

因子分析法通論

浅野 長一郎著

共立出版株式会社

緒 言

生物学から心理学への橋わたしを試みた H. Spencer の時代、精神能力というものは、情動などの知的でない因子の影響を除けば、知能という 1 因子に基づいて、賢い人は何をやっても同様にいつも賢く、愚かな人は何をやってもいつも愚かであると一因子説が考えられていた。そして、1904年に C. Spearman が g と s の因子の存在をモデル化し、いわゆる二因子説を提唱した時期からかぞえても、因子分析法の発端は、実にいまをさる約 70 年にさかのぼると考えられている。

爾来、因子分析の諸法は、多種の観測特性によって抽象的かつ本質的な原因系を探究する巧妙な統計的多変量解析法として、実質科学と数理の両面から種々の模型や立場のもとに研究開発されてきている。

とくに、近年の電子計算機の普及にともなって、情報化システムや情報処理への関心がすすむにつれ、この範疇にも入れられる因子分析法の研究と適用が今日ふたたび盛んになってきている。現に、心理学、経済学、社会学などの人文系の分野でも、また医学、生物学、工学などの理工系の分野でも、種々の現象や事物の本質にせまり探索する分析法として日常に数多くの適用をみかけている。

しかし、この因子分析法は適用の仕方や考え方のうえで、かなりの難解な点を含んでいることも事実である。この方法には、歴史的に年輪を経た種々の思想的背景があり、また数理的にも少なからぬ困難を残してきている。人間の発想や意図などの思考は深遠で、現象自体もまた広範に具体的かつ複雑で、さらに数理面でもきれいごとではすまぬ吟味すべき難問を多くかかえている。このために、これらの適用や改良には、かなりの前提やとり組み方についての理解が必要になってくる。

したがって、因子分析の諸法には、種々の意図や立場に基づき、異なったアプローチによる解法が展開されている。

まず、因子抽出の基準 (criterion) という最も基本的な考え方からは、対内的因子分析法 (internal factor analysis) と対外的因子分析法 (external factor

analysis) に分類され、後者はのちに Kuder-Richardson らの信頼係数や内的整合性など因子の推測に好適な性格を測度としたような解法にまで広げられている。次いで、観測特性と因子の関係、すなわち因子パターンの構造の面からは、確定模型 (model specified) と不確定模型 (model unspecified) の双方の立場に分けられる。この立場は、事前情報をどれほどに利用するかにかかっているが、また、Newton 力学の時代の直截的な科学的洞察を重んじた決定論に近い実験解析の立場と、むしろ不確定模型から出発し主観を交えずしかも深い真実が知れるとする近年の科学的追究の立場の相違ともいえよう。さらに、これらの事情とは別に、因子分析を適用する目的についても異なった二つの立場がある。一方は、あらかじめ実質科学における具体的な仮説の成立を検証しようとする立場 (confirmatory case) であり、もう一方は、事前には何も仮想せず単に探索的にそこに何が存在するか見いだされる事実 (fact finding) を調査しようとする立場 (exploratory case) である。このいずれの立場にたつかによって、因子分析の過程や解法が異なって選ばれるのは当然といえる。さらに別の側面として、因子分析を適用する主体性についての立場がある。このとり組む構えによって、因子分析に対する計画設計が異なり、関連する解法や誘導される解も実質的に異なってくる。この主体性の差異は端的にいて、test user の立場と test maker の立場に区別される。

このように、現象分析に際しては幾つかの立場をかねて一つの活きた解法と有効な適用が考案されるのであり、どのような解法もこの混みあった立場をこえるほどに頑健ではないはずである。

本書は、因子分析の諸法を通論した成書がこれまでにまれである理由のほかに、上のような思想とともに実質科学の諸領域に共通したデータ解析 (data analysis) の普遍的な方法としても、旧来のものから近年にいたるものまで、各解法とその性格を整理してみたつもりである。そして、個々には定式化や計算手順を平易な数値例とともに詳述した。また、因子分析にはばくだいな計算量を伴い、program の作成にも複雑なものが多いので、おもだった解法には FORTRAN 語による computer programs を付しておいた。これによって、実質科学や数理面にたずさわる読者が適用研究や検証に便宜を得、また電子計算機による情報処理の立場からも益することを思ったからである。

なお、本書の執筆にあたり、日ごろのご交誼を通じて、ご援助やご厚情をいただいた非常に多くの方々には、心からお礼申し上げねばならない。さらに、諸種のプログラムの作成には、折りにふれシオノギ解析センターの町原 英、藤元春海、牡丹義弘、松原義弘、畠中駿逸の諸氏らベテランのご協力を得、これらの方々の労に厚くお礼申し上げたい。また、直接に、文献や原稿の整理と数度の校正までたすけて下さった秋山和子嬢のご親切にも、ここに深い感謝の気持ちをしるしておきたい。

さて、上のような意図のもとに本書を執筆したのであるが、もとより雑事多忙の著者が浅学をかえりみず通論したものであるから、不備な点は読者諸氏のご叱正を得、また将来の進展を加えて、逐次完全なものに仕上げたいと願っている。

おわりに、日ごろ暖かいご激励をいただいている恩師 北川敏男教授に深甚な感謝の意をささげ、また長期にわたり本書の出版に種々のご配慮とご支援を下さった共立出版(株)第一編集部 佐藤邦久氏および 野村みさおさんに衷心からお礼を申し上げねばならない。同時に、拙稿にご迷惑をおかけした同社印刷所にお詫びと感謝の意を表したい。

1971 年 6 月

浅野長一郎

目 次

1 章 概 論	1
1.1 因子分析法の認識	1
1.2 因子分析法の由来と適用分野	2
1.3 因子分析法の型	8
1.4 因子分析法の心構え	10
1.5 因子分析法の適用技法	13
1.5.1 O 技法, P 技法, Q 技法, R 技法, S 技法, T 技法	
1.5.2 第2次因子分析	
1.6 因子分析法の計算プログラミング	16
2 章 成 因 分 析 法	19
2.1 成 因 分 析 法 の 立 場	19
2.2 主 成 因 分 析 と 成 因 分 析	22
2.2.1 主 成 因 分 析 2.2.2 成 因 分 析 2.2.3 セ ン ト ロ イ ド 法	
2.2.4 検 証 数 値 例 2.2.5 観 測 特 性 間 の 関 係	
2.3 計 算 プ ロ グ ラ ム	35
2.3.1 成 因 分 析 法 (第 1 法) 2.3.2 成 因 分 析 法 (第 2 法) 2.3.3	
セ ン ト ロ イ ド 法 (第 1 法) 2.3.4 セ ン ト ロ イ ド 法 (第 2 法) 2.3.5	
セ ン ト ロ イ ド 法 (第 3 法)	
3 章 多 因 子 解 法	48
3.1 多 因 子 解 法 の 立 場	48
3.2 種 々 の 仮 定 と 因 子 負 荷 行 列 の 推 定	51
3.2.1 条 件 A の 場 合 3.2.2 条 件 B の 場 合 3.2.3 条 件 C	
の 場 合 3.2.4 条 件 D の 場 合	
3.3 最 尤 推 定 の 数 値 解 法	65

3.4	共通因子数に関する仮説検定	72			
3.5	計算プログラム	74			
4	因子軸の変換とその意義	79			
5	直交回転法	84			
5.1	グラフによる直交回転法	84			
5.2	解析的方法による直交回転法	88			
5.2.1	クァーティマックス法	5.2.2	パリマックス法	5.2.3	
	パリマックス法の変法	5.2.4	パリジム法		
5.3	数個の因子負荷行列を同時に相似な簡素化構造とする直交回転法	118			
5.4	計算プログラム	121			
5.4.1	クァーティマックス法	5.4.2	パリマックス法	5.4.3	
	逐次パリマックス法	5.4.4	斉時パリマックス法	5.4.5	逐次
	一般パリマックス法	5.4.6	斉時一般パリマックス法		
6	斜交回転法	142			
6.1	斜交根元因子解	144			
6.2	斜交参考解	153			
6.2.1	斜交参考解	6.2.2	根元因子と参考軸との関係		
6.3	解析的方法による斜交回転法	161			
6.3.1	オブリマックス法	6.3.2	クァーティミン法	6.3.3	オブリミン法
		6.3.4	バイクァーティミン法, 一般オブリミン法		
6.3.5	カイザー・ディックマン法	6.3.6	プロマックス法	6.3.7	
	その他の回転法への展望				
6.4	計算プログラム	189			
6.4.1	オブリマックス法	6.4.2	一般オブリミン法(クァーティミン法, バイクァーティミン法, コバリミン法, および任意のオブリミン基準値による法)	6.4.3	カイザー・ディックマン法
		6.4.4	根元解と参考解の各因子パターン, 因子構造, 因子相関, および斜交因子間角度の算出		

7 章 因子の解釈	204
7.1 解釈の立場とその意義	204
7.2 因子解釈の実例	208
8 章 因子評点の推定	218
8.1 因子評点に関する直接的な最小 2 乗推定	219
8.2 観測特性の誤差に関する最小 2 乗推定	228
8.3 複合変量による近似的推定	231
8.4 簡潔法	234
8.5 理想的観測特性による因子評点の推定	236
8.6 計算プログラム	238
8.6.1 簡潔法および残差最小 2 乗法	8.6.2 理想的観測特性法お
よび既有的因子評点係数行列の直接利用	8.6.3 因子評点によるプ
ロフィルの作図	
9 章 単一因子解法	248
10 章 二因子解法	252
10.1 総和法	257
10.2 三価対法	258
10.3 計算プログラム	260
11 章 双因子解法	263
11.1 観測特性の群分け	265
11.2 全般因子の係数の推定	272
11.3 部分因子の係数の推定	275
11.4 双因子解の修正	280
11.5 計算プログラム	290
11.5.1 B 係数法	11.5.2 各因子の係数行列および残差相関行列
の算出	

12 章 多群解法	297
12.1 斜交解	299
12.2 直交解	306
12.3 計算プログラム	310
12.3.1 斜交解 12.3.2 斜交解による直交解の算出	
13 章 正準相関分析法	315
13.1 正準変量と正準相関	317
13.2 回帰論からの正準相関の解釈	324
13.3 予測の立場からの正準相関の解釈	328
13.4 正準変量と正準相関の推定と検定	330
13.4.1 推定の方法 13.4.2 検定の方法 13.4.3 観測特定を <i>m</i> 個の部分ベクトルとする正準相関分析	
13.5 異なった観測対象群に関する正準分析法	349
13.6 主因子分析法	358
13.7 正準因子分析法	366
13.8 アルファ因子分析法	373
13.9 アルファ・マックス因子分析法	382
13.10 計算プログラム	389
13.10.1 2個の部分ベクトルに関する正準相関分析 13.10.2 正 準相関の検定 10.10.3 正準変量と残差正準変量間の相関行列の検 算 13.10.4 <i>m</i> 個の部分ベクトルに関する正準相関分析 13.10.5 正準相関分析後の正準評点の算出 13.10.6 正準分析法 13.10.7 主因子分析法 13.10.8 正準因子分析法 13.10.9 アルファ因 子分析法 13.10.10 アルファ・マックス因子分析法	
付 録	
A.1 ベクトルと行列	427
A.2 小行列, 直和行列, 転置行列, 対称行列, 三角行列およびエ ルミット行列	428

A.3	行列の演算	430
A.4	行列式, 正則行列, 逆行列	432
	A.4.1 行列式 A.4.2 正則行列, 逆行列	
A.5	固有値と固有ベクトル	434
A.6	ガウス・ドゥリットル法	435
A.7	平方根法	443
A.8	逆行列計算の便法	448
	A.8.1 分割法 A.8.2 反復収束法	
A.9	固有値と固有ベクトルの算法	452
	A.9.1 パワー法 A.9.2 ヤコビ法	
参考文献	460
索引	477

概 論

1.1 因子分析法の認識

自然現象や社会現象を考察するには、いくとおりもの観点があり、かりに一つの観点にたっても数種の観測方法がある。これらの選択はいずれも事象のとりえ方や評価の基準によって異なるのであるが、たいていの事象が本質的には多面的な要素または因子をいろいろと含んでいる。しかも、そのような因子を直接的に純粹に観測できる観測方法は非常にまれで、各種の観測の総合的評価で各因子とその量を推測しなければならないことが多い。そして、もちろん、各測定には観測に伴う偶然的な誤差やかたよりを含んでいることも考えると、当然統計的多数観測を必要とし、このような資料から現象の本質に関する因子の抽出とその量的な推測法を考察することになる。

たとえば、日本人の成人体格という一つの事象を考察するにも、身長だけを観測したのでは体格を規制するのに十分ではなく、体重・胸囲・胴囲・座高などに関して、それもおおぜいの人について観測しなければならない。そして、このような統計資料に基づいて、体格を意味づけ表現する若干個の因子を調査し、さらに、これらの因子ごとの定量的な測度によって体格特徴を考えねばならない。

このように多変量観測資料により現象を分析して、その本質にせまる解明を意図するとき、通常、実際の観測特性のままでは、あらかじめ、その現象を構成する因子が何々であるか、またそれらの量的考察がどのようになるかを断定できないことが多い。かりに、従来の知識によって、ある程度のことが教条的

にいうるとしても、観測資料により立証される客観性を必要とするし、また構成する因子の量を観測対象ごとに実際に示すことはむずかしい。

児童の知能を数種の試験で考察するような場合も同様である。児童の各人が、記憶力・理解力・類推力・計数力などの異なった面での能力をもつことを考えるとき、たとえば一連の試験成績の総合計点による単純な席次の優劣で知能を推測してよいか否かは非常に問題となる。ここでは、まず、これらの数種の試験結果から抽出される能力因子はどのようなものであるか、具体的にこれらの因子は各試験成績にどのように重みづけして表現されるかを知る必要がある。次いで、1人1人の児童の知能因子がそれぞれいかにどの量で示されるかを検討し、この知能因子のパターンによって各児童を詳しく比較するような資料の処理法を考えるべきであろう。

このように、ある一つの現象を一定の意図のもとに多種類の計測項目で観測した統計資料に基づき、現象の本質を構成する普遍的な因子に関して探索することが多いわけである。この実証的な現象分析の方法は、当然、統計的多変量解析 (statistical multivariate analysis) の一分野であり、上のような目的をもつ分析の方法を広く因子分析法 (factor analysis) とよんでいる。そして、その現象を多面的多次的に因子分析し、本質を解明してのち、再び総合的考察を加えることにより、初めて超立体的ないきいきとした現象の理解が可能になると考えるのである。

1.2 因子分析法の由来と適用分野

因子分析法は上記のように、多種変量の統計的観測値に基づき内在する因子の種類とそれらの量に関する探索や実証を意図するのであるが、このような分析法は、19世紀末から、心理学的に内在する因子や潜在能力を考察する心理学者の発想動機によって、逐次、研究開発されてきた。

因子分析法は、1904年 *Amer. Jour. of Psychology* に発表された C. Spearman の二因子解法に起源するといわれている。しかし、この解法は、全設問項目を通じて、ただ一つの全般因子と各設問項目ごとの特殊因子の存在を仮定する簡単なものであった。その後、因子分析の諸法は、とくに1930年代から1940年代にかけて、G. H. Thomson, L. L. Thurstone, T. L. Kelley, C.

Burt, P. G. Hoel, H. Hotelling, M. S. Bartlett, D. Wolfe, K. J. Holzinger, H. H. Harman, P. Horst, Q. McNemar, G. Young, D. N. Lawley など多数の研究者によって大きな進歩をみせた。

それらの中には、二因子解法での全般因子の存在に関する論議やその解析法、四価差の標本分布などをはじめ、心理学的設問における因子パターンの構成に関する考察や部分因子の存在などが活発な論議の対象となり、設問間の相関行列から直接に数個の因子を探索する方法へと進展した。

このようにして、K. J. Holzinger による双因子解法や L. Guttman らによる多群解法などが開発され、また、セントロイド法や主成分分析法をも含めて、今日、最もなじみぶかい多因子解法が L. L. Thurstone らにより基礎づけられてきた。ここで、彼の簡素化構造の原則や G. A. Ferguson の因子節約の概念は、引き続き因子軸の回転にも関連して、思想的に大きな整理であったといわれる。とくに、1947年には、L. L. Thurstone がこれまでの思想や手法を成書として集大成し、その後の発展の方向づけに貢献している。また、この間 Hotelling らは正準相関分析に関する一連の研究をすすめ、Thurstone らの対内的な (internal) 因子分析の考え方は異なる、いわゆる、対外的な (external) 因子分析の考え方と分析法を展開した。このように因子分析法の礎石はこの年代に築かれ、その後の広範な研究者の手を経て今日に及んでいる。

他方、近年の電子計算機の急速な発達に伴い、これまでとかくうとまれていたばくだいな計算労力の面での隘路が除かれてきた。そして電子計算機による情報処理の一方法としても、再び因子分析の諸法が実質科学のいろいろな領域で頻繁に適用されてきており、また H. H. Harman, D. N. Lawley & A. E. Maxwell, K. G. Jöreskog, P. Horst や B. Fruchter などの因子分析法の著書も出版されてきている。さらに、最近の統計的多変量解析の洋書にもいくぶんかのページ数を因子分析法にあてている。そして、このような分析法が諸種の現象に適用されたときの有効性に関連して、新たに種々の注意事項や性格が吟味され、実質科学と方法論における思考の内容と方法から数理論に至るまで、一段の整理と飛躍の時期にきていると考えられる。

このように、因子分析法は、当初、心理学的な分野での研究に限って適用され、主として心理学関係の雑誌に発表されていた。しかし、因子分析の諸法の

意図が、いずれにしろ、高次元空間における標本点を、目的に応じた基準によって、より低い次元の認識可能な空間に射影しその空間の中で因子の解釈や因子の量に関する推測や識別を行なわんとするものであり、適用の分野は次第に拡大されつつある。

次に、著者の近辺の諸分野における典型的な適用例をあげ、読者の理解の助けとしたい。

A. 文 学

文章の性格については、いろいろな類型がたてられている。いま、文章の性格因子を測る観測項目として、文章心理学や数量的文体論などの見地から、文章の特徴となる種々の計測や指数による 30 項目 (items) をあげた。これらのうちには、一定量の文章中に用いられる比喩の数や名詞・形容詞・副詞の数などの 15 項目も含まれている。さて、これらの準備ののち、現代作家の作品 100 編について 30 項目による統計資料を得た。この資料に基づき、上の現代作家の文章をいくつかの性格類型に分類したい。また、それぞれの特徴を説明したい。

B. 色 彩

Munsell による色表現の 3 要素によって種々の色彩標本をつくり、この中から無作為に 3 色ずつ抽出し、各色とも扇形の等面積とし、3 色配色の円板を独立に 100 個つくった。ここで「配色のよさ」に関する感覚的な 5 段階評点の 38 観測項目を設定し、いわゆる意味構造論 (semantic differential) による 3 色配色の感情因子を追及する。

C. 嗜 好

即席ラーメンのスープの味覚について、購入者には種々の意見がある。いま、30 項目の設問を工夫し、数種の商品の味覚検査を行ない、購入者の味覚に関する訴求因子を調査したい。また、これによって消費者の嗜好を類型化して分布をしらべ、スープの調味を考案する。

ラジオ・テレビ番組の共通 24 種目について視聴者 (10~69 才) の嗜好をアンケート調査し、番組種目の嗜好に関する数種の共通因子を抽出する。そして、これらの因子の量によって番組種目の分類および視聴者の分類を考えたい。

D. 経 済

地域別経済水準を知るために、地域別収支、産業別生産高、スケール別企業

数、労働人口、失業者、手形交換高、金利率、等々が詳しく調べられている。これらを結合して経済水準を示す一般指数が得られないか。また、これに個人平均賃金、電話の有無、家賃、自家用車数などを付加して民力の指数が得られないか。もしこのような指数が得られるとすれば、それはどのような客観的意味をもつか。また地域・個人を社会的・経済的階層に類型化するにはいかにすればよいか。

10年間の電力・ガス・石炭鉱業・金属鉱業・非金属鉱業など40項目の鉱工業生産指数を利用して、生産額の共通の変動パターンや各生産の比重の変化などの観点から、時系列的な経済構造の変化を知りたい。

E. 産 業

ある金融機関の電算機部門では、多数の企業について、資本金・売り上げ高・業界占拠率・売り掛け金・資金の貸し入れ状況・営業直接費・営業間接費・原価率・研究開発費・業界の伸長度・純益・従業員数などの40項目とそれらのトレンドをも加えて因子分析し、各企業のパターンを考察した。そして、これによって企業の安定成長性が客観的な数量で示されるようになった。

F. 営 業

多くのメーカーと競合する商品を卸問屋に販売するには、販売員の受注能力に負うところが大きい。もちろん、この場合、問屋の営業政策やお得意先き小売店の特性にも関連して、商品知識の説得力をはじめ、販売員と問屋との相対的な相性の要素に至るまで無視できない因子が多い。このような観点から、販売員の商品知識・応接時の会話と動作・その他性格テストも含めて因子分析を行ない、全販売員の各因子にわたる販売プロフィールを考察する。また、これによって成績のよい販売員の類型を調査し、社内教育の資料にしたい。さらに問屋と販売員との相性という見地からの適性配置を考えてみたい。

生命保険の勧誘には、外務員教育が種々行なわれている。いま、営業成績のよい外務員と悪くて脱落していく外務員とは、職業適性のうえて、基本的にどのような性格因子の優劣が実証されるであろうか。もし、これが知れば採用時にある種の性格テストを行ない、あらかじめ脱落のないような人を採用する方式を研究したい。

G. オペレーションズ・リサーチ

ある成年男子 (20~25 才) の集団の制服についていくとおりかの体形とサイズに関する既制服を数種類つくっておきたい。このために、母集団から 256 人を無作為に抽出し、体重・身長・座高・胸囲・首高・首囲・ズボン丈・股下・手丈・胸幅・背幅・肩幅・肩の厚さ・ゆき・胴囲・腰囲・腿囲の 17 項目について測定した。この資料をもとに、どれほどのサイズと型の既制服をつくっておくとよいか。また、この 256 人を無作為に 128 人ずつの 2 群に分け同様の解析を行なって、結果の再現性をしらべる。

地域別に、薬局を類型化し、薬品の供給ルートを検討したい。いま、薬局の規模、立地環境条件、薬種分類別販売高、化粧品その他保健日用品の販売高、総月商、占拠している地区面積、広告方法などに関する資料をもとに如何に類型化すればよいか。

H. 農 業

ある県内で部落別に各種作物の収穫が報告されている。この資料より一般的に生産性という量で比較が可能ならばいかにして求めるか。また各地の地力についても同様に検討し、地力と生産性の関係という見地からバランスがとれているか否か調査したい。

小麦品種の品質検定のため、小麦粉をブランダー・エキステンソグラムにかけて、3 時点 (45 分, 90 分, 135 分) での面積、伸長度や伸長抵抗など 12 項目を観測している。いま各地から集めた 110 個のサンプルの資料によって、この 12 項目が小麦品質のいかなる内因因子特性に役だてられているか。また、これによって小麦の産地別の特性が知れるかを分析したい。

I. 工 場 技 術

ある複雑な合成反応の工程で、最近、品質が低下してきた。このために、いくつかの主原料や副原料の数種の含有量や温度・圧力・反応時間などの諸特性が調査され、以前の比較的高収率であった時期と比較する統計資料が集められた。この場合、直接に観測特性を 1 項目ずつ比較しては原因がわからず、結局、何か内因する原因系の探索を因子分析法によって行ない、トラブルの理由が判明した。

ある新合成化合物を生産するために、従来のコルベン実験からパイロット・

プラントに拡大した設備で製造した。このときの条件は、ほとんど同一と考えられるが、収率低下の原因を諸観測特性の資料によって因子的に追求し、対策をたてた。そして、その後は、その原因因子に関して、日常の検査項目を設定した。

J. 養 育

ある大学では、3才時の養育家庭環境や行動特徴と7才時の性格・学業成績・体形などを140名について追跡調査した。この資料に基づいて、3才時の養育条件や行動特徴が、学齢期での性格と知能にどのような影響をもたらしているのか。また、3才時と7才時を通じて一貫する因子は何であるかを検討した。

K. 医 学

本態性高血圧症を状態像によっていくつかの型に類別したい。過去のカルテを集めて、どのような症状の組み合わせ(プロフィール)によっていくつの類型化ができるか。また、A地区とB地区の同年代の高血圧症患者群があるとき、上の類型において両者に差異が認められるか否か。

ある衛生管理された工場での成年男子の普通感冒は、初診時、23種類の臨床検査によってどのような状態像分類が行なえるか。また、治療の過程で状態像から他の状態像への遷移はどうか。また治療に至る状態像はどれどれか。

老人性痴呆症の診断法の一つに、よく知られた WAIS の知能試験法がある。しかし、これをわが国でそのまま適用するには、社会環境や生活条件の相違やさらに医師の診療体制上の制約があって困難である。このために種々の観点から WAIS に代わる改善した新知能試験法を研究し設定した。そして、この新法の検証として、WAIS に共通に対応して把握される知能の諸能力因子の種類が知れ、また、WAIS に含まれず、新試験法だけで知りうる重要な因子の存在とその定量法が確認された。

うつ症状患者の診断に利用される患者用および看護者用の評価表 (rating scale) が作成されている。古今東西の文献から有益な設問をとり集め、完備かつ集約したものにした。この数多くの設問を実際観測した資料より、いかに減じ整理していくべきか。また各設問は、どのような精神因子をいかほどの割合で含むものか。また、このような精神因子は治療経過中に観測せねばならないが、患者が設問に習熟してしまうと正しい結果が得られない。このため初め

の数多くの設問から適当に設問を取捨選択し、各精神因子を含み、しかも同等な数種の評価表をつくりえないか。

1.3 因子分析法の型

因子分析法には、種々の考え方のもとに、いろいろな方法が適用されているが、まず各観測特性に内在する因子に関する構造模型の設定面で、あらかじめ仮定できる知識の有無によって大きく二つに分類できる。

すなわち、一方は、歴史的に因子分析の発端でごく自然に仮定されていたように、各観測項目に包含される共通因子の数やそれらの名称までも先験的に既知として、完全に規定した構造模型 (completely specified factor model) に基づく立場である。このことは、因子分析を行なうにあたって、当然、最初に思索しておく問題である。そして既知として利用してよい情報は、構造模型に定式化し、その仮定条件のうえでの解析をすすめる。また解析の結果からは、その際の仮定条件が適切であったか否かの吟味をも行なっておくとよい。このような既往情報を模型式のうえで仮定する立場では、Spearman の二因子解法やその後の双因子解法・多群解法などがある。

他方、事前的には何の知識も利用せず、したがって全く一般的な構造模型により、実際に得られた観測資料のみに基づいて、探索的に因子を抽出し、これを解釈しようとする立場がある。もちろん、この際には各観測特性に含まれる共通因子の数も内容も確定されてなく、いわば不完全規定の模型 (incompletely specified factor model) の場合である。成因分析法やセントロイド法に始まり、種々の回転法を含む多因子解法や正準相関分析法などは、この立場をとるわけである。

この両者の立場を比較すると、前者は実質科学上の知識の相当な積み重ねに基づいて規定した構造模型によって、各因子の量を推測しようとするもので、その解法自身も後者に比べて直截的である。一般に、この種の解法は、前提となる因子の含み方とその解釈と确实さに応じて、得られる結果は不完全規定の場合より明析となる。しかし、この前提があまりにも主観的または教条的すぎると、本来の実証的な根拠を失い、実際の現象に適合しないことになる。また、この完全規定の立場では、すでに論じられている既存の模型以外に、もっ

と個々の問題で直面する現象に適合した固有の模型での解析法が考えられねばならない。

不完全規定の立場では、各観測項目での共通因子の数やその含み方、さらに因子の具体的な性格を解釈することにより探索をはじめ、次いでそれらの因子の量をも追究しようとする。したがって、あらかじめ所有している実質科学上の知識にほとんど束縛を受けず、かなり自由な態度で客観的に実証しうる立場にある。しかし、この種の解法では、一般に複雑に広範な配慮が必要となり、また得られた結果の意味づけにおいても、とかくとまどいがちなことが多くなる。もちろん、いずれの立場にあっても、有効な因子分析のためには、十分な心構えと考察および準備が基本的に必要で、これらの重要性は次節で述べる。そして、この両者のいずれの立場をとるかは、個々の問題でどれほどの知識を仮定として与えうるかによって異なるが、因子分析法の実証的または探索的な関心の立場を強調すると、後者のほうが望ましくなる。

また別に、因子分析法は、因子を抽出する根拠や基準の観点から分類すると、対内的因子分析法 (internal factor analysis) と対外的因子分析法 (external factor analysis) とに大別することができる。対内的因子分析法とは、多種類の計測項目について観測した一群の統計資料に基づき、それら観測特性間の内部従属性により各観測特性に含有する共通因子の抽出を意図する。そして、このときには統計資料全体からつくられる一つの相関行列または分散共分散行列によって解析を始める。他方、対外的因子分析法とは、多種観測特性による一群の統計資料に対し、また別になんらかの対比関係にある多種観測特性の統計資料の群をとり、これらの群間の統計資料により、実質科学上の対応的または相対的な関係を想定した共通因子の抽出をはかる。したがって、このときの基準は数種の資料群により他資料との意図する相互関係を最大限に表現できるような因子を探索しようとする。

このような分類によると、Spearman による二因子解法をはじめ双因子解法・多群解法や多因子解法など Thurstone, Lawley らによって提唱され開発されてきた解法は、すべて対内的因子分析法である。また Hotelling や Bartlett らによって開発された正準相関分析法や、この範疇にはいる正準分析法は対外的因子分析法に属し、いずれも他の群または他の諸観測項目との対比をテコに

した基準を設けて因子の抽出をはかる分析法になっている。

したがって、ここでも、いずれの側の分析法を適用するかは、実質科学上の個々の問題と因子分析を行なう発想法によることであって、分析結果の意味あいもおのずと異なってくる。しかし、また、実際問題にあたって、いずれの側の因子分析でも結果的には同じような解釈に到達しようと考えられる場合もある。このようなとき、たとえば p 種の観測特性に関する一群の統計資料を多因子解法による場合と、他方、 p 種の特性を p_1 種と p_2 種 ($p=p_1+p_2$) に分けて正準相関分析により因子抽出をはかる場合の両者を比較して、通常は後者のほうが因子解釈のうえでむずかしくなるといわれている。もちろん、本質的には、双方の数理的な構造と意図の性格的な相違に基づいて配慮しておく必要がある。

1.4 因子分析法の心構え

因子分析法は、種々の応用分野をもち、電子計算機の普及とともに、次第にその適用が日常化してきている。しかし、この解析には、相当な計算労力が費やされるわけであるから、最も効率よく成果のあがるように、最初から若干の見通しのもとに、適切な計画と緻密な準備をたてておくのが好ましい。すなわち、実質科学における明確な意図と種々の仮説的な考察のもとに、それに適した観測資料から分析を始めねばならないのは当然である。とくに、一般に、因子分析法は微妙な技法で統計資料の質に依存することが大きい。たまたま得られた資料を寄せ集め、成果を期待してすぐ分析するやり方では失敗が多い。また、どのような場合でも、現象を継続的に追求し観察や考察の努力を続けて再び分析を工夫するという努力の不足のために、期待された良い結果が得られず、成果をあげていないことも多いようである。

このようなことから、因子分析法を適用するに際し、次のような注意が必要になる。

まず、当然のことながら、因子分析の適用領域をよく選択せねばならない。形式的に相関行列または分散共分散行列ができる、 P 技法あるいは Q 技法などによって、なんでも因子分析にかけるような安易な考え方は避けねばならない。実際問題のなかには、観察資料が不十分で実質科学上の考究に耐えられ

ない場合があり、因子分析法に不向きなことも多い。すなわち、選ばれている観測特性が当面する研究領域を十分におおい、論理の運びがこの分析法に適合しているか否かを検討せねばならない。本来の研究調査が明確な目的のもとに企画され慎重に得られた資料であるような場合に、因子分析法に適合して有効な結果が得られるということである。しかし、反面、このような資料の分析は、実験科学に属するもので、試行的に実施してみなければ本質はわからないことである。したがって、このような勘案のもとに、因子分析の実施まえに問題の性格を考察しておかねばならない。

さて、問題の性格が合致していても、ここで観測特性項目と共通因子の関係およびそれらの数について、もう少し詳しく配慮しておく必要がある。

すなわち、諸観測特性と因子についての実質的な関係、予期される共通因子の数およびそれらの特性についてある程度の仮説的な洞察を加えておくことである。共通因子の数を1,2個程度にすると、やや常識的に、その事象の大きさ(size)や形状(shape)というような全般因子の量を推定することになりがちである。一方、20個以上の共通因子の抽出を意図すると、実際に得られた因子負荷行列からの因子解釈は相当にむずかしくなる。したがって、通常、共通因子の数は10個程度までが望ましく、多くとも15個をこえないように研究目的や仮説の選択領域をせばめておくべきであろう。

また、これらの観測特性項目の選択の立場からは、各因子がどれも二つ以上の項目に含まれるよう、とくに注意せねばならない。もし、一つの項目にのみしか含まれないような因子があれば、それは共通因子ではなく特殊因子となって誤差項に混合し、共通因子を追求する通常の因子分析法では抽出されないことになる。したがって、各観測特性項目に対応して包含される共通因子の関係をあらかじめ考察しておく必要がある。さらに、各共通因子軸が、回転などによって、観測特性項目のうえで完全に確かめられるように、項目数を少なくとも共通因子数の3倍程度には欲しいところである。しかも、一方、観測特性項目の数があまり大きいと、資料を集めるための労力やその後の計算量と計算精度、さらに計算時間にも不都合が生じてくる。したがって、観測特性項目の数は、通常、50個ないし100個までが望ましいと考えられる。

さて、上のような配慮に伴う重要な注意事項は、母集団の規定の問題であ

る。これは単に、観測対象とする集団の選択だけでなく、それらの時点や場合についても研究の目的に沿って考えねばならない。このことはなにも因子分析法に限ったことでなく、一つの調査結果から導かれる結果が、どれほどに普遍化しうるかということであり、観測対象と観測方法の条件や環境に関する討議がいつも最終的な結論に制約を持ち込むことになる。また、母集団を層化 (stratified) した等質的なものとするか、集落 (cluster) のような異質的なものを比例的に含めたものにするかは、それぞれの場合の内因因子の質的な差異に関係し配慮せねばならない。さらに、想定した母集団によっては、当然、観測の難易や観測のかたよりと誤差の大きさにも関連してくる。

この段階でのもう一面の配慮は標本数についてであろう。もちろん、十分大きな標本数を得ることが望ましいが、そうも事情が許さない場合が多い。標本数に関連して、因子負荷量の標本分布はまだ十分に知られていないが、いずれにせよ標本相関行列または分散共分散行列の標本分布が基礎になるわけで、これが相当に安定して信頼できるほどの標本数は是非必要である。このためには、行列の各要素の標本分布のうえで、母数に関する区間推定を考慮し、適度に小さな信頼幅を示すような標本数を定めることに帰着することができる。

因子分析の過程にはいつてからの個別の注意は、次章以降に記述しているが、ここでは推定された因子負荷行列が回転による不定性を有している場合について簡単にふれておきたい。もちろん、この際の回転はすでに定められた次元の因子空間で行なわれるが、この回転はその空間内で各因子を初めて具体的に解釈するのに容易ならしめるための方法で、種々の回転法が適用される。したがって、各回転法の基準と性格を知っておいて、あらかじめ操作手順の準備をしておかないと、実施の際に意外に時間がかかり、ある期間研究が中断してしまう。

因子の解釈は、実質科学分野の研究者の洞察力に依存するが、古い仮説の修正や経験的法則の証明や、また新しい仮説がたてられるなど、実質科学のうえで収穫の多いところである。そして分析の最後の段階では、同一母集団に属する種々の観測資料について因子評点を算出し、そのプロフィール (profile) により、具体的に因子の解釈をもういちど実質科学的に検証することを忘れてはならない。

もちろん、これらの思考の過程でなんだかアト知恵を得、その都度に修正して解析し直す (feedback) 必要が生じるが、この労をいとはならない。また、できれば、現象にかなり詳しい適当な応用数学者の助言を受けることが望ましく、さらに電子計算機分野の人の協力をあらかじめ得ておくことも必要であろう。

1.5 因子分析法の適用技法

1.5.1 O 技法, P 技法, Q 技法, R 技法, S 技法, T 技法

実質科学における諸現象を因子分析法で解明しようとする際、上のような術語がしばしば使用される。これらの技法は、主として R. B. Cattell や W. Stephenson らによって論じられてきたもので、因子分析法を適用する際の考え方を意味している。

元来、われわれが使用しうる原始の観測資料は、各個体または個人 (individuals) と場合または時点 (occasion, time) と観測特性項目 (test items, items, variables) という三つの観点から限定されている。一方、因子分析を実施するには、まず観測値による分散共分散行列または相関行列を作成することから始めねばならない。ここで、どのような観点から上記の標本行列を作成するか、すなわち、直面する実際問題に対して因子分析を適用する基本的な立場が示され

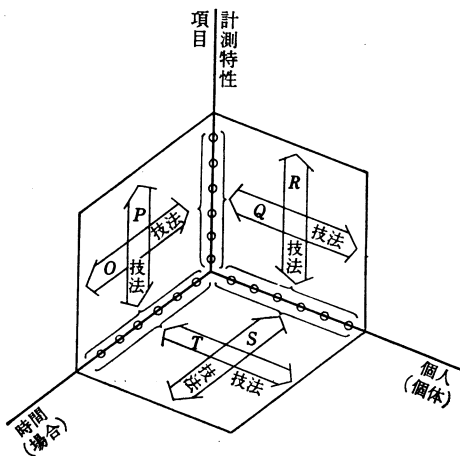


図 1.1 Cattell の共変動図

る。これについて、R. B. Cattell は、次のような共変動図 (covariation chart) によって、因子分析の6つの見方をそれぞれ技法 (technique) と名づけて示している。

この図 1.1 では、*R* 技法と *Q* 技法、*P* 技法と *O* 技法、*S* 技法と *T* 技法を同一平面上に描き、それぞれ同一の観測資料をもとにして得られる関係を示している。たとえば、*R* 技法と *Q* 技法では、時間または場合に関する情報を固定または総括的に無視した多数観察という立場で、観測資料を単に個体 (個人) と計測特性項目の関係を示すと考えて整理する。そして、矢印方向の軸に関する要素間の相関または共変動についての内因因子を分析する。すなわち、*R* 技法では観測特性について、また *Q* 技法では個体とか個人とかの間の相関または分散共分散について詳しく内容を解明しようとするものである。しかし、このような際にも、*R* 技法または *Q* 技法は、それぞれ対応して、*P* 技法または *T* 技法と異なることに注意せねばならない。すなわち、*P* 技法はもとの観測資料を場所 (時間) と観測特性項目、*T* 技法は場合 (時間) と個体 (個人)、という形に整理された資料に基づいて、それぞれ計測特性項目間または個体 (個人) 間の相関や共分散の行列から出発している。これらの具体的な意義の相異については、個々の場合に論じられるべきである。しかし、因子分析の実際問題で、*O* 技法、*S* 技法、*T* 技法が論じられることはまれで、また文献的にもほとんどみられていない。

次に、因子分析の適用でしばしば論じられる *R* 技法、*Q* 技法および *P* 技法について簡単に述べておく。

A. *R* 技法 (*R*-technique)

この技法は、因子分析法での最も普通の考え方である。いま、もともとの観測値を x_{ij} とおいて、各 i は観測特性の項目 ($i=1, 2, \dots, p$) を、また j は被検される各個人または観測される毎回の個体の番号 ($j=1, 2, \dots, n$) とする。すなわち、各 j は標本単位として抽出され、 n は統計的標本数を意味している。

したがって、このときの相関行列は、各観測特性の項目間の相関係数を要素として成立している。元来、因子分析法はこのような観測特性の項目間または項目内に内因する共通因子に関して解明する意図のもとに体系化されてきた。

本稿での種々の考察や論議は、多くの場合、この本来の立場から与えているが、他の技法でもこの考え方の変法として同様に考えうるものである。

B. Q 技法 (Q-technique)

上の A. で定義した x_{ij} に関して、R 技法は行間の相関行列より出発した考察であったが、Q 技法は列間の相関をとりあげ、これを解明せんとするものである。したがって、相関性は個人または個体間の毎回の現象間に関するものであって、各観測特性は統計的な繰り返し観測の標本のようにみなされている。実用的には x_{ij} の行数と列数がほぼ同じようなとき、または観測特性の項目が非常に多く、他方観測を受ける個体や現象の数が少ないような場合に必要な考え方となる。

もちろん、この Q 技法により得られる因子と、R 技法により得られる因子が、必ずしも一致するとは限らず、これに関する定説はまだない。しかし、Q 技法は、たとえば、人間の精神面における人格の型や疾患における状態像や症候群を類型化するような特性を因子として示すが、このような人格の型か症候群がただ一つの共通因子で支配されているような場合にのみ、Q 技法と R 技法の因子は一致すると考えられている。

Q 技法は、上記のような人格や状態像や症候群などの考え方をする場合や、多数の標本から限られた情報を得るよりも、少数の標本で多面的な情報を考えるような場合に適用されることも多い。

C. P 技法 (P-technique)

この技法は、ある個人またはある現象の経時的変動を追求の対象として母集団を考える。いま、もともとの観測値を x_{ij} とし、 i は観測特性項目 ($i=1, 2, \dots, p$) を示し、 j は標本抽出した時間的経過 ($j=1, 2, \dots, n$) を意味するとする。たとえば、各 j は、日ごと、週ごとまたは月ごとなどの標本抽出の時点を示している。このような場合の相関行列は、観測特性項目の時系列的な共変動を利用して、そこに内因し根底をなしている共通因子を追求することができる。すなわち x_{ij} において、各行間の相関に注目すれば、ちょうど先述の R 技法に似た、しかも経時的観点からの因子分析が行なえる。このように、P 技法は、そのうちで R 技法または Q 技法に類似した二つの分析法に分類できる。そして、いずれも経時的に基礎となっている共通因子を追求しようとする

考え方を示唆している。

1.5.2 第2次因子分析

p 種の観測特性に基づいて、 q 個の直交でない共通因子を抽出したとき、当然、これらの因子間の相関行列が考えられる。この相関行列は、上の q 個の因子に基づいた因子評点によって新たに生成された $q \times q$ の相関行列を意味するが、また直接的には、根元因子軸を得た際の変換行列 T の積 $T'T$ であり、因子軸間のなす角の余弦を意味するものでもある。これらについての詳細は、式 (6.17) や (6.28) で述べる。

しかし、ここで得られた因子間相関行列が第1次的に観測特性を説明し現象を解明する因子であるならば、これらの因子をさらに分析すべきか否かの問題が起こってくる。このとき最初に得た因子を第1次因子 (the first-order factor) といい、これに基づいて分析して得る因子を第2次因子 (the second-order factor) とよんでいる。

一般に、観測特性から抽出した q 個の因子の背景にさらに体系があると考えられ、 q よりも小さい数でもっと整理されるとすれば、第1次因子に基づいて、さらにもういちど因子分析を実施する理論的な根拠は十分にある。斜交回転で第1次因子を抽出し、同時に第2次因子をも付して結果を報告することはしばしば見受けられる。

このように、第2次因子は比較的広範囲なそして総合的な観点からの考察を行なうのに有用とされる。同様に、第2次因子に基づいてさらに因子分析をして、第3次因子 (the third-order factor) を抽出することも考えられる。もちろん、分析を継続することにより、さらに高次の因子 (the higher-order factor) の抽出も可能であるが、むしろ実質科学分野での解釈に限度があろう。そして、斜交因子に基づく因子分析は、斜交回転の際の根元因子について行なわれ、参考軸に関する因子について実施されるのではないことを付記しておく。

1.6 因子分析法の計算プログラミング

因子分析法は多種類の観測特性による統計的多数観察の資料に基づいて、ベクトル・行列演算を行なうのであるから、本来、その計算量は多い。そして解析法には、ランクの大きい行列の固有値と固有ベクトルを算出したり、因子行

列を回転するような逐次収束法による反復巡回計算も多くなる。しかも、因子分析の結果によっては観測項目の数や内容を変更するなどのアト知恵を加え、実験科学的に種々の試行を実施する必要性まで配慮すればその計算量はばくだいなものとなる。

したがって、電子計算機が自由に使用できるまでは、観測項目を十分に吟味してただか10数項目までにしぼり、また共通因子の数も数個程度に減じ、手計算により労力的に因子分析を行なってきた。そして、また、このような際には、多少とも数学的に不正確な解法となっても、簡便法または近似的方法が工夫されたり、若干の主観的考察を加えつつ作図することによって解を求めるグラフ法などが開発され実用に役だてられてきた。

しかし、近年の電子計算機の発展と普及は著しく、この利用は日常のこととして、各地で容易になってきている。したがって、電子計算機を利用して因子分析を行なうことを考えるならば、記憶容量と解析精度の許すかぎり、多数の観測項目や因子の数が高速度で処理できる。しかも、客観的な解析の方法で結果が得られることになる。

また、現在、電子計算機による情報処理活動の側からも有効利用法の一つとして、因子分析の適用がいわれている。このように電子計算機運用の立場からは、あらかじめ因子分析法に関連するすべてのプログラムに登録コードを付し、FORTRAN または機械用語で磁気テープに収録しておくことよい。そして、因子分析の実施は、統計資料とともに、コントロール・カードによって各分析法の適用手順を示し、自動的に一連の分析の過程を了えるようなシステムにすることができる。

一般に因子分析の種々のプログラムはプログラミングの習熟度にもよるが、それほど簡単でなく、また大型なものが多い。したがって、できる限り標準化し普遍的に利用しうる検証ずみのプログラムが公表されていれば、必要のたびに作成する労は減じられ、能率的である。

本書では、著者らが独自に開発した因子分析のプログラム・ライブラリーを、各分析法ごとに示している。また、各メイン・プログラムに必要なサブ・ルーチンは、その都度、すぐあとに付し、プログラムの連携を明確にして利用の便宜をはかっている。また、いくつかのプログラムは、コントロール・カー

ドにより、データ・インプットの面で数とおりの融通性をもたせている。因子分析法を実際に適用し、実質科学面での研究開発や数理論的な検証を意図される読者に利用していただければ幸いである。

プログラム用語は、現在の電子計算機のほとんどの機種に適用できる FORTRAN IV または II を用い、一部のプログラム中には XY プロッターによって計算結果を描かしている箇所もある。電子計算機の記憶容量は、もちろん大きいにこしたことはないが、そうでない利用者の立場をも考慮して、DIMENSION を小さめに整理してある。したがって、電子計算機の性能と必要性に応じて、この DIMENSION の大きさを自由に変更すればよい。同様の配慮のもとに、原則として、これらのプログラムはカードでインプットし、アウトプットはライン・プリンターに出すように統一している。また、磁気テープなどを用いない、いわゆるミニマムの設備だけを利用している。これらについても、読者は自由に変更することができる。

2 成 因 分 析 法

2.1 成 因 分 析 法 の 立 場

因子分析法は、元来、心理的潜在因子や潜在能力を追求する際に必要な手法として誕生したが、このパイオニアたちのまず当面した問題は、多面的な観測特性群をいかに整理して考察をすすめるかということであった。

このための第1段階の統計解析は、多変量観測値ベクトル $\mathbf{x}_\alpha (\alpha=1, 2, \dots, n)$ を得た際、17世紀の初期以来の相関行列 $(r_{ij}), i, j=1, 2, \dots, p$ を算出することであった。そして各 r_{ij} の区間推定や検定によって、相関行列を整理し、また偏相関や重相関の観点からの考察が行なわれるにとどまっていた。このようにして各観測特性間の相関性の結びつきによっていくつかの特性群に分け、そのよってきたる内因因子についての考察を行なっていたと思われる。

成 因 分 析 法 は、こ の よ う な 必 要 性 に 応 じ、数 種 類 の 観 測 変 量 間 の 内 部 の 従 属 性 (inter-dependence) を 詳 しく 解 明 す る 目 的 で 開 発 さ れ て き た。

たとえば、児童の知能程度を解明する際、一連のテストがなされ採点成績が示される。しかし、このテストの一つ一つの成績は、計数能力、読解力、推理力、直観力、記憶力、注意力などの複合した能力に、そのときの調子による偏差が確率誤差のように付加して観測されるものである。このように考えると、一連のテスト成績よりも、むしろ成績を組み合わせて上記のようなそれぞれの能力が各人ごとにいかほどであるかを知るほうが望ましい場合がある。これらは既成のテストを利用する側 (test-user) の立場であるが、また、このようなテストを作成する側 (test-maker) の立場にも同様のことがいえる。すなわち、

テスト自体が上記の諸能力を知るうえで十分な問題を集めているか否かが基本問題になってくる。さらに、一連のテストを固定しても、これらの成績は上記のいかなる能力を見つけうるものであるか。さらに個々のテストに含まれる各能力の混合比率を吟味することによりテスト数を増減する可能性、また考究している能力以外に発見される各児童の特殊能力の有無やその種類も追求されよう。

同様の例は、種々の分野であげられる。たとえば、医学の精神神経科領域では精神分裂症・うつ病やノイローゼなどで患者の精神と身体の状態の病態像を左右する内因因子を探索したり、また内科領域では臨床検査に基づき本態性高血圧症の状態像を識別し、起因を類推することなども可能となろう。

