_\beta-V_e)}{V_e}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-h_0,\quad \frac{1}{n_e}=\left[\frac{1}{3r_0}+\frac{1}{2r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right]\frac{1}{(\beta)^2}\qquad (x \text{ の})$$

(3) $k=4$, 4水準の場合

$$m=\frac{1}{4r_0}(y_1+y_2+y_3+y_4),\quad \beta=\frac{-3y_1-y_2+y_3+3y_4}{10r_0h_0}\qquad (\beta \text{ の } n_e=5r_0h_0^2)$$

$$S_\beta=\frac{(-3y_1-y_2+y_3+3y_4)^2}{20r_0},\quad \eta=\frac{\dfrac{1}{5r_0h_0^2}(S_\beta-V_e)}{V_e}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-1.5\,h_0,\quad \frac{1}{n_e}=\left[\frac{1}{4r_0}+\frac{1}{5r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\qquad (x \text{ の})$$

(4) $k=5$, 5水準の場合

$$m=\frac{1}{5r_0}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5),\quad \beta=\frac{-2y_1-y_2+y_4+2y_5}{10\times r_0\times h_0}\qquad (\beta \text{ の } n_e=10r_0h_0^2)$$

$$S_\beta=\frac{(-2y_1-y_2+y_4+2y_5)^2}{10r_0},\quad \eta=\frac{\dfrac{1}{10r_0h_0^2}(S_\beta-V_e)}{V_e}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-2\,h_0,\quad \frac{1}{n_e}=\left[\frac{1}{5r_0}+\frac{1}{10r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right]\frac{1}{(\beta)^2}\qquad (x \text{ の})$$

(5) $k=6$, 6水準の場合

$$m=\frac{1}{6r_0}(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6),\quad \beta=\frac{-5y_1-3y_2-y_3+y_4+3y_5+5y_6}{35r_0h_0}\ \left(\beta \text{ の} n_e=\frac{35}{2}r_0h_0^2\right)$$

$$S_\beta=\frac{(-5y_1-3y_2-y_3+y_4+3y_5+5y_6)^2}{70r_0},\quad \eta=\frac{\dfrac{2}{35r_0h_0^2}(S_\beta-V_e)}{V_e}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-2.5\,h_0,\quad \frac{1}{n_e}=\left[\frac{1}{6r_0}+\frac{2}{35r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right]\frac{1}{\beta^2}\qquad (x \text{ の})$$

(6) 等間隔 (間隔 h_0) の場合の一般公式

(i) 水準数 k が奇数のとき

$$m=\frac{1}{kr_0}(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_k)$$

$$\beta=\frac{12\left\{-\frac{k-1}{2}y_1-\frac{k-3}{2}y_2-\cdots\cdots+\frac{k-1}{2}y_k\right\}}{k(k^2-1)r_0h_0}\quad\left(\beta \text{ の}n_e=\frac{r_0h_0^2}{12}k(k^2-1)\right)$$

$$S_\beta=\frac{12\left\{-\frac{k-1}{2}y_1-\frac{k-3}{2}y_2-\cdots\cdots+\frac{k-1}{2}y_k\right\}^2}{k(k^2-1)r_0}$$

$$\eta=\frac{\frac{12}{r_0h_0^2k(k^2-1)}[S_\beta-V_e]}{Ve}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-\frac{k-1}{2}h_0$$

$$\frac{1}{n_e}=\left[\frac{1}{kr_0}+\frac{12}{k(k^2-1)r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\qquad(x\text{ の})$$

(ii) 水準数 k が偶数のとき

$$m=\frac{1}{kr_0}(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_k)$$

$$\beta=\frac{6\{-(k-1)y_1-(k-3)y_2-\cdots\cdots+(k-1)y_k\}}{k(k^2-1)r_0h_0}\quad\left(\beta\text{ の }n_e=\frac{k(k^2-1)}{12}r_0h_0^2\right)$$

$$S_\beta=\frac{3\{-(k-1)y_1-(k-3)y_2-\cdots\cdots+(k-1)y_k\}^2}{k(k^2-1)r_0}$$

$$\eta=\frac{\frac{12}{k(k^2-1)r_0h_0^2}[S_\beta-V_e]}{V_e}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-\frac{k-1}{2}h_0$$

$$\frac{1}{n_e}=\left[\frac{1}{kr_0}+\frac{12}{k(k^2-1)r_0h_0^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\qquad(x\text{ の})$$

(7) 不等間隔の場合の一般公式

x を未知数, h_1, h_2, ……, h_k を既知として, $W_1=x$, $W_2=x+h_1$, $W_3=x+h_2$, ……, $W_k=x+h_{k-1}$ の k 水準に対して, r_1 個, r_2 個, ……, r_k 個の測定値の計, y_1, y_2, ……, y_k が得られているとする. r_1, r_2, …… は1でもよい. $h=(0+h_1+h_2+\cdots\cdots+h_{k-1})/k$ とおく.

$$m=\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_k}{r_1+r_2+\cdots\cdots+r_k}$$

$$\beta=\frac{-hy_1+(h_1-h)y_2+\cdots\cdots+(h_{k-1}-h)y_k}{r_1(0-h)^2+r_2(h_1-h)^2+\cdots\cdots+r_k(h_{k-1}-h)^2},\ (\beta\text{ の }n_e=r_1(-h)^2+\cdots\cdots+r_k(h_{k-1}-h)^2)$$

$$S_\beta=\frac{[-hy_1+(h_1-h)y_2+\cdots\cdots+(h_{k-1}-h)y_k]^2}{r_1(h)^2+r_2(h_1-h)^2+\cdots\cdots+r_k(h_{k-1}-h)^2}$$

$$\eta=\frac{(S_\beta-V_e)}{[r_1(-h)^2+\cdots\cdots+r_k(h_{k-1}-h)^2]V_e}$$

$$x=\frac{m}{\beta}-h$$

$$\frac{1}{n_e}=\left[\frac{1}{r_1+\cdots\cdots+r_k}+\frac{1}{r_1(-h)^2+r_2(h_1-h)^2+\cdots\cdots+r_k(h_{k-1}-h)^2}\left(\frac{m}{\beta}\right)^2\right]\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\qquad(x\text{ の})$$