OR の一例では、多品目を販売している企業で、多品目の販売高を能力テストの成績反応とすれば、販売員の能力・個性が解明でき、企業に有利な教育・配置・分担を考えることもできよう。

このような意図のもとに、因子分析法は、一連の観測特性の中に何個の内因因子を有しているかを推測する段階と、内因因子数を規定した後の各因子の具

表 2.1 ウツ状態の

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
抑うつ気分	1.0	0.491	0.373	0.082	0.236	0.140	0.362	0.590
罪業感		1.0	0.522	-0.049	-0.048	0.121	0.358	0.370
自殺			1.0	0.043	0.098	0.073	0.016	0.335
不眠(入眠時の)				1.0	0.199	0.309	0.130	-0.115
不眠(夜中の)					1.0	0.054	0.035	0.200
不眠(夜明け方の)						0.1	0.17	0.126
仕事と関心							1.0	0.230
制止								1.0
焦躁								
不安(精神的)								
不安(身体的)								
身体症状								
胃腸症状								
身体症状(全般的)								
性器症状								
心気症								
体重減少								
病識								

(対角線に対称)

体的解釈の段階という2段階に分けて考えられる。この第1の段階は成因分析 (component analysis) の立場であり、第2の段階は狭義の因子分析 (factor analysis) の立場である。したがって、成因分析では最初の観測特性の数 p よりも小さい q 個の内因因子を、すなわち p 次元空間にある観測点を q ($q \leq p$) 次元空間でほとんど説明できるような q を求めるのが目的であり、狭義の因子分析はこのような q 本の軸を推定し、積極的に意義づけしていく目的をもっている。

上記のような構造追求は、通常、まず主成因分析 (principal component analysis) の考え方と方法を繰り返して、参考軸 (reference axis) を逐次算出する成因分析を行ない、共通因子と大約の意義を考察する。ここに、共通因子 (common factor) とは観測特性の二つ以上に含まれる内因因子をいい、大約の意義とは評価表の作成者 (test maker) としての観測特性群 (test items) に関する考察である。すなわち、このように抽出された共通因子の数 q があらかじめ実質科学上で考えられた因子の数とどのような関係にあるか、また q 個の共通因子の中で、いくつかでも意図した因子からはずれたものを含んでいれば最

評点間相関行列

(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)
-0.055	-0.198	-0.224	-0.032	0.014	0.370	-0.024	0.341	0.192
0.027	0.167	-0.151	0.071	-0.063	0.426	0.113	0.419	0.222
-0.068	-0.216	-0.065	-0.087	-0.115	0.304	-0.042	0.201	0.134
0.191	0.001	-0.036	0.438	0.169	-0.044	0.152	0.179	0.156
0.126	0.003	0.095	0.308	0.278	0.111	0.067	0.146	0.182
0.022	-0.180	-0.162	0.376	-0.038	0.142	0.171	0.012	0.243
0.183	0.017	0.045	0.285	0.094	-0.058	-0.020	0.313	0.178
0.305	-0.365	-0.356	0.067	0.127	0.269	0.208	0.232	0.087
1.0	0.274	0.329	0.199	-0.107	0.045	0.001	0.217	0.151
	1.0	0.370	-0.146	-0.058	-0.026	0.043	-0.159	0.245
		1.0	-0.082	0.060	0.033	-0.014	-0.310	-0.074
			0.1	0.248	-0.115	0.135	0.074	0.313
				1.0	0.048	0.137	-0.024	-0.070
					1.0	0.199	0.254	0.065
						1.0	0.275	0.235
							1.0	0.149
								1.0

初の観測特性の吟味を行なう必要があり、さらに、いくつも重複したような観測項目 (items) の整理、観測項目の作り方や観測方法、新たな観測項目のそり入などがなされる。このように評価表の作成者の立場に沿って、バランスのとれた多変量観測のもとに分析を意図することになる。この評価表の作成者の立場は単に評価表の作成者だけの仕事ではなく、評価表の利用者 (test user) の立場でも同様で、これから因子分析を実施して成功に導こうとする分析担当者の問題に取り組む構えともなる。このように一つの案として観測特性群を選択すれば、その都度毎回、成因分析を実施し逐次完全なものに仕上げていく配慮が必要となる。

成因分析で観測項目の吟味がなされ、 q 個の共通因子の存在が確認されてくると、次の狭義の因子分析の段階で、 q 個の内因因子を積極的に因子負荷量 (factor loading) やさらに因子評点 (factor score) として推定し、各内因因子の示す意味を追求することになる。この段階の考察は次の第 3 章で記述する。もちろん、この過程でも新たに得た共通因子の数と意味および観測変量の適否が検討され、解析は成因分析と因子分析の間を数回往復することになるわけである。このように成因分析と因子分析の性格は、表裏のように繰り返されるものであり、この手順を総称してまた単に因子分析 (factor analysis) とよんでいる。

2.2 主成因分析と成因分析

いま p 種の変量をもつ n 個の観測値ベクトル $\mathbf{x}_j' = [x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{pj}]$, ($j = 1, 2, \dots, n$) が得られ、各 x_{ij} はすべての i について次のように基準化されているとする。

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}^2/n = 1 \quad (2.1)$$

したがって、任意の i と i' の標本共分散は、標本相関係数と同じで

$$\widehat{Cov}(x_{ij}, x_{i'j}) = r_{ii'} = \sum_{j=1}^n x_{ij}x_{i'j}/n, \quad i, i' = 1, 2, \dots, p \quad (2.2)$$

であり、この標本相関行列を \mathbf{R} とおく。

Hamilton は、神経科領域におけるうつ状態患者の 49 例の精神と身体面の症状評価を行ない、表 2.1 のような観測項目間の標本相関行列を得ている。この

観測項目は、患者の精神状態に関する 8 項目と身体状態に関する 4 項目、および精神状態に関する 5 項目で、計 17 項目について調査している。

さて、成因子分析は、 p 種の変量に含まれる共通な因子を求めるのであるが、これらの因子は p 種の変量の 1 次結合で表現されることを仮定し、次のようにおく。

$$\zeta_j = A\mathbf{x}_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

そして、この $p \times p$ の係数行列 A について、因子ベクトル ζ_j の次元数 p を $q \leq p$ なる q 次の互いに独立な因子で表現できないかをしらべる。事実、 p 個の変量が $(p-q)$ 次の従属性をもつならば、 ζ_j の次数は q に退化しており、これは A の行ベクトルを互いに直交するように求めればよい。ここで p 個の変量のどのような 1 次結合を当てはめるか、すなわちどのような基準 (criterion) で直交する行ベクトルをもつ行列 A を求めるかが問題となる。ここに主成分分析の考え方が適用される。

2.2.1 主成分分析

いま、観測値ベクトル \mathbf{x}_j を p 次元空間における座標点であると考え、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ はこの空間中の n 個の点であり、この点群を代表する p 次元の 1 本の直線を次式で示す。ここで、各 m_i と l_i はこれから推定しようとする未知の母数である。

$$\frac{X_1 - m_1}{l_1} = \frac{X_2 - m_2}{l_2} = \dots = \frac{X_p - m_p}{l_p} \quad (2.4)$$

ここに
$$\sum_{i=1}^p l_i^2 = 1$$

さて、 n 個の点よりこの直線に至る距離の偏差平方和 nS は、

$$nS = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^p (x_{ij} - m_i)^2 - \left\{ \sum_{i=1}^p l_i (x_{ij} - m_i) \right\}^2 \right] \quad (2.5)$$

となり、この nS を最小ならしめる直線を望ましい代表として求める。ここで nS が最小値をもつことは明らかで、まず m_i で偏微分して次式を得る。

$$-\sum_{j=1}^n (x_{ij} - m_i) + \sum_j l_i \sum_{i'=1}^p l_{i'} (x_{i'j} - m_{i'}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.6)$$

ここで x_{ij} は基準化されているから、上式より m_i/l_i は i に関せず一定で、

直線は原点を通ることが知れる。したがって、直線が通る 1 点を原点と考え、 $m_1=m_2=\dots=m_p=0$ とおく。

また $\sum l_i^2=1$ なる条件下で S を最小にする l_i は、ラグランジュの乗数 (Lagrange's multiplier) λ を用い、 l_i で偏微分した後にゼロとおいて、次式をうる。

$$\frac{1}{n} \sum_j x_{ij} (\sum_{i'} l_{i'} x_{i'j}) - \lambda l_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.7)$$

すなわち、この p 個の式は、

$$(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{L} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

であり、 \mathbf{R} に関して λ は固有値 ($\lambda \geq 0$)、 \mathbf{L} は対応する固有ベクトルとなる。また、このような λ に対して式 (2.5) と (2.7) より nS の大きさは次式で示される。

$$nS = n(p - \lambda) \quad (2.9)$$

したがって λ に関する固有項式の p 個の根の中より、 nS を最小にする最大の根 λ_1 を選び、対応する固有ベクトルを標準化 ($\sum_{i=1}^p l_i^2 = 1$) して \mathbf{L}_1 とし p 次元空間の原点を通り勾配係数を $\mathbf{L}_1' = [l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1p}]$ とする 1 本の直線確立する。このような直線 $\mathbf{L}_1' \mathbf{x}$ で示される軸を因子と考え、 S に関する主成因子 (principal component) といい、この解析法を主成因子分析法という。 \mathbf{A} の第 1 行は、この \mathbf{L}_1' で示されるものである。

さきの Hamilton による標本相関行列に関しては、

$$\lambda_1 = 3.4358$$

$$\mathbf{L}_1' = [(0.763, 0.728, 0.531, 0.207, 0.284, 0.338, 0.458, 0.683, -0.034, -0.373, -0.403, 0.282, 0.087, 0.474, 0.157, 0.603, 0.353)]$$

を得る。

2.2.2 成 因 分 析

この第 1 因子は、主成因子として得たが、第 2 因子以下についても全く同様の考え方を適用する。すなわち、第 1 因子として 1 本の p 次元直線を当てはめた後、この直線のまわりには、なお $p - \lambda_1$ だけの標本分散が残っている。この残差分散を最小にし、かつ先の直線に直交するような第 2 本めの p 次元直線

を求める。この直線の勾配を A の第2行として ζ の第2因子を考える。第3の因子は、第1と第2の直線を当てはめた後、なお残っている標本分散を最小ならしめ、かつこれまでのいずれの直線にも直交する第3の直線を求め、その勾配により決定する。このように逐次 p 本の直線をあてはめ、第 p 番目の因子までを、それぞれの直線の勾配係数ベクトルで考察する。

解析法は、 R の固有値と固有ベクトルに関する式 (2.8) から直接得られる。いま p 個の固有値を大きさの順に $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ とおく。 R のトレース (trace) は p であるから、

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \quad (2.10)$$

はすぐわかる。また $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ に対応する固有ベクトル L_1, L_2, \dots, L_p は互いに直交している。

すなわち、 $i \neq j$ として、 $(R - \lambda_i I)L_i = 0$ および $(R - \lambda_j I)L_j = 0$ の左辺からそれぞれ L_j', L_i' を掛けスカラーをつくり、辺々相引くと、

$$(\lambda_i - \lambda_j)L_j' L_i = 0 \quad (2.11)$$

となり、 $\lambda_i \neq \lambda_j$ であるから、各ベクトルは互いに直交していることがわかる。まず、第2因子に関して、 λ_2 と L_2 も式 (2.5) を最小にするための式 (2.6) と (2.8) を満たし、原点を通過し、かつ L_2 は L_1 と直交する。すなわち、 L_2 を係数とし原点を通る直線は、 λ_2 が λ_1 に次いで大きい固有値なので、 $p - \lambda_2$ は第2に小さい残差分散を示す。

したがって、このような第2の直線を第1の直線の後に選ぶと残差分散は $(p - \lambda_1) - \lambda_2$ となり、 L_1 と直交する直線群の中では最も望ましいものとなる。同様に、第3の因子以降についても $\lambda_3, L_3, \lambda_4, L_4, \dots, \lambda_p, L_p$ が、各段階で主成分因子となり、順次 ζ の要素を説明するものとして採択される。このようにして得られた ζ の各因子間の共分散は、 L_i 間の直交性によりゼロとなり統計的に無相関となっている。

相関行列 R が非正則 (singular) で p より小さなランク q であれば、 $p - q$ 個の固有値 λ はゼロとなるが、対応する $p - q$ 個の固有ベクトルで説明される ζ の中の因子は意味をもたず不要になる。また、一般に相関行列は非負定符号 (non-negative definite) であるが、観測値がある構造模型から統計的に独立に無作為な誤差を伴って得られるため、標本相関行列のランクが落ちることは理

論的でない。また同様に、非負連続な実数で得られる固有値が重根として得られることは、計算の丸め誤差の介入以外に考えられない。すなわち、ほとんどの場合、 p 個の固有値は $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p > 0$ として得られる。

このようにして、ベクトル ζ の p 個の因子が算出され、データ全体の分散 p は、 p 個の因子による $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ で尽きてしまう。しかし、観測値ベクトルの次元 p を減ずる本来の目的からは固有値の大きい因子から順に実質科学分野で意義のある若干 (q) 個をとりあげ、他は残差誤差として取り扱う。このため、通常、形式的に ε を 0.2 とか 0.3 のように 1 より小さい適度の正数とし、当初の全分散の 70~80% について解釈できるよう

$$\sum_{i=1}^q \lambda_i / p \doteq 1 - \varepsilon$$

となる q 個、または $\{\lambda_i\}$ の中で λ_i の値が +1 より大きい q 個の因子だけをとりあげている。このようにして、因子数 q を実質科学的意義づけの対象にするのが成因分析法である。

さきのウツ状態評点間の相関行列の固有値は、大きいほうから 3.44, 2.34,

表 2.2 因子行列と固有値

症 状	因子 1	因子 2	因子 3	因子 4
抑 ウ ツ 気 分	0.763	-0.172	0.103	0.151
罪 業 感	0.728	-0.156	0.341	-0.138
自 殺	0.531	-0.311	0.283	0.122
不 眠(入眠時の)	0.207	0.614	-0.208	-0.025
不 眠(夜中の)	0.284	0.363	-0.081	-0.639
不 眠(夜明け方の)	0.338	0.371	-0.304	-0.340
仕 事 と 関 心	0.458	0.275	0.043	-0.134
制 止	0.683	-0.371	-0.253	0.224
焦 躁	-0.034	0.539	0.503	-0.032
不 安(精神的)	-0.373	0.326	0.557	0.072
不 安(身体的)	-0.403	0.250	0.480	0.421
身体症状(胃腸症状)	0.282	0.674	-0.395	-0.010
身体症状(全般的)	0.087	0.245	-0.356	0.628
性 器 症 状	0.474	-0.139	0.397	0.225
心 気 症	0.157	0.367	0.117	-0.144
体 重 減 少	0.603	0.107	0.204	-0.173
病 識	0.355	0.439	0.214	-0.192
固 有 値	3.4358	2.3439	1.7496	1.3658

1.75, 1.37, 1.28, 1.07, 0.99, … と得られ, 初めの七つで全分散 17.00 の 72% を占めている。表 2.2 は Hamilton が吟味している主要な四つの固有値に関する因子ベクトルを示している。

2.2.3 セントロイド法

成因分析法の実施にあたり, 心理学者は固有値と固有ベクトルの算出に必要な数学的な手順のめんどうさを避け, この代わりに直観的にわかりやすく, 計算手順の楽なセントロイド法 (centroid method, 重心法) を提唱した。現在でも, 電子計算機を利用しない場合にはこの方法が繁用されている。したがって, この方法は厳密な妥当性を欠くので, 環境が許せば, 適用しないほうが望ましいと M. G. Kendall も述べている。しかし, 本節では, セントロイド法が科学の諸分野でかなり繁用されており, またその技巧を今後の開発に備えて紹介しておく。

前節では, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ を p 次元空間における n 個の点としたが, 他方, n 次元空間における p 個の点とも考える。事実 p 個の点は n 次元空間の中で, あたかも洋傘の骨のように, p 次元空間を張っていると考えると, 骨の長さは各変量の分散に比例し, 骨間の角度の余弦は相関係数に相当している。いま, \mathbf{x}_{ij} の平均をゼロとし分散を 1 としているから, p 個の点は原点から放射する p 個の単位ベクトルの先端と考える。この p 個の点の第 i 番めの先端(点)の第 j 軸(骨)上の座標を y_{ij} とすると,

$$\sum_{j=1}^p y_{ij}^2 = 1, \quad r_{ij} = \sum_{k=1}^p y_{ik} y_{jk} \quad (2.12)$$

であり, p 個の点のセントロイドは次式の $y_{\cdot j}$ で示される。

$$y_{\cdot j} = \sum_{i=1}^p y_{ij} / p, \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (2.13)$$

さらに, $r_{\cdot j}, a_j$ および T を次のように定義しておく。

$$\begin{aligned} r_{\cdot j} &\equiv \sum_{i=1}^p r_{ij} / p = \sum_{k=1}^p y_{\cdot k} y_{jk} \\ a_j &\equiv p \sum_{k=1}^p y_{\cdot k} y_{jk} \\ T &\equiv \sum_{j=1}^p a_j \end{aligned} \quad (2.14)$$

さて、このセントロイドを通り、第1番めの軸に平行な直線上で、 $k=2, 3, \dots, p$ について y_k はゼロで

$$\begin{aligned} a_j^{(1)} &= p y_{\cdot 1} y_{j1} \\ T^{(1)} &= p^2 y_{\cdot 1}^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

または $y_{\cdot 1} = \sqrt{T^{(1)}}/p$ および $y_{j1} = a_j^{(1)}/\sqrt{T^{(1)}}$ と書ける。このようにして、第1因子は、相関行列 R の中で $a_j^{(1)}/\sqrt{T^{(1)}}$ に比例する変量より成立していることがわかる。ここで主成分分析におけるように、各係数の2乗和を1に基準化すると、セントロイド法による第1因子は次式で示される。

$$\zeta_1 = [a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots, a_p^{(1)}] \cdot \mathbf{x} / \sqrt{T^{(1)}} \quad (2.16)$$

この1次式の分散が $\sum_{j,k=1}^p a_j^{(1)} a_k^{(1)} r_{jk} / T^{(1)}$ であることは容易にわかる。

同様の方法で第2因子を抽出するには、さきのセントロイドを計算し直すことから始めねばならない。ここに、主観的な判断が介入し、この改良はまだ決定的でない。通常、第2因子を求めるには $k=1$ としてはじめられた上記の計算を $k=2, 3, \dots, p$ についても行ない、 $[a_j^{(k)}]$ なる $p \times p$ 行列を準備する。そして \mathbf{R} の中から第1因子による寄与を除き、残差相関行列として、

$$\mathbf{R} - [a_j^{(k)}] \equiv \mathbf{R}_1 \quad (2.17)$$

をつくる。かつ、 \mathbf{R}_1 の中の負の要素については、その変量軸 (x) に関しベクトルを逆映 (reflect) し、行および列の符号を変え、 $p r_{\cdot j}$ に相当する各列の和をできるだけ大きくしなければならない。すなわち、 \mathbf{R}_1 のままでは、すべての列の和はゼロとなっているので、新たなセントロイドをできるだけ原点から遠ざけて第2の1次式を求める。これは、ちょうど成 因 分 析 法 で λ_i を大きい順に算出するのに類似した発想である。この \mathbf{R}_1 を用いて式 (2.14) から (2.16) を繰り返し適用し、式 (2.16) で得られるものを第2因子 ζ_2 とする。ただし、因子の抽出後は、符号変換した変量についてもとの符号にもどし $a_j^{(k)}$ の符号を定義する。以下、第3因子から第 p 因子まで、第2因子を求めたと全く同様の手順により、残差相関行列のなかで符号をいかに変えても各列和が誤差範囲でゼロとみなせるまで、因子抽出を行なう。このように、セントロイド法はきわめて便宜的な方法であるが、観測変量の分散についてはなんら配慮していない。

ここでは最も通常に適用されている標準的なセントロイド法を記述したが、これは相関行列の対角線要素を1にする方法 (“unity in the diagonal” method) とよばれている。

セントロイド法には、このほかにもいくつかの変法があり、代表的なものとして、対角線要素に共有性を用いる方法 (“communality estimates in the diagonal” method) と共有性を反復計算によって推定して対角線要素に用いる方法 (“iterative solution for communalities” method) などがある。

対角線要素に共有性を用いる第1の変法の特徴は、共通因子以外に特殊因子の存在をも想定し、相関行列の対角線要素1の代わりに各観測特性の共有性を置き換えて解析をすすめ、その後、一つの因子負荷ベクトルが得られるごとに残差行列の対角線要素もその段階での共有性を用いる。したがって、計算式はやや複雑になるが、全般的な計算手順は上の標準的セントロイド法と本質的に同じである。この共有性の推定には、通常、相関行列またはその後の毎回の残差行列の各行の非対角線要素のうち最大絶対値の2乗を利用する。

この変法の利点は、標準的セントロイド法よりも一般に小さい因子数で観測特性間の内部相関性を説明し、 p 個の観測特性の次元を q 個の因子の次元に低減するうえで効果的とされている。この低減の度合いは、相関行列の各要素の絶対値の平均的な大きさに関係し、この平均的な値が小さいほど少数の因子の存在を示す。しかし、この変法で説明される分散の量は、一般に上の標準的な方法より少なく、相関行列の要素の絶対値の平均的な大きさが小さいほど説明される量が少ないといわれている。また、共有性が1よりも大きくなる不合理が生ずることもある。いずれにしても、標準的セントロイド法の結果の改良を意図したあらい探索の方法といえる。

第2の変法の特徴は、相関行列または各段階の残差行列での共有性を用いる点で、第1の変法と全く同じ立場であるが、反復計算により毎回の共有性をより良い精度で推定し、また1をこえないように意図されている。一般に、抽出される因子の数は、観測特性の数よりはるかに少なく得られる利点をもつとされている。したがって、セントロイド法が適用されるとき、この変法は標準的方法に次いで適用されているようである。

しかし、標準的セントロイド法も、さらにどの変法も、数理的な根拠に乏し

く今後の研究開発にまつことが多い。現状では、成 因 分 析 法 の 代 用 と し て 手 計 算 の 場 合 の 探 索 的 な あ ら い 手 法 と い わ ざ る を え ない。

表 2.3 観 測 デ ー タ

観測 番号	変量 X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8
i=1	49.00	1995.88	1531.04	89.88	- 20.24	21.48	593.88	1396.24
2	23.44	1283.84	991.08	54.20	- 0.72	34.92	565.96	1158.48
3	63.40	2367.04	1809.92	104.68	- 12.64	39.48	858.23	1878.56
4	278.40	11048.48	8408.52	396.12	-143.24	136.44	2501.04	6505.88
5	153.40	6239.72	4772.84	252.64	- 60.72	94.72	1955.12	4495.96
6	398.48	15920.72	12191.44	645.08	-144.52	245.60	5000.24	11478.92
7	126.28	5003.04	3797.68	179.12	- 75.56	50.04	980.12	2720.12
8	49.56	2037.00	1572.24	92.56	- 13.32	40.48	766.52	1649.24
9	241.32	9560.16	7402.64	481.20	- 6.56	231.56	4722.52	9474.96
10	505.52	19918.56	15424.12	985.92	- 18.80	491.44	9636.44	19436.40
11	563.00	22518.00	17016.08	688.12	-441.44	124.92	2503.76	9376.60
12	195.12	7680.52	5852.56	290.36	- 97.52	82.96	1836.96	4675.48
13	481.48	19394.32	14604.64	547.76	-434.00	55.04	1165.64	6588.68
14	91.96	3839.52	2926.88	154.84	- 43.40	52.88	1081.24	2577.88
15	80.92	3358.72	2548.64	110.20	- 59.96	32.12	578.76	1714.40
16	535.16	21280.96	16007.68	575.20	-489.16	41.24	776.68	6489.00
17	596.52	23759.48	17873.28	632.24	-548.32	40.92	964.96	7373.56
18	98.36	3967.08	3029.68	155.60	- 40.88	65.84	1147.52	2699.32
19	223.68	8957.96	6829.20	320.56	-121.96	104.24	2064.04	5322.36
20	80.36	3361.24	2566.76	123.96	- 35.96	44.32	959.16	2281.76
21	58.80	2082.44	1609.32	92.08	0.72	47.12	958.16	1963.28
22	164.72	6557.60	5074.04	322.48	- 4.32	154.12	3153.24	6373.52
23	262.08	10517.36	8147.80	518.00	- 3.60	268.96	5207.52	10423.20
24	195.96	8001.96	6192.60	391.24	- 1.40	189.36	3956.36	7937.48
25	505.24	20365.84	15779.68	1017.24	- 4.64	506.68	10137.72	20298.84
26	30.80	1233.68	954.96	60.20	- 4.40	37.64	559.84	1145.84
27	56.04	2313.60	1786.12	114.88	- 11.84	53.12	1041.56	2144.24
28	54.72	2036.64	1577.48	95.52	- 0.48	44.60	977.24	1982.00
29	38.12	1361.28	1045.28	65.56	- 6.04	24.68	643.24	1298.72
30	91.76	3469.72	2692.12	168.28	- 2.28	84.00	1695.92	3426.32
31	55.96	2083.44	1688.80	176.44	75.48	124.36	2497.84	4274.28
32	105.44	3919.24	3295.16	450.92	256.92	354.32	7019.72	11508.92
33	331.00	12837.76	9979.40	667.92	28.68	350.32	6999.68	13708.32
34	541.56	21682.84	16838.72	1119.56	42.52	580.28	11594.60	22816.20
35	192.84	7687.48	6023.60	456.60	72.60	268.08	5255.36	9811.48
36	16.16	716.96	571.64	50.36	2.88	31.80	581.40	1048.96
37	57.04	2033.44	1611.24	125.72	29.44	76.68	1618.28	2935.64
38	36.84	1558.56	1271.28	137.12	58.92	96.04	1959.96	3329.40
39	230.68	9194.52	7196.60	524.08	68.80	293.28	5881.04	11114.04
40	482.32	19408.68	15526.12	1466.40	491.24	984.76	19640.76	34313.96
41	49.84	2237.36	1766.08	152.20	38.16	93.76	1876.68	3368.52
42	333.52	13195.60	10724.24	1152.36	496.40	819.72	16598.04	28200.60
43	125.72	4997.52	4289.20	659.64	411.28	534.40	10717.88	17328.28
44	941.28	37435.84	28355.28	1208.40	-662.24	273.56	5482.48	17583.88
45	87.36	3357.96	2610.76	171.40	7.32	91.08	1801.20	3547.36
46	528.08	21085.00	16695.68	1418.40	361.16	894.80	17779.72	31939.96
47	342.68	13438.36	10649.84	916.92	231.28	571.48	11483.72	20582.04
48	475.28	19279.96	15021.00	1043.96	79.76	557.72	11265.32	21713.00
49	96.04	3637.48	2823.80	183.24	2.48	87.36	1849.48	3665.56
50	64.68	2511.60	1964.32	144.44	16.24	77.76	1596.16	3027.08

2.2.4 検証数値例

いま、因子分析の実用例とは別に、人為的な数種の計測特性に関する真の構造模型を設定し、これに正規誤差を付した模擬観測資料を与えよう。そして、因子分析法がどれほどに構造模型に接近し表現されるかを知るための数値例として、以後の解説にも使用するとしよう。

いま、50個の8次元からなる多変量観測値が表2.3に与えられている。

これらの観測値は、われわれが次のような2つの独立な因子 α, β を仮定し、

$$\begin{aligned} x_{1j} &= \alpha_j + e_{1j} \\ x_{2j} &= 40\alpha_j + e_{2j} \\ x_{3j} &= 30\alpha_j + e_{3j} \\ x_{4j} &= \alpha_j + \beta_j + e_{4j} \\ x_{5j} &= -\alpha_j + \beta_j + e_{5j} \\ x_{6j} &= \beta_j + e_{6j} \\ x_{7j} &= 20\beta_j + e_{7j} \\ x_{8j} &= 10\alpha_j + 30\beta_j + e_{8j}, \\ j &= 1, 2, \dots, 50 \end{aligned}$$

かつ、各 e_{ij} は互いにまたすべての α_j, β_j にも独立に $N(0, 16)$ に従うとして作成したものである。

図2.1は、独立に設定した2つの因子の大きさ (α_j, β_j) について、各サンプル (j) ごとに、母数 α_j を縦軸に母数 β_j を横軸にとった50個の長方形として、プロフィールを示している。そして、後に、8変量の標準値からの分析結果をこの母数の図形表示と比較すると、あてはまりの程度が直感的に知れよう。

さて、表2.3のデータによる標本相関係数行列 R および各変量の平均と標準偏差は表2.4のように得られる。この相関

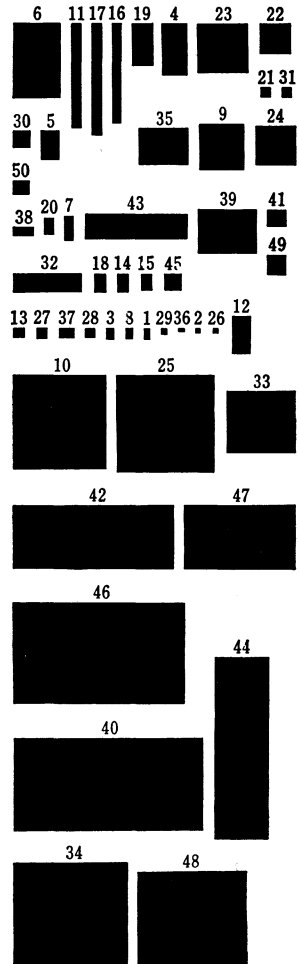


図 2.1 二つの独立因子の表現

表 2.4 検証データ(表 2.3)の相関行列

相 関 行 列 R								平均値	標準偏差
1.0000	0.9998	0.9993	0.8530	-0.3716	0.5262	0.5264	0.6917	227.8	208.5
0.9998	1.0000	0.9994	0.8529	-0.3722	0.5259	0.5261	0.6915	9074.6	8324.3
0.9993	0.9994	1.0000	0.8691	-0.3425	0.5527	0.5529	0.7141	7018.4	6373.1
0.8530	0.8529	0.8691	1.0000	0.1666	0.8923	0.8925	0.9668	439.0	392.2
-0.3716	-0.3722	-0.3425	0.1666	1.0000	0.5932	0.5933	0.4128	-14.8	220.1
0.5262	0.5259	0.5527	0.8923	0.5932	1.0000	0.9997	0.9778	212.0	240.9
0.5264	0.5261	0.5529	0.8925	0.5933	0.9997	1.0000	0.9781	4249.8	4811.8
0.6917	0.6915	0.7141	0.9668	0.4128	0.9778	0.9781	1.0000	8642.1	8499.4

表 2.5 固有値, 固有ベクトル, 固有値累和百分率

No. 1									
固有値	5.7697							$\frac{\text{固有値の累和}}{8} \times 100 = 72.1220$	
固有ベクトル									
0.3615	0.3614	0.3678	0.4161	0.0570	0.3657	0.3657	0.3991		
No. 2									
固有値	2.2293							$\frac{\text{固有値の累和}}{8} \times 100 = 99.9892$	
固有ベクトル									
0.3318	0.3321	0.3134	-0.0201	-0.6633	-0.3198	-0.3197	-0.1903		
No. 3									
固有値	0.0003							$\frac{\text{固有値の累和}}{8} \times 100 = 99.9937$	
固有ベクトル									
0.7997	-0.1211	-0.1096	-0.2236	0.4608	-0.2534	-0.0530	-0.0647		
No. 4									
固有値	0.0003							$\frac{\text{固有値の累和}}{8} \times 100 = 99.9975$	
固有ベクトル									
0.1222	-0.0173	-0.0751	-0.2128	-0.2106	0.8605	-0.2762	-0.2605		
No. 5									
固有値	0.0001							$\frac{\text{固有値の累和}}{8} \times 100 = 99.9989$	
固有ベクトル									
0.1778	-0.4552	-0.4346	0.5955	-0.3958	-0.1519	0.1857	0.0570		
No. 6									
固有値	微量							$\frac{\text{固有値の累和}}{8} \times 100 = 99.9996$	
固有ベクトル									
0.0833	-0.0463	-0.0241	-0.7340	-0.3111	0.0188	0.4633	0.3738		
No. 7									
固有値	微量							$\frac{\text{固有値の累和}}{8} \times 100 = 99.9997$	
固有ベクトル									
0.2809	0.0150	-0.0032	0.5832	0.4610	0.0123	-0.4721	-0.3803		

No. 8

固有値	微量				固有値の累和 8		
固有ベクトル	$\times 100 = 99.9999$ $\doteq 100$						
0.2728	-0.0651	-0.0423	-0.7432	-0.2232	0.0352	0.4373	0.3532

行列 R に基づいて、式 (2.8) で示される固有値および固有ベクトル L を算出すると、表 2.5 の結果を得る。

この計算の結果において、大きい固有値からの固有値累和百分率が 70~80% をこえるところ、また固有値がほぼ 1 より大きいところという観点にたち、表 2.3 のデータには二つ ($k=2$) の内因因子を含んでいることが非常に明確に示されている。

2.2.5 観測特性間の関係

いま、 p 種の計測特性で観測された n 個の標本値を $X=(x_{ij})$ とする。ここに $i=1, 2, \dots, p$ で $j=1, 2, \dots, n$ としている。このとき、 p 種の特性を座標軸として、観測された標本値ベクトルを n 個の点で示すことを観測値の点表示 (point representation) といい、このようにしてできる図形を観測値の散布図 (scatter diagram) という。他方、標本数 n を次元にとり、その空間で p 種の観測特性を p 個の点で表現するベクトル表示 (vector representation) ができる。すなわち、 $p \times n$ 行列 X において、各行ベクトルを n 次元空間における 1 点とみなすわけである。

後者において、 n 次元空間における p 個の点の平均を原点とし、第 i 観測特性の点を原点から d_i の距離にあるとすると、

$$d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2} = \sqrt{n} \hat{\sigma}_i$$

で示される。また、原点から各観測特性点へ結んだベクトルを考えると、第 i 観測特性ベクトルが第 j 番めの観測標本の示す第 j 軸に対する方向余弦 λ_{ij} は

$$\lambda_{ij} = x_{ij}/d_i$$

となる。

さらに、第 i 観測特性ベクトルと第 i' 観測特性ベクトルのなす角を $\phi_{ii'}$ とし、この端点間の距離、すなわち第 i と第 i' 観測特性点の間の距離を $d_{ii'}$ と

すると、

$$d_{ii'}^2 = d_i^2 + d_{i'}^2 - 2 d_i d_{i'} \cos \phi_{ii'}$$

であり、一方

$$d_{ii'}^2 = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - x_{i'j})^2 = \sum_j (d_i \lambda_{ij} - d_{i'} \lambda_{i'j})^2 = d_i^2 + d_{i'}^2 - 2 d_i d_{i'} \sum_j \lambda_{ij} \lambda_{i'j}$$

である。ここに $\sum_j \lambda_{ij}^2 = \sum_j \lambda_{i'j}^2 = 1$ を用いている。

したがって、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \cos \phi_{ii'} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \lambda_{i'j} \\ &= \sum_j x_{ij} x_{i'j} / d_i d_{i'} = \sum_j x_{ij} x_{i'j} / n \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_{i'} \\ &= r_{ii'} \end{aligned}$$

すなわち、任意の 2 観測特性間の相関係数は、 n 次元空間での観測特性ベクトル間の余弦であることが知れる。

さて、因子分析法での観測特性の次数を低減する根拠は、ベクトル表現で p 個の点が線形 q 次元空間にすべて含まれる、すなわち、 p 本のベクトルは q 本の参考ベクトル (reference vector) によって表現できるという立場である。このとき、観測特性間の $p \times p$ 母相関行列のランクは q で、対角線要素は、1 の代わりに、各観測特性の共有性 (communality, 3.1 節参照) になっている。この行列を、縮小された相関行列 (reduced correlation matrix) という。

この q は内部従属性を示す最小の因子数で、 p 個の点を含む最小の空間を q 次元の共通因子空間とよぶ。

また p 個の観測特性ベクトルは、 q 個の共通因子と p 個の特殊因子からなる全因子空間 (total factor space) の中にあると考えられる。この空間で任意の第 j 観測特性のベクトル表現は、

$$\underbrace{(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jq})}_{q \text{ 個の共通因子部分}}, \quad \underbrace{(0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0)}_{p \text{ 個の特殊因子部分}}$$

で示される。このベクトルのノルムまたは長さは $\sum_{i=1}^q a_{ji}^2 + a_j^2$ で、この値は後章の式 (3.7) に示すように +1 である。

さて、この空間におけるベクトルの方向余弦は端点の座標そのものであり、

任意の2つの第 j および第 j' ベクトルのなす角 $\phi'_{jj'}$ は

$$\cos \phi'_{jj'} = \sum_{i=1}^{p+q} \lambda'_{ji} \lambda'_{j'i} = \sum_{i=1}^q \mathbf{a}_{ji} \mathbf{a}_{j'i} = \mathbf{r}'_{jj'}$$

となる。ここに λ'_{ji} , $\lambda'_{j'i}$ は各ベクトルの方向余弦である。この縮小された相関係数 $\mathbf{r}'_{jj'}$ は、観測特性の線形表現が妥当な程度に応じて、もとの $\mathbf{r}_{jj'}$ に近似する。

このように考えると、全因子空間における p 個のベクトルを q 次の共通因子空間への直交射影が、この部分空間における各観測特性を示すベクトルであると考えられる。このようなベクトルは $(\mathbf{a}_{j1}, \mathbf{a}_{j2}, \dots, \mathbf{a}_{jq})$ で、ベクトルの端点の座標は全因子空間で示した初めの q 個の座標と同じである。この性質は、たとえ共通因子軸が斜交の場合でも、特殊因子軸が共通因子空間に直交である限りなりたつ。しかし、これに関しては、簡単のため、共通因子は互いに無相関としておく。一般に q 次空間に射影されたベクトルは、各観測特性に特殊因子の分散を含まない場合のみ、長さが変わらず、一般には全因子空間でのベクトルよりも短い。同様に、ベクトル間のなす角度も、共通因子空間におけるよりも小さく、方向余弦は大きい。この空間でのベクトルの長さは $\sum_{i=1}^q \mathbf{a}_{ji}^2$ であり、 h_j^2 に等しい。すなわち共通空間におけるベクトルの方向余弦 λ''_{ji} は \mathbf{a}_{ji}/h_j で、2本のベクトルのなす角は

$$\cos \phi''_{jj'} = \sum_{i=1}^q \lambda_{ji} \lambda_{j'i} = \sum_{i=1}^q \mathbf{a}_{ji} \mathbf{a}_{j'i} / h_j h_{j'}$$

で、 $h_j h_{j'} = 1$ でなければ、 $\cos \phi''_{jj'} > \cos \phi'_{jj'}$ である。上式は

$$\mathbf{r}''_{jj'} = \cos \phi''_{jj'} = \mathbf{r}'_{jj'} / h_j h_{j'}$$

とも書ける。

2.3 計算プログラム

2.3.1 成因分析法(第1法)

成因分析をパワー法によって行なう。すなわち、成因分析では相関行列の固有値の大きいほうから順に固有ベクトルが必要になり、抽出する因子数についての停止の指示は、トレースに対する累積固有値の比率をあらかじめかなり大

きい 0.7 とか 0.8 とかで与えておく。また、各固有値とそれに対応する固有ベクトルは収束的に計算されるが、このために収束判定精度と最高の反復計算の回数を指定できる。インプットは、コントロール・カードにより、すでに得ている相関行列からでも、または原始資料からでもよい。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	変数の数	A(I)	標本平均ベクトル, のちに固有ベクトル
IMAX	収束のための反復回数の限度	B(I)	標本標準偏差, のちに固有ベクトル(基準化)
RO	ゼロならば最終結果のみ 1ならば中間の巡回結果も示す	R(I, J)	標本相関行列
IC	相関係数を計算するか否かの制御	II	巡回反復数
MD	標本の大きさ(数)	ND	収束のための反復回数
DP	全分散の解釈基準 70~80%	RAM	固有値
B(I)	観測値ベクトル	A(I)	固有ベクトルに固有値の平方根をかけたベクトル
R(I, J)	標本相関行列	SR	固有値の和
		P	残差分散
		T	算出した固有ベクトルの全分散に対する寄与率

PRINCIPAL COMPONENT ANALYSIS,
COMPONENT ANALYSIS

THE LARGEST EIGENVALUE AND
THE ASSOCIATED EIGENVECTOR

(ITERATED OR POWER METHOD)

N --- RANK OF MATRIX R

IMAX - MAXIMUM NO. TO CONVERGE TO A VECTOR

RO --- 0, TO OUTPUT FINAL RESULTS ONLY

--- 1, TO OUTPUT EVERY CYCLIC AND FINAL RESULTS

IC --- 0, TO MAKE A CORRELATION MATRIX

--- 1, TO USE A CORRELATION MATRIX WE HAVE ALREADY

MD --- NO. OF SAMPLES

DP --- A DESIRED PROPORTION TO INTERPRET TOTAL VARIATION(=RANK OF R)

B --- INPUT OBSERVATION VECTOR

R --- SAMPLE CORRELATION MATRIX

DIMENSION R(30,30),A(30),B(30)

1 READ (40,100) N,IMAX,RO,IC,MD,DP

IF(IC) 2,2,10

2 DO 3 I=1,N

A(I)=0.0

DO 3 J=1,N

3 R(I,J)=0.0

K=0

4 READ (40,101) (B(I),I=1,N)

K=K+1

```

DO 5 I=1,N
A(I)=A(I)+B(I)
DO 5 J=I,N
5 R(I,J)=R(I,J)+B(I)*B(J)
IF(MD=K) 6,6,4
6 AN=MD
WRITE (50,200)
DO 8 I=1,N
DO 7 J=I,N
7 R(I,J)=R(I,J)-A(I)*A(J)/AN

A(I)=A(I)/AN
B(I)=SQRT(R(I,I)/(AN-1.0))
WRITE (50,201) A(I),B(I)
8 A(I)=R(I,I)
DO 9 I=1,N
DO 9 J=I,N
R(I,J)=R(I,J)/SQRT(A(I)*A(J))
9 R(J,I)=R(I,J)
GO TO 12
10 DO 11 I=1,N

11 READ (40,102) (R(I,J),J=1,N)
12 WRITE (50,202)
DO 13 I=1,N
13 WRITE (50,203) (R(I,J),J=1,N)
II=0
WRITE (50,204)
SR=0.0
P=N
14 DO 15 I=1,N
A(I)=0.0

15 B(I)=0.0
II=II+1
IF(RO-1.0) 17,16,17
16 WRITE (50,205) II
17 ND=0
DO 18 I=1,N
DO 18 J=1,N
18 A(I)=A(I)+R(I,J)
19 AMAX=0.0
DO 21 I=1,N

T=ABS(A(I))
IF(T-AMAX) 21,21,20
20 AMAX=T
RX=A(I)
21 CONTINUE
DO 22 I=1,N
22 A(I)=A(I)/RX
ND=ND+1
IF(RO-1.0) 24,23,24
23 WRITE (50,206) ND,(A(I),I=1,N)

24 IF(I-MAX-ND) 25,28,25
25 DO 26 I=1,N
DO 26 J=1,N
26 B(I)=B(I)+R(I,J)*A(J)
DO 27 I=1,N
A(I)=B(I)
27 B(I)=0.0
GO TO 19
28 AA=A(1)
DO 29 I=1,N

```

```

29 A(I)=A(I)/AA
   C=0.0
   RAM=0.0
   DO 30 I=1,N
   RAM=RAM+R(I,1)*A(I)
30 C=C+A(I)*A(I)
   C=SQR(C)
   DO 31 I=1,N
31 B(I)=A(I)/C
   WRITE (50,207) II, RAM, (B(I), I=1,N)

   WRITE (50,208)
   DO 32 I=1,N
32 A(I)=B(I)*SQR(RAM)
   WRITE (50,209) (A(I), I=1,N)
   SR=SR+RAM
   T=P*DP
   IF (T-SR) 35,35,33
33 DO 34 I=1,N
   DO 34 J=1,N
34 R(I,J)=R(I,J)-RAM*B(I)*B(J)

   GO TO 14
35 T=(100.0*SR)/P
   P=P-SR
   WRITE (50,210)
   WRITE (50,211) SR,P,T
   GO TO 1
100 FORMAT (2I5,F5.0,2I5,F5.3)
101 FORMAT (8F10.2)
102 FORMAT (5E15.8)
200 FORMAT (7X,12HOBSERVATIONS,/,14X,6H MEAN ,7X,6H S,D. )

201 FORMAT (/,10X,5(1X,F12.4))
202 FORMAT (///,7X,19HCORRELATION MATRIX ,/)
203 FORMAT (/,5(1X,F10.6))
204 FORMAT (///,7X,18HCOMPONENT ANALYSIS,/)
205 FORMAT (///,7X,20HITERATION OF CYCLE ,I3/)
206 FORMAT (10X,I2,5F12.5,/, (12X,5F12.5))
207 FORMAT (/,7X,10HEIGENVALUF,I3,F10.4//,7X,16HEIGENVECTOR(STD)/(20X,5
1F11.5)/)
208 FORMAT (/,7X,19HPRINCIPAL COMPONENT,/)
209 FORMAT (18X,5F12.5)

210 FORMAT (///,7X,51HSUM OF LAMBDA S RESIDUALS EFFECT FOR REDUCTI
10N,/)
211 FORMAT (5X,F8.3,9X,F8.3,11X,F7.3,2X,8H PERCENT,////)
   STOP
   END

```

2.3.2 成 因 分 析 法 (第 2 法)

2.3.1 項と同様の成 因 分 析 を ヤ コ ビ 法 で 行 な う 。 し た が っ て , 2.3.1 項 と の 違 い は 数 値 計 算 上 の 解 法 の 長 短 に あ る 。 か な り 多 く の 因 子 数 ま で 考 慮 す る 必 要 の あ る 場 合 に は , パ ワ ー 法 に よ る と 固 有 値 の 大 き い ほう か ら 順 に 計 算 誤 差 が 累 積 し 精 度 が 落 ち て く る が , こ の ヤ コ ビ 法 で は 観 測 特 性 の 数 だ け , 同 じ 精 度 の 固 有 値 と 固 有 ベ ク ト ル を 算 出 す る 。 し か し , 観 測 特 性 の 数 が 多 い と き や 少 数 の 因 子 の 場 合 に は , パ ワ ー 法 が 有 利 と な る 。

入 力 (input)		出 力 (output)	
K	変数の数	A(I, J)	標本相関行列, のちに固有ベクトル (基準化)
IC	相関係数を計算するか否かの制御	S(I)	固有値
MCY	収束のための反復回数の限度	P	固有値累和百分率
ND	標本の大きさ(数)	EV(J, I)	固有ベクトル
X(I)	観測値ベクトル		
A(I, J)	標本相関行列		

```

C      COMPONET ANALYSIS
C      (JACOBI METHOD)
C
C      K --- NO. OF VARIABLES
C      IC --- 0. TO MAKE A CORRELATION MATRIX
C      --- 1. TO USE A CORRELATION MATRIX WE HAVE ALREADY
C      MCY --- MAX. NO. FOR ITERATION CYCLES
C      ND --- SAMPLE SIZES
C
C      A --- SAMPLE CORRELATION MATRIX
C
C      SUBROUTINE EIGEN AND ORDER ARE REQUIRED
C
C      DIMENSION A(30,30),EV(30,30),S(30),X(30)
C      COMMON A,EV
C      READ (40,100) K,IC,MCY,ND
C      WRITE (50,200)
C      IF(IC) 1,1,11
C
1  DO 2 I=1,K
   S(I)=0.0
   DO 2 J=1,K
2  A(I,J)=0.0
   N=0
3  READ (40,101) (X(I),I=1,K)
   N=N+1
   DO 4 I=1,K
   S(I)=S(I)+X(I)
   DO 4 J=1,K
4  A(I,J)=A(I,J)+X(I)*X(J)
   IF(ND-N) 5,5,3
5  AN=ND
   DO 6 J=1,K
   S(J)=S(J)/AN
   DO 6 I=1,J
6  A(I,J)=A(I,J)-AN*S(I)*S(J)
   DO 9 I=1,K
   X(I)=SQR(A(I,I))/(AN-1.0)
   DO 8 J=1,K
   IF(I=J) 7,8,7
7  A(I,J)=A(I,J)/SQR(A(I,I)*A(J,J))
   A(J,I)=A(I,J)
8  CONTINUE
9  A(I,I)=1.0
   DO 10 I=1,K
10 WRITE (50,201) (A(I,J),J=1,K)
   GO TO 15
11 DO 12 I=1,K
   READ (40,102) (A(I,J),J=1,K)

```


40 — 2章 成 因 分 析 法

```

12 WRITE (50,201) (A(I,J),J=1,K)
   DO 13 I=1,K
13 S(I)=A(I,I)**0.5
   DO 14 I=1,K
     DO 14 J=1,K
       A(I,J)=A(I,J)/(S(I)*S(J))
       A(J,I)=A(I,J)
14 A(I,I)=1.0
15 CALL EIGEN (K)
   CALL ORDER (K,1)

   DO 16 I=1,K
     S(I)=A(I,I)
     DO 16 J=1,K
16 A(J,I)=SQRT(S(I))*EV(J,I)
     AK=K
     TR=0.0
     DO 17 I=1,K
       TR=TR+S(I)
     P=TR/AK*100.0
     WRITE (50,202) I,S(I),P,(EV(J,I),J=1,K)

17 WRITE (50,203) (A(J,I),J=1,K)
   GO TO 1
100 FORMAT (3I2,I3)
101 FORMAT (8F10.2)
102 FORMAT (8F6.5)
200 FORMAT (//10X,19H COMPONENT ANALYSIS///5X,20H CORRELATION MATRIX )
201 FORMAT (/(10X,5(1X,F12.4)))
202 FORMAT (//2X,3HN0.14,//2X,11HEIGEN VALUF,2X,F10.4,10X,7HPERCENT,
13X,F10.4,//2X,12HEIGEN VECTOR//10(1X,F7.4))
203 FORMAT (//2X,23HNORMALIZED EIGEN VECTOR,//10(1X,F7.4))

STOP
END

```

[付] サブルーティン 1 (実対称行列の固有値と固有ベクトルの算出)

```

C      EIGEN VALUE AND EIGEN VECTOR OF REAL SYMMETRIC MATRIX
C
C
C      NO --- JOB NUMBER
C      N  --- VARIABLE NO.
C
C
SUBROUTINE EIGEN (N)
DIMENSION H(30,30),EV(30,30),T(2)

COMMON H,EV
T(1)=0.0001
T(2)=0.00000001
DO 3 I=1,N
  EV(I,I)=1.0
  DO 3 J=1,N
    IF (I-J) 2,3,2
2  EV(I,J)=0.0
  EV(J,I)=0.0
3 CONTINUE

```

```

LEVEL=1
NN=N-1
4 LSTEP=0
DO 24 I=1,NN
  K=I+1
  DO 24 J=K,N
    SS=T(LEVEL)-ABS(H(I,J))
    IF (ABS(SS)=0.0000005) 24,5,5
5 IF (T(LEVEL)-ABS(H(I,J))) 6,24,24
6 AK=(H(I,I)-H(J,J))*2.0

7 IF (ABS(AK)-0.0000005) 19,8,8
8 IF (AK) 9,19,9
9 AK=H(I,J)/AK
  TT=ABS(AK)-0.4142136
10 IF (ABS(TT)-0.0000005) 12,11,11
11 IF (ABS(AK)-0.4142136) 12,12,13
12 TEMP=1.0+AK*AK
  SN=2.0*AK/TEMP
  CN=(-TEMP+2.0)/TEMP
  GO TO 20

13 IF (ABS(AK)-0.0000005) 17,14,14
14 IF (AK) 15,17,17
15 SN=-0.7071068
16 CN=-0.7071068
  GO TO 20
17 SN=0.7071068
  GO TO 16
18 IF (ABS(H(I,J))-0.0000005) 17,19,19
19 IF (H(I,J)) 15,17,17
20 DO 21 L=1,N
  TEMP=-SN*EV(I,I)
  EV(L,I)=CN*EV(L,I)+EV(L,J)*SN
21 EV(L,J)=TEMP+EV(L,J)*CN
  DO 22 L=1,N
  TEMP=-SN*H(L,I)
  H(L,I)=CN*H(L,I)+H(L,J)*SN
22 H(L,J)=TEMP+H(L,J)*CN
  DO 23 L=1,N
  TEMP=-SN*H(I,L)
  H(I,L)=CN*H(I,L)+H(J,L)*SN

23 H(J,L)=TEMP+H(J,L)*CN
LSTEP=1
24 CONTINUE
  IF (LSTEP) 4,25,4
25 IF (LEVEL=2) 26,27,26
26 LEVEL=LEVEL+1
  GO TO 4
27 CONTINUE
  RETURN
  END

```

[付] サブルーティン 2 (固有値の大きさ順に固有ベクトルの配列)

```

C      SUBROUTINE ORDER
C
C
C
C      K --- 1, TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VECTORS FROM THE LARGEST
C              VALUE IN ORDER
C      --- 2, TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VECTORS FROM THE SMALLEST
C              VALUE IN ORDER
C
C

```

```

SUBROUTINE ORDER (N,K)
DIMENSION H(30,30),EV(30,30),EV2(30),P(30)
COMMON H,EV
M=N-1
DO 1 I=1,N
1 P(I)=H(I,I)
DO 10 I=1,M
I1=I+1
DO 5 J=1,I
IF(K.E0.2) GO TO 2

IF(P(J)-P(I1)) 3,5,5
2 IF(P(J)-P(I1)) 5,5,3
3 AB=P(I1)
DO 4 L=1,N
4 EV2(L)=EV(L,I1)
HH=H(I1,I1)
GO TO 6
5 CONTINUE
GO TO 10
6 DO 8 L=J,I

LL=J+I-L
LLL=LL+1
P(LLL)=P(LL)
DO 7 KK=1,N
7 EV(KK,LLL)=EV(KK,LL)
8 H(LLL,LLL)=H(LL,LL)
P(J)=AB
DO 9 KK=1,N
9 EV(KK,J)=EV2(KK)
H(J,J)=HH

10 CONTINUE
RETURN
END

```

2.3.3 セントロイド法(第1法)

成 因 分 析 法 の 代 用 と し て ， か な り の 頻 度 で 応 用 さ れ て い る セ ン ト ロ イ ド 法 (重 心 法) を 行 な う 。 こ の 方 法 は 共 通 因 子 の み を 考 慮 し ， 対 角 線 要 素 を 1 と す る そ の ま ま の 相 関 行 列 か ら 出 発 す る 。 元 来 ， セ ン ト ロ イ ド 法 の 意 図 は ， 最 小 2 乗 法 か ら 誘 導 さ れ た 成 因 分 析 法 に 近 似 し た 結 果 を い っ そ う 簡 略 な 計 算 で 迅 速 に 得 よ う と す る も の で あ る 。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	変 量 の 数	R(I, J)	標 本 相 関 行 列 ， の ち に 残 差 行 列
IC	残 差 行 列 を 必 要 と す る か 否 か の 制 御	S	因 子 軸 と テ ス ト 項 目 と の 距 離 の 平 方 和
R(I, J)	標 本 相 関 行 列	W(I)	因 子 行 列

```

C      THE CENTROID METHOD
C      (UNITY IN THE DIAGONAL)
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      IC --- 0, IF RESIDUAL MATRIX IS REQUIRED
C           --- 1, OTHERWISE
C      R --- SAMPLE CORRELATION MATRIX
C
C      DIMENSION R(30,30),W(30),V(30),D(30)
1 READ (40,100) N,IC
  WRITE (50,200)
  WRITE (50,201)
  NO=0
  DO 2 I=1,N
    READ (40,101) (R(I,J),J=1,N)
2  WRITE (50,202) (R(I,J),J=I+1,N)
3  DO 4 I=1,N
    D(I)=R(I,I)
4  R(I,I)=0.0
    DO 5 I=1,N
      W(I)=0.0
      V(I)=1.0
      DO 5 J=1,N
5     W(I)=W(I)+R(I,J)
6     J=1
      DO 8 I=2,N
        IF(W(J)*V(J)-W(I)*V(I)) 8,7,7
7     J=1
8     CONTINUE
      IF(W(J)*V(J)) 9,11,11
9     V(J)=-V(J)
      DO 10 I=1,N
10    W(I)=W(I)+2.0*R(I,J)*V(J)
      GO TO 6
11    DO 12 I=1,N
12    W(I)=W(I)+D(I)*V(I)
      S=0.0
      DO 13 I=1,N
13    S=S+ABS(W(I))
      S=1.0/SQRT(S)
      DO 14 I=1,N
14    W(I)=W(I)*S
      S=0.0
      DO 15 I=1,N
15    S=S+W(I)**2
      NO=NO+1
      WRITE (50,203) NO,S
      DO 16 I=1,N
        R(I,I)=D(I)
      DO 16 J=1,N
16    R(I,J)=R(I,J)-W(I)*W(J)
      WRITE (50,202) (W(I),I=1,N)
      IF(IC) 17,17,19
17    WRITE (50,204)
      DO 18 I=1,N
18    WRITE (50,202) (R(I,J),J=1,N)
19    IF(1.0-S) 3,1,1

```

44 — 2 章 成 因 分 析 法

```

100 FORMAT (2I5),
101 FORMAT (10F5.4)
200 FORMAT (//10X,43HTHE CENTROID METHOD (UNITY IN THE DIAGONAL),//)
201 FORMAT (/8X,12HINPUT MATRIX)
202 FORMAT (9X,8F8.4)
203 FORMAT (//5X,3HNO.,I5,//8X,13HSUM OF SQUARE, F9.4,//,8X, 9HCOMPONE
    INT)
204 FORMAT (/,8X,15HRESIDUAL MATRIX)
    STOP
    END

```

2.3.4 セントロイド法(第2法)

この方法は、次項の方法の改良にあたり、とくに、共有性の推定には相関行列その後は各回の残差行列により逐次的な反復計算によって精度を良くし、また1をこえないように意図している。一般に、抽出される因子の数は、観測特性の数よりかなり少なく得られる。セントロイド法が適用されるとき、この方法が前項の方法に次いで頻用されている。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	変数の数	R(I, J)	標本相関係数、のちに残差行列因子行列
FM	標本の大きさ(数)	W(J)	
IC	残差行列を必要とするか否かの制御		
R(I, J)	標本相関行列		

```

C      THE CENTROID METHOD
C              (OPTIMIZING THE DIAGONAL ELEMENTS)
C
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      FM --- NO. OF SAMPLES
C      IC --- 0, IF RESIDUAL MATRIX IS REQUIRED
C      --- 1, OTHERWISE
C      R --- SAMPLE CORRELATION MATRIX
C
C
C      DIMENSION R(30,30),W(30),D(30),V(30)
1 READ (40,100) N,FM,IC
  WRITE (50,200)
  DO 2 I=1,N
    READ (40,101) (R(I,J),J=1,N)
2  WRITE (50,201) (R(I,J),J=1,N)
  FN=N
  K=1

3 DO 4 I=1,N
4  R(I,I)=0.0
  S=0.0
  DO 5 I=1,N
  DO 5 J=1,N

```

```

5 S=S+R(I,J)**2
  IF(2.0*S/(FN*(FN-1.0))-1.0/FM) 1,1,6
6 DO 8 J=1,N
  D(J)=0.0
  DO 8 I=1,N

    IF(D(J)-ABS(R(I,J))) 7,8,8
7 D(J)=ABS(R(I,J))
8 CONTINUE
  DO 9 I=1,N
    W(I)=0.0
    V(I)=1.0
    DO 9 J=1,N
9 W(I)=W(I)+R(I,J)
10 J=1
  DO 12 I=2,N

    IF(W(J)*V(J)-W(I)*V(I)) 12,11,11
11 J=I
12 CONTINUE
  IF(W(J)*V(J)) 13,15,15
13 V(J)=-V(J)
  DO 14 I=1,N
14 W(I)=W(I)+2.0*R(I,J)*V(J)
  GO TO 10
15 DO 16 I=1,N
16 W(I)=W(I)+D(I)*V(I)

  S=0.0
  DO 17 I=1,N
17 S=S+ABS(W(I))
  S=1.0/SQRT(S)
  DO 18 I=1,N
18 W(I)=W(I)*S
  DO 19 I=1,N
  DO 19 J=1,N
19 R(I,J)=R(I,J)-W(I)*W(J)
  WRITE (50,202) K

  WRITE (50,201) (W(J),J=1,N)
  K=K+1
  IF(IC) 20,20,3
20 WRITE (50,203)
  DO 21 I=1,N
21 WRITE (50,201) (R(I,J),J=1,N)
  GO TO 3
100 FORMAT (I4,F4.0,I2)
101 FORMAT (10F5.4)
200 FORMAT (//,55H THE CENTROID METHOD (OPTIMIZING THE DIAGONAL ELEMEN
1TS),//,8X,12HINPUT MATRIX)
201 FORMAT (9X,8F8.4)
202 FORMAT (//5X,3HNO.,15//,8X,9HCOMPONENT)
203 FORMAT (/8X,15HRESIDUAL MATRIX)
  STOP
  END

```

2.3.5 セントロイド法(第3法)

第1法で示したセントロイド法の変法で、全般的な計算手順は若干複雑であるが本質的には同じである。ただ、第1法と異なる特徴は、特殊因子の存在をも想定して相関行列の対角線要素の1の代わりに、共有性を置き換えて解析をすすめる。この共有性の推定には、通常のように、非対角線要素のうち最大絶

46 — 2 章 成 因 分 析 法

対値の2乗を利用する。この推定を、一つの因子負荷ベクトルが得られるごとに残差行列によって行なう。本法の一般的な利点は、第1法よりも少ない因子数で観測特性の内部相関性を説明できる。しかし、共有性が1より大きくなる場合があり、Haywood の場合が生じる短所をもつ。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	変数の数	R1(I, J)	標本相関行列、のちに残差行列
FM	標本の大きさ(数)	L	収束した反復回数
IC	残差行列を必要とするか否かの制御	W(I)	因子行列
NL	収束のための反復回数の限度		
P	収束判定のための定数		
R1(I, J)	標本相関行列		

```

C      THE CENTROID METHOD
C      (ITERATIVE SOLUTION FOR DIAGONAL)
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      FM --- NO. OF SAMPLES
C      IC --- 0, IF RESIDUAL MATRIX IS REQUIRED
C            1, OTHERWISE
C      NL --- MAX.NO. OF ITERATIVE CYCLE
C
C      P --- CONSTANT FOR CONVERGENCE
C      R1 --- SAMPLE CORRELATION MATRIX
C
DIMENSION R1(30,30),R2(30,30),W(30),V(30),D(30),U(30)
1 READ (40,100) N,FM,IC,NL,P
WRITE (50,200)
DO 2 I=1,N
READ (40,101) (R1(I,J),J=1,N)
2 WRITE (50,201) (R1(I,J),J=1,N)

DO 3 I=1,N
U(I)=R1(I,1)
DO 3 J=1,N
3 R2(I,J)=R1(I,J)
FN=N
K=0.0
L=0.0
4 S=0.0
DO 5 I=1,N
D(I)=R1(I,1)

R1(I,1)=0.0
DO 5 J=1,N
5 S=S+R1(I,J)**2
IF((2.0*S*FM)-(FN*(FN-1.0))) 6,6,7
6 IF(K-1) 1,1,24
7 DO 8 I=1,N
W(I)=0.0
V(I)=1.0
DO 8 J=1,N
8 W(I)=W(I)+R1(I,J)

```

```

9 J=1
DO 11 I=2,N
IF(W(J)*V(J)-W(I)*V(I)) 11,10,10
10 J=1
11 CONTINUE
IF(W(J)*V(J)) 12,14,14
12 V(J)=-V(J)
DO 13 I=1,N
13 W(I)=W(I)+2.0*R1(I,J)*V(J)
GO TO 9

14 DO 15 I=1,N
15 W(I)=W(I)+D(I)*V(I)
S=0.0
DO 16 I=1,N
16 S=S+ABS(W(I))
S=1.0/SQRT(S)
DO 17 I=1,N
17 W(I)=W(I)*S
K=K+1
IF(K-1) 18,18,19

18 WRITE (50,202) K,L
GO TO 20
19 WRITE (50,203) K
20 WRITE (50,201) (W(I),I=1,N)
DO 21 I=1,N
R1(I,I)=D(I)
DO 21 J=1,N
21 R1(I,J)=R1(I,J)-W(I)*W(J)
IF(IC) 22,22,4
22 WRITE (50,204)

DO 23 I=1,N
23 WRITE (50,201) (R1(I,J),J=1,N)
GO TO 4.
24 S=0.0
DO 26 I=1,N
IF(S-ABS(D(I))) 25,26,26
25 S=ABS(D(I))
26 CONTINUE
DO 29 I=1,N
IF((U(I)-D(I))-1.0) 28,27,27

27 D(I)=U(I)
GO TO 29
28 D(I)=1.0
29 U(I)=D(I)
IF(S-P) 1,1,30
30 L=L+1
IF(L-NL) 31,31,1
31 K=0
DO 32 I=1,N
DO 32 J=1,N

32 R1(I,J)=R2(I,J)
DO 33 I=1,N
33 R1(I,I)=0.0
GO TO 7

100 FORMAT (15,F5.0,2I5,F8.6)
101 FORMAT (10F5.4)
200 FORMAT (//,56H THE CENTROID METHOD (ITERATIVE SOLUTIONS FOR DIAGON
1ALS),//,8X,12HINPUT MATRIX)
201 FORMAT (9X,8F8.4)
202 FORMAT (//5X,3HNO.,15,35X,5HCYCLE,15//8X,9HCOMPONENT)
203 FORMAT (//5X,3HNO.,15//,8X,9HCOMPONENT)
204 FORMAT (/8X,15HRESIDUAL MATRIX)
STOP
END

```


3 多因子解法

3.1 多因子解法の立場

第2章の成因分析によって、多変量観測値群 $\{x_j\}$, $j=1, 2, \dots, n$ に q 個の共通因子の存在が明らかになってくると、次に積極的に、これらの因子が具体的にどのように表現されるのか推定しようとする段階に到達する。すなわち、共通因子数が規定されれば、観測値の構造模型を仮定することができ、これに基づいて統計的推定を行なう段階となるわけである。

このように因子分析法は、先行する成因分析によって得られた情報に基づいて、さらに構造模型を詳しく追求する立場をとるわけである。しかし、この過程をただ1回の試行で成功裡に終了するのは、むしろ幸運である。テスト項目の加減や入れ替えなどの変更、因子数の吟味など、成因分析と因子分析が表裏のように試行錯誤の反復によって、次第に客観的に良い結果へと導かれるものである。この意味で、高性能電子計算機は実験器具であり、このような解析法は実験科学に属することの認識が本質的に重要となる。

まず、多変量観測値の一般的な構造模型に関し、その考え方と術語の定義を述べよう。

いま、 p 次元の観測ベクトル x_j が次式で表現されるとする。

$$x_j = Af_j + bS_j + ce_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

ここで、 f_j は x_j の要素の二つ以上に含まれる共通因子 (common factor) の評点 (factor score) からなる $(q \times 1)$ のベクトルを示し、 A は $(p \times q)$ の因子負荷行列 (factor loading matrix, factor coefficient matrix, factor pattern)

とよばれる共通因子に対する係数の行列である。 S_j は $(p \times 1)$ の特殊因子ベクトル (specific factor, unique factor vector) を示し、 p 種の観測特性のそれぞれに含まれる独自の因子を示すもので、 b は特殊因子に付随する係数で $(p \times p)$ の対角線行列を示している。また ε_j は観測値 x_j に含まれる p 種の誤差部分 (error term) で、 $(p \times 1)$ の誤差ベクトルまたは不信頼因子ベクトル (unreliability factor vector) とよばれ、 c は誤差ベクトルに付随する係数で構成される $(p \times p)$ 対角線行列を示している。また、構造模型のたて方として、 Af_j の部分をあらためて

$$a_0 + Af_j \quad (3.2)$$

のように示し、 a_0 を母集団平均ベクトル (population mean vector) とよぶこともある。したがって、式 (3.1) では a_0 を 0 とおいてもよい。

また、共通因子の定義のうちで、とくにすべての観測項目に必ず含まれる因子を全般因子 (general factor) とよび、観測項目のすべてではないが、部分的な二つ以上の観測項目に含まれる因子を部分因子 (group factor) とよんでいる。そして、各観測項目ごとに、実際にその特性のうちに含まれている共通因子の数を複雑度 (complexity) とよんでいる。さらに、第 j 番めの標本について、解析し推定された f_j を、その標本またはその対象の因子評点ベクトル (factor score vector) という。

式 (3.1) および (3.2) の構造模型をみて、多変量観測値が内因因子の線形式に残差誤差を付して表現されているという点で、線形回帰分析に非常に似ていることに気がつくであろう。しかし、その相違は、回帰分析では f が原因的な指定変量として与えられるのに反し、因子分析ではこの f も推定する変量として考えねばならないことである。

上の式 (3.1) の構造模型において、一般性を失わず次の数学的仮定をおく。

$$\begin{aligned} E(f) &= E(S) = E(\varepsilon) = 0 \\ E(SS') &= E(\varepsilon\varepsilon') = I_p \end{aligned} \quad (3.3)$$

さらに、 f の各要素の分散を 1 と標準化し、また f , s および ε は互いに統計的に独立とする。

このとき、観測値ベクトル x の期待値 $E(x)$ および分散共分散行列 Σ は

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}_0 \\
 \Sigma &\equiv E[(\mathbf{x}-\mathbf{a}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{a}_0)'] \\
 &= \mathbf{A}\Phi\mathbf{A}' + \Psi
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

ここに

$$\Phi \equiv E(\mathbf{f}\mathbf{f}'), \quad \Psi \equiv \mathbf{b}\mathbf{b}' + \mathbf{c}\mathbf{c}'$$

で示され、 Σ , Φ および Ψ はいずれも今後ともとくにことわらぬかぎり正則正値行列とする。

ここで、 c_i^2 を不信頼性 (unreliability) または誤差分散 (error variance), b_i^2 を特殊性 (specificity), また $\mathbf{A}\Phi\mathbf{A}'$ は階数 q の正値行列で共通因子部分の分散共分散行列になっていて、この対角線要素を共有性 (communality) という。

またとくに、 $\Phi = \mathbf{I}_q$ であれば、このときの q 個の共通因子を直交因子 (orthogonal factor) といい、 Φ が対角線行列でなければ、これらの因子を斜交因子 (oblique factor) とよんでいる。以下、 \mathbf{A} の回転による不定性を第4章の式(4.2)で論ずるまでは、一般性を失わず $\Phi = \mathbf{I}$ を仮定する。

もし、あらかじめ p 次元観測値ベクトル \mathbf{x} が

$$E(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad E(\mathbf{x}\mathbf{x}') = \mathbf{P} \tag{3.5}$$

のように標準化されているとすると、 \mathbf{a}_0 はゼロベクトルで、式(3.1)により \mathbf{x} の母相関行列 \mathbf{P} は Σ と同じで

$$\Sigma = \mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}' + \mathbf{b}\mathbf{b}' + \mathbf{c}\mathbf{c}' \tag{3.6}$$

で示される。すなわち、母相関行列の要素を ρ_{ij} とすると

$$\begin{aligned}
 \rho_{ij} &= \sum_{k=1}^q a_{ik}a_{jk}, \quad i \neq j \\
 &= \sum_{k=1}^q a_{ik}^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, \quad i = j \\
 & \quad i, j = 1, 2, \dots, p
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

で示される。ここに $h_i^2 \equiv \sum_{k=1}^q a_{ik}^2$ は共有性で、 $1-h_i^2$ を唯一性 (uniqueness), $h_i^2 + b_i^2$ を信頼性 (reliability) とよんでいる。

この際、共有性、特殊性、および誤差分散を分離し、それぞれがどの程度で

あるか、とくに特殊因子についての考察まで可能となれば興味ぶかい。

しかし、自然科学における好都合な場合を除いて、一般に、純粋な繰り返し実験を含む観測資料が得られるようなことは少なく、とくに社会科学での資料は繰り返し観測できないことが多い。このため、特殊性は誤差分散と分離できず、単に誤差分散として算出されることになる。

因子分析は、共有性に関する共通因子を推測することが主目的であるので、もし意図する因子が特殊因子として誤差項には入っていないならば、あらためてその因子に関連すると考えられる観測項目を追加し、この因子を共通因子に組み入れるよう努めるべきである。

また、観測数 n を十分大きくとることができれば、これを無作為に 2 群に分けて繰り返しとみなし、便宜的な方法として、おおまかに特殊因子を追求することができる。

このように、式 (3.1) で示される一般の構造模型について、因子負荷行列を求めるのは困難であるので、通常は特殊因子をはぶき、また、 $c\mathbf{e}_j$ を改めて \mathbf{e}_j とおいた式

$$\mathbf{x}_j = A\mathbf{f}_j + \mathbf{e}_j$$

または

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{a}_0 + A\mathbf{f}_j + \mathbf{e}_j \quad (3.8)$$

で考察をすすめていく。

3.2 種々の仮定と因子負荷行列の推定

さて、前節のような前提のもとで、実際に、正規分布する p 次観測値ベクトル \mathbf{x}_j を得たとき、果たしてもとの因子に関する構造模型がうまく得られるであろうか。もちろん、ここで回転に関する A の不定性を除いて、一般性を失わず $\Phi = I$ として論議をすすめてもよい。これについて、次のような問題が提起される。

(1) A, Φ, Ψ の存在性 ある p 次正規母集団の母数を与えたとき、この母集団を形成するような因子に関する構造模型が存在するかどうか。このことは、本質的に、 Σ が A, Φ および Ψ によって $A\Phi A' + \Psi$ と表わされるための条件を問題とする。

(2) A, Φ, Ψ の一意性 上で A, Φ, Ψ が存在するとしても、それらの解が一意的に決定しうるか否か。

(3) A, Φ, Ψ の母数的な決定方式 母数のうえで A, Φ, Ψ はいかに決定されてくる性質のものであるか。

(4) A, Φ, Ψ の推定法 実際に、 n 個の観測値からどのようにして母数 A, Φ, Ψ は推定できるか。もちろん、このときには(2)の一意性と因子数 q の前提のもとに、種々の推定法の性格を知る必要がある。

(5) 因子に関する構造模型の適合性の検定 因子に関する推定結果が真の構造模型に合致しているか否か、この観点での仮説に対する検定を考える。

(6) 因子数決定の問題 観測値から因子数 q を決定することは、上の諸項目をも通じとくに重要で、これをいかにして決めるかは本質的な問題となってくる。

(7) その他の種々の仮説検定 母数に関する種々の仮説検定、とくに A に関する検定に最も関心が示される。

(8) 因子評点の推定 各観測対象の観測値ベクトル x_j をもとに、推定された因子評点 f_j を求める。

これらの問題は、とくに観測値に基づいて標本分布を考えるとすると、不十分なことや未解決なことも含み、今後の研究にまつことが多い。ここでは Anderson と Rubin の論文およびそこでの引用文献に基づいて、母数のうえでのおもだった基礎的な結果のみを紹介しておこう。

まず、(1) の存在性については、ある与えられた q と Σ に対して A, Φ, Ψ が存在するための必要かつ十分条件は、 $\Sigma - \Psi$ が階数 q の非負行列となるような Ψ が存在することと知られている。しかし、このような Ψ が存在したとしても、 q に対して一意に A, Φ, Ψ が定まるか否かの論議が残っている。これに関しても多くの研究者によって種々に研究されているが、詳細な一般的な結果はまだ得られていない。Reiersøl は、 $q=s$ について A, Φ, Ψ が存在するなら $q=s+1$ に対してもすべて異なる Ψ とともに無限の A, Φ が存在することを示している。したがって、もし、ある q に対して Ψ が一意的に決められるなら、このときの q は A, Φ が存在する最小の整数でなければならない。また、Albert は任意に与えられた Ψ に対して $\Sigma - \Psi$ が与えられた階数をも

つことを決める直接的な手順を示しているが、そこでは $\Sigma - \Psi$ が非負行列であることを証明していない。また、別に、Albert は $\Sigma - \Psi$ が与えられた階数の行列となるような Ψ を一意に決めるための十分条件をも与えている。また、Anderson と Rubin は Ψ の一意性に関する十分条件を与えている。この条件は、 A の任意の1行を除いたとき、残りの A が階数 q の二つの部分行列を含むことである。このことは $2q \leq p-1$ でなければならず、強すぎる条件である。現に、Wilson と Worcester は $p=6$ のとき Ψ が $q=3$ で一意に定まる例をあげている。

ここに AA' が階数 q の正値行列であれば、上記のように $\Sigma - \Psi$ が階数 q の非負行列となる Ψ が存在するから、 A, Φ, Ψ が少なくとも各一つは存在する。そして、もし $AA' = BB'$ となるようないくつかの因子負荷行列 A, B, \dots が存在するなら、これらの因子負荷行列は直交変換によって互いに変換しうるものになっている。

次に、因子負荷行列 A の回転による不定性が除去できるような若干の制限条件をつけ、 AA' から出発し A を一意に決められる簡単な場合を考えてみよう。ここでも母数だけの関係のうえで、Anderson と Rubin の論文による。

(1°) A を一部上方三角行列と設定する場合 このときには、 AA' から一意的に A が決定できることは明らかで、その計算法は付録に示した平方根法によって容易に得られる。

(2°) 与えられた $p \times q$ 行列 B に対し $B'A$ を三角行列と設定する場合 AA' の前後から B によって、まず $B'AA'B$ をつくり、これに上記 (1) と同様の平方根法を適用すれば $q \times q$ 行列 $B'A$ が得られる。したがって、この逆行列を用い、 $AA'B(B'A)^{-1} = A$ によって、 A が一意的に決められる。

(3°) $A'A$ の要素がすべて異なり大きさの下降順に並ぶ対角線行列と設定する場合 AA' の固有値と固有ベクトルの計算を行なうことになる。すなわち、 AA' の p 個の固有値を大きさの順に並べた対角線行列を Λ とし、 X を固有値の大きさの順に対応する各ベクトルを列に並べた $p \times p$ 行列とすると、 $AA'X = X\Lambda$ である。これより X は A で、 $\Lambda = A'A$ である。したがって、 A は AA' の固有ベクトルを列とした行列として一意に決まる。

(4°) $A'\Psi A$ の要素がすべて異なり大きさの下降順に並ぶ対角線行列と設

定する場合 上記(3°)と同様に, $AA'\Psi$ の固有値と固有ベクトルを考えて, $AA'\Psi X = X\Lambda$ から $A'\Psi A = \Lambda$ および $X = A$ として A が一意的に得られる。

したがって, もし Σ が与えられれば, AA' の非対角線要素は Σ の非対角線要素そのものであるから, AA' の対角線要素を適当に与えれば, この AA' をもとに上の条件を満たす A を随意に求めることができるわけである。

しかし, 上記の(1°)~(4°)で与えた条件自身は, 因子負荷行列 A を一意的に決めるための多少とも便宜的な方法にすぎず, そこには心理学本来の何の根拠もないし, また一般的な実質科学上の意義をもつものでもない。

むしろ, この A に関する条件としては, 次章に述べる Thurstone の提唱した簡素構造や Ferguson の因子節約の原則が現在も実質的な意義をもつものとされている。

さて, それでは具体的に, p 次観測値ベクトル $x_j = a_0 + Af_j + e_j$ の分布に関し, $\Sigma = A\Phi A' + \Psi$ との関連で, f_j および e_j についてどのような仮定が設けられるか, おもだった次の四つの場合を考えてみよう。

A): f_j も e_j も多次元正規分布し, それらの期待値はそれぞれ q 次および p 次のゼロベクトルで, 分散共分散行列は Φ および Ψ と仮定する。すなわち,

$$f \in N(0, \Phi), \quad e \in N(0, \Psi) \quad (3.9)$$

B): 上の A) において, f_j および e_j の正規性の仮定を除き, ただ確率変数の 1 次と 2 次のモーメントとして同様の仮定をおく。すなわち,

$$\begin{aligned} E(f) &= 0, & E(ff') &= \Phi \\ E(e) &= 0, & E(ee') &= \Psi \end{aligned} \quad (3.10)$$

C): e_j だけが確率変数で, 1 次と 2 次のモーメントを上記 B) と同様におき, f_j は第 j 番目の観測対象が母数としてもつ因子評点ベクトルと仮定する。そして f_j を次のように基準化しておく。

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_j = 0, \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_j f_j' = \Phi \quad (3.11)$$

D): 上の A) で, $\Phi = I_q$ を仮定する。すなわち, p 次観測値ベクトル x_j として,

$$\mathbf{x}_j \in N(\mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{A}' + \Psi) \quad (3.12)$$

とする。したがって、これは A) の場合に含められるが、Lawley & Maxwell や Kendall によってよく知られた最尤推定法があるので、便宜上取り扱いを分けておく。

さきには、 \mathbf{A} の回転による不定性を除くための \mathbf{A} に関する条件を考えたが、上の A), B) および C) において、 Ψ に関する制約条件をつけても一意的に \mathbf{A} を決めることができる。

この制約条件としては、Whittle や Lawley らによって考えられた

$$\Psi = \theta \mathbf{I} \quad (3.13)$$

と、Jöreskog によって考えられた

$$\Psi = \theta [\text{diag } \Sigma^{-1}]^{-1} \quad (3.14)$$

をあげることができる。ここに θ は正のスカラー量である。

これらの条件のもとでは、もはや \mathbf{A} や Ψ についての先験的な仮定をなんら必要とせず、ごく自然な統計解析の手法として母数の推定が行なえる。

すなわち、式 (3.13) のもとでは、 Σ の p 個の固有値を大きいほうから、 $\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \dots > \gamma_{p-m} > \gamma_{p-m+1} = \dots = \gamma_p \equiv \gamma$ とし、 γ_1 から γ_{p-m} に対応する固有ベクトルを $\omega_1, \dots, \omega_{p-m}$ とおく。ここに m は最小固有値の重複度を示す。また、この ω_1 から ω_{p-m} を列に並べてできる行列を Ω とする。このとき、因子数 q は $p-m$ で、 θ は最小固有値 γ であることがいえる。また、 \mathbf{T} を直交行列とすると、 \mathbf{A} は一般に $\Omega\mathbf{T}$ で示されることがいえる。さらに、この際最尤推定は後記の正準因子分析法と同じ結果を与える。

しかし、式 (3.13) の不利なことは、観測特性の測定単位 (unit of measurement) によって解析の結果が異なることである。そして、心理学やその他の実質科学分野では測定単位にそれほど本質的な意味をもたないことが多いのである。したがって、もし、式 (3.13) の仮定で解析するならば、あらかじめ観測資料を規準化しておき、測定尺度の単位に解析結果が左右されないようにする必要がある。実際には、各観測特性の資料の分散をすべて 1 にし、分散共分散行列の代わりに相関行列に基づき解析を行なうことになる。しかし、もし解析によって少数の共通因子を探究するのが目的であれば、規準化した資料に基づく式 (3.13) の適用は実際的でない。

このような欠点を補う目的で, Jöreskog は式 (3.14) の仮定を導入したわけである。

これらの模型のどれを採択するかは, 現実の問題に照らし合わせて, どの模型が自然に考えうるかということにかかっている。

次節以降では, Jöreskog の式 (3.14) に基づいて, A), B) および C) の各場合に対して, 因子負荷量や残差分散共分散行列の推測方法を記述する。そして, おわりに, Ψ に関する式 (3.13) または (3.14) の仮定を採用しないときを最も一般的な場合として, D) に関する Lawley の最尤推定法を解説しよう。

まず, ここで共通した準備として, 次の統計量および母数の定義を準備しておく。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j, & \mathbf{S} &= \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})' \\ \mathbf{D} &\equiv \text{diag}(\mathbf{S}^{-1}), & \mathbf{S}^* &\equiv \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{S} \mathbf{D}^{1/2} \\ \mathbf{A} &\equiv \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}), & \boldsymbol{\Sigma}^* &\equiv \mathbf{A}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^{1/2}\end{aligned}\quad (3.15)$$

このとき各場合とも

$$E(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{a}_0, \quad E(\mathbf{S}) = \boldsymbol{\Sigma} \quad (3.16)$$

であり, また, \mathbf{D} および \mathbf{S}^* は, それぞれ, \mathbf{A} および $\boldsymbol{\Sigma}$ の一つの推定量である。

さらに, $\boldsymbol{\Sigma}^*$ および \mathbf{S}^* の固有値と固有ベクトルに関して, 次式のような記号を定義しておく。

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\Sigma}^* - \gamma \mathbf{I}] \boldsymbol{\omega} &= 0 \\ [\mathbf{S}^* - t \mathbf{I}] \boldsymbol{w} &= 0\end{aligned}\quad (3.17)$$

次節以降では, 式 (3.15) に定義した $\boldsymbol{\Sigma}^*$ と \mathbf{S}^* について取り扱うが, これには次の利点がある。

[定 理] \mathbf{x} が確率ベクトルで, その真の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を正値行列とする。このとき対称正値行列 $\boldsymbol{\Sigma}^* \equiv \mathbf{A}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{A}^{1/2}$ は, \mathbf{x} の各要素にどのような尺度変換, すなわちどのような数を乗剰しても, また要素の推定単位の変更を行なっても, 不変 (invariant) である。

[証 明] いま \mathbf{K} を対角線要素が正数である任意の対角線行列とする。ここ

で、 $\mathbf{Kx} \equiv \mathbf{y}$ として、ベクトル \mathbf{x} をベクトル \mathbf{y} に任意に変換したとする。このとき \mathbf{x} で定義された Σ^* が、 \mathbf{y} についても同様に Σ^* になることを証明する。

$$E\left\{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_j - \bar{\mathbf{y}})'\right\} \equiv \Sigma_y$$

とすると、 $\Sigma_y = \mathbf{K}\Sigma\mathbf{K}$ であり、 $\Sigma_y^{-1} = \mathbf{K}^{-1}\Sigma^{-1}\mathbf{K}^{-1}$ でもある。また式 (3.16) と同様に $\Delta_y \equiv \text{diag}(\Sigma_y^{-1})$ とおくと \mathbf{K}^{-1} はやはり対角線行列であるから、

$$\Delta_y = \mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}^{-1} = \Delta\mathbf{K}^{-2} = \mathbf{K}^{-2}\Delta$$

したがって、

$$\begin{aligned} \Sigma_y^* &= \Delta_y^{1/2}\Sigma_y\Delta_y^{1/2} = \Delta^{1/2}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}\Sigma\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}\Delta^{1/2} \\ &= \Delta^{1/2}\Sigma\Delta^{1/2} = \Sigma^* \end{aligned} \quad \text{qed}$$

さて、式 (3.14) によって、 Σ^* から θ, q および \mathbf{A} を一意的に与える数理を明らかにするため、まず、準備として次の重要な定理を紹介する。

[定 理] \mathbf{x} が確率ベクトルで、その母分散共分散行列を正值行列とし、

$$\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}' + \theta\Delta^{-1}$$

であるとする。ここに \mathbf{A} は式 (3.2) で示された $p > q$ なる階数 q の $(p \times q)$ 行列とし、 θ はスカラー量である。また、 γ を Σ^* の最小固有根で m 個重複しており、残りの固有根を $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-m}$ とし、それらに対応する固有ベクトル $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p-m}$ がそれぞれ $\omega_r' \omega_r = \gamma_r - \gamma$ のように基準化されているとする。また Ω を $p \times (p-m)$ 行列の $\Omega \equiv [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p-m}]$ とする。

このとき、

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad q &= p - m \\ \theta &= \gamma \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \mathbf{A} = \Delta^{-1/2}\Omega\mathbf{T} \text{ で、ここに } \mathbf{T} \text{ は直交行列とする。}$$

であることが示される。

[証 明] Σ^* の p 個の固有根を、大きいほうから小さいほうに $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ とする。いま、定義から

$$\begin{aligned} \Sigma^* &\equiv \Delta^{1/2}\Sigma\Delta^{1/2} = \Delta^{1/2}(\mathbf{A}\mathbf{A}' + \theta\Delta^{-1})\Delta^{1/2} \\ &= \Delta^{1/2}\mathbf{A}\mathbf{A}'\Delta^{1/2} + \theta\Delta^{1/2}\Delta^{-1}\Delta^{1/2} = \Delta^{1/2}\mathbf{A}\mathbf{A}'\Delta^{1/2} + \theta\mathbf{I} \end{aligned}$$

$$\therefore A^{1/2}AA'A^{1/2} = \Sigma^* - \theta I$$

この左辺はランク q の非負行列で、その固有根は q 個の正根と $p-q$ 個のゼロ根からなると考えられる。一方、右辺より、 p 個の固有根は $\gamma_1 - \theta, \gamma_2 - \theta, \dots, \gamma_p - \theta$ で示され、 $\gamma_{q+1} = \gamma_{q+2} = \dots = \gamma_p = \theta$ となる。したがって、 Σ^* の最小固有根の重複数 m については $m = p - q$ となる。(i) の証明了。

次に、 A を一意的に表現する (ii) について証明しよう。

上に定義された Σ^* について、次式のような直交行列 E および対角線行列 Γ が存在する。

$$E'\Sigma^*E = \Gamma \quad \text{または} \quad \Sigma^* = E\Gamma E'$$

上式を Σ^* の固有根に関する $\Sigma^* - \theta I$ に代入すると

$$\Sigma^* - \theta I = E\Gamma E' - \theta I = E[\Gamma - \theta I]E'$$

を得、 Γ の各要素は Σ^* の固有根からなり、 E の列は各固有根に対応する固有単位ベクトルになっていることが知れる。

また、 E を $p \times q$ 行列 E_1 と $p \times m$ 行列 E_2 に、 Γ を $q \times q$ 行列 Γ_1 と $m \times m$ 行列 Γ_2 に、次のように分割する。

$$E = [E_1, E_2], \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & O \\ O' & \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

ここに O は要素をすべてゼロとする $q \times m$ 行列である。このとき定理の前半からつねに $\Gamma_2 = \theta I$ であるから、 $\Sigma^* - \theta I$ は本質的に

$$\Sigma^* - \theta I = [E_1, E_2] \begin{bmatrix} \Gamma_1 - \theta I & O \\ O' & \Gamma_2 - \theta I \end{bmatrix} [E_1, E_2]' = E_1[\Gamma_1 - \theta I]E_1' = \Omega\Omega'$$

となる。上式の左辺は、(i) で示されたように $A^{1/2}AA'A^{1/2}$ と書け

$$A^{1/2}AA'A^{1/2} = \Omega\Omega'$$

ここで $p \times q$ 行列 $A^{1/2}A$ を U とおくと

$$UU' = \Omega\Omega'$$

を得る。これより $U = \Omega T$ をうる。ここに T は q 次の直交行列を示す。したがって、

$$U = A^{1/2}A = \Omega T$$

を得、また

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{Q} \mathbf{T}$$

のように \mathbf{A} は一意に定められる。

qed

この定理は、すべて母数のうえでの関係を示したものではあるが、 q と θ の決定およびある一つの \mathbf{A} の存在性を示し、また \mathbf{A} が確定されるための条件をも与えている。いかにしてまた Σ^* から \mathbf{A} が決められるかを示す手順を与えている。

次に、観測値ベクトルの因子に関する構造模型について、さきに仮定した A), B), C) および D) のそれぞれの場合の具体的な推測法について記述する。

3.2.1 条件 A の場合

この場合、 \mathbf{x} は平均値ベクトル \mathbf{a}_0 と分散共分散行列 Σ をもつ p 次正規分布法則に従うとする。このとき、 $\bar{\mathbf{x}}$ および $(n-1)\mathbf{S}/n$ は、それぞれ \mathbf{a}_0 および Σ の最尤推定量であり、漸近有効推定量でもある。また \mathbf{S} の要素の同時分布はウイシャート (Wishart) 分布することもよく知られている。

しかし、条件 A の場合に基本的な役割をもつのは、むしろ \mathbf{S}^* であり、この分布は非常にむずかしく最尤法を適用できない。そこで、 \mathbf{S} の漸近分布を利用し、 $\mathbf{D}^{1/2}$ の分布が、 $n \rightarrow \infty$ として、 $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ に確率収束することによって、

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{x} \quad (3.18)$$

が $N(\mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{a}_0, \Sigma^*)$ に従うと仮定する。すなわち n が十分大きいとき $\mathbf{D} - \mathbf{\Lambda}$ がゼロ行列になり無視できるとする。このとき、 $\hat{\mathbf{a}}_0 = \bar{\mathbf{x}}$ を与え観測値だけの項を省略すると、 y の対数尤度関数は

$$2 \log L = -n \{ \log |\Sigma^*| + \text{tr} . (\mathbf{S}^* \Sigma^{*-1}) \} \quad (3.19)$$

となる。

これを最大ならしめるような Σ^* に対する式 (3.17) の r_i, ω_i の推定量として、同じ式 (3.18) の t_i, \mathbf{w}_i が得られるのは、次のような数理による。

いま、固有値 r_1, r_2, \dots, r_q をすべて異なる Σ の大きいほうから第 q 番めまでの $|\Sigma^* - r\mathbf{I}| = 0$ の根で、また、それぞれに対応する固有ベクトルを $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ とすると、 $\Sigma^* \omega_r = r_r \omega_r$ は当然である。また、 Σ の対称性により各固有ベクトル同志は直行、すなわち、 $\omega_r' \omega_s = 0, r \neq s$ である。また各ベクトルは、

$\omega_r' \omega_r = \gamma_r - \theta$ として、各 r ごとに基準化されているとする。このような条件下で、 ω_r は符号(ベクトルの向き)を除き一意に定められる。また逆に Σ^* は γ_r , ω_r および θ によって、ただ一つ定められ、

$$\sum_{m=1}^q \omega_m \omega_m' + \theta I = \Sigma^*$$

と表現しうる。これらのことから容易に

$$|\Sigma^*| = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_q \theta^{p-q} = \prod_{m=1}^q (\omega_m' \omega_m + \theta) \cdot \theta^{p-q}$$

が示され、また

$$\Sigma^{*-1} (\sum_m \omega_m \omega_m' + \theta I) = I$$

および

$$\Sigma^{*-1} \omega_r \omega_r' = \omega_r \omega_r' / \gamma_r$$

によって

$$\Sigma^{*-1} = \frac{1}{\theta} \left\{ I - \sum_{m=1}^q \frac{1}{\gamma_m} \omega_m \omega_m' \right\}$$

が導かれる。

さて、この $|\Sigma^*|$ および Σ^{*-1} の右辺を式 (3.21) に代入すると、

$$2 \log L = -n \left\{ \sum_{m=1}^q \log (\omega_m' \omega_m + \theta) + (p-q) \log \theta + \frac{1}{\theta} \text{tr. } S^* - \frac{1}{\theta} \sum_{m=1}^q \frac{\omega_m' S^* \omega_m}{\omega_m' \omega_m + \theta} \right\}$$

となる。この式を、各ベクトル ω_r の直交性および基準化の条件下で、 γ_r , ω_r および θ に関し最大化する。この結果次式が得られる。

$$w_i' w_i = t_i - \left\{ \sum_{j=q+1}^p t_j / (p-q) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.20)$$

ここに

$$S^* w_i = t_i w_i, \quad (3.21)$$

$$\sum_{j=q+1}^p t_j = \text{tr. } S^* - \sum_{j=1}^q t_j$$

ここで大標本論を適用しているが、同じ i に対応する $(r_i - t_i)$ の食い違いは $1/\sqrt{n}$ の order であり、 $i \neq i'$ なる t_i と $r_{i'}$ を誤って対応させることは少ないであろう。

したがって、因子負荷量 A の推定量 \hat{A} は

$$\hat{A} = D^{-1/2}W \quad (3.22)$$

で示され、残差分散の対角線行列 Ψ の推定量 $\hat{\Psi}$ は

$$\hat{\Psi} = D^{-1}(\text{tr. } S^* - \sum_{j=1}^q t_j)/(p-q)$$

となる。ここに $W \equiv [w_1, w_2, \dots, w_q]$ とおいている。

とくに式 (3.21) の統計量に関しては、次の性質がある。

[定理] さきに定義された $S = AA' + \theta A^{-1}$ および式 (3.15) の $S^* \equiv D^{1/2}SD^{1/2}$ において、 t_1, t_2, \dots, t_p を S^* の大きいほうからの固有根とし、第 q 番めまでの固有根に対応する固有ベクトルを w_1, w_2, \dots, w_q とし、 $w_m'w_m = t_m - s$ のように基準化されているとする。ここに $s \equiv \sum_{i=q+1}^p t_i/(p-q)$ 、また、 $W \equiv [w_1, w_2, \dots, w_q]$ として $p \times q$ 行列におく。

このとき、 $D^{-1/2}W$ および s は、それぞれ A および θ の一致推定量になっている(証略)。

3.2.2 条件 B の場合

この場合、 f と s について何の分布型も仮定しないのであるが、おもしろいことに、推定式の結果は前項の場合と同じ式 (3.20) が得られる。ここでの方法は残差共分散に最小 2 乗法を適用する。すなわち、与えられた標本分散共分散行列を入力として用い、 $S - AA' - \Psi$ の全要素の 2 乗和を最小にすることとする。しかし、元来、このような各要素の残差分散がすべて等しいとは仮定していないので、これを考慮し各要素に相当する重みづけを行なうことになる。

このようにして最小にすべき関数は

$$U(A, \Psi) = \text{tr. } [D^{1/2}(S - AA' - \theta D^{-1})D^{1/2}] \quad (3.23)$$

となる。上の関数を A の各要素および θ で偏微分し、それらの式を同時にゼロならしめるように解けばよい。

この結果は、式 (3.13) と (3.15) の定義のもとに前項の式 (3.19) および (3.20) と全く同じになる。すなわち

$$\begin{aligned}\hat{A} &= D^{-1/2}W \\ \Psi &= D^{-1}(\text{tr. } S^* - \sum_{j=1}^q t_j)/(p-q)\end{aligned}\quad (3.24)$$

が得られる。

3.2.3 条件 C の場合

この場合は因子評点 f_j が確率的に分布するものではなく、各観測対象に固定していると仮定され、多変量観測値から推定されるべきものとなる。しかし、 A の推定に際し、 f_j を非確率的に固定して条件づけても、観測値ベクトルの条件つき分布はさきの条件 A や条件 B の場合の確率分布法則と同一に導かれる。

因子評点の推定には、通常、次のように 2 段階の推定手順をとる。まず a_0 , A , Ψ の推定量として、さきと同様に、それぞれ \bar{x} および式 (3.22) で示される \hat{A} と $\hat{\Psi}$ を算出し、次にこれらの値をもって a_0 , A , Ψ の値が既知とし、個々の j に関し f_j を推定するのである。この段階では、各 j について、次式のように標準偏差に逆比例する重みを付した残差の平方和を最小にする f_j を定める。

$$[x_j - \bar{x} - \hat{A}f_j]' \hat{\Psi} [x_j - \bar{x} - \hat{A}f_j] \quad (3.25)$$

ここで式 (3.24) と次に定義する y_j

$$y_j \equiv D^{1/2}[x_j - \bar{x}] \quad (3.26)$$

を導入すると、式 (3.25) は実質的に

$$[y_j - Wf_j]' [y_j - Wf_j] \quad (3.27)$$

となり、これを最小ならしめる f_j を求めるという最小 2 乗法の問題となる。

この結果は次のように示される。

$$f_j = [W'W]^{-1}W'y_j \quad (3.28)$$

ここに $W = [w_1, w_2, \dots, w_q]$

3.2.4 条件 D の場合

これまで因子負荷行列 A を一意的に定めるために、3.2 節後半の A に関する条件や、 Ψ に関する式 (3.13) または (3.14) の条件を付加した解について考察してきた。しかし、これらの条件は一意な解を得るための多少とも不自然

な技法であって、実質科学で現象分析を行なう際には受け容れられない場合が少なくないはずである。このために、この種の多因子解法としてはこれらの人為的条件をつけない A の推定法を適用したのちに、必要に応じて Thurstone や Ferguson らの簡素構造化の変換を行なう過程が多く採用されている。したがって、本項ではこの立場で、日常最も頻繁に採用されている Lawley らによる A および Ψ に関する最尤推定法についてまず記述する。

条件 D の場合は、条件 A で $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ とし、常数項を設けない一般の式 $\mathbf{x}_j = A\mathbf{f}_j + \mathbf{e}_j$ に関して $\Phi = I$ とする。また上記の A), B), C) の場合は、いずれも本質的に 3.3 節にしるしたように、大標本論的な近似解法であるが、ここでは計算量は増すが忠実に最尤推定法による解法を考える。

\mathbf{x} が p 次元正規分布することを仮定すると、標本分散共分散行列 V の要素はウイシャート分布する。ここに $V \equiv (n-1)S/n$ 。このような尤度関数より A の最尤推定を考える。

いま構造模型式 $\mathbf{x} = A\mathbf{f} + \mathbf{e}$ で、 A を $p \times q$ の因子負荷行列とすると、母分散共分散行列 Σ は

$$\Sigma = AA' + \Psi \quad (3.29)$$

で示され、 Ψ は p 個の変量の分散 Ψ_{ii} のみの対角線行列である。ここで Ψ_{ii} の値が既知なら $q < p$ 、未知なら $(p+q) < (p-q)^2$ が必要である。

すなわち、ここで未知母数の数と方程式の数を比較してみる。 Σ の中には $p(p+1)/2$ 個の要素があり、そして、この数が未知母数を含む方程式の数になっている。一方、対角線行列 Ψ の中には p 個の未知母数があり、また A には pq 個の未知母数を有している。しかし、この A は $q \times q$ 直交行列 T によって、 AT と置き換えることができ、結局 A は $q(q-1)/2$ 個の付加条件をも満たすものである。したがって、方程式と条件の総数から推定されるべき未知母数の数を減じた数を c として

$$c = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} - p - q = \{(p-q)^2 - (p+q)\}/2$$

が非負でなければ解は得られない。これを因子数 q に対する観測特性数 p の大きさの観点から整理すると、少なくとも

$$p \geq \frac{1+2q+\sqrt{1+8q}}{2}$$

が必要である。これによって、 q と p の関係は数値的に次表で示される。

q	1	3	6	10	15	21	...
$p >$	3	6	10	15	21	28	...