付表 8. 直 交 表

(1) 直 交 表 $L_8(2^7)$

No. ＼ 列番	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

2 列間の交互作用

列 ＼ 列	1	2	3	4	5	6	7
	(1)	3	2	5	4	7	6
		(2)	1	6	7	4	5
			(3)	7	6	5	4
				(4)	1	2	3
					(5)	3	2
						(6)	1

付表 8. (つづき)

(2) 直交表 $L_{16}(2^{15})$

No. ＼ 列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1
成　分	a	b	a b	c	a c	b c	a b c	d	a d	b d	a b d	c d	a c d	b c d	a b c d

2列間の交互作用

列 ＼ 列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
		(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
			(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
				(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
					(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
						(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9
							(7)	15	14	13	12	11	10	9	8
								(8)	1	2	3	4	5	6	7
									(9)	3	2	5	4	7	6
										(10)	1	6	7	4	5
											(11)	7	6	5	4
												(12)	1	2	3
													(13)	3	2
														(14)	1

付表 8.（つづき）

（3）直交表 $L_{32}(2^{31})$

列番 No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
4	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
6	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1
7	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
8	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
9	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
10	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
11	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
12	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2
13	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
14	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2
15	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
16	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1
17	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
18	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
19	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
20	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2
21	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
22	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2
23	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
24	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1
25	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
26	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
27	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
28	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1
29	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
30	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1
31	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1
32	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2
成分	a	b	a b	c	a c	b c	a b c	d	a d	b d	a b d	c d	a c d	b c d	a b c d	e	a e	b e	a b e	c e	a c e	b c e	a b c e	d e	a d e	b d e	a b d e	c d e	a c d e	b c d e	a b c d e

付表 8. （つづき）

2列間の交互作用

列＼列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
(1)		3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30
(2)			1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29
(3)				7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28
(4)					1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	20	21	22	23	16	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27
(5)						3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	21	20	23	22	17	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26
(6)							1	14	15	12	13	10	11	8	9	22	23	20	21	18	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25
(7)								15	14	13	12	11	10	9	8	23	22	21	20	19	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24
(8)									1	2	3	4	5	6	7	24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23
(9)										3	2	5	4	7	6	25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22
(10)											1	6	7	4	5	26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21
(11)												7	6	5	4	27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20
(12)													1	2	3	28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19
(13)														3	2	29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18
(14)															1	30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17
(15)																31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
(16)																	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(17)																		3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
(18)																			1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
(19)																				7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
(20)																					1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
(21)																						3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
(22)																							1	14	15	12	13	10	11	8	9
(23)																								15	14	13	12	11	10	9	8
(24)																									1	2	3	4	5	6	7
(25)																										3	2	5	4	7	6
(26)																											1	6	7	4	5
(27)																												7	6	5	4
(28)																													1	2	3
(29)																														3	2
(30)																															1

付表 8. (つづき)

(4) 直 交 表 $L_9(3^4)$

No. ＼ 列番	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1
成 分	a	b	a b	a b^2

2 列間の交互作用

列 ＼ 列	1	2	3	4
	(1)	3 4	2 4	2 3
		(2)	1 4	1 3
			(3)	1 2

(5) 直 交 表 $L_{18}(2^1 \times 3^7)$

No. ＼ 列番	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

付表 8.（つづき）

（6） 直 交 表 $L_{27}(3^{13})$

No. ＼ 列番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2
成 分	a	b	ab	ab^2	c	ac	ac^2	bc	abc	ab^2c^2	bc^2	ab^2c	abc^2

付表 8.（つづき）

2列間の交互作用

列＼列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	(1)	3	2	2	6	5	5	9	8	8	12	11	11
		4	4	3	7	7	6	10	10	9	13	13	12
		(2)	1	1	8	9	10	5	6	7	5	6	7
			4	3	11	12	13	11	12	13	8	9	10
			(3)	1	9	10	8	7	5	6	6	7	5
				2	13	11	12	12	13	11	10	8	9
				(4)	10	8	9	6	7	5	7	5	6
					12	13	11	13	11	12	9	10	8
					(5)	1	1	2	3	4	2	4	3
						7	6	11	13	12	8	10	9
						(6)	1	4	2	3	3	2	4
							5	13	12	11	10	9	8
							(7)	3	4	2	4	3	2
								12	11	13	9	8	10
								(8)	1	1	2	3	4
									10	9	5	7	6
									(9)	1	4	2	3
										8	7	6	5
										(10)	3	4	2
											6	5	7
											(11)	1	1
												13	12
												(12)	1
													11

索　　引

あ　行

か　行

さ 行

た 行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

わ　行

著者の略歴

現職　青山学院大学教授
専攻　実験計画法，実験統計学，品質管理，情報理論

改訂新版 統計解析　¥ 1,700

昭 和 47 年 2 月 21 日 発 行
昭和51年1月15日第3刷発行

著作者　田口玄一（たぐち げんいち）

発行者　飯泉新吾

発行所　丸善株式会社
郵便番号 103　東京都中央区日本橋二丁目3番10号

印刷 日東紙工株式会社・製本 株式会社 星共社

3033—1569—7924