したがって、Thurstone らが経験として述べているように、推測される因子の精度までを配慮すると因子数の少なくとも2倍ないし3倍程度の観測特性は必要になると考えてよい。

さて、最尤法により母数 A と Ψ の一致充足推定量をうるために、対数尤度関数 L (観測値の関数部分を略して)

$$L = -(n-1) \{ \log_e |\Sigma| + \text{tr}(\mathbf{V}\Sigma^{-1}) \} / 2 \tag{3.30}$$

を A と Ψ の要素で偏微分してゼロとおき、母数に関する連立正規方程式を解く。

しかし、この解は A と Ψ のあからさまな形にはならず

$$U' \equiv \hat{A}' \hat{\Psi}^{-1} V - \hat{A}' \tag{3.31}$$

とおくとき、次の J は対角線行列で

$$J^2 = U' \hat{\Psi}^{-1} \hat{A} \tag{3.32}$$

$$\hat{A}' = J^{-1} U' \tag{3.33}$$

を同時に満足する \hat{A} と $\hat{\Psi}$ が求める推定量となる。数値解は常法に従って、反復近似計算法による。まず第1近似の $\hat{A}_{(1)}$, $\hat{\Psi}_{(1)}$ を与え、式(3.31)より $U_{(1)}$ を求め、式(3.32)より $J_{(1)}^2$ を得、その後式(3.33)より $\hat{A}_{(2)}$ を、また $\hat{\Psi}_{(2)}$ は対角線要素 $\hat{\Psi}_{ii} = \hat{v}_{ii} - \sum_{r=1}^q \hat{a}_{ir}^2$ によって求める。ここに \hat{v}_{ii} は V の (i, i) 対角線要素である。以下同様の手順を反復し、 $\hat{A}_{(n)}$ と $\hat{\Psi}_{(n)}$ が十分小さな変動以下に収束した段階で A と Ψ の推定値と決める。

【検証実験例】 さきの長方形に関する検証数値を成因分析の結果の $q=2$ に基づき、本項の場合の因子負荷行列を推定し、共有性をも算出しよう。電子計算機で反復近似計算を行なわせると、40回の反復で表2.4の結果と示す。

この結果を2.2.4項の x_j の模型と直接に比較すると、因子2が α で因子1

表 3.1

変 量	因 子 1	因 子 2	共 有 性
1	0.5807	0.8138	0.9996
2	0.5804	0.8143	0.9999
3	0.6060	0.7953	0.9998
4	0.9200	0.3916	0.9998
5	0.5395	-0.8417	0.9996
6	0.9975	-0.0652	0.9994
7	0.9978	-0.9652	0.9999
8	0.9895	0.1438	0.9999

が β であろうかということぐらいで、あまり似つかわしくない。しかし、このことは当然で、この場合の二つの因子は全般因子 (general factor) として条件 D のもとに最尤推定を行なっているわけで、部分因子 (group factor) を推定しているのではない。したがって、成因分析で因子数の吟味があのように明確にできたにもかかわらず上のように得られたことは、むしろ図 2.1 における長方形の大きさ (size) と形状 (shape) というやや抽象的な全般因子を示唆していると考えられる。

このような吟味は、後節に記述する因子軸の直交回転や斜交回転によって部分因子を考察し、さらに各観測対象 j についての因子評点を追求すればより明確に知ることができる。

3.3 最尤推定の数値解法

因子負荷行列の最尤推定に関して、この回転に関する不定性以外にも、なお数値的にいかに得るかについて多くの論議がある。それは 1942 年の Lawley による最尤推定を求める反復収束法が初期値により異なる結果を示し、ときには不適当な解 (improper solution) を得ることが経験的にまた実証的に知られてきたことに始まる。

したがって、数値的に最尤推定をいかに求めるかは最近の中心的な問題の一つとして継続的にいくつかの報告がなされている。そのうちでも、1965 年 W. J. Hemmerle は体系だった計算手順として、固有値と固有ベクトルを直接に算出して反復収束に持ち込む効果的な方法を提唱した。この方法では Lawley の定式化と同様の過程で A と Ψ の要素に関して

$$\sum_i \sum_j \frac{1}{\sigma_i^2 \sigma_j^2} \{(\mathbf{V} - \hat{\Psi} - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}')_{ij}\}^2 \quad (3.34)$$

を最小にすることが導出され、上式が Hemmerle の方法のアルゴリズムの中で重要な役めを果たしている。

彼の方法は、まず標本分散共分散行列 \mathbf{V} と近似の $\hat{\Psi}$ から対称行列 $\hat{\Psi}^{-1/2}(\mathbf{V} - \hat{\Psi})\hat{\Psi}^{-1/2} \equiv \mathbf{B}$ の固有値と固有ベクトルを直接に算出する。この良い方法として、対称行列 \mathbf{B} を Householder 法によって対角要素をもつ三角行列 (tridiagonal matrix) に変形しておき、これについて Sturm 系列を拡張した Ortega 法で q 個の固有値を要素とする対角線行列 \mathbf{A} を求め、次いで Wilkinson 法により各固有値に対応する固有ベクトルを列に並べた行列 \mathbf{L} を算出する。ここで共有性の行列 Θ 、残差行列 Ψ および因子負荷行列 \mathbf{A} を次式の順番で更新する。

$$(i) \quad \Theta = \text{diag} (\hat{\Psi}^{1/2} \mathbf{L} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{L}' \hat{\Psi}^{1/2}) \quad (3.35)$$

$$(ii) \quad \hat{\Psi} = \text{diag} (\mathbf{V} - \Theta) \quad (3.36)$$

$$(iii) \quad \hat{\mathbf{A}} = \hat{\Psi}^{1/2} \mathbf{L} \hat{\mathbf{A}}^{1/2} \quad (3.37)$$

このようにして、上の更新のたびに $\hat{\Psi}$, $\hat{\mathbf{A}}$ および最小化基準の式 (3.34) の値を比較し収束や基準値の改善の良さを調べる。この結果、もし満足すべきものであれば最新の $\hat{\mathbf{A}}$ と $\hat{\Psi}$ を解とし、もし不満足なら上の対称行列 \mathbf{B} を再び計算して反復巡回の計算を繰り返す。ちなみに、この固有値と固有ベクトルを反復法で正確かつ迅速に求める数値計算の手順は、HOW 法 (Householder-Ortega-Wilkinson 法) と略称され、すぐれた方法として種々の数値解法に利用されることが多い。次に記述する斉時最小化のための Fletcher-Powell 法も、この HOW 法を部分的に利用している。

また、対称正値行列の固有値問題については、Gauss-Seidel 型の反復計算法でも理論的に必ず収束して解けるはずであり、この方法による数値解法の研究も 1955 年から 1965 年にかけて W.G. Howe, R. Bargmann や M.W. Browne らにより展開され、やはり良好とされる解法を得ている。

しかし、これらの方法でもなお収束がおそく、反復計算による各回の差が非常に小さくとも正確な解にはほど遠いことがあり、結局、良い初期値の与え方にむずかしい点が指摘されている。

これらに関し、K. G. Jöreskog は因子分析における簡素化構造を最尤推定する立場から種々の数値解法に検討を加え、1966年と1967年の *Psychometrika* にすぐれた発表を行なった。さらに1968年 Jöreskog と Lawley はこれらの内容を体系だて、因子負荷行列のいくつかの特定の要素を事前知識によってゼロまたはある値に仮定しておいて残りの要素を推定する検証的な場合 (confirmatory factor analysis, restricted maximum likelihood factor analysis) と因子負荷行列の要素に全くなんにも仮定しない探索的な場合 (exploratory factor analysis, unrestricted maximum likelihood factor analysis) の双方の場合に分けて *Brit. J. Math. Statist. Psychol.* に発表している。この中の数値解法の面では、1959年の Finkel による消去下降法 (the method of resultant descents) などの方法について検討してのち、いずれの場合とも急勾配下降法 (the method of steepest descent) の一種で急速に収束する Fletcher-Powell 法 (*Computer J*, 1963) を採択している。この解法は数種の無制限な変量を含む関数とその1次導関数が解析的に示されるとき、その関数を最小化する変量値を与える。このとき、もし2次の導関数までも解析的に示されるならば、Newton-Raphson 法が有効に適用される余地を残している。

上記の Jöreskog と Lawley の方法は、これまでに考えられた対数尤度関数の最大化を取り扱わず、これと等価な次の関数を最小にする母数値を求める。

$$F(\mathbf{A}, \Psi) = \log |\Sigma| + \text{tr}(\mathbf{V}\Sigma^{-1}) - \log |\mathbf{V}| - p \quad (3.38)$$

これは統計的仮説検定での対数尤度比にあたり、帰無仮説を $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}' + \Psi$ で因子数は q とし、対立仮説を単に Σ が任意の p 次定正值行列で因子数は q でないとおいた場合になっている。したがって、式(3.38)の最小値を $(n-1)$ 倍した値は、自由度 $[(p-q)^2 + (p+q)]/2$ の χ^2 分布に従い、構造模型式への当てはまりの良さ (goodness of fit) の統計量と考えうるものとなる。

次に、この探索的な場合について記述する。いま、 $F(\mathbf{A}, \Psi)$ の最小化を2段階に分け、まず与えられた Ψ のもとで \mathbf{A} の要素に関して式(3.38)を最小化し、次いで Ψ を動かして総合的な最小化の手順、すなわち

$$(i) \quad f(\Psi) = \min_{\mathbf{A}} F(\mathbf{A}, \Psi) \quad (3.39)$$

$$(ii) \quad \min_{\Psi} f(\Psi) = \min_{\mathbf{A}, \Psi} F(\mathbf{A}, \Psi) \quad (3.40)$$

をはかる。ここで $F(\mathbf{A}, \Psi)$ を偏微分しゼロとおくと

$$\Sigma^{-1}(\Sigma - \mathbf{V})\Sigma^{-1}\mathbf{A} = 0 \quad (3.41)$$

を得、さらに Σ を消すように変形すると最終的に

$$(\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{V}\hat{\Psi}^{-1/2})(\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{A}) = (\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A}'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{A}) \quad (3.42)$$

を得る。ここで $\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{A}$ の各列は $\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{V}\hat{\Psi}^{-1/2}$ の固有ベクトルであり、 $\mathbf{I} + \mathbf{A}'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{A}$ の対角線要素は対応する固有値であることがわかる。このとき $\mathbf{A}'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{A}$ の対角線要素はちょうど $\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{A}$ の列の平方和であるから、平方和は対応する固有値から 1 を減じた値に等しくなるように各固有ベクトルを規準化しておかねばならない。しかし、 $\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{V}\hat{\Psi}^{-1/2}$ は p 次定正值行列で p 個の固有値と固有ベクトルを有している。そして、そのうちの q 個の固有ベクトルが $\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{A}$ の列を定めるのに必要となる。いま $\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{V}\hat{\Psi}^{-1/2}$ の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q \geq \dots \geq \lambda_p$ とし、この大きいほうから順に対応して q 個の固有ベクトルを l_1, l_2, \dots, l_q とする。ここに通常のように $\lambda_q > 1$ が仮定されている。

このとき、与えられた $\hat{\Psi}$ のもとでの条件づき $F(\mathbf{A}, \Psi)$ の最小値として、式(3.39)は

$$f(\hat{\Psi}) = -\log(\lambda_{q+1}\lambda_{q+2}\dots\lambda_p) + (\lambda_{q+1} + \lambda_{q+2} + \dots + \lambda_p) - (p-q) \quad (3.43)$$

で示される。したがって、主題は上式を $\hat{\Psi}$ に関して最小化する母数の値を決めることになる。ここで $f(\hat{\Psi})$ の偏微分を必要とするが、与えられた一つの $\hat{\Psi}$ における $\partial f / \partial \Psi$ の値は、この $\hat{\Psi}$ のもとで $F(\mathbf{A}, \Psi)$ が最小となる \mathbf{A} で評価された $\partial F(\mathbf{A}, \Psi) / \partial \Psi$ の値と等しくなる。この性質を利用して

$$\frac{\partial f(\Psi)}{\partial \Psi} = \text{diag} [\Psi^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{A}' + \Psi - \mathbf{V})\Psi^{-1}] \quad (3.44)$$

が得られ、これをわかりやすく上の固有値と固有ベクトルと行列の要素で示すと

$$\frac{\partial f(\Psi)}{\partial \Psi_{ii}} = \left[\sum_{j=1}^q (\lambda_j - 1) l_{ij}^2 + 1 - \frac{v_{ii}}{\Psi_{ii}} \right], \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.45)$$

と書き直すことができる。

このようにして、最尤推定の数値計算には、 $f(\hat{\Psi})$ に関して Fletcher-Powell の方法を適用し、式(3.43)と(3.45)で反復収束の計算を行なう。しかし、こ

の手順の基礎としては部分的に固有値と固有ベクトルを算出しておくことが必要で、これには HOW 法を用いる。

また、このとき Ψ の反復計算の初期値としては、 V^{-1} の第 i 対角線要素を v^{ii} とおき

$$\Psi_{ii} = \left(1 - \frac{q}{2p}\right) / v^{ii} \quad (3.46)$$

を第 1 近似に用いるのが良いと提唱されている。

したがって、 t を反復計算の巡回番号 ($t=1, 2, 3, \dots$) として、このアルゴリズムは、まず $E^{(1)} \equiv I_p$ とおき、初期値 $\hat{\Psi}^{(1)}$ を式 (3.46) でつくり、 $\hat{\Psi}^{(t)-1/2} V \hat{\Psi}^{(t)-1/2}$ の固有値と固有ベクトルから A と L を求める。次いで式 (3.43) と (3.45) に値を入れ $f(\hat{\Psi}^{(t)})$ と $\partial f / \partial \Psi_{ii} \equiv g_i^{(t)}$, ($i=1, 2, \dots, p$), を求める。ここで新しい $\hat{\Psi}$ を求めるために、 $g^{(t)} \equiv (g_1^{(t)}, g_2^{(t)}, \dots, g_p^{(t)})$ として方向係数 $d^{(t)} \equiv -E^{(t)} g^{(t)}$ および $\hat{\Psi}^{(t)} I$ からの距離 $\alpha > 0$ により $\hat{\Psi}_{\alpha}^{(t+1)} I \equiv \hat{\Psi}^{(t)} I + \alpha d^{(t)}$ をつくる。同時に、 $f(\hat{\Psi}_{\alpha}^{(t+1)})$ と α 値における f の勾配 $s_{\alpha} = d^{(t)'} g_{\alpha}^{(t)}$ を示しておく。ここに $g_{\alpha}^{(t)}$ は $\hat{\Psi}_{\alpha}^{(t+1)} I$ での α の変化に関する方向ベクトルで、とくに $\alpha=0$ では $s_0^{(t)} = d^{(t)'} g^{(t)}$ とする。このとき $g^{(t)} = 0$ ならそのときの $\Psi^{(t)}$ が f を最小にするもので、しからざれば f はある $\alpha > 0$ で最小になっている。この α の動かし方は、 $\alpha=0$ と試行の α_1 により、 $s_{\alpha_1} > 0$ なら $(0, \alpha_1)$ で 3 次曲線的に補間し、 $s_{\alpha_1} < 0$ なら $s_{\alpha} = 0$ のところに線形補外する。

また $t=2$ 以後の反復計算では、 $e_1^{(t)} \equiv \alpha d^{(t)}$ および $e_2^{(t)} \equiv g^{(t+1)} - g^{(t)}$ として、

$$E^{(t+1)} \equiv E^{(t)} + \frac{e_1^{(t)} e_1^{(t)'}}{e_1^{(t)'} e_2^{(t)}} - \frac{e_2^{(t)} e_2^{(t)'}}{e_2^{(t)'} E^{(t)} e_2^{(t)}} \quad (3.47)$$

によって対称定正值行列 $E^{(t)}$ を更新していく。この $E^{(t)}$ は終局的に f の最小値において行列 $(\partial^2 f / \partial \Psi_{ii} \partial \Psi_{jj})$ に収束することが知れており、この $2/n$ 倍が推定された $\hat{\Psi}_{ii}$ の分散共分散行列を示している。

このような手順のなかで反復計算の停止規則は種々考えられる。その中で実際上最も良いのは、式 (3.45) の 1 次導関数の値があらかじめ定められた十分に小さな値よりも小さくなったときに反復を打ち切ることと考える。こうして、行列 $\hat{\Psi}^{(1)}, \hat{\Psi}^{(2)}, \dots$ の系列に対応して $f(\hat{\Psi}^{(t+1)}) < f(\hat{\Psi}^{(t)})$ のように得られる。こうして収束し最終的に得られた $\hat{\Psi}$ に対応し、やはり $A^{(t)}$ の収束した

行列として \hat{A} が得られる。

このような数値計算の研究はなお続いており、1969年には R. I. Jennrich と S. M. Robinson がニュートン・ラフソン法 (Newton-Raphson method) に基づく解法を提案している。すなわち、これまでの反復収束が1次導関数による接近であったのを2次導関数までを用いた接近によって収束の改良を意図したものである。彼らは $\hat{\mu} = \bar{x}$ として関数関係 $\Sigma = AA' + \Psi$ のもとで対数尤度関数 $n\phi$ を A と Ψ の関数として ϕ の最大化を考える。このために $d\Sigma$ と $d\phi$ を dA と $d\Psi$ に対応する微分要素として

$$d\phi = \text{tr.} [\Sigma^{-1}(V - \Sigma)\Sigma^{-1}d\Sigma] \quad (3.48)$$

$$d\Sigma = dA \cdot A' + AdA' + 2\Psi^{1/2}d\Psi^{1/2} \quad (3.49)$$

を得、ここですべての dA と $d\Psi^{1/2}$ に関して $d\phi$ がゼロとなるときは、次の2式が成立するときのみである。

$$\Sigma^{-1}(V - \Sigma)\Sigma^{-1}A = 0 \quad (3.50)$$

$$\text{diag} [\Sigma^{-1}(V - \Sigma)\Sigma^{-1}\Psi^{1/2}] = 0 \quad (3.51)$$

これらの式はそれぞれ直ちに

$$[(V - \Psi)V^{-1} - AA'V^{-1}]A = 0 \quad (3.52)$$

$$\Psi = \text{diag} [V - AA'] \quad (3.53)$$

と書き換えられ、第1式より $(V - \Psi)V^{-1}$ の大きいほうから q 個の固有値 γ_i に対応する固有ベクトル l_i を $l_i'Al_i = \gamma_i$ と規準化すると、 l_i を列とする行列 L は第1式を満足する A となることが知れる。したがって、第1式を満足する条件下で、提唱するニュートン・ラフソン法は第2式を解く反復収束法として適用される。すなわち、 A と Ψ の $(q+1)p$ 個の全要素を同時に算定するのではなく、ただ Ψ における p 個の要素を求めるのである。このため ϕ' と ϕ'' をそれぞれ Ψ に関する ϕ の1次および2次の導関数とすると、 $\phi' = 0$ の解を求めるニュートン・ラフソン法は、 $\hat{\Psi}^{(u+1)} = \hat{\Psi}^{(u)} - (\phi'')^{-1}\phi'$ により $\hat{\Psi}$ を逐次更新し収束させる方法になる。

次に、検証的な場合の考え方と計算について簡単にふれておこう。上の探索的な場合には最尤推定の後に種々の直交や斜交の回転を行なって、因子の解釈について探索的に考察するのであるが、検証的な場合には、実質科学上の事前

の知識により因子負荷行列のうで構造模型をあらかじめ仮定し行列の要素を部分的に固定してしまうので、最尤推定の後に因子軸の回転を行なう余地はほとんどない。したがって、最尤推定には観測特性の分散共分散行列の構造として、斜交因子の場合も含めて、 $\Sigma = A\Phi A' + \Psi$ とおき、そのうちのいくつかの定められた位置の要素の値をあらかじめ決めて、その残りの要素に関して推定を行なうことになる。

通常よく想定される構造は3とおりと考えられる。第1の型は A の各列で少なくとも $q-1$ 個の指定された要素はゼロで Φ の少なくとも対角線要素は1であるような斜交因子に関するもの、第2の型としては A の少なくとも $q(q-1)/2$ 個の要素はゼロで Φ が q 次の単位行列であるような直交因子に関するものである。したがって第3の型として、いくつかの因子間には相関がありその他の因子または因子群とは独立であるような斜交と直交の因子の混合した構造も仮定できる。このように検証的な場合にも、構造の定め方については一般的に広範な柔軟性をもって決めてよい。

いま、 A , Φ および Ψ の要素の総数は $(2p+q)(q+1)/2$ 個であるが、それぞれの中であらかじめ値が与えられた要素の数を n_A , n_Φ および n_Ψ とし、 $k = n_A + n_\Phi + n_\Psi$ とおく。このとき A , Φ および Ψ が一意的に推定される必要条件は、 $n_A + n_\Phi \geq q^2$ であることが知られている。この十分条件は与えられた値の要素の位置にも関係するので複雑でむずかしい。そして、仮定された構造に関して、推定する要素の数 $(2p+q)(q+1)/2 - k$ が $p(p+1)/2$ より小さくなければ意味をもたない。すなわち、不等式 $p^2 + k > (p+q)(p+q+1)/2$ がなりたたねばならない。

さて、推定すべき要素に関し $\Sigma = A\Phi A' + \Psi$ において、ここでも尤度関数を最大にする方法と式 (3.38) の関数 F を最小にする方法が考えられている。まえの最尤法は、1963年の Lawley と Maxwell 以来多くの報告があり、いずれも推定すべき母数で1次導関数をゼロとおき、この連立方程式を種々の数値計算法により反復収束を行なっている。しかし、この方向の一連の方法は、上記の探索的なときと同じように、収束性や収束速度のうで不都合なことが起こりうる。

したがって、Jöreskog は上記と等価な F の最小化をはかり、1958年の

Lawley と同じように、次の 1 次導関数

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}} = 2[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{V})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Phi}} = 2\mathbf{A}'[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{V})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}]\mathbf{A} \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Psi}} = \text{diag} [\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma} - \mathbf{V})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}] \quad (3.56)$$

を連立して解く種々の数値解法を検討し、Finkel 法を提唱した。ここに F は非負で \mathbf{V} が正確に $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Psi}$ になっているときのみゼロ値をとり、また \mathbf{A} のゼロ要素に対応する式 (3.54) の要素と式 (3.55) の対角線要素についてはいずれもゼロである。

しかし、この方法もなお収束性に不満足なときがあり、1968 年の Jöreskog と Lawley ではやはり Fletcher-Powell 法を提唱するに至っている。そして、この場合には、さきの探索的な場合と異なって 2 段階に分けて最小をはかる手順がとれず、推定すべき要素のすべてについて同時に F を最小化する必要がある。このためには \mathbf{A} , $\boldsymbol{\Phi}$ および $\boldsymbol{\Psi}$ の初期値が非常に大事な役割をなし、まず急勾配下降法により解を得て F を最小化する第 1 近似とし、次いでこの解を初期値として Fletcher-Powell 法にかける。

このようにして、あらかじめ与えられなかった要素の最尤推定値が得られ、 F を最小化していることを確認したのちに、与えられた要素を含めて $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Psi}$ の構造に関する仮説検定ができる。すなわち、 F の最小値を $n - (2p+11)/6$ 倍すると、帰無仮説のもとでは、自由度 $p^2 - (p+q)(p+q+1)/2 + k$ の χ^2 分布するから、これにより有意性の χ^2 検定が行なえることになる。なお、本節の結びとして、最尤推定量の数値計算法は今後にも開発が続けられる余地を多く残していることを指摘しておく。

3.4 共通因子数に関する仮説検定

観測値の数 n が比較的大きいとき、共通因子数が q であるという仮説 H_0 の検定を考えよう。

もし、仮説 H_0 が真であれば、式 (3.32) と式 (3.33) から得られる $\hat{\mathbf{A}}$ と $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$

を式 (3.29) に当てはめた $\hat{\Sigma}$ は Σ の最良推定量であり、対数尤度関数の式 (3.30) は

$$L_0 = -(n-1)\{\log_e |\hat{\Sigma}| + \text{tr}(\mathbf{V}\hat{\Sigma}^{-1})\}/2 \quad (3.57)$$

となる。他方、 \mathbf{x} の正規性以外に Σ について何も仮説をたてない場合の対数尤度関数は

$$L_1 = -(n-1)\{\log_e |\hat{\Sigma}| + p\}/2 \quad (3.58)$$

である。ここで尤度比法によって大標本論的に $2(L_1 - L_0)$ は、 H_0 の下で自由度 ϕ の χ^2 分布に従う。すなわち

$$\chi_0^2 = (n-1)\{\log_e (|\hat{\Sigma}|/|\mathbf{V}|) + \text{tr}(\mathbf{V}\hat{\Sigma}^{-1}) - p\} \quad (3.59)$$

は χ_{ϕ}^2 分布に従い、自由度 ϕ は $\phi = \{(p-q)^2 - (p+q)\}/2$ となる。その後、バートレット (Bartlett) によると、式 (3.59) の $(n-1)$ を次式の n'

$$n' = n - \frac{1}{6}(2p+5) - \frac{2}{3}q \quad (3.60)$$

で置き換えたほうが、よりいっそう χ^2 分布に近接していることが提唱されている。

もし、 $\hat{\Sigma}$ が正確に算出されているなら、

$$\text{tr}(\mathbf{V}\hat{\Sigma}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{I}_p) = p$$

であるので、式 (3.59) は

$$\chi_0^2 = n' \log_e (|\hat{\Sigma}|/|\mathbf{V}|) \quad (3.61)$$

と簡単な形に置き換えられる。

これまで p 変量観測値の分散共分散行列から、 p より小さい q 個の共通内因因子を含む構造模型について、因子負荷行列を最小 2 乗推定法または最尤法によって推定する考え方および方法について記述してきた。

ここで、適用上の注意の一つ付記しておこう。上記のように、因子負荷行列を推定するには、あらかじめ共通因子数 q を規定している。そしてこの q についての Bartlett の近似的 χ^2 検定法もすでに記述した。しかし、この際の χ^2 検定は一般に検出力が弱く、たとえば、共通因子が q 個でも、 $q+1$ 個でも、いずれも支障のないような検定結果がしばしば得られる。この際、因子数を少

しおおめに $q+\alpha$ 個 (α : 正整数) だけ推定し安全を期したほうがよいという考え方がある。

しかし、この考えは少し早計であると思われる。すなわち、最小2乗推定法にしろ、最尤推定法にしろ、いずれも未知母数の同時推定を行なっているわけで、 q 個として $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_q$ を求めることと、 $q+\alpha$ 個として $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{q+\alpha}$ を求めることはなんら関係がない。すなわち、 q 個の \hat{a}_i が前の \hat{a}_i と一致するとか、同質の因子を示すとかの保証は何もなく、 $q+\alpha$ 個が内容的に前の q 個を必ずしも含まない。事実、内在する共通因子の解釈づけを互いに全く異質的な立場から行なって、共通しない異なった結果が予想される。このような事情でも、なお、 q をいくらか動かして、毎回共通して出現するような因子が信頼のおける共通因子であるとする便宜的な考えの主張もある。

このような共通因子数の決定には、成因分析法における標本固有値の大きさに関し、推測過程論的な立場から有意性の判定常数 λ を定め、この λ と比較して小さいいくつかの観測固有値をゼロとみなすような推測方法の検討が望まれる。さらに、因子分析法においては、Bartlett の χ^2 検定にまさるような理論的展開が待たれている。

実際的には、 χ^2 検定で棄却されない因子数について、いくとおりか因子負荷行列を算出し、実質科学分野の専門家とともに内容的な検討を経て因子数 q を定めるとよい。

3.5 計算プログラム

因子負荷行列の推定と共通因子数の検定 因子数を指定して、与えられた相関行列から Lawley による因子負荷行列および残差行列の最尤推定を行なう。同時に、Bartlett による因子数に関する漸近的な χ^2 検定も行なう。この最尤推定は反復収束をとるために、初期の近似的な因子負荷行列を必要とする。これには通常、成因分析の結果を利用するとよい。なお、この最尤推定による因子負荷行列には回転による不定性があり、引き続き各種の回転法を適用することになる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
IP	変数の数	A(I, J)	標本相関行列, のちに残差行列
IK	共通因子の数	XL(K, I)	各回の因子負荷行列とその最終回の結果
IMAX	収束のための反復回数の限度	ICYC	巡回回数
N	標本の大きさ(数)	U(I)	共有性
IO	ゼロか1ならば最終結果のみ, -1ならば巡回ごとの結果も示す	V(I)	誤差分散
CONV	行列要素の置換基準となるごく小さな値, たとえば 1×10^{-5}	CPRE	各巡回前の基準値
A(I, J)	標本相関行列	CNEW	各巡回後の基準値
XL(K, I)	初期(近似)の因子負荷行列	CHI	共通因子数の検定のための χ^2 値
		IDF	上記の自由度

```

C      FACTOR ANALYSIS (MULTIPLE FACTOR SOLUTION)
C      WITH TESTING NUMBER OF COMMON FACTORS
C      BY MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD
C      AND CHI-SQUARE TEST
C
C
C      IP --- NO. OF VARIABLES
C      IK --- SPECIFIED NO. OF COMMON FACTORS
C      IMAX --- MAX. NO. OF ITERATIVE CYCLES
C
C      N --- NO. OF SAMPLES
C      IO --- -1, TO OUTPUT EVERY INTERMEDIATE RESULTS
C      --- 0, TO OUTPUT FINAL RESULTS ONLY
C      --- 1, TO OUTPUT FINAL RESULTS ONLY
C      CONV --- DIFFERENCE OF CRITERION TO SEE CONVERGENCE
C      A --- A SAMPLE CORRELATION MATRIX (P*P)
C      XL --- A PRELIMINARY LOADING MATRIX (Q*P),
C      READ ROW-WISE, Q IS N.G.T. 11.
C
C      SUBROUTINE MATINV AND DETERM ARE REQUIRED
C
C
C      DIMENSION A(30,30),XL(10,30),V(30),Y(31,31),XJ(30),U(30)
C      COMMON Y,A
1  READ (40,100) IP,IK,IMAX,N,IO,CONV
  WRITE (50,200)
  WRITE (50,201) IP,IK,IMAX,N,IO,CONV
  DO 2 I=1,IP
  READ (40,101) (A(I,J),J=1,IP)
2  WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,IP)
  WRITE (50,203)
  DO 3 K=1,IK
  READ (40,101) (XL(K,I),I=1,IP)
3  WRITE (50,202) K,(XL(K,I),I=1,IP)
  ICYC=0
  CPRE=0.0
  CNEW=0.0
4  DO 6 I=1,IP
  U(I)=0.0
  DO 5 K=1,IK

```

```

5  U(I)=U(I)+XL(K,I)**2
   V(I)=A(I,I)-U(I)
6  CNEW=CNEW+V(I)
   ICYC=ICYC+1
   IF (ABS(CPRE-CNEW)-CONV) 22,22,7
7  IF (IO) 8,12,12
8  I1K=ICYC+ICYC/ABS(IO)*IO
   IF (I1K) 12,9,12
9  WRITE (50,204) ICYC
   DO 10 I=1,IP

10 WRITE (50,205) I,U(I),V(I)
   TEMP=CPRE-CNEW
   WRITE (50,206) CPRE,CNEW,TEMP
   DO 11 I=1,IP
11 WRITE (50,207) I,(XL(K,I),K=1,IK)
12 CPRE=CNEW
   IF (ICYC-IMAX) 13,13,22
13 DO 14 K=1,IK
   DO 14 I=1,IP
   Y(K,I)=0.0

   DO 14 J=1,IP
14 Y(K,I)=Y(K,I)+XL(K,J)*A(J,I)/V(J)
   DO 21 I=1,IK
   IF (I-1) 18,18,15
15 KK=I-1
   DO 16 K=1,KK
   XJ(K)=0.0
   DO 16 L=1,IP
16 XJ(K)=XJ(K)+XL(I,L)*XL(K,L)/V(L)
   DO 17 L=1,IP

   DO 17 K=1,KK
17 Y(I,L)=Y(I,L)-XJ(K)*XL(K,L)
18 H=0.0
   DO 19 L=1,IP
   U(L)=Y(I,L)-XL(I,L)
19 H=H+XL(I,L)*U(L)/V(L)
   DO 20 L=1,IP
20 XL(I,L)=U(L)/SQRT(H)
21 CONTINUE
   GO TO 4

22 WRITE (50,208)
   DO 23 I=1,IP
   U(I)=A(I,I)-V(I)
23 WRITE (50,205) I,U(I)
   WRITE (50,209)
   DO 24 I=1,IP
24 WRITE (50,207) I,(XL(K,I),K=1,IK)
   WRITE (50,210)
   DO 26 I=1,IP
   DO 26 J=1,IP

   Y(I,J)=0.0
   DO 25 L=1,IK
25 Y(I,J)=Y(I,J)+XL(L,I)*XL(L,J)
26 A(I,J)=A(I,J)-Y(I,J)
   DO 27 I=1,IP
27 WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,IP)
   DO 29 I=1,IP
   DO 28 J=1,IP
28 A(I,J)=A(I,J)+Y(I,J)
29 Y(I,I)=Y(I,I)+V(I)

```

```

CALL MATINV (IP)
TR=0.0
DO 30 I=1,IP
DO 30 K=1,IP
30 TR=TR+A(I,K)*Y(K,I)
DO 32 I=1,IP
DO 31 J=1,IP
Y(I,J)=0.0
DO 31 K=1,IK
31 Y(I,J)=Y(I,J)+XL(K,I)*XL(K,J)
32 Y(I,I)=Y(I,I)+V(I)
CALL DETERM (IP,DET1)
DO 33 I=1,IP
DO 33 J=1,IP
33 A(I,J)=Y(I,J)
CALL DETERM (IP,DET2)
P=IP
XK=IK
XN=N-1
XN*XN=(2.0*P+5.0+4.0*XK)/6.0

CHI=XN*(ALOG(DET2/DET1)+TR-P)
IDF=0.5*((P-XK)**2-(P+XK)+1.0)
WRITE (50,211)
WRITE (50,212) N,IP,IK,IDF,CHI
GO TO 1
100 FORMAT (5I3,F12.5)
101 FORMAT (12(F5.4,1X))
200 FORMAT (15X,48HFACTOR ANALYSIS BY THE MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD//)
201 FORMAT (//1X,18HDIM. OF COR-MATRIX,10X,15//1X,18HNO. OF COM-FACTOR
1S,9X,16//1X,25HMAX. NO. FOR ITERATION,3X,15//1X,14HNO. OF SAMPL
2ES,14X,15//1X,23HINTERMEDIATE I/O-SPEC. ,5X,15//1X,21HCRITERION TO
3 CONVERGE,8X,E12.5//1X,33HSAMPLE CORRELATION MATRIX //)
202 FORMAT (/14.5(1X,E12.4)/(4X,5(1X,E12.4)))
203 FORMAT (//1X,26HPRELIMINARY LOADING MATRIX//)
204 FORMAT (//1X,5HCYCLE,5X,15//1X,36HAPPROX. COMMUNALITIES VARIA
1NCES//)
205 FORMAT (4X,14,4X,E12.5,4X,E12.5)
206 FORMAT (//1X,45HPRE. CRITFRION NEW CRITFRION DIFFERENCES//5X,
1E12.5,5X,E12.5,5X,E12.5//1X,27HAPPROXIMATF FACTOR LOADINGS//)
207 FORMAT (6X,13,5(2X,F7.4),/)
208 FORMAT (//1X,18HTHE LAST SOLUTIONS//1X,25H( 1) FINAL COMMUNALITI
1ES//)
209. FORMAT (//1X,26H( 2) FINAL FACTOR LOADING//)
210 FORMAT (//1X,41H( 3) RESIDUAL CORRELATION MATRIX //)
211 FORMAT (/1X,66HOBSERVED VALUE OF CHI-SQUARE TO TEST THE NUMBER OF
1 COMMON FACTORS//)
212 FORMAT (/15H NUMBER OF DATA,119/20H RANK OF COR. MATRIX,114/27H NO
1. OF COM. FACTORS TESTED,17/20H DEGREES OF FREEDOM ,114/21H OBSERV
2ED CHI-SQUARE ,F13,4//)
STOP
END

```

[付] サブルーティン 1 (逆行列の算出)

SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
 = CROUT METHOD =

```

SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(31,31),B(10),C(10)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
A(I,I)=1.0
DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
DO 3 J=1,N
DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
RETURN

END

```

[付] サブルーティン 2 (行列式の求値)

```

C
C
C
SUBROUTINE OF DETERMINANT

SUBROUTINE DETERM (K,T)
DIMENSION B(31,31),A(30,30)
COMMON B,A
T=L.0
TT=0.0
KK=K-1
DO 7 I=1,KK

IF(A(I,I)) 5,1,5
1 DO 2 J=I,K
IF(A(I,J)) 3,2,3
2 CONTINUE
T=0.0
GO TO 8
3 DO 4 L=1,K
TT=A(L,J)
A(L,J)=A(L,I)
4 A(L,I)=TT

T=-T
5 T=A(I,I)*T
U=A(I,I)
DO 6 J=I,K
6 A(I,J)=A(I,J)/U
DO 7 J=I,KK
TT=A(J+1,I)
DO 7 L=I,K
7 A(J+1,L)=A(J+1,L)-A(I,L)*TT
T=A(K,K)*T

8 RETURN
END

```

4 因子軸の変換とその意義

さて前章までで、因子負荷行列を最尤法の操作により得たわけであるが、狭義の因子分析法は通常二つの過程を経て行なわれる。上記のように参考軸 (reference axis) A または A_1 を求める段階、次いで得られた A または A_1 を科学分野で具体的な解釈のつけやすい構造模型 G に変換する段階である。すなわち、第2の段階は $G=AT$ という因子軸の回転行列 T を A に施すことである。

このことは、次の数学的根拠に基づいている。いま、 x_j の母分散共分散行列 Σ は、一般に

$$\Sigma = A_1\Phi A_1' + \Psi \quad (4.1)$$

と示されるが、 A_1 と Φ の決め方には、基本的に一意に定まらないという性格がある。すなわち、 $p \times p$ 行列 $A_1\Phi A_1'$ が一つの因子空間の中で定められても、基線のとり方はどのようにも考えうる。いま、 q 次ベクトル g が一つの基線であるとき、 q 次正則行列 T によって Tg を新たな一つの基線として考えると、 $A_1g = A_1T^{-1}Tg$ であるから $A_1T^{-1} \equiv A_1^*$ かつ $T\Phi T' \equiv \Phi^*$ とおくと、

$$A_1\Phi A_1' = A_1^*\Phi^* A_1^{*'} \quad (4.2)$$

となる。すなわち、基線をどのようにとっても $A_1\Phi A_1'$ には変わりなく、ただ A_1 と g の決め方がいくらでもあるということになる。これを回転に関する因子軸の不定性 (indeterminacy) とよんでいる。

このような回転の必要性は、1930年代から1940年代にかけての多くの論文で検討されてきた。すなわち、さきに算出した結果が、そのままでは実質科学分野の最終結果といえず、よりいっそう実質科学上の構造模型に近接した因子

軸に変換する必要が指摘された。このため回転の不定性を利用し、なんらかの好ましい観点から客観的な基準を定式化し、前章の結果をこの基準に関し最も満足するように回転することを考える。

さて、前章で得た因子負荷行列の示す共通因子は、すべて全般因子 (general factor) に相当している。しかし、ある場合には観測特性の全体に共通する内因因子を考察するのではなく、むしろ各観測特性の特徴となる部分因子 (group factor) を積極的に探索する機会が多い。

このようにして、望ましい因子負荷行列の形としては、Thurstone の提唱した簡素構造 (simple structure) に関する三つの原則が最初の具体的な基準であった。これは 1935 年以来多くの人々によって考察されてきたが、実に 20 年間にわたる重要な考察であった。彼の提唱した三つの原則は、 $G=AT$ なる回転行列 T に関し、 G が次の項目を満たすことである。

- (i) G の各行は、少なくとも一つのゼロを要素として含む。
- (ii) 共通因子の数を q とすると、各列は少なくとも q 個のゼロを要素として含む。
- (iii') G の任意の 2 列において、少なくとも q 個の観測特性がいずれか一方の列にのみ含まれ、他方の列には含まれない。

その後、彼は上の (iii') の代わりに次の項目を加えて、合計四つの条件を構造の簡素化という概念の基準にしている。

- (iii) G の任意の 2 列において、一方の列にのみ含まれ他方の列には含まれないような若干個の観測特性がある。
- (iv) 4 個以上の共通因子を有する場合、 G の任意の 2 列に関し、大半の観測特性は共有せず、ただ若干の観測特性のみを共有する。

さて、この構造の簡素化の原則 (simple structure principle) に基づき、いかにして客観的に明確な因子負荷行列を導き出すかがその後の検討問題となった。さらに Ferguson はこの簡素構造の原則を因子節約 (parsimony) の原則に基づく具体的な一表現として解釈できるよう整理し直している。すなわち、因子分析法では因子節約の原則が 2 とおりに適用され、第 1 は先述のように、観測変量数よりも少ない共通因子の数に関し、第 2 は回転問題についての上記 (i)~(iv) の概念を基礎としたものである。そして回転問題の処理については、

(i)~(iv) の簡素構造のための条件が数学的に操作可能な表現では説明されてなく、とくに各条件が総合的でも連続的でもなく断片的なために、総体として十分でないという弱点が指摘される。彼は回転問題における因子節約の原則を明確に規定し、次のようにただ一つの解を得るように整理した。

いま、1点で示されている一つの観測特性だけについていえば、2本の直交軸を回転して得る最も節約した表現とは、軸の1本がその観測特性点を通ることになる。このように考えていつもどちらかの軸が観測特性点に近接しているように座標軸を回転すると、1本の軸が点に近接するほど二つの座標の積はより小さくなることが知られる。このように、いくつかの共線の関係で表現される p 個の点の座標の積和の関数は、これらの点群すなわち観測特性群の表現として因子節約の測度に利用しうる。ここで Ferguson は座標の正と負の符号を考慮し、通常のような座標の単純な積和の代わりに、積の平方和を節約の測度として提唱した。すなわち、 p 個の観測特性の中の q 個の直交因子の場合、因子節約の測度は

$$\sum_{\substack{i,i'=1 \\ (i < i')}}^q \sum_{j=1}^p (a_{ij}a_{ji'})^2 \quad (4.3)$$

で示され、 p 個の点の座標に関する $q(q-1)/2$ 個の合計になっている。上の式(4.3)は、因子軸の回転について、その後全く独立に開発されたいくつかの解析的方法に密接な関連をもっている。

直交因子に関する一般的な回転問題について、 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ を初期の因子負荷行列、 $\mathbf{G}=(g_{ji})$ を最終の因子負荷行列、 $\mathbf{T}=(t_{ii'})$ を直交変換行列として、

$$\mathbf{G} = \mathbf{AT} \quad (4.4)$$

とする。このように \mathbf{A} が \mathbf{T} によって変換されたとき、任意の観測変量の共有性は直交変換によって不変で

$$\sum_{i=1}^q g_{ji}^2 = \sum_{i=1}^q a_{ji}^2 = h_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (4.5)$$

である。したがって、任意の観測変量の共有性の2乗も一定である。

$$\left(\sum_{i=1}^q g_{ji}^2\right)^2 = \sum_{i=1}^q g_{ji}^4 + 2 \sum_{\substack{i,i'=1 \\ (i < i')}}^q g_{ij}^2 g_{ji'}^2 = (\text{一定}) \quad (4.6)$$

さらに、式 (4.6) を各 j について加えてもその総計は変わらない。すなわち

$$\sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^q g_{ji}^2 \right)^2 = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q g_{ji}^4 + 2 \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{i,i'=1 \\ (i < i')}}^q g_{ji}^2 g_{ji'}^2 = (\text{一定}) \quad (4.7)$$

ゆえに、上式右辺の第1項を大きくすれば第2項はその量だけ小さくなり、両項の関係は全く相対的なものとなる。また、このことはいくつかの回転法の間
の関係を示し、式 (4.7) の右辺のいずれかの項またはこれらの項の関数は、因子節約の具体的な数理的測度として使用できる。

事実、式 (4.3) で記述した意味の最大の因子節約は、式 (4.7) 右辺の第2項を最小にすることになる。また同時に

$$Q \equiv \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q g_{ji}^4 \quad (4.8)$$

とすると、因子構造に関する最大の因子節約は Q を最大にすることでもある。

さて、回転法には大別して直交回転と斜交回転とがある。このことは回転法の開発途上で変化した内因因子の性格に関する定義に基づいている。すなわち、内因因子が考察された当初、内因因子とは観測特性に内在する互いに独立な因子で、各因子軸はそれぞれ直交するものとして、普遍的にうなずかれていた。

しかし、その後次第に、内在する因子同志がまたなんらかの相関性を有していてもよいのではないかと考えられてきた。そして現在では、直交因子軸という制限条件をあらかじめ定めることにむしろ不自然な場合があり、諸種の基準 (criterion) で斜交回転を行なうことが多くなっている。もちろん、このことは直交因子軸の存在を否定するものではないから、もし斜交回転の結果として直交した因子軸があらわれれば、因子の解釈に好都合で喜ばしいことと思われる。

現在のおもだった回転法には、直交回転として Quartimax 法, Varimax 法, また斜交回転として Oblimax 法, Quartimin 法, Covarimin 法, Biquartimin 法, Oblimin 法, Kaiser-Dickman 法などの解析的方法があり、また因子数の非常に少ないときには、直交と斜交のいずれの回転についても直観によるグラフ法がある。

このように直交回転と斜交回転は、考えうる内因因子の性格によって展開さ

れてきたわけであるが、適用の場合にもし計算能力があれば、直交と斜交のいずれについても上の種々の解析的方法で実施し比較考察したほうがよい。そして当面する実質科学の分野で最適の因子抽出と解釈を行なうのが望ましい。ただし、後章の斜交回転で記述するように、因子パターン (factor pattern) と因子構造 (factor structure) とは、直交回転では一致するが斜交回転では異なることに注意を要する。

われわれの経験からいうと、人間の思考はかなり直交的な整理の仕方や見方で多く解釈を下しているようである。斜交回転の結果の吟味でも、おのずと直交的な解釈や因子の命名に陥りやすく、改めて考え直さねばならないようなことがある。また Varimax 法と Quartimax 法の結果は通常よく似ており、Covarimin 法は直交回転の結果に近く、Quartimin 法は因子軸間に少し強すぎる相関性を示しがちであることなど、文献に報じられていることと同様の体験を得ている。

5 直交回転法

直交回転法は、第3章で推定された q 個の共通因子が簡素構造の原則または因子節約の原則に基づき、しかも各因子が互いに独立であるような因子軸を設定するための方法である。そして、客観化された解析的方法が開発されたまた適当な高速計算機が利用できるまでは、むしろ簡素構造の原則に基づく主観的なグラフによる回転法が実施されてきた。

5.1 グラフによる直交回転法

この方法は、平面における一連の回転軸を組み立てることからなっている。各段階の回転角は、グラフの視察と簡素化構造に導く判断とによって定められる。いま G , A および T を式 (4.4) で定義し、 $\theta_{ii'}$ を初期の因子 i と最終結果の因子 i' のなす平面での回転角として、まず回転の性質と方法を考えておこう。

さて、簡単のため、因子がただ二つだけの場合について考える。このときの観測特性は、2本の参考軸による平面上の点で示され、座標が定められる。この軸をどのように回転してもこの共通因子空間で座標が変わるだけのことである。いま、初期の回転前の

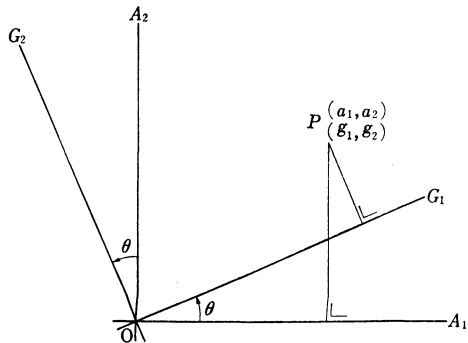


図 5.1 平面上の軸の回転

軸を A_1, A_2 , 回転後の軸を G_1, G_2 で, 各点 P_j ($j=1, 2, \dots, p$) を代表して P とし回転の関係式を示そう。この点 P の座標を, 図 5.1 で示すように, 回転の前と後をそれぞれ (a_1, a_2) および (g_1, g_2) とする。

このとき回転による各座標間の関係は,

$$g_1 = a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta, \quad g_2 = -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta \quad (5.1)$$

であり, 各点 j について式 (4.4) の形式によって次のように示される。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ \vdots & \vdots \\ g_{p1} & g_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \equiv \mathbf{AT} \quad (5.2)$$

ここに変換行列 \mathbf{T} の各列の要素の 2 乗和は 1, 列間の対応要素の積和は 0 で, 直交行列となっている。3 因子の場合には, \mathbf{T} の要素を t_{ki} とすると, 次式がなりたつ。

$$g_{ji} = \sum_{k=1}^3 t_{ki} a_{jk}, \quad (5.3)$$

ここに

$$\sum_{k=1}^3 t_{ki}^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^3 t_{ki} t_{ki'} = 0, \\ j = 1, 2, \dots, p \quad i, i' = 1, 2, 3 \quad i < i'$$

さて, これから説明するグラフ法は実用的で, また労をいとわなければ因子数はいくつの場合でも適用できる。すなわち, 上記の 2 因子の場合の直交回転を系統的に各因子の組について逐次回転を行ない, 最終的には, 各回転行列の積を \mathbf{T} とすればよい。

いま, 第 3 因子の場合を例にとると, 与えられた初期の因子負荷行列 \mathbf{A} において, まず軸 A_3 を固定して A_1 と A_2 に関し, この平面で 2 因子の場合と同様の直交回転を行なう。この結果の新しい軸を B_1 と B_2 とする。次に, B_1 と A_3 について, 同様の 2 因子直交回転を行ない新しい軸を G_1 と B_3 とする。次には, B_2 と B_3 について, 同様の回転を行ない, 新軸 G_2 と G_3 を得る。ここに G_1, G_2, G_3 は式 (5.3) のベクトル $[g_{j1}], [g_{j2}], [g_{j3}]$ で, いま求めようとする $\mathbf{AT}=\mathbf{G}$ なる \mathbf{G} の各列になっている。

この 2 因子ずつの回転の組は, 系統的に各参考軸を他のすべての参考軸とた

だ1回だけ組み合わせてつくる。3因子のときには、表5.1のような系統的な回転となる。

表 5.1

	軸の組	回転角	新軸	(固定している軸)
第1回め	$A_1 \quad A_2$	θ_{12}	$B_1 \quad B_2$	A_3
第2回め	$B_1 \quad A_3$	θ_{13}	$G_1 \quad B_3$	B_2
第3回め	$B_2 \quad B_3$	θ_{23}	$G_2 \quad G_3$	G_1

もし、 A が A_1, A_2, A_3, A_4 のように4本の軸からなり G を求める場合であれば、2因子ごとの回転の系統的な手順は表5.2のように示される。

表 5.2

	軸の組	回転角	新軸	(固定している直交軸)
第1回め	$A_1 \quad A_2$	θ_{12}	$B_1 \quad B_2$	$A_3 \quad A_4$
第2回め	$B_1 \quad A_3$	θ_{13}	$C_1 \quad B_3$	$B_2 \quad A_4$
第3回め	$C_1 \quad A_4$	θ_{14}	$G_1 \quad B_4$	$B_2 \quad B_3$
第4回め	$B_2 \quad B_3$	θ_{23}	$C_2 \quad C_3$	$G_1 \quad B_4$
第5回め	$C_2 \quad B_4$	θ_{24}	$G_2 \quad G_4$	$G_1 \quad B_3$
第6回め	$C_3 \quad C_4$	θ_{34}	$G_3 \quad G_4$	$G_1 \quad G_2$

したがって、系統的な2因子回転の数は、 q 個の共通因子のとき、 ${}_qC_2$ 回となる。

上の回転手順を変換行列のうえで、3因子の場合について整理してみよう。第1回めの回転は

$$B = AT_{12}$$

$$\text{ここに} \quad T_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{12} & -\sin \theta_{12} & 0 \\ \sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

で、 B は B_1, B_2, A_3 からなる。同様に、第2回めと第3回めの回転はそれぞれ次式で示される。

$$C = BT_{13}, \quad G = CT_{23} \quad (5.5)$$

$$\text{ここに} \quad T_{13} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{13} & 0 & -\sin \theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{13} & 0 & \cos \theta_{13} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{23} & -\sin \theta_{23} \\ 0 & \sin \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{bmatrix}$$

したがって、 $\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{T}_{13}\mathbf{T}_{23} = \mathbf{A}\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{13}\mathbf{T}_{23}$ で、また右辺の3つの回転行列の積は

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{13}\mathbf{T}_{23} \quad (5.6)$$

で示され、 \mathbf{T} の要素については次の関係が成立している。

$$\sum_{k=1}^q t_{ki}t_{k'i'} = \delta_{ii'}, \quad i, i' = 1, 2, \dots, q; i \leq i' \quad (5.7)$$

ここに $\delta_{ii'}$ はクロネッカー (Kronecker) のデルタで $i \neq i'$ ならゼロ値、 $i = i'$ なら +1 の値をとると定義している。

このような回転法は、任意の初期の負荷行列について行なってよい。手順は、とりあげられた2因子について縦軸と横軸をつくり、その平面上に各観測特性を示す点を記入する。通常、これらの点群は第1象限と第4象限にあるが、回転角 θ_{12} をおよそ -45° 程度まででほとんどの点の射影が正であるように、グラフの視察によって定める。次の段階でも、逐次各2因子の組み合わせについて、同様な主観的視察により $\theta_{13}, \theta_{14}, \dots, \theta_{23}, \theta_{24}, \dots, \theta_{34}, \dots$ を定めていく。

このグラフによる回転法は、視察による判断がむずかしいときに、回転角を定める人の主観によってかなりの差異を生ずる。しかし、このグラフ法は因子分析のパイオニアたちがその初期から行なってきた方法で、主としてセントロイド法や成因分析法の後の直交した参考軸の回転法として適用してきた。これらの場

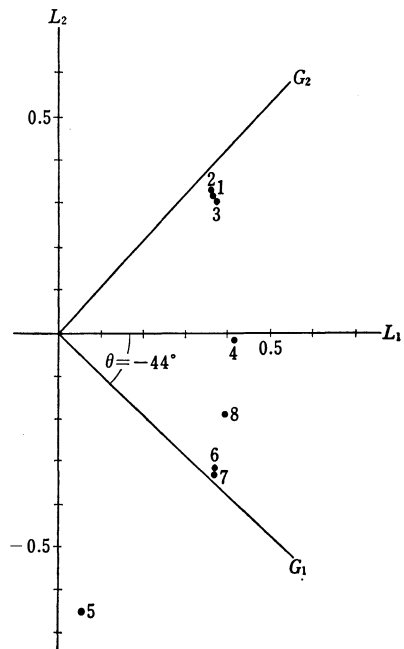


図 5.2 八つの観測特性(検証数値例)の場合のグラフによる直交回転

合に回転角を定めることは比較的容易で、上記の視察による勘案の方法がよく適合する。

ここで実施例として、表 2.3 における主要な 2 因子に関する軸 L_1 , L_2 の直交回転軸を図 5.2 に示す。このグラフより $\theta = -44^\circ$ が読み取られ、

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(-44^\circ) & -\sin(-44^\circ) \\ \sin(-44^\circ) & \cos(-44^\circ) \end{bmatrix}$$

を得る。この新しい直交軸を G_1 と G_2 とすると、表 2.1 の後に示した x_{ij} の構造模型と比較して、直ちに G_1 が β を G_2 が α を示していることが知れよう。

5.2 解析的方法による直交回転法

5.2.1 クァーティマックス法

因子節約 (parsimony) の原則が発表されるまえに、式 (4.8) の Q を最大にする解を客観的に求める方法が、Carroll, Neuhaus と Wrigley, Saunders らにより、それぞれ独立に研究されていた。

Neuhaus と Wrigley は、初期の因子負荷行列の行すなわち各観測特性に関し、因子負荷量の符号に関せず絶対値の大きな因子負荷量をより大きく、同時に小さな因子負荷量をより小さくするような変換行列を望ましいと考え、各因子負荷量の 2 乗値の間の変動を最大にすることを発案した。すなわち、 \mathbf{A} の要素の 2 乗値について、各行での分散を求め、その p 個の平均を直交回転の望ましい基準 (criterion) とした。そしてこの基準を最大にする直交変換 \mathbf{T} を提唱した。

この回転法は因子負荷量の 4 乗を含む最大化に関するもので、Burt はこれをクァーティマックス回転法 (Quartimax rotation) と名づけた。この特性は、各観測変量に関する解釈を容易にするような簡素化を行なうと要約できる。

式 (4.4) の記号で、初期の因子負荷行列 \mathbf{A} を直交回転行列 \mathbf{T} により新しい直交因子行列 \mathbf{G} に変換するとき、 \mathbf{G} の第 j 行の要素の 2 乗値の分散は

$$\sigma^2_{g_j^2} \equiv \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q (g_{ji}^2 - \bar{g}^2_{j\cdot})^2 \quad (5.8)$$

ここに
$$\bar{g}^2_{j\cdot} \equiv \sum_{i=1}^q g_{ji}^2 / q$$

であり、クォーティマックス法の基準は、上式の $j=1, 2, \dots, p$ に関する平均として、次式

$$\sigma^2_{g_c^2} \equiv \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \sigma^2_{g_j^2} = \frac{1}{pq} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (g_{ji}^2 - \bar{g}^2_{j\cdot})^2 \quad (5.9)$$

で示される。

上の基準は、次式を基準とした回転を考えても同じことである。

$$\sigma^2_{g^2} \equiv \frac{1}{pq} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (g_{ji}^2 - \bar{g}^2_{\cdot\cdot})^2 \quad (5.10)$$

ここに

$$\bar{g}^2_{\cdot\cdot} \equiv \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q g_{ji}^2 / pq$$

すなわち、式 (5.9) と (5.10) は、それぞれ次のように変形される。

$$\begin{aligned} \sigma^2_{g_c^2} &= \frac{1}{pq} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (g_{ji}^2 - \bar{g}^2_{j\cdot})^2 = \frac{1}{pq} \sum_i \left\{ \sum_j g_{ji}^4 - q(\bar{g}^2_{j\cdot})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{pq} \left\{ \sum_j \sum_i g_{ji}^4 - \frac{\sum_i (\sum_j g_{ji}^2)^2}{q} \right\} \\ \sigma^2_{g^2} &= \frac{1}{pq} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q (g_{ji}^2 - \bar{g}^2_{\cdot\cdot})^2 = \frac{1}{pq} \sum_j \left\{ \sum_i g_{ji}^4 - q(\bar{g}^2_{\cdot\cdot})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{pq} \left\{ \sum_j \sum_i g_{ji}^4 - \frac{(\sum_j \sum_i g_{ji}^2)^2}{pq} \right\} \end{aligned}$$

ここで、式 (4.5) に基づき式 (4.6) および (4.7) が成立しているから、上の二つの式の右辺第2項はそれぞれ一定の値 c_1, c_2 で

$$\begin{aligned} \sigma^2_{g_c^2} &= \frac{1}{pq} \left\{ \sum_j \sum_i g_{ji}^4 - \frac{c_1}{q} \right\}, \\ \sigma^2_{g^2} &= \frac{1}{pq} \left\{ \sum_j \sum_i g_{ji}^4 - \frac{c_2}{pq} \right\} \end{aligned}$$

で示される。したがって、 $\sigma^2_{g_c^2}$ を最大ならしめる変換行列 \mathbf{T} は、また $\sigma^2_{g^2}$ を最大ならしめるものであり、本質的に $\sum_j \sum_i g_{ji}^4$ を最大ならしめる行列 \mathbf{T} を求めているにすぎない。さらに式 (5.10) は

$$M \equiv \frac{1}{pq} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q g_{ji}^4 - (\bar{g}^2_{\cdot\cdot})^2 \quad (5.11)$$

と変形され、 \bar{g}^2 は式 (4.5) により任意の直交変換で一定であるから、このクォーティマックス回転法は

$$Q \equiv \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q g_{ji}^4 \quad (5.12)$$

を最大にすることにほかならない。

Carroll は簡素構造の原則の (iii) と (iv) に注目し、初期の因子負荷行列の列の内積のようなものを考え、

$$N \equiv \sum_{j=1}^p \sum_{i < i'=1}^q g_{ji}^2 g_{ji'}^2 \quad (5.13)$$

を回転の基準として提案した。これは直交回転の場合に Ferguson の因子節約の測度と同じもので、式 (5.13) の N を最小にすることは、式 (4.7) によって式 (5.11) の M を最大にすることと同等の基準になっている。あるいは、式 (5.13) の N を最小にすることは、直交回転の場合、式 (5.12) の Q を最大にすることと同等である。しかし、Carroll の基準 N は、直交回転の場合に限らず、斜交回転の場合にも一般的に利用される。

また別の観点から、Saunders は、簡素構造への回転で中程度の大きさの因子負荷要素を犠牲にし、小さい因子負荷要素と大きい因子負荷要素の数を最大にすることによって客観化しようと考えた。彼は因子負荷行列の任意の列の符号を変えることが、各観測変量を中心として簡素構造を考えるときには適切でないとし、もとの行列とすべての要素の符号を変えた行列と 2 様のものを同時に考慮した因子負荷量の二重の分布 (the “doubled” distribution of factor loadings) を想定した。そしてこの二重の分布の尖度 (kurtosis) を回転の基準とし、これを最大化することが二重の分布の中央部 (ゼロに近い因子負荷) と端のほう (絶対値の大きいほうの因子負荷) の頻度を相対的に増加すると提唱した。二重の分布は完全に対称で平均値はゼロであるので、基準とする尖度は

$$K \equiv \frac{\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q g_{ji}^4}{\left(\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q g_{ji}^2 \right)^2} \quad (5.14)$$

で示される。しかし、上式 K の分母は、式 (4.5) によって、直交変換の下で一

定である。したがって、Saunders の基準 K の効果は分子のみにかかっており、これまでの M, N, Q と同じように本質的には因子負荷量の 4 乗の和を最大ならしめるものである。

さて任意の観測特性 x_j に関し、因子 i と i' の平面における角 $\varphi_{ii'}$ の直交変換は、

$$\begin{aligned} g_{ji} &= a_{ji} \cos \varphi_{ii'} + a_{ji'} \sin \varphi_{ii'} \\ g_{ji'} &= -a_{ji} \sin \varphi_{ii'} + a_{ji'} \cos \varphi_{ii'} \end{aligned} \tag{5.15}$$

であり、本項で基本的な基準 Q についてのこのような変換の効果は、もちろん $\varphi_{ii'}$ の関数で、

$$Q_{ii'}(\varphi_{ii'}) = \sum_{j=1}^p (g_{ji}^4 + g_{ji'}^4) \tag{5.16}$$

となる。したがって、任意の因子の対 (i, i') について $Q_{ii'}$ を最大ならしめる角 $\varphi_{ii'}$ を求めることが目的となる。

このときの変換行列を $T_{ii'}$ とすると、 $T_{ii'}$ は式 (5.4) または (5.5) の一般型として

$$T_{ii'} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} & & (i) & & (i') & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ (i) & 0 & \cos \varphi_{ii'} & \cdots & -\sin \varphi_{ii'} & \cdots & 0 \\ & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ (i') & 0 & \sin \varphi_{ii'} & \cdots & \cos \varphi_{ii'} & \cdots & 0 \\ & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \hline \end{array} \right] \tag{5.17}$$

で示され、 A を G に変換する行列 T は因子対のあらゆる組み合わせの変換行列の全部の積として、式 (5.6) を一般化して得られる。すなわち

$$G = AT = AT_{12}T_{13}\cdots T_{23}T_{24}\cdots T_{ii'}\cdots T_{(q-1),q} \tag{5.18}$$

が得られる。ここに $i=1, 2, \dots, (q-1)$ で、 $i'=i+1, i+2, \dots, q$ となる。

このような (i, i') の組み合わせは $q(q-1)/2$ 個あり、これを 1 巡回 (cycle) という。このような巡回を逐次繰り返すごとに、式 (5.12) の Q の値が前回よ

りも大きくなり、遂にはほとんど一定の大きな値に到達してくる。理論的に、因子負荷量の4乗の和は p を決してこえないので、十分に巡回すれば必ず収束するはずである。

さて、 $Q_{ii'}$ を最大にする角 $\varphi_{ii'}$ の決め方、すなわち $T_{ii'}$ は次のように行なわれる。

- (i) 式 (5.15) の g_{ji} および $g_{ji'}$ を式 (5.16) に代入する。
- (ii) φ に関し、式 (5.16) の $Q_{ii'}(\varphi_{ii'})$ を微分する。
- (iii) 上で微分した結果をゼロに等しいとおき、 $\varphi_{ii'}$ に関して解く。

これで得られる結果は次のとおりである。

$$\tan 4\varphi_{ii'} = \frac{4 \sum_{j=1}^p a_{ji} a_{ji'} (a_{ji}^2 - a_{ji'}^2)}{\sum_{j=1}^p \{(a_{ji}^2 - a_{ji'}^2)^2 - (2a_{ji} a_{ji'})^2\}} \equiv \frac{\nu}{\delta} \quad (5.19)$$

しかし、式 (5.19) で得られる $\varphi_{ii'}$ は必ずしも $Q_{ii'}$ を最大にするとはかぎらず、最小またはある範囲で一定な $Q_{ii'}$ 値を示す角度 $\varphi_{ii'}$ である可能性を有する。 $\varphi_{ii'}$ が $Q_{ii'}$ を最大ならしめるための十分条件は、次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{ii'}}{d\varphi_{ii'}} &= \nu \cos 4\varphi_{ii'} - \delta \sin 4\varphi_{ii'} = 0 \\ \frac{d^2 Q_{ii'}}{d\varphi_{ii'}^2} &= -\delta \cos 4\varphi_{ii'} - \nu \sin 4\varphi_{ii'} < 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$-\frac{\delta^2 + \nu^2}{\nu} \sin 4\varphi_{ii'} < 0$$

この分子の $(\delta^2 + \nu^2)$ は常に正であるから、上式は簡単に

$$\frac{\sin 4\varphi_{ii'}}{\nu} > 0$$

となり、 $\varphi_{ii'}$ が $Q_{ii'}$ を最大ならしめるためには、式 (5.19) の $\tan 4\varphi_{ii'}$ の分子 ν と $\sin 4\varphi_{ii'}$ とは同符号でなければならないことがわかる。

したがって、 $\tan 4\varphi_{ii'}$ の符号に関して角 $\varphi_{ii'}$ の範囲を表 5.3 で示すように選ばねばならないことになる。

表 5.3 回転角 $\varphi_{ii'}$ の範囲

$\tan 4\varphi_{ii'}$ の符号	分子および $\sin 4\varphi_{ii'}$ の符号	分母 δ の符号	$\cos 4\varphi_{ii'}$ の符号	結果としての $4\varphi_{ii'}$ の象限	$\varphi_{ii'}$ の限度
+	+	+	+	I	$0^\circ \sim 22.5^\circ$
-	+	-	-	II	$22.5^\circ \sim 45^\circ$
+	-	-	-	III	$-45^\circ \sim -22.5^\circ$
-	-	+	+	IV	$-22.5^\circ \sim 0^\circ$

ここでクォーティマックス法による数値例を示そう。この回転法の計算手順を知るために、先章から引き継いで2個の因子を抽出した検証数値例についてとりあげる。主要な計算は表 5.4 の左から右にかけて行なわれる。

いまは $q=2$ で、このときの変換の式(5.18)は、簡単に $\mathbf{G}=\mathbf{AT}=\mathbf{AT}_{12}$ だけである。表 5.4 から、直ちに $\nu=2 \times 0.0223$, $\delta=3.8195-4.1750=-0.3555$ で $\tan 4\varphi_{12}=-0.1254$ を得る。したがって、 $4\varphi_{12}=\arctan(-0.1254)=172^\circ 51'$, または $\varphi_{12}=43^\circ 12'$ となる。

変換行列を求めるには、 $\sin(43^\circ 12')=0.68469$ と $\cos(43^\circ 12')=0.72876$ によって

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.72876 & -0.68469 \\ 0.68469 & 0.72876 \end{bmatrix}$$

を得る。この \mathbf{T} を \mathbf{A} の右から乗ずれば、表 5.4 の右端に示す2列の \mathbf{G} が求められる。

なお、式(5.12)のクォーティマックス基準 Q の値については、回転前の初期の値は $Q=5.9071$ であったが、上に得た Q では 6.0852 となり、0.1781 だけ増大している。ここに得た \mathbf{G} を再び上の \mathbf{A} と考えて回転計算を巡回し、逐次 Q を大きくしていくわけである。この検証数値例では、すでに上で得た \mathbf{G} と Q の値は変化せず、1 巡回で十分に収束してクォーティマックス法による最終解となっている。

5.2.2 バリマックス法

前項のクォーティマックス法が、因子負荷行列の各行すなわち観測特性の解釈を容易ならしめるような構造の簡素化を意図するのに対し、Kaiser は負荷行列の各列、すなわち内因因子の解釈を強調して構造の簡素化をはかった。概して、Kaiser が提唱したバリマックス法は、クォーティマックス法の変法であ

表 5.4 クァーティマツ

観測特性 j	回転前の初期の解 A		左 の 平 方	
	a_{j1}	a_{j2}	a_{j1}^2	a_{j2}^2
1	0.5807	0.8138	0.3372	0.6623
2	0.5804	0.8142	0.3369	0.6629
3	0.6060	0.7953	0.3672	0.6325
4	0.9200	0.3916	0.8464	0.1534
5	0.5395	-0.8417	0.2911	0.7085
6	0.9975	-0.0652	0.9950	0.0043
7	0.9978	-0.0652	0.9956	0.0043
8	0.9895	0.1438	0.9791	0.0207
平方和				

るが、より簡素構造に近づけるようである。

この発想には、まず負荷行列の任意の第 i 列に関してその要素の 2 乗値の分散

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{p} \left\{ \sum_{j=1}^p (g_{ji}^2)^2 - \frac{1}{p} \left(\sum_{j=1}^p g_{ji}^2 \right)^2 \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (5.20)$$

をとりあげ、この分散を最大にすることが第 i 列の個々の g_{ji}^2 をゼロまたは 1 に近づけることにほかならないという考えであった。そこで、この回転法の基準として、各列における式 (5.20) のような分散の和

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^q \sigma_i^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^p (g_{ji}^2)^2 - \frac{1}{p} \left(\sum_{j=1}^p g_{ji}^2 \right)^2 \right\} \quad (5.21)$$

を採択した。これを“粗”バリマックス基準 (raw varimax criterion) という。

しかし、上の基準 σ^2 を最大にする回転法は、経験的に、因子負荷量のとくに大きい因子と小さい因子の増し分が、中間的な因子よりも傾向として大きくなるかたよりがあり、直観的なグラフ法の結果にあまりよく一致しないことがわかった。事実、グラフ法ではどのような因子負荷量をもつ因子についても公平に傾向的なかたよりを避けることができていた。このため、Kaiser は、各変量とその共有性の 2 乗の大きさを重みとして式 (5.21) に寄与するように修正した。たとえば、共通性として 0.90 をもつ変量は、0.45 をもつ変量よりも 4 倍

クスの基礎計算

積 $2a_{j_1}a_{j_2}$	平方差 $a_{j_1}^2 - a_{j_2}^2$	左の積×平方差 $2a_{j_1}a_{j_2}(a_{j_1}^2 - a_{j_2}^2)$	クァーティマックス解 G	
			g_{j_1}	g_{j_2}
0.9452	-0.3251	-0.3073	0.9804	0.1955
0.9452	-0.3260	-0.3081	0.9804	0.1960
0.9640	-0.2653	-0.2557	0.9862	0.1647
0.7206	0.6930	0.4994	0.9386	-0.3445
-0.9082	-0.4174	0.3791	-0.1830	-0.9828
-0.1300	0.9907	-0.1288	0.6823	-0.7305
-0.1302	0.9913	-0.1291	0.6825	-0.7307
0.2846	0.9584	0.2728	0.8196	-0.5726
4.1750	3.8195	和 0.0223		

の重みをもって G の決定に働くようにした。すなわち、彼は、各観測特性を示すベクトルを共通因子空間で単位長のベクトルとして回転を行ない、その後、各ベクトルをもとの長さにもどすことを考え、次の基準

$$V = \sum_{i=1}^q \left\{ p \sum_{j=1}^p \left(\frac{g_{ji}}{h_j} \right)^4 - \left(\sum_{j=1}^p \frac{g_{ji}^2}{h_j^2} \right)^2 \right\} \quad (5.22)$$

を最大ならしめるような回転法をあらためて提唱した。これを“規準”バリマックス法 (normal varimax method) といい、通常とくにことわらぬかぎりバリマックス法とはこれをさしている。したがって、共通因子空間で各観測特性のベクトル間のなす角、すなわち母相関係数は式(5.21)と(5.22)の関係から

$$\rho_{jj'}^V = \cos \phi_{jj'}^V = \sum_{i=1}^q \left(\frac{g_{ji}}{h_j} \right) \left(\frac{g_{j'i}}{h_{j'}} \right) = \frac{1}{h_j h_{j'}} \cos \phi_{jj'}^\sigma = \frac{1}{h_j h_{j'}} \rho_{jj'}^\sigma \quad j, j' = 1, 2, \dots, p \quad (5.23)$$

が得られ、 $\cos \phi_{jj'}^V = \rho_{jj'}^V \geq \rho_{jj'}^\sigma = \cos \phi_{jj'}^\sigma$ なることがわかる。

バリマックス法の計算手順は、さきのクァーティマックス法におけるのと同様であるが、式(5.12)の代わりに(5.22)を基準として最大化し、式(5.18)で示されたように二つの因子ごとに回転する。そして、 V の値がこれ以上大きくならなくなるまで、 $q(q-1)/2$ 対の回転を1巡回として巡回を繰り返す。

この巡回手順は、次のように置き換えて考えると、計算のプログラミングのうえでわかりやすい。まず、任意の因子の対 (i, i') に関し、第 j 観測特性の規

準化された因子負荷量を

$$u_j \equiv a_{j1}/h_j, \quad v_j \equiv a_{j2}/h_j \tag{5.24}$$

とおき、次式を定義する。

$$\begin{aligned} A &\equiv \sum_{j=1}^p (u_j^2 - v_j^2), & B &\equiv 2 \sum_{j=1}^p u_j v_j, \\ C &\equiv \sum_j \{(u_j^2 - v_j^2)^2 - 4u_j^2 v_j^2\}, & & \\ D &\equiv 4 \sum_j u_j v_j (u_j^2 - v_j^2) \end{aligned} \tag{5.25}$$

このとき回転に必要な角度 $\varphi_{ii'}$ は、 $-\pi/4$ と $\pi/4$ の間の

$$\varphi_{ii'} = \arctan \frac{D - 2AB/p}{C - (A^2 - B^2)/p} \tag{5.26}$$

で示される。ここにさきのクォーティマックス法では上式右辺が

$$\frac{1}{4} \arctan \frac{D}{C} \tag{5.27}$$

になっていることがわかる。

このようにして回転角が定まると、回転後の標準化された因子負荷量 U_j および V_j は

$$[U_j, V_j] = [u_j, v_j] \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ii'} & -\sin \varphi_{ii'} \\ \sin \varphi_{ii'} & \cos \varphi_{ii'} \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

表 5.5 パリマックス

観測特性 j	回転前の初期の解		共有性の平方根 h_j	式(5.24)で標準化された因子負荷量	
	a_{j1}	a_{j2}		u_j	v_j
1	0.5807	0.8138	0.9998	0.5808	0.8140
2	0.5804	0.8142	0.9999	0.5804	0.8142
3	0.6060	0.7953	0.9999	0.6060	0.7953
4	0.9200	0.3916	0.9999	0.9200	0.3916
5	0.5395	-0.8417	0.9998	0.5396	-0.8419
6	0.9975	-0.0652	0.9997	0.9978	-0.0652
7	0.9978	-0.0652	0.9999	0.9978	-0.0652
8	0.9895	0.1438	0.9999	0.9895	0.1438
合計					

で、式 (5.15) を援用して得られる。

次に、因子の対 (i, i') を取り替えて同様の手順を繰り返し、1 巡回を終了し基準値を算出する。この基準値が十分大きくなり、一定の値に近づき収束すれば巡回を了える。

そして、最終的な因子負荷量を求めるには、それぞれ (U_j, V_j) に対応する h_j を乗じ、 $(g_{ji}, g_{ji'})$ としてもとにもどしておく必要がある。

上の計算手順をわかりやすくするために、次に検証数値例の場合に適用してみよう。計算には表 5.5 のような計算用紙をつくっておくと便利で、また計算のまちがいが少ない。

この場合は $q=2$ であるが、一般の場合には $(i, i'), i, i'=1, 2, \dots, q$ かつ $i < i'$ についても上表をまとめてつくる。さて、式 (5.26) による回転角の算出には、式 (5.25) の定義によって、表 5.5 より $A=2.2999$, $B=2.6908$, $C=3.8214-4.1758=-0.3544$, $D=2 \times 0.0220$ が算出され

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= \frac{1}{4} \arctan \frac{-1.5031}{-0.1105} = \frac{1}{4} \arctan 13.6027 \\ &= \frac{1}{4} \times (-94^\circ 12') = -23^\circ 33'\end{aligned}$$

を得る。ここに $\tan 4\varphi_{12}$ は正であるが、その分母と分子は負であることに注意して、 $\sin 4\varphi_{12}$ の符号を調べ回転角 φ_{12} を決めねばならない。

さて、 $\sin(-23^\circ 33') = -0.3996$, $\cos(-23^\circ 33') = 0.9167$ であるから

法の基礎計算

積 $2u_j v_j$	平方差 $u_j^2 - v_j^2$	左の積 \times 平方差 $2u_j v_j (u_j^2 - v_j^2)$	積の平方	平方差の平方
0.9455	-0.3253	-0.3076	0.8940	0.1058
0.9451	-0.3261	-0.3082	0.8932	0.1063
0.9639	-0.2653	-0.2557	0.9291	0.0704
0.7205	0.6930	0.4993	0.5191	0.4802
-0.9086	-0.4176	0.3794	0.8256	0.1744
-0.1301	0.9914	-0.1290	0.0169	0.9829
-0.1301	0.9914	-0.1290	0.0169	0.9829
0.2846	0.9584	0.2728	0.0810	0.9185
B 2.6908	A 2.2999	0.0220	4.1758	3.8214

$$T = \begin{bmatrix} 0.9167 & 0.3996 \\ -0.3996 & 0.9167 \end{bmatrix}$$

を得る。

次に $AT=G$ より

$$G = \begin{bmatrix} 0.2071 & 0.9780 \\ 0.2066 & 0.9783 \\ 0.2376 & 0.9712 \\ 0.6868 & 0.7266 \\ 0.8309 & -0.5559 \\ 0.9404 & 0.3388 \\ 0.9407 & 0.3389 \\ 0.8495 & 0.5272 \end{bmatrix}$$

が得られる。また式 (5.22) の V 規準値を求めるには、 G の各行の要素 (g_{j1} , g_{j2}) にその行に対応する h_j を乗じて、回転後の規準化された因子負荷行列を求め、その各要素を 2 乗した表 5.6 を準備すると容易である。

表 5.6 V 規準値算出の基礎計算

観測特性 j	バリマックス解		回転後の規準化された因子負荷量		左列の 2 乗	
	g_{j1}	g_{j2}	$g_{j1}h_j$	$g_{j2}h_j$	$(g_{j1}h_j)^2$	$(g_{j2}h_j)^2$
1	0.2071	0.9780	0.2071	0.9778	0.0429	0.9561
2	0.2066	0.9783	0.2066	0.9782	0.0427	0.9569
3	0.2376	0.9712	0.2376	0.9711	0.0565	0.9430
4	0.6868	0.7266	0.6867	0.7265	0.4716	0.5278
5	0.8309	-0.5559	0.8307	-0.5558	0.6901	0.3089
6	0.9404	0.3388	0.9401	0.3387	0.8838	0.1147
7	0.9407	0.3389	0.9406	0.3389	0.8847	0.1149
8	0.8495	0.5272	0.8494	0.5271	0.7215	0.2778
合計					3.7938	4.2001
その列の平方和					2.7899	3.1966

この表の値から、直ちに

$$V = 8(2.7899 + 3.1966) - (3.7938^2 + 4.2001^2) = 15.8575$$

を得る。回転前の最尤推定解 A の場合に、この V 規準値は 12.6438 と計算されるので、回転によって確かに V 値が増大している。

さて、前項のクォーティマックス解とこのバリマックス解を比較すると、後者は前者よりいっそう簡素構造の原則を満たしているようである。もちろん、回転の基準が異なるから決定的にいずれがよいということはいえないが、一般にはバリマックス解のほうが因子の解釈は楽なようである。

最尤解について表 2.4 で行なったように、バリマックス解について因子の解釈を調べてみよう。このとき、因子負荷量の絶対値のめだって大きいものをわくで囲み、表 5.7 のように整理すると便利である。

ここで、観測特性の No. 1, No. 2, No. 3 は第 2 因子(実は α : 長方形の縦の長さ)のみで、No. 4 は第 2 因子と第 1 因子(実は β : 長方形の横の長さ)をほぼ同じ程度に含み、No. 8 も両因子を含

表 5.7

観測特性	第 2 因子	第 1 因子
No. 1	0.9780	0.2071
2	0.9783	0.2060
3	0.9712	0.2376
4	0.7266	0.6868
5	0.5272	0.8495
6	-0.5559	0.8309
7	0.3388	0.9409
8	0.3389	0.9407

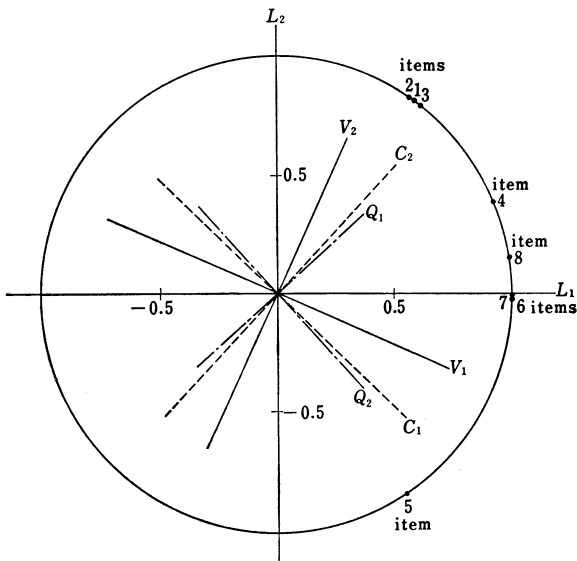


図 5.3 直交グラフ法 (C), クォーティマックス法 (Q), およびバリマックス法 (V) による因子軸の回転

表 5.8 相 関

観測特性 No. →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
患者の社会・環境条件	1	1.000	0.151	-0.543	-0.154	-0.393	-0.300	-0.240	-0.116	-0.187
	2		1.000	-0.213	-0.533	-0.322	-0.352	-0.272	-0.181	-0.250
	3			1.000	0.318	0.565	0.338	0.314	0.136	0.249
	4				1.000	0.367	0.391	0.273	0.181	0.255
	5					1.000	0.441	0.341	0.243	0.292
No. of information	6					1.000	0.438	0.325	0.351	
Mental Control(1)	7						1.000	0.369	0.322	
Mental Control(2)	8							1.000	0.185	
Mental Control(3)	9								1.000	
Story Recall (1)	10									
Story Recall (2)	11									
Digid Span forward	12									
Digid Span backward	13									
Visual Reproduction (1)	14									
Visual Reproduction (2)	15									
Associated Learning easy (3)	16									
Associated Learning hard (3)	17									
Associated Learning easy (1)	18									
Associated Learning hard (1)	19									

(対 称 行 列)

むがやや第 1 因子に重みがかかっている。No. 5 は両因子を含むものの第 1 因子と第 2 因子の差の形式(実は $\beta - \alpha$)となっている。そして、No. 6 および No. 7 は第 1 因子のみを含むような特性であることが伺われる。

また、評価票の作成者の立場からいうと、No. 1, No. 2, No. 3 および No. 6, No. 7 はそれぞれ同義的な観測特性 (test items) と考えられ、観測項目の数を減じうる可能性を示していることがわかる。

これらの解釈は、既述の表 2.3 の作成過程によって、各観測特性の構造に非常によく合致していることが知れよう。

また、バリマックス法で行なった回転を、先項からのグラフ法やクォーティマックス法による回転と比較すると図 5.3 のようになっている。図の中で、 L_1 と L_2 は最尤解、 C_1 と C_2 はセントロイド解の直交グラフ法、 Q_1 と Q_2 は最尤解のクォーティマックス法、また V_1 と V_2 は同じくバリマックス法による回転結果を示し、半径 1 の円周上にある点 (1, 2, ..., 8) はそれぞれ観測特性の

行 列

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-0.195	-0.201	-0.175	-0.215	-0.257	-0.308	-0.041	-0.121	-0.021	-0.087
-0.172	-0.197	-0.246	-0.252	-0.246	-0.355	-0.099	-0.185	-0.147	-0.154
0.331	0.311	0.251	0.377	0.343	0.398	0.148	0.231	0.130	0.231
0.164	0.227	0.322	0.307	0.290	0.373	0.109	0.189	0.154	0.148
0.360	0.352	0.398	0.450	0.363	0.490	0.076	0.255	0.136	0.211
0.411	0.497	0.360	0.419	0.399	0.496	0.392	0.386	0.322	0.269
0.361	0.365	0.319	0.383	0.323	0.430	0.190	0.278	0.200	0.197
0.229	0.290	0.278	0.284	0.200	0.313	0.132	0.187	0.178	0.150
0.260	0.305	0.339	0.353	0.334	0.417	0.152	0.234	0.087	0.213
1.000	0.733	0.236	0.376	0.234	0.331	0.376	0.465	0.383	0.394
	1.000	0.239	0.433	0.322	0.389	0.458	0.530	0.413	0.387
		1.000	0.510	0.296	0.385	0.133	0.210	0.080	0.227
			1.000	0.358	0.495	0.188	0.366	0.211	0.333
				1.000	0.516	0.226	0.346	0.241	0.258
					1.000	0.306	0.349	0.228	0.276
						1.000	0.471	0.509	0.276
							1.000	0.487	0.579
								1.000	0.375
									1.000

番号を示している。

次に、中規模のクァーティマックス法とバリマックス法に関する応用例を示そう。

金子・市丸ら*は初老期痴呆の診断に20数項目からなる観測票 (questionnaire) を作成した。これは従来の WAIS などの観測票よりもすぐれた性格と実用性を有しているが、この研究の一部分に、500症例の観測票による19項目に関する因子分析を行なっている。除かれた5項目は、19項目中の項目に著しく相関性の高い同義の項目で、しかも医学的に別の見地から検討されるべき項目であった。

まず19項目間の相関行列が表5.8のように準備され、表5.9に示すように成因分析が行なわれた。

* 金子, 市丸, 小牟田, 井上(文), 福井, 井上修(阪大精神神経): “初老期痴呆の臨床診断について”, 第63回日本精神神経学会総会(1966)で発表された。

表 5.9 成 因 分 析 の 結 果

固有ベクトル 観測特性 No.	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6
1	0.1631	0.2608	0.5341	0.1194	0.1798	0.1327
2	0.1855	0.1921	-0.3857	0.4593	0.0986	-0.2121
3	-0.2316	-0.2076	-0.4643	-0.1823	-0.0079	0.0602
4	-0.2020	-0.2312	0.3330	-0.4289	-0.0292	0.2119
5	-0.2557	-0.2578	-0.2061	-0.0444	-0.0082	0.2056
6	-0.2857	-0.0124	0.0876	-0.0441	-0.2262	-0.1272
7	-0.2357	-0.0985	0.1006	0.2368	-0.2891	-0.1246
8	0.1726	-0.0413	0.2407	0.4343	-0.4522	0.0280
9	-0.2062	-0.1318	0.1202	0.1885	0.2727	-0.2394
10	-0.2539	0.2479	-0.1934	0.1133	-0.1542	0.3454
11	-0.2790	0.2567	-0.1102	0.1063	-0.1791	0.1885
12	-0.2143	-0.1964	0.1931	0.3103	0.2899	0.1537
13	-0.2666	-0.0879	0.0351	0.2607	0.2552	0.1802
14	-0.2357	-0.0802	0.0034	-0.0776	0.2211	-0.5319
15	-0.2849	-0.1334	0.0634	0.0135	0.0612	-0.3057
16	-0.1864	0.3926	0.0458	-0.1318	-0.1377	-0.3297
17	-0.2489	0.3366	-0.0489	-0.0849	0.2251	0.0216
18	-0.1859	0.4032	0.0891	-0.2318	-0.1135	-0.0879
19	-0.2028	0.2735	-0.0453	-0.0161	0.4504	0.2276
固有値累和	6.4942	8.4963	9.7335	10.7943	11.7472	12.6114
$\frac{(\text{同上})}{19} \times 100(\%)$	34.180	44.717	51.229	56.812	61.827	66.376
固有値	6.4942	2.0020	1.2372	1.0607	0.9529	0.8642

この結果によって、内因因子数を6個と推測し、次に Lawley による最尤推定を行なっている(表 5.10)。

この際の第1列はいずれの要素も係数の絶対値が他の列よりもそろって大きく、この因子は19項目における痴呆症の重症度を示す全般因子であると考えられた。このことは、医師の総合判断で痴呆症の重さが明らかな症例のみについて因子評点(後章)を算出してみることによっても確認された。なお、19項目の中には共有性のかなり小さいものも若干個あるが、患者の個人差が大きい医学データでは19項目全体として許容されうるものであろう。

さらに、各因子の解釈を明確にして因子の命名を行なうために、簡素構造の原則に基づいて因子負荷行列の変換が考慮された。この際、各因子は互いに独

表 5.10 最尤解による因子負荷行列

観測特性 No.	A1	A2	A3	A4	A5	A6	共有性
1	0.3915	0.3764	0.3176	0.0534	0.596	0.1226	0.4173
2	0.4122	0.2704	-0.3860	-0.0438	0.2825	-0.2291	0.5263
3	-0.5970	-0.4287	-0.4113	-0.1907	-0.0938	0.0095	0.7547
4	-0.4564	-0.3419	0.3381	0.0230	-0.2637	0.2064	0.5523
5	-0.6135	-0.3901	-0.1038	0.0618	0.0389	0.0521	0.5475
6	-0.6804	-0.0692	0.1813	0.0703	-0.0389	-0.1749	0.5442
7	-0.5351	-0.1398	0.1163	0.1067	0.0703	-0.1266	0.3518
8	-0.3786	-0.0432	0.1632	0.1535	0.1109	-0.1035	0.2185
9	-0.4599	-0.1506	0.1462	0.0847	0.1521	-0.0578	0.2893
10	-0.7078	0.3231	-0.2239	0.2598	-0.0309	0.1172	0.7379
11	-0.7608	0.3352	-0.1065	0.2317	-0.0461	-0.0004	0.7584
12	-0.4701	-0.2401	0.2130	0.0999	0.2920	0.0103	0.4194
13	-0.6320	-0.1499	0.0980	0.0632	0.3021	0.0273	0.5276
14	-0.5354	-0.1654	0.1323	-0.1288	0.0779	-0.1549	0.3782
15	-0.6605	-0.2342	0.1901	-0.0177	0.0913	-0.1899	0.5721
16	-0.4887	0.3959	0.1005	-0.1850	-0.1915	-0.3041	0.5692
17	-0.6500	0.3297	0.0490	-0.3339	0.0734	0.0867	0.6581
18	-0.4768	0.3773	0.1226	-0.2265	-0.1700	-0.0504	0.4675
19	-0.5247	0.2500	0.0353	-0.3185	0.2188	0.2704	0.5616

立した内因因子を追求する目的で直交回転をとりあげ、クァーティマックス法とバリマックス法によって検討された。クァーティマックス法では、最尤解を初期値として14回の巡回計算で完全に収束した。次にその過程を示して計算手順の参考にする(表 5.11~5.14)。

次に、同じ最尤解を初期値としたバリマックス法の最終結果のみを表 5.15 に示している。

さて、この例でクァーティマックス解をバリマックス解と比べると、いくつかの因子に関してはいずれも因子解釈のうえで非常に類似した結果を示している。しかし、全体的に簡素構造を満たしているのはバリマックス法であり、因子解釈も容易である。表 5.15 によって、互いに独立した内因因子が医学的に解釈され、それぞれ次のようになり命名されている。

第1列の因子：注意集中度

第2列の因子：言語の理解と記憶

第3列の因子：知的能力に及ぼす教養の影響

表 5.11 第1巡回計算後のクォーティマックス解

観測特性 No.	G	G1	G2	G3	G4	G5	G6
1		0.0360	0.2444	0.5845	-0.0903	-0.0518	0.0571
2		0.1200	0.6350	-0.0165	0.0281	0.3200	-0.0715
3		-0.1549	-0.3297	-0.7862	-0.0573	-0.0237	-0.0073
4		-0.1030	-0.6699	-0.0729	-0.0311	-0.2875	-0.0627
5		-0.1799	-0.5131	-0.4704	0.0438	0.0840	0.1468
6		-0.4429	-0.5329	-0.1516	0.1480	0.0581	-0.1252
7		-0.2841	-0.4515	-0.1541	0.1162	0.1726	-0.0094
8		-0.2340	-0.3383	-0.0005	0.1206	0.1843	0.0267
9		-0.2182	-0.4302	-0.1014	0.0364	0.2061	0.0498
10		-0.7464	-0.1057	-0.2457	0.1916	0.0047	0.2690
11		-0.7885	-0.1925	-0.1818	0.2124	0.0407	0.1405
12		-0.1565	-0.5243	-0.0748	-0.0326	0.3025	0.1477
13		-0.3387	-0.4933	-0.1925	-0.0594	0.3180	0.1665
14		-0.2642	-0.4565	-0.2030	-0.0661	0.1741	-0.1549
15		-0.3055	-0.6075	-0.2137	0.0315	0.2202	-0.1202
16		-0.6268	-0.0909	-0.0026	0.0281	-0.0205	-0.4083
17		-0.6921	-0.1792	-0.1252	-0.3483	0.0508	-0.0855
18		-0.6073	-0.1112	0.0150	-0.1342	-0.1170	-0.2329
19		-0.5427	-0.1473	-0.0993	-0.4634	0.0922	0.1104

第4列の因子：知的能力に及ぼす年齢の影響

第5列の因子：常識的知識の再生

第6列の因子：図型(構成)の記銘再生

5.2.3 バリマックス法の変法

前項の Kaiser によって提唱されたバリマックス法は、日常に最もしばしば適用される直交回転法である。このために、この方法に基づく変法も開発され、Horst らによって

- (1°) 逐次バリマックス法 (successive factor varimax method)
- (2°) 斉時バリマックス法 (simultaneous factor varimax method)
- (3°) 逐次一般バリマックス法 (successive factor general varimax method)
- (4°) 斉時一般バリマックス法 (simultaneous factor general varimax method)

とよばれるものが提唱されている。次に、これらの変法の概要を記述する。

- (1°) 逐次バリマックス法 Kaiser の方法と本質的に異なるところは同

表 5.12 第2巡回計算後のクォーティマックス解

観測特性 No.	G	G1	G2	G3	G4	G5	G6
1		-0.1083	0.1899	0.5997	-0.0918	-0.0006	0.0370
2		0.1128	0.3020	0.0999	0.0304	0.6411	0.0188
3		-0.2297	-0.1972	-0.8066	-0.0686	-0.0859	-0.0173
4		-0.1060	-0.3446	-0.1912	-0.0305	-0.6200	-0.0202
5		-0.2587	-0.4244	-0.5032	0.0213	-0.1827	0.1153
6		-0.4574	-0.4372	-0.1809	0.1012	-0.2414	-0.2061
7		-0.3176	-0.4464	-0.1702	0.0822	-0.1137	-0.0547
8		-0.2570	-0.3741	-0.0051	0.0890	-0.0662	-0.0106
9		-0.2456	-0.4547	-0.1177	0.0082	-0.0904	0.0127
10		-0.8173	-0.0554	-0.1665	0.0812	-0.0701	0.1657
11		-0.8390	-0.1488	-0.1141	0.1024	-0.0897	0.0283
12		-0.1901	-0.5906	-0.0992	-0.0567	-0.0872	0.1171
13		-0.3799	-0.5653	-0.1898	-0.1087	-0.0451	0.1173
14		-0.2593	-0.4499	-0.2308	-0.0890	-0.0915	-0.1973
15		-0.3213	-0.5951	-0.2514	0.0022	-0.1476	-0.1720
16		-0.5607	-0.0468	0.0264	-0.0354	-0.0378	-0.4992
17		-0.6323	-0.1523	-0.0876	-0.4305	-0.0613	-0.1954
18		-0.5374	-0.0051	0.0321	-0.1991	-0.1511	-0.3392
19		-0.4954	-0.1571	-0.0621	-0.5346	-0.0358	0.0201

時に q 個の因子についての解を求めるのではなく、まず一つの因子ベクトルの要素の平方和の分散を最大にすることによってバリマックス基準を満たす因子を決め、次に、他の一つの因子について求めるという方法で、逐次的に q 個の因子を決定していく。すなわち前項の式 (5.21) においてでなく、直接的に、式 (5.20) から因子を一つずつ求めていく方法である。したがって、当然に、本項のバリマックス解とは異なった値を示す。

いま、 $\mathbf{G}=\mathbf{A}\mathbf{T}$ において $\mathbf{G}^{(2)}\equiv[\mathbf{g}_i^{(2)}]\equiv[g_{ji}^{(2)}]$ のように表示すると、式 (5.20) で定義した $p\sigma_i^2$ は

$$p\sigma_i^2 = \mathbf{g}_i^{(2)'} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{g}_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

で示され、これを

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i' \mathbf{t}_i &= 1, \\ \mathbf{t}_i' \mathbf{t}_i &= 0, \quad i < i' \end{aligned}$$

なる条件下で最大にする \mathbf{t}_i を求めることになる。ここに \mathbf{I} は p 次単位行列

表 5.13 第5巡回計算後のクォータリマックス解

観測特性 No.	G	G1	G2	G3	G4	G5	G6
1		0.1398	0.1730	0.5990	-0.0910	0.0109	0.0244
2		0.1763	0.2256	0.0962	0.0197	0.6592	0.0083
3		-0.2689	-0.1593	-0.8021	-0.0696	-0.0934	-0.0023
4		-0.1721	-0.2676	-0.1893	-0.0196	-0.6440	-0.0076
5		-0.3035	-0.3843	-0.4991	0.0108	-0.2047	0.1283
6		-0.4934	-0.4043	-0.1739	0.0783	-0.2461	-0.2006
7		-0.3436	-0.4265	-0.1682	0.0612	-0.1317	-0.0488
8		-0.2721	-0.3649	-0.0033	0.0685	-0.0805	-0.0084
9		-0.2650	-0.4366	-0.1191	-0.0109	-0.1175	0.0180
10		-0.8323	-0.0373	-0.1298	0.0394	0.0008	0.1592
11		-0.8543	-0.1314	-0.0813	0.0578	-0.0274	0.0222
12		-0.2090	-0.5701	-0.1058	-0.0770	-0.1350	0.1240
13		-0.3945	-0.5441	-0.1893	-0.1385	-0.0762	0.1223
14		-0.2760	-0.4278	-0.2371	-0.1054	-0.1238	-0.1905
15		-0.3507	-0.5671	-0.2565	-0.0190	-0.1860	-0.1629
16		-0.5527	-0.0435	0.0374	-0.0629	-0.0005	-0.5064
17		-0.6157	-0.1279	-0.0770	-0.4626	-0.0402	-0.2022
18		-0.5322	0.0159	0.0452	-0.2210	-0.1141	-0.3465
19		-0.4737	-0.1321	-0.0550	-0.5618	-0.0286	0.0139

で、 $\mathbf{1}$ は要素がすべて 1 である p 次単位ベクトルを示す。

さて、この t_i を求めるには、常法によって、ラグランジュの乗数 λ を使用し目的とする関係式(5.20)の最大化をはかる。

まず、 $i=1$ とすると、上の関係式より

$$\Psi_1 = \mathbf{t}_1' \mathbf{A} \mathbf{D}_{g_1} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{D}_{g_1} \mathbf{A} \mathbf{t}_1 - \lambda \mathbf{t}_1' \mathbf{t}_1$$

を \mathbf{t}_1' の要素について偏微分し、結果をゼロとおくとよい。ここに \mathbf{D}_{g_1} は g_1 の要素を対角に並べた対角線行列を示し、 $\mathbf{D}_{g_1} \mathbf{1} = g_1$ となっている。

上の関数についての計算を整理すると、

$$\mathbf{A}' \left(\mathbf{g}^{(3)} - \frac{g_1 g_1' g_1}{p} \right) - \mathbf{t}_1 \lambda_1$$

を得る。

ここで g_1 を求めるには、上式について逐次収束計算を行なう。まず、 $\mathbf{V}_{(1)} \equiv \mathbf{A} \mathbf{A}' / \sqrt{\mathbf{1}' \mathbf{A} \mathbf{A}' \mathbf{1}}$ なるベクトルをつくり、この最小要素の行番号 l を見つける。

表 5.14 第14巡回計算後のクォーティマックス解(最終解)

観測特性 No.	G	G1	G2	G3	G4	G5	G6
1		0.1554	0.1159	0.6084	-0.0915	0.0219	0.0257
2		0.2017	0.1433	0.1081	0.0180	0.6731	0.0036
3		-0.2874	-0.0727	-0.8076	-0.0687	-0.0990	-0.0011
4		-0.2010	-0.1800	-0.2039	-0.0180	-0.6615	-0.0042
5		-0.3344	-0.3063	-0.5216	0.0151	-0.2302	0.1283
6		-0.5296	-0.3240	-0.1952	0.0892	-0.2732	-0.1948
7		-0.3777	-0.3713	-0.1937	0.0696	-0.1632	-0.0479
8		-0.2990	-0.3327	-0.0261	-0.0761	-0.1084	-0.0079
9		-0.2994	-0.3939	-0.1463	0.0035	-0.1509	0.0166
10		-0.8289	0.0309	-0.1235	0.0515	0.0141	0.1777
11		-0.8609	-0.0583	-0.0810	-0.0721	-0.0232	-0.0339
12		-0.2527	-0.5324	-0.1432	-0.0697	-0.1807	0.1185
13		-0.4315	-0.4929	-0.2224	-0.1288	-0.1158	0.1206
14		-0.3166	-0.3720	-0.2617	-0.0976	-0.1566	0.1922
15		-0.4006	-0.4971	-0.2905	-0.0092	-0.2298	-0.6446
16		-0.5660	0.0051	0.0433	-0.0508	-0.0028	-0.4942
17		-0.6366	-0.0720	-0.0753	-0.4510	-0.0394	-0.1922
18		-0.5414	0.0676	0.0554	-0.2111	-0.1037	-0.3336
19		-0.4920	-0.0947	-0.0558	-0.5533	-0.0293	0.0198

そして A の第 l 行ベクトルに着目し、これを $t_{[l]}$ として

$$At_{[l]}' \equiv g_1$$

とおき、はじめに g の初期値を与えておく。

次に、反復収束の手順を示す。

(i) $A' \left(g_1^{(3)} - \frac{1}{p} g_1 g_1' g_1 \right)$ を計算し、 U_1 とおく。

(ii) $U_1 / \sqrt{U_1' U}$ を求め、 t_1 とおく。

(iii) At_1 を求め g_1 とおき、上の手順 (i) にもどす。

次に、 g_2 を得るために、 $i=2$ として

表 5.15 バリマックス解(最終解)

観測特性 No.	G	G1	G2	G3	G4	G5	G6
1		-0.0481	0.0116	0.8234	0.0024	0.0892	0.1868
2		0.0864	-0.0959	0.0820	0.8414	0.1099	0.1001
3		-0.1703	0.1564	-0.8013	-0.1509	-0.0080	-0.1468
4		-0.1640	0.0711	-0.1501	-0.8148	-0.0856	-0.1354
5		-0.3602	0.0889	-0.6153	-0.2946	-0.1873	-0.1051
6		-0.0995	0.3731	-0.2674	-0.3148	-0.4236	-0.3248
7		-0.1667	0.1515	-0.2110	-0.1423	-0.5958	-0.2737
8		-0.1584	0.0912	0.0082	0.0726	-0.7892	-0.0512
9		-0.4222	0.0663	-0.0914	-0.0890	-0.1733	-0.5079
10		-0.2798	0.6495	-0.3230	-0.0139	-0.3048	0.1729
11		-0.2322	0.6801	-0.2670	-0.0461	-0.3681	0.0202
12		-0.6797	-0.0074	-0.0741	-0.1901	-0.2581	-0.2331
13		-0.6556	0.2150	-0.2217	-0.1330	-0.2401	-0.2005
14		-0.1519	0.2135	-0.2323	-0.1247	-0.0506	-0.7284
15		-0.2581	0.2101	-0.2862	-0.2415	-0.2753	-0.5706
16		0.1738	0.7151	0.0396	-0.0154	-0.1591	-0.3142
17		-0.2786	0.7480	-0.0955	-0.0615	0.0316	-0.1935
18		-0.1090	0.7538	0.0531	-0.1628	-0.0898	-0.1358
19		-0.5018	0.6087	-0.0461	-0.0420	0.1818	-0.0654

$$t_2' t_1 = 0,$$

$$t_2' t_2 = 1$$

なる条件下で、ラグランジュの乗数 λ_{12}, λ_2 による関数

$$\Psi_2 = p\sigma_2^2 - 2 t_2' t_1 \lambda_{12} - t_2' t_2 \lambda_2$$

を t_2' について偏微分し、ゼロとおく。この計算式を上条件によって整理すると

$$(I - t_1 t_1') A' \left(g_2^{(3)} - \frac{g_2 g_2' g_2}{p} \right) = t_2 \lambda_2$$

を得る。さらに、 $g_1 = A t_1$ であるから、上式左辺の一部は

$$[I - t_1 t_1'] A' = A' - t_1 g_1' \equiv A_{(2)}$$

と置き換えることができる。

ここで g_1 の際の実施したのと全く同様の反復計算にはいる。まず、 g_2 の初期値を得るために、 $g_1 + V_{(1)} \equiv V_{(2)}$ なるベクトルをつくり、その最小要素の行番号 l を見つける。そして A の第 l 行ベクトルを $t_{[l]}$ として t_2 の初期値とし、最初の $g_2 \equiv A t_{[l]}$ を求めておく。

次に、 g_i を求める反復収束の手順を示す。ここに r は各 i に関する収束のための巡回番号で、 $i=2, 3, \dots, q$ について実行する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A'_{(r)} \left(g_i^{(3)} - \frac{1}{p} g_i g_i' g_i \right) = U_{i(r)} \\ U_{i(r)} / \sqrt{U_{i(r)}' U_{i(r)}} = t_{i(r)} \\ A_{(r)} t_{i(r)} = g_i \end{array}$$

ここで、 i を更新するには、 $g_i + V_{(i)} \equiv V_{(i+1)}$ での最小要素の行番号 l を見つけ、 A の第 l 行ベクトルを t_{i+1} の初期値とし、(i) および (iii) の第 i 番めの A の代わりに、次式の左辺で示される A の残差行列を使用し、(iii) から出発する。

(2°) 斉時バリマックス法 この方法は、 q 個の因子が同時に簡素構造に関するバリマックス基準を最大化するように回転する。したがって、上の変法(1°)のように因子を1つずつ決めていくのとは異なり、いっせいに q 個の因子を定めてしまう。計算法は、やはり逐次収束法によるが、 q 個の因子に関するバリマックス行列全体を同時に反復計算する。

この計算結果は、丸めの誤差を除いて、完全に5.2.2項のKaiserによるバリマックス解と同一になる。しかし、ここで提唱する計算手順によると、計算誤差が自動修正されて誤差を蓄積しない利点を有している。

また、計算所要時間を比較すると、小さな行列の場合は5.2.2項のほうが速いが、他方大きい行列の場合にはこの変法(2°)がわずかに速いようである。しかし、日常の因子数が10~15程度であれば、計算機の記憶容量や計算速度のうえで大差ないと考えてよい。

いま、数式上の記号を(1°)と同じように用いて、 $T'T=I$ なる条件下で関数

$$p\sigma_i^2 = \mathbf{g}_i^{(2)'} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{g}_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

を最大にすることを考える。したがって、変法(1°)のように $\mathbf{D}_{g_i}\mathbf{1} = \mathbf{g}_i$ とし λ_{ii} , $\lambda_{ii'}$ をラグランジュの乗数とすると、

$$\Psi_i = \mathbf{t}_i' \mathbf{A}' \mathbf{D}_{g_i} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{D}_{g_i} \mathbf{A} \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_i' \lambda_{ii} + \sum_{\substack{i,i'=1 \\ (i \neq i')}}^q \mathbf{t}_i' \lambda_{ii'}$$

を母数 \mathbf{t}_i' で偏微分してその結果をゼロとおく。ここでも変法(1°)と同様の整頓を行なうと、

$$\mathbf{A}' \left(\mathbf{g}_i^{(3)} - \frac{1}{p} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i' \mathbf{g}_i \right) = \mathbf{T} \lambda_i$$

を得る。ここに $\lambda_i' = [\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{qi}]$ を示している。

上式は、各 i に関しまとめて

$$\mathbf{A}' \left(\mathbf{G}^{(3)} - \frac{1}{p} \mathbf{G} \mathbf{D}_{g_i' g_i} \right) = \mathbf{T} \lambda_i$$

と表現できる。ここに $\mathbf{D}_{g_i' g_i}$ はすべての i について $\mathbf{g}_i' \mathbf{g}_i$ を第 i 対角要素とする対角線行列を示し、また $\lambda_i = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q]$ として $\lambda = \mathbf{A}'$ である。

ここで \mathbf{P} と \mathbf{Q} を正規直交行列すなわち $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}_q$, $\mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \mathbf{I}_q$ とし、また λ を対角線行列とすると、上式左辺は $\mathbf{P}\lambda\mathbf{Q}'$ で表現できる。したがって

$$\mathbf{P}\lambda\mathbf{Q}'\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T}$$

を満たす \mathbf{T} を求めることになる。

さらに、 $\mathbf{P}\lambda\mathbf{Q}' \equiv \mathbf{C}$ とおき、 $\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$, $\lambda = \mathbf{A}'$ および \mathbf{P} と \mathbf{Q} の正規直交性より

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{Q}\lambda^{-1}\mathbf{Q}', \quad \mathbf{C}'\mathbf{C} = \mathbf{Q}\lambda^2\mathbf{Q}'$$

が示されるから、上の \mathbf{T} は

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{Q}\lambda^{-1}\mathbf{Q}'$$

とも書ける。数値計算はこの式によって反復収束法で解を求める。

その手順は、まず初期の \mathbf{G} を与えることに始まり

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \text{(iv)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{A}' \left(\mathbf{G}^{(3)} - \frac{1}{p} \mathbf{G} \mathbf{D}_{g_i' g_i} \right) = \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{C}' = \mathbf{Q}\lambda^2\mathbf{Q}' \rightarrow \mathbf{Q}, \lambda \\ \mathbf{C}\mathbf{Q}\lambda^{-1}\mathbf{Q}' = \mathbf{T} \\ \mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{G} \end{array}$$

によって、各段階の左辺を計算して右辺をつくっていく。そして (iv) で \mathbf{G} を得れば、これを (i) の左辺の $\mathbf{G}^{(3)}$ と \mathbf{G} に用いて反復計算を \mathbf{G} が安定するまで行なえばよい。

(3°) 逐次一般バリマックス法 この方法は、さきの変法 (1°) と同様に、反復計算の毎回の過程で因子を 1 個ずつ定めるもので、 q 個の因子を同時に与えるのではない。そして、この変法の特徴は、最大化するバリマックス基準の一般化を意図し、+1 より小さくない任意の正の偶数乗の因子負荷要素の分散を基準として最大化する回転法になっている。すなわち、因子負荷要素の 4 乗とか、4/3 乗とか、一般に分子が偶数で分母が分子より小さい奇数であるような指数 (k) 乗の分散を基準として最大化する。

$$k = 2m_1 / (2m_2 - 1), \quad \text{正整数 } m_1 \geq 1, \quad \text{正整数 } m_2 \leq m_1$$

さらに、この回転法の特殊な場合として、因子負荷量の絶対値の分散を最大にする回転を与えることもできる。すなわち、指数の分子が偶数で無限に大きくなり、分母が分子よりも 1 だけ小さいとき、この指数を \hat{k} とすると要素の絶対値の分散を基準とするものに近づく。

さて、この回転法は次のように行なう。まず、 \mathbf{G} の第 1 行列を $\mathbf{g}_1 = \mathbf{A}\mathbf{t}_1$ とし、また $\mathbf{g}_1^{(k)}$ を \mathbf{g}_1 の各要素の k 乗を要素にもつベクトルとする。もちろん $\mathbf{g}_1^{(k)}$ の要素はすべて非負である。

いま、 $\mathbf{t}_1' \mathbf{t}_1 = 1$ の条件下で

$$\mathbf{g}_1^{(k)'} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{g}_1^{(k)} \equiv \phi_1$$

を最大にする \mathbf{t}_1' について考える。

このためにラグランジュの乗数 λ_1 を用い

$$\Psi_1 = \phi_1 - k\lambda_1 \mathbf{t}_1' \mathbf{t}_1$$

なる関数をつくる。この式は容易に

$$\Psi_1 = \mathbf{t}_1' \mathbf{A}' \mathbf{D}_{\mathbf{g}_1}^{k-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{D}_{\mathbf{g}_1}^{k-1} \mathbf{A} \mathbf{t}_1 - k\lambda_1 \mathbf{t}_1' \mathbf{t}_1$$

と書けるから、 \mathbf{t}_1' で偏微分しゼロとおいて

$$A' \left(\mathbf{g}_1^{(2k-1)} - \frac{1}{p} \mathbf{g}_1^{(k-1)} \mathbf{1}' \mathbf{g}_1^{(k)} \right) = \lambda_1 \mathbf{t}_1$$

をうる。この式に基づき、変法 (1°) で示されたような適当な初期値 \mathbf{g}_1 から次の反復収束の手順に従う。

$$\left[\begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A' \left(\mathbf{g}_1^{(2k-1)} - \frac{1}{p} \mathbf{g}_1^{(k-1)} \mathbf{1}' \mathbf{g}_1^{(k)} \right) = \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_1 / \sqrt{\mathbf{U}_1' \mathbf{U}_1} = \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{t}_1 = \mathbf{g}_1 \end{array}$$

一般に、 \mathbf{G} の第 i 列 \mathbf{g}_i の計算には変法 (1°) で記述したように \mathbf{t}_i の初期値を得てのち、上の手順 (i) と (iii) の \mathbf{A} の代わりに、次式の左辺で示される \mathbf{A} の残差行列

$$\mathbf{A}_{(i+1)} = \mathbf{A}_{(i)} - \mathbf{g}_i \mathbf{t}_i', \quad i = 1, 2, 3, \dots, q-1$$

を使用して (iii) から出発する。その他の手順は変法 (1°) と同様である。

(4°) 斉時一般バリマックス法 この方法は変法 (2°) のようにすべての q 個の因子が同時にバリマックス基準による簡素構造を満たし、しかも変法 (3°) におけるように +1 より小さくない冪乗の因子負荷量の分散を最大にするような回転解を与える。

この基準と計算式の特徴は、

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad k = 2m_1 / (2m_2 - 1)$$

とにおいて、 m_1 と m_2 を正整数でまた $m_1 \geq m_2$ とするとき、Kaiser の基準を一般化した関数

$$\text{tr.} \left[\mathbf{G}^{(k)'} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{G}^{(k)} \right] \equiv \phi$$

を $\mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I}$ なる条件下で最大にするような \mathbf{T} を求めることである。さらに、上式は \mathbf{A} と \mathbf{t}_i により、次のように書き直せる。

$$\phi = \sum_i \mathbf{t}_i' \mathbf{A}' \mathbf{D}_{\mathbf{g}_i}^{k-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{D}_{\mathbf{g}_i}^{k-1} \mathbf{A} \mathbf{t}_i$$

したがって、ここでふたたびラグランジュの方法により、次式の関数

$$\Psi = \phi - k \text{tr.} [\mathbf{T}' \mathbf{T} \mathbf{A}]$$

を考える。ここに A はラグランジュの乗数の対角線行列である。この ψ を T の各列ベクトル t_i' で偏微分し、その結果をゼロとおくと

$$A'D_{g_i}{}^{k-1}\left(I - \frac{11'}{p}\right)D_{g_i}{}^{k-1}At_i - T\lambda_i = 0$$

を得る。これを i についてまとめると

$$A'B = TA, \text{ または } T = A'BA^{-1}$$

$$\text{ここに } B \equiv [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q],$$

$$\beta_i \equiv g_i^{(2k-1)} - \frac{1}{p}g_i^{(k-1)}1'g_i^{(k)}$$

となる。これを解くには、まえの変法(2°)におけるのと全く同様に正規直交行列 P, Q を用い、

$$A'B = PAQ'$$

とおく。ここに A は対角線行列である。このとき上の T は

$$T = A'BQA^{-1}Q'$$

と書ける。

数値計算にはまず G に近似する初期値から出発し PAQ' を求め、次いで $PQ' = T$ によって T を算出して $AT = G$ を得る。ここで反復計算のために、得られた G によって B の値を更新する。このような反復収束を手順で示すと次のようになる。

$$\left[\begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \text{(iv)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} g_i^{(2k-1)} - \frac{1}{p}g_i^{(k-1)}1'g_i^{(k)} = \beta_i, \quad B \equiv [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q] \\ A'B = PAQ' \\ A'BQA^{-1}Q' = T \\ AT = G \end{array}$$

5.2.4 バリジム法

1962年に Hurley と Cattell によってプロクラステス問題 (Procrustes problem) が因子分析にとり入れられて以来、これに類した発想によって新たな回転法が開発されてきている。

元来この問題は、与えられた二つの $p \times q$ 行列 A と B に関し、 A にある

直交変換 T を施し B に近似する際、その残差行列 $E = AT - B$ を最小にするような T を最小2乗法で求める。これを直交プロクラステス問題 (orthogonal Procrustes problem) とよび、具体的な数式のうえでは

$$TT' = T'T = I \quad (5.29)$$

の条件下で、

$$AT = B + E \quad (5.30)$$

として、 $\text{tr}\{E'E\}$ を最小にする T を求めることである。

このような T はラグランジュの乗数からなる q 次対角線行列 L を用いて、

$$\begin{aligned} \phi &\equiv \text{tr}\{EE'\} + \text{tr}\{L(T'T - I)\} \\ &= \text{tr}\{T'A'AT - 2T'A'B + B'B\} + \text{tr}\{L(T'T - I)\} \end{aligned} \quad (5.31)$$

を T の各要素で偏微分し、ゼロとおいて整理した次の連立方程式

$$S = PT + TQ \quad (5.32)$$

$$\text{ここに } P \equiv AA', \quad S \equiv A'B, \quad Q \equiv 2(L + L') \quad (5.33)$$

を式 (5.29) のもとに解いて得られる。

しかし、実際に上式を解くには、既知として得られる対称行列 $S'S$ および SS' から始められる。この双方の行列の q 個の固有値は同じで、これらを要素とする対角線行列を D_s とおく。また、双方の固有ベクトルを対応する固有値順に列に並べた行列をそれぞれ W および V とすると

$$SS' = WD_sW', \quad S'S = VD_sV' \quad (5.34)$$

$$\text{ここに } WW' = W'W = VV' = V'V = I \quad (5.35)$$

と書ける。さらに、 SS' は $TS'ST'$ にも等しいことが容易に示され

$$WD_sW' = TVD_sV'T' \quad (5.36)$$

が得られる。

したがって、

$$W = TV \quad \text{または} \quad T = WV' \quad (5.37)$$

が知れ、求めんとする T が得られることになる。

とくに、 A と B の双方の列の数がランクになっているとき、すなわち行列 SS' が正値定符号 (positive definite) ならば、 $TT' = I$ のもとでの B.F.

Green の結果は上の特殊解として示され、式 (5.24) は

$$S = (P+Q)T \quad (5.38)$$

と得られる。したがって、

$$SS' = (P+Q)^2 \quad (5.39)$$

さらに

$$P+Q = (SS')^{1/2} = WD_s^{1/2}W \quad (5.40)$$

によって、式 (5.37) の代わりに

$$T = (SS')^{-1/2}S \quad (5.41)$$

が得られる。この結果は直交プロクラステス問題の特別の場合であるが、因子分析の回転法の開発にしばしば直接的に利用されている。

さて、この直交プロクラステス問題の解を適用する一つの試みとして、P. H. Schönemann は 1966 年にバリジム法 (VARISIM method) とよばれる直交回転を開発し具体的な方向を示唆している。次にこの方法を要約する。

いま、上のように因子負荷行列を A 、直角回転行列を T とし、回転して得られる因子負荷行列を前項からの G とすると、この G は上記のプロクラステス問題の B に対応している。ここで、 A の第 i 行ベクトルを a_i' 、 T の第 j 列ベクトルを t_j とし、 G の (i, j) 要素を g_{ij} とすると

$$AT = (a_i't_j) = (g_{ij}) = G \quad (5.42)$$

であり、Kaiser のバリマックス基準を最大にするためには、ラグランジュの乗数行列 L を用いた次の関数 ϕ をつくり

$$\phi = p \sum_j \sum_i (a_i't_j)^4 - \sum_j \left\{ \sum_i (a_i't_j)^2 \right\}^2 + \text{tr.} \{L(T'T - I)\}, \quad (5.43)$$

この ϕ を T で偏微分し、結果をゼロとおいて整理すると次式をうる。

$$S = PT + TQD_0^{-1} \quad (5.44)$$

ここに

$$P = A'A, \quad D_0 = \text{diag}(T'A'AT), \quad S = A'G^* \quad (5.45)$$

$$G^* = p(AT)^{(3)}D_0^{-1}, \quad Q = -(L+L')/4 = Q'$$

上の式において $(AT)^{(3)}$ は AT の要素をそのまま 3 乗してできる行列を示している。

このように回転基準から得られる式は、ほとんどさきの式 (5.32) または

(5.38)に類似した形式になり、式の形のよいときには代数解が得られることがある。しかし、このバリマックス基準の場合には、 \mathbf{G}^* 自身が求めようとする \mathbf{T} の関数になっているために、反復収束法によらざるをえない。

この数値解法は、まず与えられた $p \times q$ の因子負荷行列 \mathbf{A}^\dagger をインプットして各列につき規準化する。この規準化の変換行列を \mathbf{N} 、規準化された負荷行列を \mathbf{A} とし、同時にこれを回転のための初期行列 \mathbf{G}_0 とする。

そして式 (5.40), (5.41) および (5.45) による反復計算で最終的に収束精度を満たす \mathbf{T} を求める。最後に \mathbf{N} を \mathbf{A} に乗じた \mathbf{A}^\dagger にスケールをあわせて因子パターン \mathbf{G}^\dagger を得ることになる。このバリジムのアルゴリズムを次に示す。

- (i) \mathbf{A}^\dagger を読み、 $\mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^\dagger$ とする \mathbf{A} と \mathbf{N}^{-1} を求める。
- (ii) $\mathbf{G}_0 = \mathbf{A}$
- (iii) $\mathbf{D}_i = \text{diag}(\mathbf{G}_{i-1}'\mathbf{G}_{i-1})$
- (iv) $\mathbf{G}_i^* = p\mathbf{G}_{i-1}^{(3)}\mathbf{G}_i^{-1}$
- (v) $\mathbf{S}_i = \mathbf{A}'\mathbf{G}_i^\dagger$
- (vi) $\mathbf{S}_i\mathbf{S}_i' = \mathbf{W}\mathbf{D}_{S_i}\mathbf{W}'$ なる \mathbf{W} と \mathbf{D}_{S_i} を求める。このとき、 \mathbf{D}_{S_i} のすべての要素 d_{s_i} が負でなければ (vii) にすすむ。もし、負を示すものがあれば計算を中止し、原因の検討を要する。
- (vii) $\mathbf{T}_i = \mathbf{W}_i\mathbf{D}_{S_i}^{-1/2}\mathbf{W}_i'\mathbf{S}_i$
- (viii) $\mathbf{E}_i = \mathbf{A}\mathbf{T}_i - \mathbf{G}_{i-1}^* \equiv (e_{kj}^{(i)})$ として、 $\text{tr}(\mathbf{E}_i'\mathbf{E}_i)$ が最小になるように \mathbf{T}_i の各列の方向(符号)を定め、 \mathbf{E}_i を決める。
- (ix) $\max_{k,j} |e_{kj}^{(i)}|$ をあらかじめ指定した収束の精度定数 c と比較し、これより大きければ (x) にすすむ。もし大きくなければ、(viii) における \mathbf{T}_i によって結果を表示する (xi) にすすむ。
- ← (x) $\mathbf{G}_i = \mathbf{A}\mathbf{T}_i$ によって、新たに \mathbf{G}_i を求め、収束のための巡回回数 i を増し、手順 (iii) から反復する。
- (xi) $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{N}\mathbf{A}$ によって、 $\mathbf{G}_i^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{T}_i$ を算出する。この \mathbf{G}_i^\dagger がバリジム法での結果である。このとき参考として、巡回の回数や最終的な $\max_{k,j} |e_{kj}^{(i)}|$ と c との差や \mathbf{T}_i をも表示できるようにしておくといよい。

次に、このバリジム法と周知のバリマックス法との回転結果の性格的な比較

を吟味しておく。もちろん、双方とも定式化と回転の基準が全く異なるわけで、一概にその長短を論じることは複雑である。しかし、検証的な文献や適用経験によりいくつかの性格が知られている。

まず、回転行列 T を得る際の安定性に関し、本項のバリジウム法はバリマックス法よりも安定していることがいえる。一般に、バリマックス法では初期の因子負荷行列の微細な差異にも敏感に変化し、とかく気がかりをもつことがある。他方、バリジウム法ではこのような初期の因子負荷行列の無作為な変化にも比較的安定した結果が得られる。このことは、いずれも回転行列の一意性 (uniqueness) を有しているが、バリマックス法のほうが十分すぎるほどにきびしい回転の停止基準をもっていることになる。

また、観測値ベクトルの分散成分に対する回転後の因子行列の寄与の割合を比較してみよう。この寄与の割合は、斜交でも直交の場合でも因子行列の列要素の2乗和に比例するが、一般にバリジウム法はバリマックス法よりも寄与の割合がいくぶん大きい。とくに、行列が大きいほどこの傾向はめだち、バリジウム法の好ましい性質の一つとされる。

次いで、双方の因子軸を直交性のできばえという観点から考察しよう。Schönemann の検証によると、バリジウム法の結果は、バリマックス法よりも斜交回転の結果とくにカイザー・ディックマン法による斜交解にやや近いことがいわれている。したがって、直交性の立場ではバリマックス法がすぐれ、他方、カイザー・ディックマン法が斜交解であってもこれによる因子は平均的に相関の度合いが低く、実用的に好ましいといわれる意味では、バリジウム法も直交解のうちで好ましいものの一つと考える。

終わりに、やはり重要な性質として演算処理の時間について比較してみる。この場合、明らかにバリマックス法がバリジウム法より速く、10因子程度の場合で後者は前者の5ないし10倍以上の時間を要し費用のかかるものになっている。

このようなことから現段階のバリジウム法はいくぶんの長所を有しながらも、知名度の高いバリマックス法にとって代わるほどの有用性を示すに至っていないと結論される。

5.3 数個の因子負荷行列を同時に相似な簡素化構造とする直交回転法

前節までの直交回転法は、一群の観測標本により一つの因子負荷行列を推定し、これを回転して簡素化構造を得るという多因子解法の中の一つの標準的な手順であった。

しかし、ある場合には、異なった時点やカテゴリーで数個の観測標本群 (sub-population) を得て比較することがある。このとき前節のような回転法をそれぞれの因子負荷行列に別個に行なうと、必ずしも同様な共通因子がみられるという保証はなく、むしろ異種の因子が抽出・解釈されてくることが多い。もちろん、異種の因子によって異なった時点やカテゴリーでの対象の性格を比較検討する立場もあるわけである。しかし、もし推論のモデルとして因子の不変性 (factorial invariance) を前提としているのであれば、異種の因子が抽出されてきたのでは困るわけで、上記のように各因子負荷行列を別々に回転したのでは因子の不変性という観点から不都合である。

このような k 個の母集団間の因子の不変性について、Meredeth (1964) は共通因子と観測特性の間で線形性と誤差分散の等質性の二つを仮定したとき、式 (3.1) と (3.4) に関して任意の第 s 母集団から観測された確率ベクトル

$$\mathbf{x}_{(s)} = \mathbf{A}\mathbf{f}_{(s)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(s)}, \quad 1 \leq s \leq k \quad (5.46)$$

の母分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{(s)}$ が

$$\boldsymbol{\Sigma}_{(s)} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}_{(s)}\mathbf{A}' + \boldsymbol{\Psi} \quad (5.47)$$

で表現できることを示している。そして、この二つの仮定が同時に満たされなければ、因子解の性質として因子に関する不変性は成立せず、因子パターン行列も残差誤差行列も各母集団ごとに異なってくるわけである。

しかし、この Meredeth の仮定だけからでは、なお次の二つの立場が考えられる。すなわち、因子評点の分散共分散行列部分を一定に保って、母集団ごとの因子パターン行列に差異の変化をもたす立場と、因子パターン行列を同じ一定のものにして各母集団の因子評点の分散共分散行列に差異の変化をもたせる立場とがある。ここでは、もちろん、後者の立場をとるわけであるが、この

ときにも、標本によって推定された各因子パターン行列の差異については、それが無作為な変動によるためか否かということや、また別の観点から、母集団の比較に先だち、各因子行列が簡素化構造のうえで十分によい接近を示し解釈しやすい結果になっているか否かという現実問題に直面する。Cliff (1966) は、これらに関し 2 因子の場合に限って、各因子負荷行列に直交回転を逐次行なっていく方法を示した。

Bloxom (1968) は、これをさらに一般化し、 k 個の母集団の各 q 個の共通因子の不変性に関して、同時に最大の相似性と簡素化構造が得られるような直交回転の方法を提唱した。したがって、この方法によると、実質科学上で検証を意図する因子の場合にも、また探索的にどのような因子が抽出されるかという場合でも、環境・時間・カテゴリーなど条件の異なる数個の母集団を通じて不変な共通因子を抽出し解釈するのに有効である。

いま、式 (4.4) の \mathbf{G} , \mathbf{A} , \mathbf{T} と同様に、第 s 母集団についてのそれぞれを $\mathbf{G}_{(s)}$, $\mathbf{A}_{(s)}$, $\mathbf{T}_{(s)}$ で示すことにする。すなわち

$$\mathbf{G}_{(s)} = \mathbf{A}_{(s)} \mathbf{T}_{(s)}, \quad s = 1, 2, \dots, k \quad (5.48)$$

とし、すべての s を通じて因子数は同じ q 個であると仮定する。

このとき本節での問題は、任意の s に関する $\mathbf{G}_{(s)}$ が、他の $k-1$ 個の s' に関する $\mathbf{G}_{(s')}$ と最大に相似 (maximum similarity) になって、しかも、そのような相似な $\mathbf{G}_{(s)}$ が簡素構造になるように直交変換行列 $\mathbf{T}_{(s)}$ を求めることである。

さて、ここで簡素化構造を得る一つの良好な基準 (criterion) としては、すでに 5.2.3 項の (2°) で Kaiser や Horst の示したバリマックス基準

$$\phi_{(s,s)} = \text{tr.} \left[\mathbf{G}_{(s)}^{(2)'} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{G}_{(s)}^{(2)} \right] \quad (5.49)$$

があげられる。ここに $\mathbf{G}_{(s)}^{(2)}$ とは $\mathbf{G}_{(s)}$ の各要素の 2 乗値をそのまま置き得られる行列を示している。

また一方、Horst (1966) は上の基準 $\phi_{(s,s)}$ の添字を変えた次の関数

$$\phi_{(s,s')} = \text{tr.} \left[\mathbf{G}_{(s)}^{(2)'} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{G}_{(s')}^{(2)} \right] \quad (5.50)$$

が $\mathbf{G}_{(s)}$ と $\mathbf{G}_{(s')}$ の間の相似性を示す一つの指標になることを示唆し、これをコバリマックス基準 (covarimax criterion) とよんでいる。この基準は $\mathbf{G}_{(s)}$ ⁽²⁾ と $\mathbf{G}_{(s')}$ ⁽²⁾ の対応する列の共分散の和に関するものである。

したがって、上の二つの基準について

$$\sum_{s'=1}^k \phi_{(s,s')}$$

を考えると、 $s \neq s'$ であるすべての s' については $\mathbf{G}_{(s)}$ と $\mathbf{G}_{(s')}$ の相似性に関する基準値を含み、さらに $s=s'$ については $\mathbf{G}_{(s)}$ 自身のバリマックス基準による簡素構造を得る基準値をも含んでいることが知れる。そして、いずれも最大化が望ましい基準値の和になっている。そこで Bloxom は、これを特定の s についてでなく、すべての s についての和を基準値として

$$\psi = \sum_{s=1}^k \sum_{s'=1}^k \phi_{(s,s')} \quad (5.51)$$

を提唱した。

このようにして本節の解析的問題は、すべての $s=1, 2, \dots, k$ について

$$\mathbf{T}_{(s)} \mathbf{T}_{(s)'} = \mathbf{T}_{(s)'} \mathbf{T}_{(s)} = \mathbf{I} \quad (5.52)$$

という条件下で、式(5.51)の ψ を最大にする $\mathbf{T}_{(1)}, \mathbf{T}_{(2)}, \dots, \mathbf{T}_{(k)}$ を同時に求めることになる。

この解法は、常法により、まず条件式(5.52)にラグランジュの乗数を付して ψ に加えた関数をつくる。次いで、これを $\mathbf{T}_{(s)}$ の各要素で偏微分してゼロとおき、 $\mathbf{T}_{(s)}$ の要素とラグランジュの乗数に関する連立方程式を解くことになる。この際に、上の関数を $\mathbf{T}_{(s)}$ の各要素で偏微分する観点からいうと、各 $\mathbf{G}_{(s)}$ の列 j ごとの寄与 ϕ_j を考えればよく、

$$\begin{aligned} \phi_j \equiv & \sum_{s=1}^k \sum_{s'=1}^k \mathbf{G}_{(s)j} \mathbf{G}_{(s')j}^{(2)'} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{G}_{(s')j} \mathbf{G}_{(s)j}^{(2)} \\ & - \sum_{s=1}^k \{ (\mathbf{T}_{(s)j}' \mathbf{T}_{(s)j} - 1) \lambda_{(s)jj} + 2 \sum_{j' \neq j} \mathbf{T}_{(s)j'} \mathbf{T}_{(s)j} \lambda_{(s)jj'} \}, \quad j=1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (5.53)$$

について $\mathbf{T}_{(s)}$ の第 j 列ベクトル $\mathbf{T}_{(s)j}$ の要素で最大化すればよいことが知られる。ここに $\lambda_{(s)jj}$ や $\lambda_{(s)jj'}$ はラグランジュの乗数である。

さて、この $\partial\phi_j/\partial\mathbf{T}_{(s)j}$ の実行に先だって、 ϕ_j の右辺をすべての $\mathbf{A}_{(s)}$ と $\mathbf{T}_{(s)}$ の要素にもどしておかねばならずかなり複雑な式となるが、偏微分を実行してゼロとおいた結果を整頓すると、次式が得られる。

$$\mathbf{A}_{(s)j}'\mathbf{G}_{(s)j} - \mathbf{T}_{(s)j}\lambda_{(s)j} = 0 \quad (5.54)$$

$$\text{ここに } \mathbf{G}_{(s)j} \equiv \sum_{\substack{k \\ j'=1 \\ (j' \neq j)}}^k \mathbf{D}_{G(s)j} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{G}_{(s')j}^{(2)} + 2\mathbf{D}_{G(s)j} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}'}{p} \right) \mathbf{G}_{(s)j}^{(2)} \quad (5.55)$$

で、 $\mathbf{D}_{G(s)j}$ は $\mathbf{G}_{(s)j}$ の要素を対角とする対角線行列を示している。さらに、上式 (5.54) を $j=1, 2, \dots, q$ についてまとめると、

$$\mathbf{A}_{(s)j}'\mathbf{G}_{(s)j} - \mathbf{T}_{(s)j}\lambda_{(s)j} = 0 \quad (5.56)$$

が得られる。また、 $\mathbf{A}_{(s)}$ が正則であることを用いれば、変換行列 $\mathbf{T}_{(s)}$ は

$$\mathbf{T}_{(s)} = \mathbf{A}_{(s)j}'\mathbf{G}_{(s)j}\mathbf{A}_{(s)j}^{-1} \quad (5.57)$$

で示されることになる。

このような $\mathbf{T}_{(s)}$ によって $\mathbf{A}_{(s)}\mathbf{T}_{(s)} = \mathbf{G}_{(s)}$ は与えられるのであるが、この $\mathbf{T}_{(s)}$ を得るには、上式の $\mathbf{A}_{(s)j}^{-1}$ を直接に算出せず、 q 次の二つの正規直交行列を導入させ逐次的に $\mathbf{G}_{(s)}$ と $\mathbf{T}_{(s)}$ を更新する Eckart-Young 法によって反復収束して得られる。この解法の考え方と具体的な計算手順は、すでにまえの 5.2.3 項の(2°)および(4°)で示しているものと同じである。

5.4 計算プログラム

5.4.1 クァーティマックス法

回転に関して不定性をもつ因子負荷行列に直交回転を行なう一法として、Burt によるクァーティマックス回転を行なう。この回転は、与えられた因子負荷行列の行(観測特性)方向の要素の4乗の分散の和、すなわち、因子負荷行列の要素の乗和を基準として最大化する変換を行なうことになる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
K	変数の数	A(I, J)	因子負荷行列, のちに回転後の負荷行列, 共有性, 分散
NF	共通因子の数	LCY	巡回回数
IC	ゼロのとき最終結果のみ, 1 ならば中間の巡回結果も示す	QN	クォーティマックスの基準値
DC	収束判定のための定数	DIF	巡回前後の基準値の差
A	因子負荷行列	TRM(I, J)	変換行列

C ORTHOGONAL ROTATION BY QUARTIMAX METHOD

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

K --- NO. OF VARIABLES
 NF --- NO. OF FACTORS
 IC --- 0, TO OUTPUT EVERY INTERMEDIATE AND FINAL RESULTS
 --- 1, TO OUTPUT FINAL RESULTS ONLY
 DC --- DIFFERENCE OF CRITERIONS TO SEE CONVERGENCE
 A --- INPUT LOADING MATRIX

```

DIMENSION A(30,30),TRM(10,10)
1 READ (40,100) K,NF,IC,DC
WRITE (50,200)
DO 2 J=1,NF
READ (40,101) (A(I,J),I=1,K)
2 WRITE (50,201) (A(I,J),I=1,K)
OP=0.0
LCY=0

DO 4 I=1,NF
DO 3 J=1,NF
3 TRM(I,J)=0.0
4 TRM(I,1)=1.0
5 QN=0.0
DO 6 I=1,K
6 A(I,NF+1)=0.0
DO 7 J=1,NF
A(K+1,J)=0.0
DO 7 I=1,K

A(I,NF+1)=A(I,NF+1)+A(I,J)**2
A(K+1,J)=A(K+1,J)+A(I,J)**2
7 QN=QN+A(I,J)**4
DIF=ABS(QN-OP)
IF(DIF-DC) 9,9,8
8 IF(IC*LCY) 9,9,17
9 NF=NF+1
WRITE (50,202) LCY,NF
KS=1
KE=5

10 IF(NF-KE) 11,11,12
11 KE=NF
12 WRITE (50,203) (J,J=KS,KE)
DO 13 I=1,K
13 WRITE (50,204) I,(A(I,J),J=KS,KE)
IF(NF-KE) 14,14,15
14 KE=KE-1
WRITE (50,205) (A(K+1,J),J=KS,KE)
NF=NF-1
GO TO 16
    
```

```

15 WRITE (50,205) (A(K+1,J),J=KS,KE)
   KS=KE+1
   KE=KE+5
   GO TO 10
16 WRITE (50,206) @N,DIF
   IF(DIF-DC) 33,33,17
17 OP=@N
   LCY=LCY+1
   MM=NF-1
   DO 32 J=1,MM

   II=J+1
   DO 32 I=II,NF
   V=0,0
   D=0,0
   DO 18 L=1,K
   V=V+4,0*A(L,J)*A(L,I)*A(L,J)**2-A(L,I)**2
18 D=D+(A(L,J)**2-A(L,I)**2)**2-(2,0*A(L,J)*A(L,I))**2
   IF(D) 19,32,19
19 EE=ABS(D)+ABS(V)-0,000001
   IF(EE) 32,32,20

20 TANF=ABS(V/D)
   IF(TANF-0,001159) 21,21,23
21 IF(D) 22,32,32
22 SN=0,707108
   CS=SN
   GO TO 27
23 IF(TANF-57,2899) 25,24,24
24 SN=0,38019
   CS=0,92491
   GO TO 27

25 CS=1,0/SQRT(1,0+TANF*TANF)
   SN=CS*TANF
   CS=SQRT((1,0+CS)/2,0)
   SN=SN/(2,0*CS)
   CS=SQRT((1,0+CS)/2,0)
   SN=SN/(2,0*CS)
   IF(D) 26,27,27
26 TEMP=CS
   CS=0,707108*(CS+SN)
   SN=0,707108*(TEMP-SN)

27 IF(V) 28,29,29
28 SN=-SN
29 DO 30 L=1,K
   TEMP=A(L,J)
   A(L,J)=A(L,J)*CS+A(L,I)*SN
30 A(L,I)=A(L,I)*CS-TEMP*SN
   DO 31 L=1,NF
   W=TRM(L,J)*CS+TRM(L,I)*SN
   TRM(L,I)=TRM(L,I)*CS-TRM(L,J)*SN
31 TRM(L,J)=W

32 CONTINUE
   GO TO 5
33 WRITE (50,207)
   WRITE (50,203)
   DO 34 I=1,NF
34 WRITE (50,204) I,(TRM(I,J),J=1,NF)
   GO TO 1
100 FORMAT (3I2,F10,8)
101 FORMAT (12F6,5)
200 FORMAT (21H INPUT LOADING MATRIX/)

```

```

201 FORMAT (8F10.5/)
202 FORMAT (/28H QUARTIMAX SOLUTION OF CYCLE,14, //50X,4HCOL.,,13,20H SH
10WS COMMUNALITIES)
203 FORMAT (/ //10X,5(18,2X))
204 FORMAT (/110,5F10.4)
205 FORMAT (/2X,8HVARIANCE,5F10.4)
206 FORMAT (/10X,19HQUARTIMAX CRITERION,F12.8,5X,11HDIFFERENCE ,F12.8/
1//)
207 FORMAT (/ //23H TRANSFORMATION MATRIX )
STOP
END
    
```

5.4.2 バリマックス法

直交回転法の一つで、Kaiser によるバリマックス法を行なう。ここでは、因子負荷行列の列(因子)方向の要素の2乗の分散を基準とする粗バリマックス基準を改良し、とくに共有性の平方根で負荷行列の各要素を除いたものの2乗の分散の最大化を行なう。この方法は規準バリマックス法とよばれ、直交回転のうちでは最も頻繁に適用される。直交解であるから因子パターンと因子構造は同一で、同時に、初期の因子負荷行列に対する変換行列が共有性とともに入出力される。

入 力 (input)		出 力 (output)	
JOB	整理番号	INTE	巡回回数
INV	変量の数	FMX(I, J)	各巡回および最終の因子負荷行列
IFN	共通因子の数	VNEW	各巡回におけるバリマックス基準
MAX	巡回回数の限度	H(I)	巡回まえの共有性
IO	ゼロならば最終結果のみ 1ならば中間の巡回結果も示す	HN	巡回後の共有性
CONV	収束を判定するための基準値の 小さな差、たとえば 10^{-5}	HD	巡回前後の共有性の差
PMX(I, J)	因子負荷行列	TRM(I, J)	変換行列

```

C      ORTHOGONAL ROTATION BY KAISERS VARIMAX METHOD
C
C
C      INV --- NO. OF VARIABLES
C      INF --- NO. OF FACTORS
C      MAX --- MAX. NO. OF ITERATIONS IN A CYCLE
C      IO --- 0. TO LIST UP FINAL RESULTS ONLY
C            1. TO LIST UP EVERY INTERMEDIATE AND FINAL RESULTS
C
C      CONV --- DIFFERENCE OF CRITERION TO SEE CONVERGENCE
C
C      PMX --- INPUT LOADING MATRIX
C
C
    
```

```

DIMENSION PMX(30,10),FMX(30,10),H(30),TRM(10,10)
COMMON PMX,FMX,H,I1
1 READ (40,100) JOB,IVN,IFN,MAX,IO,CONV
WRITE (50,200)
WRITE (50,201) JOB,IVN,IFN,MAX,IO,CONV
CONST=0.707108
RESID=0.001159

DO 2 J=1,IFN
READ (40,101) (PMX(I,J),I=1,IVN)
DO 2 I=1,IFN
TRM(I,J)=0.0
2 TRM(J,J)=1.0
DO 4 I=1,IVN
H(I)=0.0
DO 3 J=1,IFN
3 H(I)=H(I)+PMX(I,J)*PMX(I,J)
H(I)=SQRT(H(I))

DO 4 J=1,IFN
4 PMX(I,J)=PMX(I,J)/H(I)
FN=IVN
VPRE=0.0
INTE=1
IFL=IFN-1
5 VNEW=0.0
DO 7 J=1,IFN
S=0.0
S2=0.0

DO 6 I=1,IVN
X=PMX(I,J)*PMX(I,J)
S=S+X
6 S2=S2+X*X
7 VNEW=VNEW+(FN*S2-S*S)/FN**2
DO 8 I=1,IVN
DO 8 J=1,IFN
8 FMX(I,J)=PMX(I,J)*H(I)
IF(IO) 11,11,9
9 WRITE (50,202) INTE

WRITE (50,203)
DO 10 I=1,IVN
10 WRITE (50,204) I,(FMX(I,J),J=1,IFN)
WRITE (50,206) VNEW
11 IF(INTE=MAX) 12,12,34
12 IF(ABS(VNEW-VPRE)=CONV) 34,13,13
13 DO 33 J=1,IFL
I1=J+1
DO 33 K=I1,IFN
A=0.0

B=0.0
C=0.0
D=0.0
DO 14 I=1,IVN
P1=PMX(I,J)
P2=PMX(I,K)
U=P1*P1-P2*P2
V=2.0*P1*P2
C=C+U*U-V*V
D=D+2.0*U*V

```

```

A=A+U
14 B=B+V
D=D-2.0*A*B/FN
B=C-(A*A-B*B)/FN
IF(D-B) 15,20,22
15 IF(B) 16,33,16
16 TAN4P=ABS(D/B)
IF(TAN4P-RESID) 17,19,19
17 IF(B) 18,33,33
18 SINP=CONST

COSP=CONST
GO TO 30
19 COS4P=1.0/SQRT(1.0+TAN4P**2)
SIN4P=COS4P*TAN4P
GO TO 25
20 IF(D+B-RESID) 33,21,21
21 COS4P=CONST
SIN4P=CONST
GO TO 25
22 TAN4P=ABS(D/B)

IF(TAN4P-RESID) 23,24,24
23 COS4P=0.0
SIN4P=1.0
GO TO 25
24 SIN4P=1.0/SQRT(1.0+TAN4P**2)
COS4P=TAN4P*SIN4P
25 COS2P=SQRT((1.0+COS4P)/2.0)
SIN2P=SIN4P/(2.0*COS2P)
COSW=SQRT((1.0+COS2P)/2.0)
SINW=SIN2P/(2.0*COSW)

IF(B) 26,26,27
26 COSP=(COSW+SINW)*CONST
SINP=(COSW-SINW)*CONST
GO TO 28
27 COSP=COSW
SINP=SINW
28 IF(D) 29,29,30
29 SINP=-SINP
30 DO 31 I=1,IVN
P1=PMX(I,J)*COSP+PMX(I,K)*SINP

P2=PMX(I,K)*COSP-PMX(I,J)*SINP
PMX(I,J)=P1
31 PMX(I,K)=P2
DO 32 I=1,IFN
W=TRM(I,J)*COSP+TRM(I,K)*SINP
TRM(I,K)=TRM(I,K)*COSP-TRM(I,J)*SINP
32 TRM(I,J)=W
33 CONTINUE
INTE=INTE+1
VPRE=VNEW

GO TO 5
34 WRITE(50,207)
DO 36 I=1,IVN
H(I)=H(I)*H(I)
IIN=0.0
DO 35 J=1,IFN
HN=HN+FMX(I,J)*FMX(I,J)
HD=HN-H(I)
36 WRITE(50,208) I,H(I),HN,HD
L=IFN/8

```

```

      IF (IFN-L*8) 37,38,37
37  L=L+1
38  DO 41 J=1,L
      K=J*8
      K1=K-7
      IF (K-IFN) 40,40,39
39  K=IFN
      K1=(J-1)*8+1
40  WRITE (50,209)
      WRITE (50,210) (I,I=K1,K)

      DO 41 I=1,1VN
41  WRITE (50,204) I,(FMX(I,J),JJ=K1,K)
      WRITE (50,212) (I,I=1,IFN)
      DO 42 I=1,IFN
42  WRITE (50,204) I,(TRM(I,J),J=1,IFN)
      WRITE (50,211)
      WRITE (50,213) VNEW
      GO TO 1
100 FORMAT (5I2,F12.5)
101 FORMAT (12F6.5)

200 FORMAT (1X,16HVARIMAX ANALYSIS///)
201 FORMAT (1X,18HDESIGN OF ROTATION///1X, 7HJOB      ,I2//3X,15HNO.OF V
1A VARIABLES,15, 5X14 HNO.OF FACTORS ,15//3X,15HMAX. ITERAT, C.,15//3X
2,16HINTER, 1/O SPEC.,14// 3X,16HCONST. FOR CONV.,1X,E12.5//)
202 FORMAT (3X, 9HCYCLE      ,I3//)
203 FORMAT (3X,27HINTERMEDIATE FACTOR MATRIX //)
204 FORMAT (12,8(1X,F8.5))
205 FORMAT (1X)
206 FORMAT (//3X,17HVARIMAX CRITERION,5X,F15.8//)
207 FORMAT (//5X,46H PRE.COMMUNARITY NEW COMMUNARITY DIFFERENCE,/)

208 FORMAT (3X,I2,3(5X,F10.5))
209 FORMAT (//3X,13HFACTOR MATRIX//)
210 FORMAT (2X,8(1X,4H F,12.2X))
211 FORMAT (//)
212 FORMAT (//22H TRANSFORMATION MATRIX//2X,8(16,3X))
213 FORMAT (/3X,14HTOTAL VARIANCE,F12.5/)
      STOP
      END

```

5.4.3 逐次バリマックス法

前項のバリマックス法の一つの変法として開発された逐次バリマックス法による直交回転を行なう。この回転法は、因子負荷行列の列(因子)方向に要素の2乗の分散をそのまま考える粗バリマックス基準に基づき、一つの因子負荷ベクトルごとに基準を最大ならしめ、かつ、互いに直交するベクトルとして逐次算出する。

入 力 (input)		出 力 (output)	
P	収束判定定数	A(I, J)	因子負荷行列
N	変数の数	B(I, J)	回転後の最終因子負荷行列
M	共通因子の数	SQ(I)	因子軸とテスト項目との距離の平方和
NL	巡回回数限度	KV(I)	巡回回数
A(I, J)	因子負荷行列	H(I, J)	変換行列


```

C      SUCCESSIVE FACTOR VARIMAX ROTATION
C
C
C      P --- CONSTANT FOR CONVERGENCE
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      M --- NO. OF FACTORS
C      NL --- MAX. NO. OF ITERATIVE CYCLE
C      A --- LOADING MATRIX
C
C      SUBROUTINE VARI2 IS REQUIRED
C
      DIMENSION A(30,10),B(30,10),H(10,10),C(30),V(30),S0(10),KV(10)
      DIMENSION BS(10),W(10),U(10)
      COMMON A,B
1  READ (40,100) P,N,M,NL
      WRITE (50,200)
      WRITE (50,201) (J,J=1,M)
      DO 2 J=1,M
2  READ (40,101) (A(I,J),I=1,N)

      DO 4 I=1,N
      WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,M)
      C(I)=0.0
      DO 3 J=1,M
3  C(I)=C(I)+A(I,J)**2
      C(I)=1.0/SQRT(C(I))
      DO 4 J=1,M
4  A(I,J)=C(I)*A(I,J)
      DO 5 J=1,M
      W(J)=0.0

      DO 5 I=1,N
5  W(J)=W(J)+A(I,J)
      FN=N
      AL=0.0
      DO 6 J=1,M
6  AL=AL+W(J)**2
      AL=1.0/SQRT(AL)
      DO 7 J=1,M
7  W(J)=W(J)*AL
      DO 8 I=1,N

      V(I)=0.0
      DO 8 J=1,M
8  V(I)=V(I)+A(I,J)*W(J)
      DO 22 L=1,M
      LA=1
      DO 10 I=2,N
      IF(V(LA)-V(I)) 10,10,9
9  LA=I
10 CONTINUE
      DO 11 J=1,M

11 H(J,L)=A(LA,J)
      E=0.0
      DO 19 K=1,NL
      KV(L)=K
      DO 12 I=1,N
      B(I,L)=0.0
      DO 12 J=1,M
12 B(I,L)=B(I,L)+A(I,J)*H(J,L)
      BS(L)=0.0
      DO 13 I=1,N

```

```

13 BS(L)=BS(L)+R(I,L)**2
   BS(L)=BS(L)/FN
   E1=E
   E=AL
   IF(P=ABS(E1/E-1.0)) 14,14,20
14 DO 15 I=1,N
15 B(I,L)=B(I,L)**3-B(I,L)*BS(L)
   DO 16 J=1,M
   U(J)=0.0
   DO 16 I=1,N

16 U(J)=U(J)+B(I,L)*A(I,J)
   AL=0.0
   DO 17 J=1,M
17 AL=AL+U(J)**2
   AL=SQRT(AL)
   DO 18 J=1,M
18 H(J,L)=U(J)/AL
19 CONTINUE
20 DO 21 I=1,N
   DO 21 J=1,M

21 A(I,J)=A(I,J)-B(I,L)*H(J,L)
   SQ(L)=AL
   DO 22 I=1,N
22 V(I)=V(I)+B(I,L)
   CALL VAR12 (V,C,N,M,NL,P)
   WRITE (50,203)
   WRITE (50,201) (I,I=1,M)
   DO 23 I=1,N
23 WRITE (50,202) I,(B(I,J),J=1,M)
   WRITE (50,204) (SQ(I),I=1,M)

   WRITE (50,205) (KV(I),I=1,M)
   WRITE (50,206)
   WRITE (50,201) (I,I=1,M)
   DO 24 I=1,M
24 WRITE (50,202) I,(H(I,J),J=1,M)
   GO TO 1
100 FORMAT (F5.4,3I5)
101 FORMAT (12F6.5)
200 FORMAT (//15X,34HSUCCESSIVE FACTOR VARIMAX ROTATION//13H INPUT MAT
1RIX)

201 FORMAT (15X,7(16.3X))
202 FORMAT (10X,14.1X,7(F8.4,1X))
203 FORMAT (/17H VARIMAX SOLUTION)
204 FORMAT (/15H SUM OF SQ.ROOT,7(F8.4,1X))
205 FORMAT (/12H CYCLE NO. ,3X,7(16.3X))
206 FORMAT (//22H TRANSFORMATION MATRIX/)
STOP
END

```

[付] サブルーティン

```

C SUBROUTINE OF VARIMAX
C
C
SUBROUTINE VAR12 (W,V,N,M,NL,P)
DIMENSION A(30,10),B(30,10),W(30),V(30)
COMMON A,B
DO 3 I=1,M
DO 2 J=1,M
A(I,J)=0.0
DO 1 K=1,N

```

```

1  A(I,J)=A(I,J)+B(K,I)*B(K,J)
2  A(J,I)=A(I,J)
3  V(I)=1.0
   E=0.0
   DO 8  L=1,NL
   AL=0.0
   DO 5  I=1,M
   W(I)=0.0
   DO 4  J=1,M
4  W(I)=W(I)+A(I,J)*V(J)

5  AL=AL+W(I)*V(I)
   AL=SQRT(AL)
   E1=E
   E=AL
   IF(P-ABS(E1/E-1.)) 6,6,9
6  DO 7  I=1,M
7  V(I)=W(I)/AL
8  CONTINUE
9  DO 10 I=1,N
   W(I)=0.0

   DO 10 J=1,M
10 W(I)=W(I)+B(I,J)*V(J)
   DO 11 I=1,N
   DO 11 J=1,M
   S=SIGN(1.0,W(I))*SIGN(1.0,V(J))
11 B(I,J)=B(I,J)*S
   RETURN
   END

```

5.4.4 斉時バリマックス法

5.3.2項のバリマックス法の変法で、斉時バリマックス法とよばれる計算を行なう。この基準は5.3.2項のバリマックス法と同じで、逐次近似法によってバリマックス因子負荷行列を得る。とくに、この変法は計算誤差が自己修正されて誤差を蓄積しない利点をもつ。また、計算速度のうえでは、大きい行列の計算ほど5.3.2項の方法よりはよい。

入 力 (input)		出 力 (output)	
P	収束判定定数	A(J, I)	因子負荷行列
N	変数の数	B(I, J)	回転後の最終因子負荷行列
M	共通因子の数	SQ(I)	因子軸とテスト項目との距離の平方和
NL	巡回回数の限度	H(L, J)	変換行列
A(J, I)	因子負荷行列		

```

C      SIMULTANEOUS FACTOR VARIMAX ROTATION
C
C
C      P --- CONSTANT FOR CONVERGENCE
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      M --- NO. OF FACTORS
C      NL --- MAX. NO. OF ITERATIVE CYCLE
C      A --- LOADING MATRIX
C

```

C
C
C

SUBROUTINE VARI1 AND VARI2 ARE REQUIRED

```

DIMENSION A(30,10),B(30,10),H(10,10),S(10,10),C(30),V(10),KV(30)
DIMENSION BS(10),W(30),U(30),SQ(10)
COMMON A,B
1 READ (40,100) P,N,M,NL
WRITE (50,200)
DO 2 I=1,M
2 READ (40,101) (A(J,I),J=1,N)

FN=N
DO 4 I=1,N
WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,M)
C(I)=0.0
DO 3 J=1,M
3 C(I)=C(I)+A(I,J)**2
C(I)=1.0/SQRT(C(I))
DO 4 J=1,M
A(I,J)=C(I)*A(I,J)
4 B(I,J)=A(I,J)

E=0.0
DO 14 L=1,NL
LF=L
DO 6 J=1,M
BS(J)=0.0
DO 5 I=1,N
5 BS(J)=BS(J)+B(I,J)**2
6 BS(J)=BS(J)/FN
DO 7 I=1,N
DO 7 J=1,M

7 B(I,J)=B(I,J)**3-B(I,J)*BS(J)
DO 8 I=1,M
DO 8 J=1,M
S(I,J)=0.0
DO 8 K=1,N
8 S(I,J)=S(I,J)+A(K,I)*B(K,J)
DO 9 I=1,M
DO 9 J=1,M
H(I,J)=0.0
DO 9 K=1,M

9 H(I,J)=H(I,J)+S(K,I)*S(K,J)
CALL VARI1 (H,W,P,M,NL)
G=0.0
DO 10 J=1,M
G=G+W(J)
10 W(J)=1.0/SQRT(W(J))
DO 11 I=1,M
IM=I+M
DO 11 J=1,M
JM=J+M

H(I,J)=0.0
DO 11 K=1,M
11 H(I,J)=H(I,J)+H(IM,K)*W(K)*H(JM,K)
DO 12 I=1,M
IM=I+M
DO 12 J=1,M
H(IM,J)=0.0
DO 12 K=1,M
12 H(IM,J)=H(IM,J)+S(I,K)*H(K,J)
DO 13 I=1,N

```

```

DO 13 J=1,M
B(I,J)=0.0
DO 13 K=1,M
KM=K+M
13 B(I,J)=B(I,J)+A(I,K)*H(KM,J)
E1=E
E=G
IF(ABS(E1/E-1.0)-P) 15,15,14
14 CONTINUE
15 CALL VARI1 (W,V,N,M,NL,P)

WRITE (50,201)
WRITE (50,203) (I,I=1,M)
DO 16 I=1,N
16 WRITE (50,202) I,(B(I,J),J=1,M)
DO 17 J=1,M
SQ(J)=0.0
DO 17 I=1,N
17 SQ(J)=SQ(J)+R(I,J)**2
WRITE (50,204) (SQ(I),I=1,M)
WRITE (50,205) L

WRITE (50,206)
WRITE (50,203) (I,I=1,M)
DO 18 I=1,M
L=I+M
18 WRITE (50,202) I,(H(L,J),J=1,M)
GO TO 1
100 FORMAT (F5.4,3I5)
101 FORMAT (12F6.5)
200 FORMAT (15X,36HSIMULTANEOUS FACTOR VARIMAX ROTATION//13H INPUT MAT
1RIX)

201 FORMAT (/17H VARIMAX SOLUTION)
202 FORMAT (10X,14,1X,7(F8.4,1X))
203 FORMAT (15X,7(16.3X))
204 FORMAT (/15H SUM OF SQUARES,7(F8.4,1X))
205 FORMAT (/6H CYCLE,5X,15)
206 FORMAT (//22H TRANSFORMATION MATRIX/^
STOP
END

```

[付] サブルーティン 1

```

C      SUBROUTINE OF VARIMAX
C
SUBROUTINE VARI1 (R,B,P,N,NL)
DIMENSION R(10,10),D(30)
N1=N+1
N11=N-1
N2=N*2
DO 1 I=N1,N2
DO 1 J=1,N

1 R(I,J)=0.0
DO 2 I=1,N
N1=N+1
2 R(N1,I)=1.0
DO 9 L=1,NL
DO 3 I=1,N
3 D(I)=R(I,I)
DO 5 I=1,N11
I1=I+1
DO 5 J=I1,N

```

```

DR=R(I,I)-R(J,J)
A=SQRT(DR**2+4.0*R(I,J)**2)
A=SQRT((A+DR)/(2.0*A))
B=SQRT(1.0-A**2)
C=SIGN(1.0,R(I,J))
DO 4 K=1,N2
U=R(K,I)*A+C*R(K,J)*B
R(K,J)=-R(K,I)*B+C*R(K,J)*A
4 R(K,I)=U
DO 5 K=1,N

U=R(I,K)*A+C*R(J,K)*B
R(J,K)=-R(I,K)*B+C*R(J,K)*A
5 R(I,K)=U
DO 6 I=1,N
D(I)=ABS(D(I)-R(I,I))
S=0.0
DO 7 I=1,N
7 S=AMAX1(S,D(I))
DO 8 I=1,N
8 D(I)=R(I,I)

IF(S-P) 10,10,9
9 CONTINUE
10 RETURN
END

```

[付] サブルーティン 2

```

C
C
SUBROUTINE OF VARIMAX

SUBROUTINE VAR12 (W,V,N,M,NL,P)
DIMENSION A(30,10),B(30,10),W(30),V(30)
COMMON A,B
DO 3 I=1,M
DO 2 J=I,M
A(I,J)=0.0
DO 1 K=1,N

1 A(I,J)=A(I,J)+B(K,I)*B(K,J)
2 A(J,I)=A(I,J)
3 V(I)=1.0
E=0.0
DO 8 L=1,NL
AL=0.0
DO 5 I=1,M
W(I)=0.0
DO 4 J=I,M
4 W(I)=W(I)+A(I,J)*V(J)

5 AL=AL+W(I)*V(I)
AL=SQRT(AL)
E1=E
E=AL
IF(P-ABS(E1/E-1.)) 6,6,9
6 DO 7 I=1,M
7 V(I)=W(I)/AL
8 CONTINUE
9 DO 10 I=1,N
W(I)=0.0

```

```

DO 10 J=1,M
10 W(I)=W(I)+B(I,J)*V(J)
DO 11 I=1,N
DO 11 J=1,M
S=SIGN(1.0,W(I))*SIGN(1.0,V(J))
11 B(I,J)=B(I,J)*S
RETURN
END
    
```

5.4.5 逐次一般バリマックス法

バリマックス法の変法で、逐次一般バリマックス法を行なう。この方法は、5.3.3項と同様に、反復計算の毎回の過程で一つずつの因子負荷ベクトルを与える。しかも、この変法の特徴は、最大化するバリマックス基準の一般化をはかり、1より小さくない任意の正の偶数乗の因子負荷要素の分散値を基準として最大化する回転法になっている。また、この回転法の特殊な場合として、因子負荷行列の絶対値の分散を最大にする回転をも与えることができる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
P	収束判定定数	A(I, J)	因子負荷行列
N	変数の数	B(I, J)	回転後の最終因子負荷行列
M	共通因子の数	SQ(I)	因子軸とテスト項目との距離の平方和
NL	巡回回数限度	KV(I)	巡回回数
A(I, J)	因子負荷行列	H(I, J)	変換行列

```

C      SUCCESSIVE FACTOR GENERAL VARIMAX
C
C
C      P --- CONSTANT FOR CONVERGENCE
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      M --- NO. OF FACTORS
C      NL --- MAX. NO. OF ITERATIVE CYCLE
C      FM1 --- AN INTEGER NOT LESS THAN 1
C      FM2 --- AN INTEGER NOT GREATER THAN FM1
C
C      TO GIVE A GENERAL POWER F OF FACTOR LOADING
C      ELEMENTS, F=2.*FM1/(2.*FM2-1.)
C      A --- LOADING MATRIX
C
C      SUBROUTINE VARI2 IS REQUIRED
C
C
C      DIMENSION A(30,10),B(30,10),H(10,10),C(30),V(30)
C      DIMENSION KV(10),BS(10),W(10),U(30),SQ(10)
C      COMMON A,B
    
```

```

1 READ (40,100) P,N,M,NL,FM1,FM2
  WRITE (50,200)
  DO 2 J=1,M
2 READ (40,101) (A(I,J),I=1,N)
  WRITE (50,201) (J,J=1,M)
  FN=N
  DO 4 I=1,N
  C(I)=0.0
  WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,M)
  DO 3 J=1,M

3 C(I)=C(I)+A(I,J)**2
  C(I)=1.0/SQRT(C(I))
  DO 4 J=1,M
4 A(I,J)=C(I)*A(I,J)
  F=(2.0*FM1)/(2.0*FM2-1.0)
  F1=F-1.0
  F2=2.0*F-1.0
  AL=0.0
  DO 6 J=1,M
  W(J)=0.0

  DO 5 I=1,N
5 W(J)=W(J)+A(I,J)
6 AL=AL+W(J)**2
  AL=1.0/SQRT(AL)
  DO 7 J=1,M
7 W(J)=W(J)*AL
  DO 8 I=1,N
  V(I)=0.0
  DO 8 J=1,M
8 V(I)=V(I)+A(I,J)*W(J)

  DO 23 L=1,M
  LA=1
  DO 10 I=2,N
  IF(V(LA)-V(I)) 10,10,9
9 LA=I
10 CONTINUE
  DO 11 J=1,M
11 H(J,LA)=A(LA,J)
  E=0.0
  DO 19 K=1,NL

  KV(L)=K
  DO 12 I=1,N
  B(I,L)=0.0
  DO 12 J=1,M
12 B(I,L)=B(I,L)+A(I,J)*H(J,L)
  BS(L)=0.0
  DO 13 I=1,N
  C(I)=(B(I,L)+C(I))/2.0
  B(I,L)=C(I)
  BIL=ABS(B(I,L))

13 BS(L)=BS(L)+EXP(F*ALOG(BIL))
  BS(L)=BS(L)/FN
  E1=E
  E=AL
  IF(P-ABS(E1/E-1.0)) 14,14,20
14 DO 15 I=1,N
  BIL=ABS(B(I,L))
  SI=SIGN(1.0,B(I,L))
15 B(I,L)=SI*(EXP(F2*ALOG(BIL))-(EXP(F1*ALOG(BIL)))*)BS(L)
  AL=0.0

```



```

DO 17 J=1,M
U(J)=0.0
DO 16 I=1,N
16 U(J)=U(J)+R(I,L)*A(I,J)
17 AL=AL+U(J)**2
AL=SQRT(AL)
SQ(L)=AL
DO 18 J=1,M
18 H(J,L)=U(J)/AL
19 CONTINUE

20 DO 21 I=1,N
B(I,L)=C(I)
DO 21 J=1,M
21 A(I,J)=A(I,J)-B(I,L)*H(J,L)
DO 23 I=1,N
U(I)=0.0
DO 22 J=1,M
22 U(I)=U(I)+A(I,J)*H(J,L)
23 V(I)=V(I)+B(I,L)
CALL VAR12 (V,C,N,M,NL,P)

WRITE (50,203)
WRITE (50,201) (I,I=1,M)
DO 24 I=1,N
24 WRITE (50,202) I,(B(I,J),J=1,M)
WRITE (50,204) (SQ(I),I=1,M)
WRITE (50,205) (KV(I),I=1,M)
WRITE (50,206)
WRITE (50,201) (I,I=1,M)
DO 25 I=1,M
25 WRITE (50,202) I,(H(I,J),J=1,M)

GO TO 1
100 FORMAT (F5.4,3I5,2F5.0)
101 FORMAT (I2F6.5)
200 FORMAT (15X,33HSUCCESSIVE FACTOR GENERAL VARIMAX//12HINPUT MATRIX)
201 FORMAT (15X,7(I6,3X))
202 FORMAT (10X,I4,1X,7(F8.4,1X))
203 FORMAT (/17H VARIMAX SOLUTION)
204 FORMAT (/15H SUM OF SQ.ROOT,7(F8.4,1X))
205 FORMAT (/12H CYCLE NO. ,3X,7(I6,3X))
206 FORMAT (/22H TRANSFORMATION MATRIX/)

STOP
END

```

[付] サブルーティン

```

C SUBROUTINE OF VARIMAX
C
C SUBROUTINE VAR12 (W,V,N,M,NL,P)
DIMENSION A(30,10),B(30,10),W(30),V(30)
COMMON A,B
DO 3 I=1,M
DO 2 J=1,M
A(I,J)=0.0
DO 1 K=1,N

```

```

1 A(I,J)=A(I,J)+B(K,I)*B(K,J)
2 A(J,I)=A(I,J)
3 V(I)=1.0
  E=0.0
  DO 8 L=1,NL
  AL=0.0
  DO 5 I=1,M
  W(I)=0.0
  DO 4 J=1,M
4 W(I)=W(I)+A(I,J)*V(J)

5 AL=AL+W(I)*V(I)
  AL=SQRT(AL)
  E1=E
  E=AL
  IF(P-ABS(E1/E-1.)) 6,6,9
6 DO 7 I=1,M
7 V(I)=W(I)/AL
8 CONTINUE
9 DO 10 I=1,N
  W(I)=0.0

  DO 10 J=1,M
10 W(I)=W(I)+B(I,J)*V(J)
  DO 11 I=1,N
  DO 11 J=1,M
  S=SIGN(1.0,W(I))*SIGN(1.0,V(J))
11 B(I,J)=B(I,J)*S
  RETURN
  END

```

5.4.6 斉時一般バリマックス法

これもバリマックス法の変法で、斉時一般バリマックス法を行なう。前々項のように反復収束法によりいっせいに直交変換された因子負荷行列を同時に求めるが、この際の回転基準に関しては前項と同様の一般化をはかったものである。

入 力 (input)		出 力 (output)	
P	収束判定定数	A(I, J)	因子負荷行列
N	変数の数	B(I, J)	回転後の最終因子負荷行列
M	共通因子の数	SQ(I)	因子軸とテスト項目との距離の平方和
NL	巡回回数 の 限度	KV(I)	巡回回数
A(I, J)	因子負荷行列	H(I, J)	変換行列

```

C SIMULTANEOUS FACTOR GENERAL VARIMAX
C
C
C
C P --- CONSTANT FOR CONVERGENCE
C N --- NO. OF VARIABLES
C M --- NO. OF FACTORS
C NL --- MAX. NO. OF ITERATIVE CYCLE
C FM1 --- AN INTEGER NOT LESS THAN 1
C FM2 --- AN INTEGER NOT GREATER THAN FM1

```

```

C          TO GIVE A GENERAL POWER F OF FACTOR LOADING
C          ELEMENTS, F=2.*FM1/(2.*FM2-1.)
C          A --- LOADING MATRIX
C          SUBROUTINE VARI1 AND VARI2 ARE REQUIRED
C
DIMENSION A(30,10),B(30,10),H(10,10),S(10,10),C(30),V(30),BS(10)
DIMENSION W(10),SQ(10)
COMMON A,B

1 READ (40,100) P,N,M,NL,FM1,FM2
WRITE (50,200)
DO 2 J=1,M
2 READ (40,101) (A(I,J),I=1,N)
FN=N
WRITE (50,201) (J,J=1,M)
F=(2.0*FM1)/(2.0*FM2-1.0)
F1=F-1.0
F2=2.0*F-1.0
DO 4 I=1,N

WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,M)
C(I)=0.0
DO 3 J=1,M
3 C(I)=C(I)+A(I,J)**2
C(I)=1.0/SQRT(C(I))
DO 4 J=1,M
A(I,J)=C(I)*A(I,J)
4 B(I,J)=A(I,J)
E=0.0
DO 14 L=1,NL

LF=L
DO 6 J=1,M
BS(J)=0.0
DO 5 I=1,N
BIJ=ABS(B(I,J))
5 BS(J)=BS(J)+EXP(F*ALOG(BIJ))
6 BS(J)=BS(J)/FN
DO 7 I=1,N
DO 7 J=1,M
BIJ=ABS(B(I,J))

SI=SIGN(1.0,B(I,J))
7 B(I,J)=SI*(EXP(F2*ALOG(BIJ))-(EXP(F1*ALOG(BIJ))))*BS(J)
DO 8 I=1,M
DO 8 J=1,M
S(I,J)=0.0
DO 8 K=1,N
8 S(I,J)=S(I,J)+A(K,I)*B(K,J)
DO 9 I=1,M
DO 9 J=1,M
H(I,J)=0.0

DO 9 K=1,M
9 H(I,J)=H(I,J)+S(K,I)*S(K,J)
CALL VARI1 (H,W,P,M,NL)
G=0.0
DO 10 J=1,M
G=G+W(J)
10 W(J)=1.0/SQRT(W(J))
DO 11 I=1,M
IM=I+M
DO 11 J=1,M

```

```

JM=J+M
H(I,J)=0.0
DO 11 K=1,M
11 H(I,J)=H(I,J)+H(IM,K)*W(K)*H(JM,K)
DO 12 I=1,M
IM=I+M
DO 12 J=1,M
H(IM,J)=0.0
DO 12 K=1,M
12 H(IM,J)=H(IM,J)+S(I,K)*H(K,J)

DO 13 I=1,N
DO 13 J=1,M
B(I,J)=0.0
DO 13 K=1,M
KM=K+M
13 B(I,J)=B(I,J)+A(I,K)*H(KM,J)
E1=E
E=G
IF(ABS(E1/E-1.0)=P) 15,15,14
14 CONTINUE

15 WRITE (50,203) LF
CALL VARI2 (V,C,N,M,NL,P)
WRITE (50,204)
WRITE (50,201) (I,I=1,M)
DO 16 I=1,N
16 WRITE (50,202) I,(B(I,J),J=1,M)
DO 17 J=1,M
SQ(J)=0.0
DO 17 I=1,N
17 SQ(J)=SQ(J)+B(I,J)**2

WRITE (50,205) (SQ(I),I=1,M)
WRITE (50,206)
WRITE (50,201) (J,J=1,M)
DO 18 I=1,M
IM=I+M
18 WRITE (50,202) I,(H(IM,J),J=1,M)
GO TO 1
100 FORMAT (F5.4,3I5,2F5.0)
101 FORMAT (12F6.5)
200 FORMAT (15X,35HSMULTANEOUS FACTOR GENERAL VARIMAX//13H INPUT MATR

11X)
201 FORMAT (15X,7(I6,3X))
202 FORMAT (10X,I4,1X,7(F8.4,1X))
203 FORMAT (/12H CYCLE NO. ,4X,I5)
204 FORMAT (/17H VARIMAX SOLUTION)
205 FORMAT (/15H SUM OF SQUARES,7(F8.4,1X))
206 FORMAT (/22H TRANSFORMATION MATRIX/)
STOP
END

```

[付] サブルーティン 1

```

C      SUBROUTINE OF VARIMAX
C
C      SUBROUTINE VARI1 (R,D,P,N,NL)
      DIMENSION R(10,10),D(10)
      N1=N+1
      N11=N-1
      N2=N*2
      DO 1 I=N1,N2
      DO 1 J=1,N

```

```

1 R(I,J)=0.0
  DO 2 I=1,N
    NI=N+I
2 R(NI,I)=1.0
  DO 9 L=1,NL
    DO 3 I=1,N
3 D(I)=R(I,I)
  DO 5 I=1,N11
    I1=I+1
    DO 5 J=I1,N
      DR=R(I,I)-R(J,J)
      A=SQRT(DR**2+4.0*R(I,J)**2)
      A=SQRT((A+DR)/(2.0*A))
      B=SQRT(1.0-A**2)
      C=SIGN(1.0,R(I,J))
      DO 4 K=1,N2
        U=R(K,I)*A*C+R(K,J)*B
        R(K,J)=-R(K,I)*B*C+R(K,J)*A
4 R(K,I)=U
    DO 5 K=1,N

      U=R(I,K)*A*C+R(J,K)*B
      R(J,K)=-R(I,K)*B*C+R(J,K)*A
5 R(I,K)=U
    DO 6 I=1,N
6 D(I)=ABS(D(I))-R(I,I)
    S=0.0
    DO 7 I=1,N
7 S=AMAX1(S,D(I))
    DO 8 I=1,N
8 D(I)=R(I,I)

    IF(S-P) 10,10,9
9 CONTINUE
10 RETURN
END

```

[付] サブルーティン 2

```

C      SUBROUTINE OF VARIMAX
C
C      SUBROUTINE VAR12 (W,V,N,M,NL,P)
      DIMENSION A(30,10),B(30,10),W(30),V(30)
      COMMON A,B
      DO 3 I=1,M
      DO 2 J=1,M
      A(I,J)=0.0
      DO 1 K=1,N

1 A(I,J)=A(I,J)+B(K,I)*B(K,J)
2 A(J,I)=A(I,J)
3 V(I)=1.0
  E=0.0
  DO 8 L=1,NL
  AL=0.0
  DO 5 I=1,M
  W(I)=0.0
  DO 4 J=1,M
4 W(I)=W(I)+A(I,J)*V(J)

```

```
5 AL=AL+W(I)*V(I)
  AL=SQRT(AL)
  E1=E
  E=AL
  IF(P-ABS(E1/E-1.)) 6,6,9
6 DO 7 I=1,M
7 V(I)=W(I)/AL
8 CONTINUE
9 DO 10 I=1,N
  W(I)=0.0

  DO 10 J=1,M
10 W(I)=W(I)+B(I,J)*V(J)
  DO 11 I=1,N
  DO 11 J=1,M
  S=SIGN(1.0,W(I))*SIGN(1.0,V(J))
11 B(I,J)=B(I,J)*S
  RETURN
END
```

6 斜交回転法

因子分析法が考えられた比較的初期のころには、当然のように互いに無相関な因子のみが対象として構造模型の中で仮定されていた。その後、互いに相関性のある因子による表現も受け容れられるようになり、さらに無相関な因子のみを考えるよりも、むしろ自然で好ましいとさえ思われてきている。もちろん、斜交解で規定する条件は、因子間がもともと無相関であってもなんら妨げるものでなく、そのような因子が存在しても支障ない。この種の回転法は、初期にはセントロイド法による直交解に多く適用されていたが、一般にどのような直交解からでも斜交解を得ることができる。また、回転まえの共通因子空間で決められた各観測特性の共有性も、この斜交回転によって変わらない。事実、すべての配慮は、定めた共通因子空間の中で行なわれている。さらに、斜交回転に際し注意すべきことは、第4章でも簡単にふれたように、因子パターン (factor pattern) と因子構造 (factor structure) の区別が必要になることである。これまで因子間を互いに無相関とした直交回転の場合、両者の関係は同じ内容となり区別は不要なわけであった。

さて共通因子空間において、因子パターンとは式 (3.1) の A 自身、または A を $AT \equiv G$ と変換し $T^{-1}f$ を改めて f とし x_j の共通因子部分

$$\xi_j = g_{j1}f_1 + g_{j2}f_2 + \cdots + g_{jq}f_q, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (6.1)$$

の係数行列 G をいう。ここに f_1, f_2, \dots, f_q は互いに無相関な因子でもなんらかの相関をもつ因子でもよい。このとき係数 ($g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jq}$) は、1点 P_j の q 本の因子軸に関する座標と考える。

次の図 6.1 は、2 因子の場合を示している。

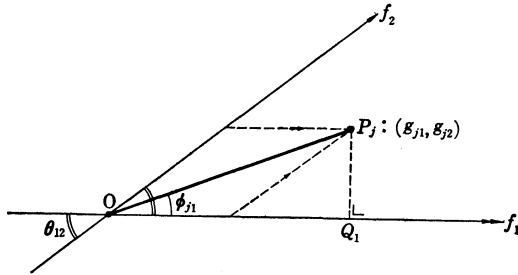


図 6.1 斜交因子軸の観測特性点

この図で 2 本の軸 f_1 と f_2 のなす角を θ_{12} とすると、2 因子間の相関 ρ_{12} は、 $\rho_{12} = \cos \theta_{12}$ で与えられる。また、この第 j 観測特性ベクトル OP_j の長さ d_j は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} d_j^2 &= g_{j1}^2 + g_{j2}^2 + 2g_{j1}g_{j2} \cos \theta_{12} \\ (\because \cos(\pi - \theta_{12}) &= -\cos \theta_{12}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

また、上式は共通因子空間でのベクトルの長さに関するもので、右辺は第 j 観測特性の共有性 h_j^2 に相当している。したがって

$$d_j = h_j, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (6.3)$$

が成立している。2 因子軸が直交しているときは、 $\rho_{12} = \cos \theta_{12} = 0$ として上式が成立する。

次に、各因子と各観測特性間の相関性について考えよう。このような相関表を因子構造 (factor structure) という。すなわち、式 (3.1) の共通因子部分

$$\xi_j = a_{j1}f_1 + a_{j2}f_2 + \dots + a_{jq}f_q, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (6.4)$$

と f_i の相関係数は母数として

$$\begin{aligned} \rho_{\xi_j f_i} &= a_{j1}\rho_{f_1 f_i} + a_{j2}\rho_{f_2 f_i} + \dots + a_{jq}\rho_{f_q f_i} \\ i &= 1, 2, \dots, q \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (6.5)$$

によって示され、各 i と j による行列を因子構造という。通常は、共通因子のみを因子分析の対象とするので、特殊因子と観測特性の相関係数 $\rho_{\xi_j f_i}$ は無視している。また、共通因子空間内で変換 \mathbf{T} を行なった結果については、式

(6.5)におけるすべての a_{ji} を g_{ji} に取り替えたもので示される。

上の因子構造の要素が、因子パターンに係数 a_{ji} と異なることは自明であるが、とくに共通因子 f_i ($i=1, 2, \dots, q$) が互いに無相関すなわち直交していると $\rho_{f_i f_{i'}}=0$ ($i \neq i'$) であるから、式 (6.5) は

$$\rho_{\varepsilon_j f_i} = g_{ji}, \quad i=1, 2, \dots, q \quad j=1, 2, \dots, p \quad (6.6)$$

となる。したがって、直交因子の場合に限って、因子構造の要素は因子パターンの対応する係数と同じであることが知れる。

これをさきの図 6.1 で考察しよう。いま、点 P_j と f_1 のなす角を ϕ_{j1} 、 P_j から f_1 に至る足を OQ_1 とする。このとき、 $OQ_1 = h_j \cos \phi_{j1}$ であるから、式 (6.5) より

$$\rho_{\varepsilon_j f_1} = g_{j1} + g_{j2} \rho_{12} = g_{j1} + g_{j2} \cos \theta_{12} = OQ_1 \quad (6.7)$$

が成立し、また次式が得られる。

$$\rho_{\varepsilon_j f_1} = h_j \cos \phi_{j2} = OQ_1 \quad (6.8)$$

これで明らかなように、座標 g_{ij} は絶対値 1 より大きい正負の値をとりうるが、 $\rho_{\varepsilon_j f_i}$ は必ず +1 と -1 の間の値をとる。また座標と相関の値が近接するのは、因子軸が直交に近づく場合である。

したがって、因子分析法で互いに相関する因子を含めるときは、必ず式 (6.1) の形の因子パターンと式 (6.5) の因子構造の双方を求めねばならない。因子構造も、通常、行列の形で整理する。また斜交解のときは、因子間の相関表や交角も算出する必要がある。

6.1 斜交根元因子解

ここでは Thurstone によって根元 (primary) と名づけられた斜交因子 (oblique primary factor) を抽出する方法について記述する。根元とは、心理学的に考察した際に、真の心理学的因子を表現しているという意味でよばれるのであるが、次のような重要な考察を含んでいる。

斜交回転では、 q 次元空間の同一平面内にできるだけ多くの観測特性点が含まれるように意図するので、これらの点群は超平面の交線にひきつけられる傾向がある。したがって、この交線上の観測特性は他の特性よりも低い複雑度

(complexity) を示していると考えられ、根元因子軸 (primary factor axis) 上の観測特性はたかだか $q-2$ の複雑度を有していることになる。そして1本の根元因子軸の上に位置する観測特性が、真に心理学的因子であるとして純粋な変量と考えられている。さらに、解析的にも次項の斜交参考解 (oblique reference solution) と区別するために斜交根元因子解 (oblique primary solution) という名称でよんでいる。

この斜交回転法は、それまでに得られた直交解から出発し、簡素構造 (simple structure) の原則を満たすような斜交因子解に導く。各因子を表現する座標軸は後章の多群解法 (multiple group solution) と同様の方法で選択され、計算過程として次の段階を経る。

手順 1—初期の直交解の準備

この際は任意の直交解、たとえば成因分析解やセントロイド解または双因子解 (第11章) などから出発してよい。

手順 2—縮小因子パターン (reduced pattern)

斜交解を示す座標軸は、観測特性点の q 個の各集落 G_j ($j=1, 2, \dots, q$) の重心と原点とを結んだ q 本の直線で定められる。この集落化には観測特性の群分け (grouping) が必要で、直交解を導いてきた解析結果によるか、または後章の多群解法によるか、または最初の因子解や観測特性の点群のグラフを視察して決めるのが常法である。

まず、ここではグラフによる方法について説明しよう。このグラフ法は全く主観を重んじた視察によって、観測特性点の各群の重心と座標の原点を結ぶのであるが、次の思考に基づく。

いま観測特性 $\{x_i\}$ の第 j 群 G_j には n_j 個の特性が属しているとし、この集落を通る次のような一つの複合変量 (composite variable) v_j の存在を仮定する。

$$v_j = \sum_{i=1}^{n_j} x_i, \quad i \in G_j, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (6.9)$$

この複合変量の期待値はもちろんゼロで、分散は

$$\sigma_{v_j}^2 = \sum_{i, i'} r_{ii'} = n_j + \sum_{i \neq i'} r_{ii'} \quad (6.10)$$

与えられる。

さて、このような複合変量は、回転まえの因子解における因子で表現することができる。この線形式の係数は、複合変量と初期の直交解が示す因子との相関係数であって、因子負荷量が規準化されているために複合変量 v_j とある因子 A との相関係数は、次式で示される。

$$r_{v_j A} = \frac{1}{\sigma_{v_j}} \sum_i r_{iA}, \quad i \in G_j \quad (6.11)$$

ここに、 r_{iA} は個々の観測特性と因子の相関係数を示しているが、これは第 j 群 G_j に含まれる観測変量に関する回転まえの直交因子負荷行列の要素に相当している(式(6.6)参照)。

このようにして得られた式(6.11)の値によって、複合変量 v_j は次式で示される。

$$v_j = \sum_{k=1}^q r_{v_j A_k} A_k, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (6.12)$$

この式を v_j/σ_{v_j} によって規準化したものを縮小因子パターンとよぶ。

ここで、検証数値例について計算手順を示そう。この例は、図2.1で示したように、全く任意な2因子として縦長と横幅をもとに作成したものであるから、斜交回転した結果がどのように解されるか興味があろう。

図6.2の打点は、一つの直交解として表2.4で示した成因分析の結果を示し、ここでは破線で囲んだように2群 G_1 と G_2 を想定する。

このとき、各群の複合変量 v_1 と v_2 の分散は式(6.10)によって表2.2から

$$\sigma_{v_1}^2 = 3 + 2(0.9998 + 0.9993 + 0.9994) = 8.9970, \quad \sigma_{v_2}^2 = 19.9462$$

となり、 v_1 、 v_2 と各因子との相関係数は、式(6.11)により

$$r_{v_1 A_1} = (0.5807 + 0.5804 + 0.6060) / \sqrt{8.9970} = 0.5891$$

$$r_{v_1 A_2} = (0.8138 + 0.8142 + 0.7953) / \sqrt{8.9970} = 0.8079$$

$$r_{v_2 A_1} = (0.9200 + 0.5395 + 0.9975 + 0.9978 + 0.9895) / \sqrt{19.9462} \\ = 0.9951$$

$$r_{v_2 A_2} = (0.3916 - 0.8417 - 0.0652 + 0.0652 + 0.1438) / \sqrt{19.9462} \\ = -0.1124$$

と得られる。

さて、規準化された複合変量を u_j とすると

$$u_j = v_j / \sigma_j, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (6.13)$$

であるから、検証数値例の最終的な縮小因子パターンは

$$u_1 = v_1 / \sigma_1 = 0.5891A_1 + 0.8079A_2$$

$$u_2 = v_2 / \sigma_2 = 0.9951A_1 - 0.1124A_2$$

となる。

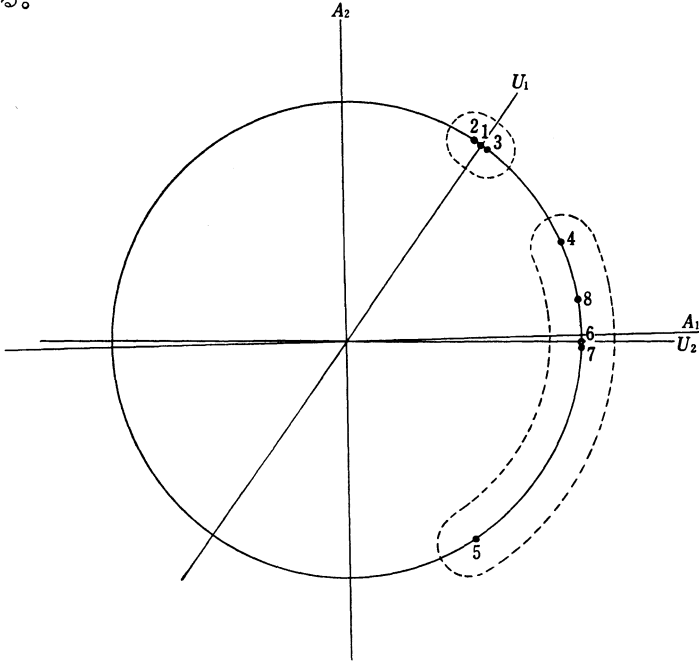


図 6.2 複合変量による縮小パターン

手順 3—変換行列 (transformation matrix)

斜交根元因子は上に得られた u_j に対応する点と原点を通る座標軸で表わされるから、縮小因子パターンは、回転まえの因子負荷行列に対する変換行列を定める基礎になる。縮小因子パターンの係数は複合変量点の座標を示すので、各点の座標を原点からのそれぞれの距離で割るとこの直線の方法余弦になる。すなわち、縮小因子パターンを

$$u_j = \sum_{k=1}^q c_{jk} A_k, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (6.14)$$

とすると、初期の直交軸 A_k に対する斜交軸 u_j の方向余弦 t_{kj} は

$$t_{kj} = c_{jk} / \sqrt{\sum_k c_{jk}^2}, \quad j, k = 1, 2, \dots, q \quad (6.15)$$

で与えられる。

さきの数値例で、原点からの距離は

$$\begin{aligned} \sqrt{0.5891^2 + 0.8079^2} &= 0.9999, \\ \sqrt{0.9951^2 + (-0.1124)^2} &= 1.0014 \end{aligned}$$

となり、 $t_{11}=0.5891/0.9999$, $t_{21}=0.8079/0.9999$, $t_{12}=0.9951/1.0014$, $t_{22}=-0.1124/1.0014$ である。したがって、変換行列 \mathbf{T} は次のようになる。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5892 & 0.9937 \\ 0.8080 & -0.1122 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

手順 4——因子間相関係数 (factor correlations)

斜交因子軸の方向余弦，すなわち変換行列が求められると，因子間の相関係数は容易に得られる。いま，変換行列 \mathbf{T} の任意の2列のなかで対応する要素どうしの積和は，この因子軸のなす角の余弦を示し，また，この余弦が因子軸で表現する複合変量間の相関係数にほかならない。したがって，次の関係式がなりたっている。

$$r_{U_j U_{j'}} = \sum_{k=1}^q t_{kj} t_{kj'} = \cos \theta_{jj'}, \quad j, j' = 1, 2, \dots, q \quad (6.17)$$

上の数値例では

$$r_{U_1 U_2} = 0.5892 \times 0.9937 - 0.1122 \times 0.8080 = 0.4948$$

を得，二つの斜交因子軸間のなす角度は

$$\theta_{12} = \arccos(0.4948) = 60^\circ 21'$$

となっていることがわかる。

手順 5——因子構造 (factor structure)

斜交根元因子軸が定められると，これで表現される因子と各観測特性との相関係数が因子構造の要素となる。このことはすでに第6章の初めに記述した。

いま，回転まえの直交因子空間で，任意の観測特性点を P_i ，その座標を (a_{i1}, a_{i2}) ，また斜交回転後のその点の座標を (g_{i1}, g_{i2}) として図 6.3 を想定する。

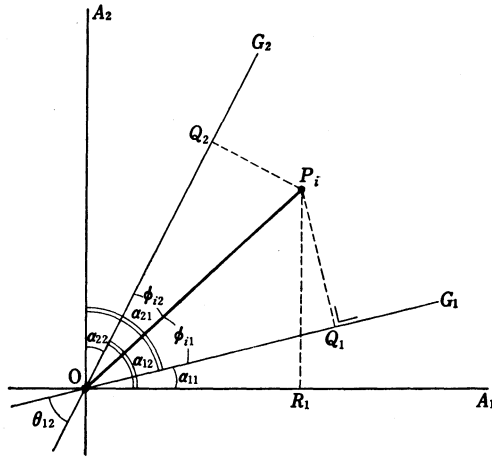


図 6.3 斜交根元因子構造

このとき G_1 軸上の OQ_1 の長さは r_{iG_1} で、 OP_i の長さは h_i であるから

$$r_{iG_1} = h_i \cos \phi_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6.18)$$

がなりたつ。さらにこの式の右辺を a_{i1} , a_{i2} によって表現するために次のように変形する。

$$\begin{aligned} r_{iG_1} &= h_i \cos(\phi_{i1} + \alpha_{11} - \alpha_{11}) \\ &= h_i \{\cos(\phi_{i1} + \alpha_{11}) \cos \alpha_{11} + \sin(\phi_{i1} + \alpha_{11}) \sin \alpha_{11}\} \\ &= a_{i1} \cos \alpha_{11} + a_{i2} \sin \alpha_{11} \end{aligned} \quad (6.19)$$

同様に、 G_2 軸の OQ_2 に関する r_{iG_2} は

$$r_{iG_2} = a_{i1} \cos \alpha_{12} + a_{i2} \sin \alpha_{12} = a_{i1} \sin \alpha_{22} + a_{i2} \cos \alpha_{22} \quad (6.20)$$

と得られる。式 (6.19) と (6.20) は行列演算で

$$[r_{iG_1}, r_{iG_2}] = [a_{i1}, a_{i2}] \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} \\ \sin \alpha_{11} & \sin \alpha_{12} \end{bmatrix} = [a_{i1}, a_{i2}] \mathbf{T} \quad (6.21)$$

として示され、変換行列 \mathbf{T} の第1列はそれぞれ A_1 , A_2 に関する G_1 の方向余弦を、第2列は A_1 , A_2 に関する G_2 の方向余弦を要素としていることが知れる。このことは G_1 , G_2 がどの象限にあってもなりたつ。

このように、式(6.21)の表現によると、因子構造の各要素を求める手順は因子が2個以上の場合にも、ベクトルや行列のランクを大きくするだけで他は同様である。したがって、斜交因子構造 Q を得るには回転まえの直交因子行列 A に変換行列 T を乗じて一般に

$$Q = AT \quad (6.22)$$

で要約される。

表 6.1 は検証数値例についての計算結果である。

表 6.1 検証数値例における斜交根元因子解

観測特性 No. (i)	因子構造		因子パターン	
	r_iG_1	r_iG_2	G_1	G_2
1	0.9997	0.4857	1.0056	-0.0118
2	0.9998	0.4854	1.0059	-0.0123
3	0.9997	0.5129	0.9878	0.0242
4	0.8585	0.8703	0.5666	0.5900
5	-0.3622	0.6305	-0.8927	1.0722
6	0.5350	0.9985	0.0542	0.9717
7	0.5352	0.9988	0.0543	0.9719
8	0.6992	0.9671	0.2922	0.8252
複合変量 No.	縮小構造		縮小パターン	
1	0.9999	0.4947	0.9999	-0.0001
2	0.4955	1.0000	0.0009	0.9995

因子構造は表 2.4 における因子負荷行列に右から式(6.16)を乗じたものであり、また縮小構造は手順 2 のおわりに得られた係数行列に右から T を乗じたものである。

手順 6—因子パターン (factor pattern)

互いに相関性が認められる因子についての解析を完遂するため、因子と観測特性の間の相関性を示す因子構造とともに、各観測特性を諸共通因子の線形式で表示することが必要になってくる。このときの係数は観測特性点の斜交軸における座標であり、回転まえの直交因子の負荷行列から直接に求められるが、むしろ手順 5 の斜交因子構造と因子パターンの関係によって得るほうが便利である。

いま、斜交因子パターンを簡単のために

$$x_i = g_{i1}G_1 + g_{i2}G_2, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6.23)$$

とするとき、この g_{i1} と g_{i2} を定めることがここでの問題である。さて、上式の両辺にそれぞれ G_1 および G_2 を乗じ n 個のデータについて平均したものを考えると、それぞれ

$$\begin{aligned} r_{iG_1} &= g_{i1} + g_{i2}r_{G_1G_2}, \\ r_{iG_2} &= g_{i1}r_{G_1G_2} + g_{i2}, \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6.24)$$

を得る。この式で r_{iG_1} および r_{iG_2} は因子構造の要素で、 $r_{G_1G_2}$ は手順4の因子相関係数である。式(6.24)は行列演算で

$$Q = G \cdot \theta \quad (6.25)$$

ここに

$$\theta \equiv \begin{bmatrix} 1 & r_{G_1G_2} \\ r_{G_1G_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

と示され、一般に因子数が q 個の場合に θ は q 次の対称行列である。

したがって、 G を得るには手順5で求められた Q と式(6.26)の θ によって、

$$G = Q\theta^{-1} \quad (6.27)$$

なる演算を行なうとよい。

さらに、式(6.16)の T の各列の2乗和は式(6.15)の性質から1となり、また式(6.17)によって

$$\theta = T'T \quad (6.28)$$

であることが知れる。また、式(6.22)より

$$QT^{-1} = A \quad (6.29)$$

である。したがって、式(6.27)の因子パターン G は、

$$G = Q(T'T)^{-1} = AT'^{-1} \quad (6.30)$$

とも示される。

表6.1の右半分は、因子構造 Q および因子相関行列 θ から因子パターン G を算出している。2因子間の相関は、式(6.17)の直後に求めたように、0.4948

であるから、まず θ より θ^{-1} を計算する。

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0.4948 \\ 0.4948 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{-1} = \frac{1}{1-0.4948^2} \begin{bmatrix} 1 & -0.4948 \\ -0.4948 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.3242 & -0.6552 \\ -0.6552 & 1.3242 \end{bmatrix}$$

この θ^{-1} を表 6.1 に示す因子構造の右から乗ずると、表の右半分に示される因子パターンを得る。

斜交因子パターンの要素は、絶対値が 1 をこえる場合があることを、とくに付記したい。このことは 2 本の因子軸が鈍角をなす領域に打点される観測特性に関して起こる。さて、計算された表の因子パターンを見ると、おどろくほど表 2.3 のデータの構造模型によく合致していることがわかる。

また縮小パターンの計算に関しても、表 6.1 の縮小構造に右から θ^{-1} を乗ずればよい。計算結果は、対角線要素が 1 にきわめて近く、非対角線要素はほとんどゼロである。このことは、初期の 2 本の直交軸空間における観測特性群を二つの複合変量で代表する縮小因子パターンとしての試行が、非常に効果的な表現になっていることを示している。

手順 7—斜交因子の寄与

斜交因子パターンが得られた後は、これらの因子の直接寄与 (direct contribution) と同時寄与 (joint contribution) を算出しておくのが通常である。

式 (6.2) および (6.3) より、観測変量 x_j の共有性 h_j^2 は

$$h_j^2 = \sum_{i=1}^q g_{ji}^2 + 2 \sum_{\substack{i,i' \\ (i < i')}}^q g_{ji} g_{ji'} r_{ii'}, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (6.31)$$

で示されるが、このうちで直接寄与は上式右辺の $\sum_i g_{ji}^2$ によって、また同時寄与はその残りの $2 \sum_{i < i'} g_{ji} g_{ji'} r_{ii'}$ によって定義される。無相関因子の場合の式 (4.5) では同時寄与がゼロになっている。

因子どうしが相関性を有する場合、一つの因子の全観測特性の分散に対する寄与は、その因子だけによる寄与と他の因子との相関作用による寄与との加算

したもので示される。このため一つの斜交因子の全体に対する寄与は、 $j=1, 2, \dots, p$ の式 (6.31) において全観測特性に関するそれぞれの寄与を合計したものになる。

すなわち、第 i 斜交因子の全直接寄与 V_i (total direct contribution) を

$$V_i \equiv \sum_{j=1}^p g_{ji}^2, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (6.32)$$

で定義し、また全同時寄与 $V_{ii'}$ (total joint contribution) を

$$V_{ii'} \equiv 2r_{ii'} \sum_{j=1}^p g_{ji}g_{ji'}, \quad i, i' = 1, 2, \dots, q \quad i < i' \quad (6.33)$$

で定義する。通常、この V_i と $V_{ii'}$ は三角行列で表示され、 V_i をその行列の対角線要素に、 $V_{ii'}$ を (i, i') 要素に配列する。

検証数値例において、2 因子のそれぞれの全直接寄与は

$$V_1 = 1.0056^2 + \dots + 0.2922^2 = 4.2080$$

$$V_2 = (-0.0118)^2 + \dots + 0.8252^2 = 4.0673$$

で、またこの 2 因子の全同時寄与 V_{12} は

$$\begin{aligned} V_{12} &= 2 \times 0.4948 \times (-0.0118 \times 1.0056 + \dots + 0.852 \times 0.2922) \\ &= -0.2755 \end{aligned}$$

となる。ここに、もちろん全斜交因子の寄与の総和は初期の因子解の共有性の総和に等しくなる。上の数値例では $V_1 + V_2 + V_{12} = 7.9979$ となり、数値の丸めの誤差範囲で表 2.4 の共有性の総和と等しくなっている。

6.2 斜交参考解

前節の初めに示したように、斜交根元解と異なるもう一方の解、すなわち斜交参考解 (oblique reference solution) についてまず論じ、次いで根元因子解との関係について記述する。

6.2.1 斜交参考解

この解は、最初 Thurstone によって考案された。彼は直観的な簡素構造の原則を具現化するために、因子解の中でいくつかの要素は値としてゼロをもつような巧な方法を工夫した。これには前節の根元因子解における q 本の座標

軸によって、1本ずつを除いた q 枚の座標超平面(したがって、実質的には $q-1$ 次元になっている)を考え、それぞれによって原点を通る q 個の法線を一つの参考軸体系として導入したのである。

いま、 q 次元共通因子空間における q 本の参考軸をそれぞれ N_j ($j=1, 2, \dots, q$) で示し、各 N_j は座標軸 G_j による座標超平面 (coordinate hyperplane) の法線とする。たとえば、共通因子空間が2次元のとき超平面は直線となり、法線はその直線に直角をなす他の直線を示すことになる。このように座標超平面自身は $q-1$ 次元のものである。次の図6.4は、この関係を $q=2$ の検証数値例について示している。

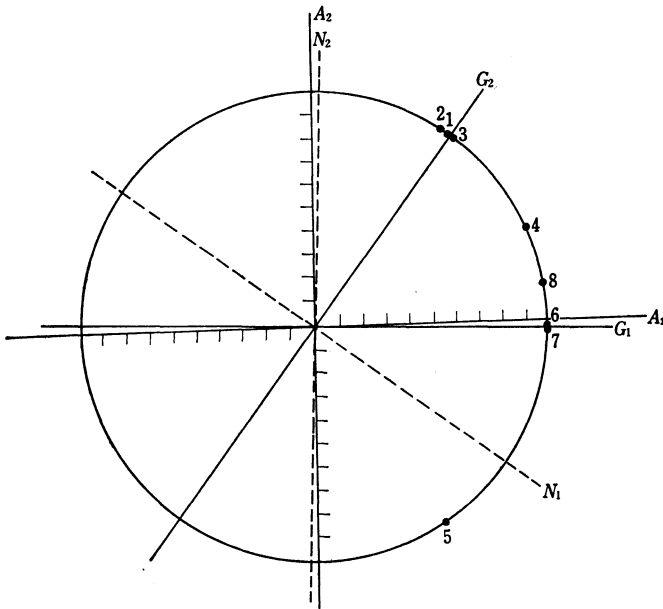


図 6.4 検証数値例による斜交根元因子解と斜交参考解との関係

図6.4で、座標超平面は斜交軸 G_1, G_2 であり、それらに対する法線 N_2, N_1 が新しく考える参考軸である。図から G_1 に密接している観測特性点の N_2 軸への射影はきわめてゼロに近く、また G_2 に近い点の N_1 軸への射影もゼロに近いことが知れる。同様に3次元の図を想定して3枚の斜交座標面を G_2G_3

面, G_1G_3 面, G_1G_2 面とし, 各面に対する法線 N_1, N_2, N_3 を考える。このとき, G_2G_3 面に近い点群の N_1 軸への射影はゼロに近いという性質を示す。そして, これは座標超平面の切点に近い点群についても, 一つの座標超平面に近接していればなりたつことである。

このように, 一般に q 次元の場合にも同じ性質が成立し, 一つの超平面の上または近接した点は, すべてこの平面に対して法線の関係にある参考軸について, 射影がゼロに近くなる。たぶん Thurstone は, この性質が簡素構造のための第1の基準を満たすことに気づき, 参考軸の選択にこの方法を適用したのであろう。そして各超平面が完全に決められ, 少なくとも q 個の点がこれらの平面上に含められるなら, 簡素構造のための第2の基準も保障される。

Thurstone は, このようにして参考軸に基づき, 斜交解を拡張して因子パターンを考察したが, 全く同じ立場で因子構造についても展開できる。この参考軸による斜交解は, 前節と同様に, 初期の直交解を回転することによって得られる。

いま, 初期の直交因子の係数行列を A , 参考軸による斜交因子構造を Q , このときの変換行列を N とすると, 形式的に式 (6.22) と同様に

$$Q = AN \quad (6.34)$$

の関係がなりたっている。ここに N の各列は式 (6.22) の T におけるように, 初めの直交軸に関する各参考斜交軸の方向余弦を配列したものになっている。

さて, この N を求めるわけであるが, すでに前節で T を得ているので, グラフ法から作業を始める必要はない。元来, T の要素は観測特性点の集落を通る軸または点群を含む座標超平面間の切線によって決められる軸の方向余弦である。さらに, N は q 枚の座標超平面の法線から成立しているので, T' と N の積行列は, 対角線要素以外はすべてゼロで, 次式の関係

$$T'N = NT = \begin{bmatrix} d_{11} & & \mathbf{0} \\ & d_{22} & \\ \mathbf{0} & & \ddots \\ & & & d_{qq} \end{bmatrix} \equiv D \quad (6.35)$$

をたもっている。ここに D は T と N が示す因子間の相関行列で, ある値

d_{ii} , $i=1, 2, \dots, q$ のみを要素とする対角線行列を示している。

上式を変形して N を示すと

$$N = (T')^{-1}D \quad (6.36)$$

を得る。この右辺において、まだ D の要素の値はわかっていない。しかし、右辺の結果は $(T')^{-1}$ の第 i 列の要素に共通してすべて d_{ii} を乗じたものとなっていて、一方、左辺の N はまた方向余弦であるからどの列でも要素の2乗和は $+1$ になっているはずである。このことより、 D が未知でも $(T')^{-1}$ を算出し各列の2乗和を $+1$ に規準化することにより、直接に正方行列 $(T')^{-1}D$ に相当する N が得られ、ついで D は規準化のための修正値の平方根または逆算して $T'N=D$ として得られる。

通常、 T は非対称行列であり、 $(T')^{-1}$ を直接に求めることは労力的である。そこで式 (6.28) で用いた θ が対称行列で逆行列の計算が楽であるために、 θ^{-1} の左から T を乗じて、すなわち

$$T\theta^{-1} = T(T'\theta)^{-1} = (T')^{-1} \quad (6.37)$$

によって直ちに $(T')^{-1}$ を算出したほうがよい。そしてこの正方行列の各列に関して規準化すれば、式 (6.36) の左辺 N が得られることになる。

検証数値例で計算手順を示すと、 T および θ^{-1} はそれぞれ式 (6.16) および (6.30) の後方に算出してあるから、

$$\begin{aligned} T\theta^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.5892 & 0.9937 \\ 0.8080 & -0.1122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.3242 & -0.6556 \\ -0.6552 & 1.3242 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.1291 & 0.9298 \\ 1.1435 & -0.6780 \end{bmatrix} = (T')^{-1} \end{aligned}$$

この行列の各列の2乗を $+1$ に規準化すると

$$N = \begin{bmatrix} 0.1122 & 0.8080 \\ 0.9937 & -0.5892 \end{bmatrix}$$

を得る。また T と N の因子間の相関行列 D を求めておくことも興味あることである。

$$D = T'N = \begin{bmatrix} 0.8690 & 0 \\ 0 & 0.8690 \end{bmatrix}$$

変換行列 N が得られれば、式 (6.34) によって初期の直交因子負荷行列 A に右から乗じて新しい斜交参考因子構造 Q が求められる。

この参考因子 (reference factor) 間の内部相関性は次の行列の積によって得られる。

$$N'N \equiv H \quad (6.38)$$

終りに、この新しい q 個の斜交参考軸による因子パターン G は、式 (6.27) および (6.30) と同様に、

$$\begin{aligned} G &= QH^{-1} \\ &= A(N')^{-1} \end{aligned} \quad (6.39)$$

または
によって得られる。さきの数値例では

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -0.4948 \\ -0.4948 & 1 \end{bmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1.3242 & 0.6552 \\ 0.6552 & 1.3242 \end{bmatrix}$$

となる。これで参考軸に関する因子構造および因子パターンは容易に求められる。

また、縮小構造や縮小パターンについても、6.1 節の手順 5 および 6 と全く同様に、式 (6.13) の後の係数行列の右から N' を乗じて縮小構造を得、次にこれに H^{-1} を乗じて縮小パターンを得ることができる。表 6.2 は、これらについての計算結果を示している。

表 6.2 検証数値例における斜交参考解

観測特性 No. (i)	因子構造		因子パターン	
	r_{iN_1}	r_{iN_2}	N_1	N_2
1	0.8738	-0.0108	1.1500	0.5582
2	0.8742	-0.0110	1.1504	0.5582
3	0.8583	0.0211	1.1504	0.5903
4	0.4924	0.5129	0.9881	1.0018
5	-0.7759	0.9318	-0.4169	0.7255
6	0.0482	0.8444	0.6171	1.1497
7	0.0473	0.8446	0.6160	1.1494
8	0.2539	0.7152	0.8048	1.1134
複合変量 No.	縮小構造		縮小パターン	
1	0.8689	-0.0000	1.1506	0.5693
2	-0.0000	0.8703	0.5702	1.1525

6.2.2 根元因子と参考軸との関係

前項までに、二つの型の斜交解、すなわち根元因子と参考軸に分けてそれぞれを記述してきた。ここではこの二つの斜交解を要約し、両者の関係を整理しよう。これらの斜交解の開拓者 Thurstone は、参考軸に関する構造を根元因子パターンの指標として用い、これによって根元因子の確認に利用している。

二つの斜交解では、明確に2種類の斜交軸を区別し定義しているが、いずれの斜交解にもあらかじめ q 次元の共通因子空間における観測特性点の集落を識別するために、直交解を入力として適用するか、またはグラフ法によって因子軸を位置づけることが必要であった。そして、根元因子は観測特性点の集落を通る軸によって解釈され、また各因子間の相関性も得られてきた。とくに、斜交因子軸による観測特性の解析では、各観測特性と各斜交因子の間の相関が因子構造として得られ、また斜交因子の線形式による各観測特性の表現も因子パターンとして示すことができた。同様に、参考軸による解析でも別の因子構造と因子パターンが得られるわけである。

もちろん、斜交解としてはひと組の因子構造と因子パターンを求めれば十分なのであるが、参考軸に関する因子構造が非常に普及してきている現在、明らかに異なる別の斜交解の意味も見通しよくしておく必要がある。とくに因子分析法では、諸科学分野での解釈に際し定義のあいまいな用語を使う人が多い。このため方法論としての因子分析にも反映されて不明確になりがちである。ここでは、まず術語について若干の注意を付記しておこう。

たとえば因子行列 (factor matrix) という用語を使い、これで最終的な因子解をさしている場合がある。しかし、Thurstone らは、斜交参考軸群に対する観測特性の射影を示す行列として、参考軸についての因子構造をさしている。とくに、因子間に相関を有する場合に、因子行列というだけでは観測特性を表現する因子の1次係数行列であるか、あるいは観測特性と因子間の相関行列をいうのか非常に不明確である。両者とも因子行列という用語に関連しうるからである。

同じことが因子負荷行列ということばにもあてはまる。このことばは、直交解のときは完全に正しいのであるが、斜交解のときには二つの異なった意味に

解される。元来、この負荷 (loading) という用語は、相関性とか係数を意味するような数学的または統計学的な術語ではない。したがって Fruchter らは、観測特性の負荷を次に述べる根元因子と参考軸の間の関係式に基づいて、参考軸との相関係数に関して、また根元因子の係数に関して、2 様に使用している。このために斜交解の場合に単に負荷(量)というのはよくない。

いま、二つの斜交解の関係を調べるために、根元因子解による因子構造および因子パターンをそれぞれ式 (6.22) および (6.30) による \mathbf{Q}, \mathbf{G} とし、参考軸による因子構造および因子パターンをそれぞれ式 (6.34) および (6.39) に基づく $\mathbf{Q}_R, \mathbf{G}_R$ と区別しておく。

このとき、根元因子解によるパターンを示す式 (6.30) によって、初期の直交因子負荷行列 \mathbf{A} は

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{T}' \quad (6.40)$$

であり、また参考軸による因子構造を示す式 (6.34) によれば

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_R\mathbf{N}^{-1} \quad (6.41)$$

である。上の両辺を結べば、

$$\mathbf{G}\mathbf{T}' = \mathbf{Q}_R\mathbf{N}^{-1} \quad (6.42)$$

を得る。さらに \mathbf{T} と \mathbf{N} により \mathbf{D} を導入した式 (6.35) によると、

$$\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{T}' \quad (6.43)$$

であるから、式 (6.42) は次のように書ける。

$$\mathbf{G}\mathbf{T}' = \mathbf{Q}_R\mathbf{D}^{-1}\mathbf{T}' \quad (6.44)$$

したがって

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}_R\mathbf{D}^{-1} \quad \text{または} \quad \mathbf{Q}_R = \mathbf{G}\mathbf{D} \quad (6.45)$$

を得る。このように \mathbf{Q}_R と \mathbf{D} により \mathbf{G} が、または \mathbf{G} と \mathbf{D} により \mathbf{Q}_R が求められる。

全く同様に、根元因子構造を示す式 (6.22) と参考軸による因子パターンの式 (6.39) により、 \mathbf{A} を媒介として

$$\mathbf{Q}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{G}_R\mathbf{N}' \quad (6.46)$$

を得、式 (6.35) により \mathbf{D} を導入すると

$$Q = G_R D \quad \text{または} \quad G_R = Q D^{-1} \quad (6.47)$$

が示される。

このように、一方の因子構造の右から D を乗ずることにより他方の因子パターンに、また一方の因子パターンの右から D^{-1} を乗ずることにより他方の因子構造に移行する性質がわかる。そして、この2種類の斜交解を交叉する正確な関数関係を通じ、いずれの型についても因子パターンと因子構造は必要になる。

もちろん、因子構造と因子パターンはそれぞれ独自の意義を有し、また異なった利用目的がある。しかも、それらは互いに相補って斜交解の完全な理解に役だてられるわけである。通常、正相関をもつ根元因子群のとき、この因子構造はすべて正の要素を有し、因子パターンは非常に大きい正值と数多くのゼロに近い小さな値を示すものである。また、根元因子構造は因子の推定に有用であるが、各観測特性が包含する因子間の割合や観測特性値の変動の大きさに寄与する割合を示唆するには効果的でない。これらに関しては、根元因子パターンが詳しい情報を与えて、また諸因子の認識や命名に最も有用である。

事実、検証数値例の表 6.1 の因子構造において、観測特性 No. 1 と第 1 因子、第 2 因子の間の相関係数は、それぞれ 0.9997 と 0.4857 である。しかし、2 因子がこの観測特性に包含される大きさは、次の線形式

$$x_1 = 1.0056G_1 - 0.0118G_2$$

で最もよく表現される。そして、この特性の分散に対する 2 因子の直接寄与は、 $(1.0056)^2 = 1.0112$ と $(-0.0118)^2 = 0.0001$ で、2 因子の同時寄与は $2 \times 1.0056 \times (-0.0118) \times 0.4948 = -0.0237$ である。

また、参考軸を有用な因子とする考え方は存在しないが、Thurstone らは参考軸による因子構造によって因子を認識する指標に利用している。しかし、これは Q_R と G が式 (6.45) で示されたように、 D を介して関数関係になっているため、本質的には根元因子パターンと同様に有効であるというにすぎない。もちろん、対角線行列 D の要素は式 (6.35) のように T と N の相関を示すわけであるが、+1 より小さいため根元因子パターンの要素は参考軸による因子パターンの要素より大きくはなっている。

しかし、総括して斜交解のいずれか一方を選ぶとすると、斜交解での因子の

明確化と解釈を求める見地から、完備した根元因子解のほうが参考軸による因子解よりも利があると考えられる。

6.3 解析的方法による斜交回転法

前節では、斜交解の解析的な根拠を若干の歴史的背景とともに、グラフ法によって記述した。もちろん、真実に観測値群の構造模型が直交性を有するのであれば、斜交回転による結果としても、直交または直交に近い解を示すわけで、斜交解を求める条件や方法には因子間の独立性を妨げるものは何もないので一般的である。

斜交の簡素構造解を解析的回転法によって求める理論的根拠や手順は、5.2節の直交解を解析的に求める際の客観的な基準と全く同じものから出発する。すなわち、直交性の制限をはずして、これらの基準に対して最良な斜交解

表 6.3 種々の回転法と基準

回 転 法	回 転 基 準	
	直 交 解	斜 交 解
ク ー ティ マ ッ ク ス	Q : 最大 (5.12)	
	M : 最大 (5.11)	
	N : 最小 (5.13)	
	K : 最大 (5.14)	
	V : 最大 (5.22)	
バ リ マ ッ ク ス	(逐次バリマックス) ... 5.2.3 項の(1°)	
バリマックス (変法 1)	(斉時バリマックス) ... 5.2.3 項の(2°)	
バリマックス (変法 2)	(逐次一般バリマックス) ... 5.2.3 項の(3°)	
バリマックス (変法 3)	(斉時一般バリマックス) ... 5.2.3 項の(4°)	
バ リ マ ッ ク ス		K : 最大 (6.49)
オ ブ リ ミ ン		$\alpha N + \beta C/p$: 最小 ($\alpha, \beta \geq 0$) (6.88)
ク ー ティ ミ ン		N : 最小 ($\alpha=1, \beta=0$) (6.70)
コ バ リ ミ ン		C : 最小 ($\alpha=0, \beta=1$) (6.84)
バ イ ク ー ティ ミ ン		$N + C/p$: 最小 ($\alpha=1, \beta=1$) (6.85)
カ イ ザ ー ・ デ ィ ッ ク マ ン		D : 最小 (6.100)

を求めていく。たとえば、直交回転におけるクォーティマックス基準は、斜交する構造要素の4乗に関する総和を最大化するような基準として応用され、オブリマックス法とよばれる斜交回転が誘導される。斜交回転と直交回転の基準についての関係を、表6.3に一覧表として示した。

6.3.1 オブリマックス法

5.2節における直交回転では、基準 Q, M, N, K は同等なものであった。しかし、斜交因子を求める際には、もはや、この四つの基準は同等でない。そして、各基準による結果は独自の斜交解を示し、斜交解としての普遍的な回答を与えるものではない。

いま、直交因子負荷行列を A 、目的とする参考軸における斜交因子構造を Q 、このための変換行列を N とすると、式(6.34)と同様に

$$Q = AN \quad (6.48)$$

の関係が示される。そして、この Q の要素による次の基準値

$$K = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q q_{ji}^4 / \left(\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q q_{ji}^2 \right)^2 \quad (6.49)$$

を最大ならしめる変換行列 N を決めるのが、ここでの課題となる。この基準に基づく斜交回転をオブリマックス法 (Oblimax rotation) という。ここで観測特性と参考軸との相関行列、すなわち参考軸に関する因子構造の要素

$$q_{ji} = r_{x_j N_i}, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (6.50)$$

を変換して K を最大にするわけである。

とくに、直交回転の条件下では、基準 K の分母が一定であるので基準としては分子のみを最大にすることに帰着して基準 Q とも同等になったのであるが、斜交回転では基準 K の分母も変化するので、分母と分子に関する K 総体の最大化を考えることになる。

さて、斜交参考軸 N_i の上への第 j 観測特性点の直角射影座標は q_{ji} で、 p 個の観測特性点をこの軸に関して考えた場合、次のような基準値を与える。

$$K_i = \sum_{j=1}^p q_{ji}^4 / \left(\sum_{j=1}^p q_{ji}^2 \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (6.51)$$

この K_i を最大ならしめるように $(q-1)$ 次超平面内で N_i 軸を回転して q_{ji}

を定め、 $\sum_i K_i$ の最大化を考える。しかし、このように N_i を $i=1, 2, \dots, q$ と逐次定めていくと、それに伴って絶えず超平面が変わるので、1 巡回して q 本の軸を決めても、これがすぐ最終的な式 (6.49) の K を最大にするものにはならない。したがって、このような巡回を反復し、すべての N_i がすでに変動しなくなるまで、すなわち Q の各要素 q_{ji} が一定値を示すようになるまで、繰り返さなければならない。この巡回の反復が、 K の値を最大値に収束させる。

いま、初期の直交参考軸とみなせる直交因子負荷行列の二つの因子平面をとりあげ、任意の観測特性点の座標を $(a_{ji}, a_{ji'})$ とすると、式 (6.48) によって要素 q_{ji} は

$$q_{ji} = a_{ji}n_{ii} + a_{ji'}n'_{i'i}, \quad i = 1, 2, \dots, q-1 \quad i < i' \leq q \quad (6.52)$$

である。ここに $n_{ii}, n'_{i'i}$ は N の要素を示し、 N の各列は方向余弦ベクトルであるから、

$$\sum_{i'=1}^q n'_{i'i}{}^2 = 1 \quad (6.53)$$

である。さらに

$$n'_{i'i} \equiv n'_{i'i}/n_{ii}, \quad n_{ii} \neq 0 \quad (6.54)$$

とおくと、式 (6.51) は

$$K_i = \frac{\sum_j (a_{ji} + a_{ji'}n'_{i'i})^4}{\{\sum_j (a_{ji} + a_{ji'}n'_{i'i})^2\}^2} \equiv \frac{E}{D^2} \quad (6.55)$$

と書き換えられる。これを最大にする必要条件として、 K_i を $n'_{i'i}$ に関し偏微分し、ゼロに等しいとおくと、

$$\frac{\partial K_i}{\partial n'_{i'i}} = \left(D \frac{\partial E}{\partial n'_{i'i}} - 2E \frac{\partial D}{\partial n'_{i'i}} \right) / D^3 = 0, \quad D \neq 0 \quad (6.56)$$

を得る。これを簡単に、 $n'_{i'i}$ の関数として次のようにおく。

$$f(n'_{i'i}) \equiv D \frac{\partial E}{\partial n'_{i'i}} - 2E \frac{\partial D}{\partial n'_{i'i}} = 0 \quad (6.57)$$

また K_i を $n'_{i'i}$ で 2 回偏微分すると、

$$\frac{\partial^2 K_i}{(\partial n'_{i'i})^2} = \left\{ D^3 \frac{\partial f(n'_{i'i})}{\partial n'_{i'i}} - 3D^2 f(n'_{i'i}) \frac{\partial D}{\partial n'_{i'i}} \right\} / D^6 \quad (6.58)$$

を得る。\$D\$ は平方和でつねに正なので、式 (6.57) が成立する \$n'_{i'i}\$ での上式の符号は、

$$\partial f(n'_{i'i}) / \partial n'_{i'i} \quad (6.59)$$

と同じであることが知れる。したがって、\$K_i\$ を最大にするには、式 (6.57) の根で式 (6.59) を負にするものを選ばねばならない。

さて、式 (6.57) を \$n'_{i'i}\$ に関して解いていく。式 (6.57) を整理すると、

$$\begin{aligned} \sum_j (a_{ji} + a_{ji} n'_{i'i})^2 \sum_{j'} a_{j'i'} (a_{j'i} + a_{j'i} n'_{i'i})^3 \\ - \sum_j (a_{ji} - a_{ji} n'_{i'i})^4 \sum_{j'} a_{j'i'} (a_{j'i} + a_{j'i} n'_{i'i}) = 0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

を得る。この式は \$n'_{i'i}\$ の 5 次式に見えるが、5 次の係数はゼロで、実は \$n'_{i'i}\$ の 4 次式である。簡単のために \$n'_{i'i}\$ を \$x\$ とおき、一般の 4 次式

$$\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \quad (6.61)$$

として、この係数を示そう。

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \sum_j a_{ji} a_{j'i'} \sum_{j'} a_{j'i'}^4 - \sum_j a_{ji}^2 \sum_{j'} a_{j'i'} a_{j'i'}^3, \\ \alpha_3 &= \sum_j a_{ji}^2 \sum_{j'} a_{j'i'}^4 + 2 \sum_j a_{ji} a_{j'i'} \sum_{j'} a_{j'i'} a_{j'i'}^3 - 3 \sum_j a_{ji}^2 \sum_{j'} a_{j'i'}^2 a_{j'i'}^2, \\ \alpha_2 &= 3 \sum_j a_{ji}^2 \sum_{j'} a_{j'i'} a_{j'i'}^3 - 3 \sum_j a_{ji}^2 \sum_{j'} a_{j'i'}^3 a_{j'i'}, \\ -\alpha_1 &= (\alpha_3 \text{ の右辺で, } i \text{ と } i' \text{ を交換した式}), \\ -\alpha_0 &= (\alpha_4 \text{ の右辺で, } i \text{ と } i' \text{ を交換した式}) \end{aligned} \quad (6.62)$$

これらの係数を算出して式 (6.61) の 4 つの根を求めるとよい。そして、これらの実根の中のどれかが \$K_i\$ を最大または最小にするのであるから、次に、式 (6.59) を負にする実根を選出することになる。もし、4 根とも相異なる実数であれば、2 根は \$K_i\$ を極大にし、他の 2 根は極小にする。通常、これは根の近辺における式 (6.61) の左辺の値の増減を調べることによってわかる。すなわち、根の前後いずれでも多項式の値が増大していれば、その根は極小を示すもので、もしいずれでも減少していれば、その根は極大を示すはずである。また、\$\alpha_4\$ の符号は \$x\$ が十分に大きいときの多項式の値の符号であるから、もし \$\alpha_4\$ が負であれば、4 根の中の最大根は基準 \$K_i\$ を極大にするもので、他方 \$\alpha_4\$ が正

であれば極小を与える。そして、これに伴って第3番めに大きい根も、同様に極大または極小を示すことになる。逆に、第2と第4番めに大きい根は極小または極大を示すことになる。

このようにして得た極大を示す二つの実根を x_1, x_2 とし、これらを新しい参考軸の方向余弦にするため、

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+x_2^2}} \\ \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} n_{ii} & n_{ii'} \\ n_{i'i} & n_{i'i'} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

のように各列について規準化してもとにもどす。そして (i, i') に関する変換行列

$$N_{ii'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (i) & (i') \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{ccc} n_{ii} & n_{ii'} & 0 \\ n_{i'i} & n_{i'i'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \end{array} \quad (6.64)$$

をつくり、 \mathbf{A} の右から乗じて回転する。この計算が $i=1, 2, \dots, q-1$ のそれぞれに対し、 $i'=i+1, i+2, \dots, q$ までうごかし1回の巡回計算が終了する。すなわち、式 (6.48) の \mathbf{N} は

$$\mathbf{N} \sim \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{13} \cdots \mathbf{N}_{1q} \mathbf{N}_{23} \mathbf{N}_{24} \cdots \mathbf{N}_{2q} \cdots \mathbf{N}_{q-1, q} \quad (6.65)$$

のように合成され、まず \mathbf{A} を回転する。

この結果をこれまでの \mathbf{A} のように考え、次の巡回計算を行なう。このように巡回が反復され、基準 K が十分大きな、そしてある精度で安定した値に収束するまで繰り返される。

もし、式 (6.61) が二つの実根と二つの虚根をもつときには、上の方法を直接には適用できない。通常、このような場合、利用できる実根で1本の新軸を選び、第2の軸はこの新軸に直角な直線、すなわち、すでに利用した実根の符号を替えた逆数を第2の根と考えることによって変換行列をつくるのが提唱されている。また、4根がすべて虚根であれば、 $n_{ii} = n_{i'i'} = 1, n_{i'i} = n_{ii'} = 0$ とおいて実質的には軸の回転を行なわない。

表 6.4 オブリマックス

因子負荷行列	a_{j1}	a_{j2}	a_{j1}^2	a_{j1}^3	a_{j1}^4
1	0.5807	0.8138	0.3372	0.1958	0.1137
2	0.5804	0.8142	0.3369	0.1955	0.1135
3	0.6060	0.7953	0.3672	0.2225	0.1348
4	0.9200	0.3916	0.8464	0.7787	0.7164
5	0.5395	-0.8417	0.2911	0.1570	0.0847
6	0.9975	-0.0652	0.9950	0.9925	0.9900
7	0.9978	-0.0652	0.9956	0.9934	0.9912
8	0.9895	0.1438	0.9791	0.9688	0.9586
合計	6.2114	1.9866	5.1485		4.1029

後項のどの斜交回転法でもすべて同様であるが、このオブリマックス法の計算手順もたいへんな計算量を含み、高速度の計算設備によらなければ、ほとんど非実用的な回転法となる。これらの電子計算機によるプログラムは複雑であるが、本書では一般の機種 of 立場を考慮した基本的な FORTRAN-II または IV で示している。

ここで、オブリマックス回転の数値例をさきの長方形による検証実験例について示そう。この場合は $q=2$ であるから、計算手順を示すのに容易である。

表 6.5 オブリマックス法における4次方程式の係数算出

	$\Sigma a_{j1}^2 = 5.1485$	$\Sigma a_{j1} a_{j2} = 1.3456$	$\Sigma a_{j2}^2 = 2.8489$	a
$\Sigma a_{j2}^4 = 1.8040$	1.8040×5.1485	1.8040×1.3456		
$\Sigma a_{j1} a_{j2}^3 = 0.6670$	$3 \times 0.6670 \times 5.1485$	$+2 \times 0.6670 \times 1.3456$	$-1 \times 0.6670 \times 2.8489 = a_4 = 0.5272$	
$\Sigma a_{j1}^2 a_{j2}^2 = 1.0438$	$3 \times 1.0438 \times 5.1485$		$-3 \times 1.0438 \times 2.8489 = a_3 = 2.1619$	
$\Sigma a_{j1}^3 a_{j2} = 0.6781$	0.6781×5.1485	$-2 \times 0.6781 \times 1.3456$	$-3 \times 0.6781 \times 2.8489 = a_2 = 4.5066$	
$\Sigma a_{j1}^4 = 4.1029$		$-1 \times 4.1029 \times 1.3456$	$-1 \times 4.1029 \times 2.8489 = a_1 = 2.6084$	$= a_0 = -2.0297$

ス法の基礎計算

$a_{j_2}^2$	$a_{j_2}^3$	$a_{j_2}^4$	$a_{j_1}a_{j_2}$	$a_{j_1}^3a_{j_2}$	$a_{j_1}a_{j_2}^3$	$a_{j_1}^2a_{j_2}^2$
0.6623	0.5390	0.4386	0.4726	0.1593	0.3130	0.2233
0.6629	0.5397	0.4394	0.4726	0.1592	0.3132	0.2233
0.6325	0.5030	0.4001	0.4820	0.1770	0.3048	0.2323
0.1534	0.0601	0.0235	0.3603	0.3049	0.0553	0.1298
0.7085	-0.5963	0.5020	-0.4541	-0.1321	-0.3217	0.2062
0.0043	-0.0003	0.0000	-0.0650	-0.0647	-0.0003	0.0043
0.0043	-0.0003	0.0000	-0.0651	-0.0648	-0.0003	0.0043
0.0207	0.0030	0.0004	0.1423	0.1393	0.0030	0.0203
2.8489		1.8040	1.3456	0.6781	0.6670	1.0438

この計算にあたって、まず必要な手順は表 6.4 の数値を求めることである。

次に、これらの数値をもとに、式 (6.61) および (6.62) で示される 4 次方程式を作成する。このための系統的な計算手順は、表 6.5 のように行なうと簡明である。

4 次方程式の係数はこの表の最右列に得られている。すなわち

$$0.5272x^4 + 2.1619x^3 + 4.5066x^2 + 2.6084x - 2.0297 = 0$$

を得る。この 4 つの根は次のように得られる。

$$x_1 = 0.4151$$

$$x_2 = -1.4539 + 1.9048i$$

$$x_3 = -1.6197$$

$$x_4 = -1.4539 - 1.9048i$$

ここに x_2 と x_4 は虚根で、互いに共役なものである。さて、実根のうち根の前後で上の多項式の値を減少方向にしているのは、 $x_3 = -1.6197$ である。したがって、これによって 1 本の新軸を定め、第 2 の軸はこの新軸に直交する直線を変換行列として採択する。すなわち、まず

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.6197 \\ -1.6197 & 1 \end{bmatrix}$$

とおき、これを方向余弦の制約により各列要素の平方和が 1 になるよう置き換える。いま

$$\frac{1}{\sqrt{1+1.6197^2}} \doteq 0.5257, \quad \frac{-1.6197}{\sqrt{1+1.6197^2}} \doteq -0.8507$$

であるから、

$$N = \begin{bmatrix} 0.5257 & 0.8507 \\ -0.8507 & 0.5257 \end{bmatrix}$$

を得る。この N を用いて、 $AN=Q$ を算出する。計算の結果は表 6.6 に示されている。

表 6.6 検証数値例におけるオブリマックス解

観測特性 No.	回転前の初期の直交解		斜交参考軸による因子構造		根元因子パターン	参考軸による因子パターン	根元因子構造
	A		Q_R		G	G_R	Q
1	0.5807	0.8138	0.9218	-0.3870	(この例では、左の Q_R に同じ)	(左に同じ)	(左に同じ)
2	0.5804	0.8142	0.9218	-0.3875			
3	0.6060	0.7953	0.9336	-0.3580			
4	0.9200	0.3916	0.9885	0.1505			
5	0.5395	-0.8417	0.0164	0.9996			
6	0.9975	-0.0652	0.8143	0.5799			
7	0.9978	-0.0652	0.8145	0.5800			
8	0.9895	0.1438	0.9173	0.3973			

さて、このような手順によって、式 (6.48) の Q 、すなわち Q_R が逐次収束の方法で得られる。もともとこれは簡素構造の概念に基づく参考軸体系を求めたわけで、簡素構造に対する適合性を検討することができる。しかし、実質科学上の解釈を追求するには根元因子解に基づくほうが容易である。そして両者の間には、6.2.2 項で記述したような関数関係があるから、この関係式によって根元因子解を導く。

まず、式 (6.45) および (6.35) より

$$G = Q_R D^{-1}, \quad D = T' N \tag{6.66}$$

であるから、 D^{-1} すなわち D を $T' N$ によって求めねばならない。いま、 $T' = D' N^{-1}$ と書け、さらに D は対角線行列であるから、 T' は N^{-1} の各行ベクトルについて規準化したものにほかならない。そこで $N^{-1} = (n^{i'j})$ とすると、 T' は

$$\mathbf{T}' = \left(\frac{n^{i'j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^q (n^{i'j})^2}} \right), \quad i, i' = 1, 2, \dots, q \quad (6.67)$$

によって得られる。これによって、改めて $\mathbf{T}'\mathbf{N}$ により \mathbf{D} を求め、式 (6.66) における \mathbf{G} を得ることができる。

さきの検証例では

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{0.5257^2 + 0.8507^2} \begin{bmatrix} 0.5257 & -0.8507 \\ 0.8507 & 0.5257 \end{bmatrix} \doteq \begin{bmatrix} 0.5257 & -0.8507 \\ 0.8507 & 0.5257 \end{bmatrix}$$

であるから、式 (6.67) によって

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} 0.5257 & -0.8507 \\ 0.8507 & 0.5257 \end{bmatrix}$$

を得る。この例では \mathbf{N} を求めるときの 4 次方程式の解が 2 実根と 2 虚根を有するため、条件に適合した 1 実根によって、 \mathbf{N} の 2 列を直交するように定めた。このことが \mathbf{T}' を上のような型に導き、また次いで式 (6.66) によって \mathbf{D} の型も

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \therefore \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

となる。したがって、この例では根元因子パターン $\mathbf{G} = \mathbf{Q}$ となる。さらに根元因子構造は式 (6.22) により得られ、また参考軸における因子構造は式 (6.47) によって得られる。しかし、この例では上記の理由で

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} \quad (6.69)$$

となっているため、根元因子構造は参考軸による因子構造と同じものとなり、また根元因子パターンも参考軸による因子パターンも列番号が異なるだけで、すべて同じである。表 6.6 には、この数値例での結果を示している。

6.3.2 クァーティミン法

この方法は、直交解におけるクァーティマックス法に対応し、式 (5.13) の基準 N を最小とする斜交解を与える。これを提唱したのは Carroll であるが、彼は参考軸に関する因子構造行列の要素の平方どうしの積和、すなわち 4 乗の位に関する最小化という意味をもたせてクァーティミン回転法 (Quartimin

rotation) とよんだ。

いま、式 (6.48) と同様に、参考軸に関する因子構造を Q 、その要素を q_{ji} 、変換行列を N として、回転解による各因子が互いに独立であるという直交回転の制限なしに次の値

$$N \equiv \sum_{i>i'}^q \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 q_{ji'}^2 \quad (6.70)$$

を最小にするような変換行列 N を考える。ここで q_{ji} は、最初に与えられる因子負荷行列 A の要素と変換行列 N の要素(方向余弦)を用いて、式 (6.48) により

$$q_{ji} = \sum_{i'=1}^q a_{ji} n_{i'i} \quad (6.71)$$

と書けるから、式 (6.68) の基準 N は

$$N \equiv \sum_{i>i'}^q \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^q a_{jk} n_{ki} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^q a_{jk} n_{ki'} \right)^2 \quad (6.72)$$

とも示される。

したがって、問題は上の N 値を最小にする変換行列の要素を求めることとなる。しかし、この解ははっきりととける形には得られない。そこで、数値的な逐次近似法を適用することになる。すなわち

$$\sum_{i'=1}^q n_{i'i}^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (6.73)$$

なる q 個の条件下で N 値を最小にするまで、 $n_{i'i}$ の値を系統的に変えていく。

この系統的な逐次近似の方法は、やはり Carrol によって次のように考えられた。まず、変換行列 N の第 i_0 列ベクトル N_{i_0} をとりあげ、他の列の要素はすべて固定しておく。そして基準 N の値を N_{i_0} のみによって変化させることを考える。基準値 N の中で第 i_0 列ベクトル N_{i_0} に影響を受ける部分は

$$N_{i_0} = \sum_{j=1}^p (q_{ji_0}^2 \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq i_0}}^q q_{ji}^2) \quad (6.74)$$

$$= \sum_j w_j q_{ji_0}^2, \quad w_j \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^q q_{ji}^2 \quad (6.75)$$

で示される。ここに w_j は N_{i_0} に無関係な値である。

さて、この N_{i_0} によって、式 (6.48) で示した Q に対する影響は、 Q の第 i_0 列ベクトル Q_{i_0} にあらわれ

$$Q_{i_0} = AN_{i_0} \quad (6.76)$$

となる。また、この Q_{i_0} の要素の平方和は

$$Q_{i_0}'Q_{i_0} = N_{i_0}'A'AN_{i_0} \quad (6.77)$$

であるから、式 (6.75) の N_{i_0} は、 W を w_j の対角線行列とすると

$$N_{i_0} = N_{i_0}'A'WAN_{i_0} \quad (6.78)$$

$$= N_{i_0}'CN_{i_0} \quad \text{ここに } C \equiv A'WA \quad (6.79)$$

と示される。したがって、問題は

$$N_{i_0}'N_{i_0} = 1 \quad (6.80)$$

のもとに、式 (6.79) の N_{i_0} を最小にするような N_{i_0} を求めることになる。これはいつものラグランジュの乗数 λ を用いた関数

$$N_{i_0}'CN_{i_0} - \lambda(N_{i_0}'N_{i_0} - 1) \quad (6.81)$$

を N_{i_0} の各要素で偏微分し、ゼロとおけばよい。すなわち

$$(C - \lambda I)N_{i_0} = 0 \quad (6.82)$$

を得る。ここに λ と N_{i_0} はそれぞれ C の固有値とそれに対応する固有ベクトルを示している。

さらに、式 (6.82) は一般に q 個の固有値を有しているが、式 (6.79) の N_{i_0} および (6.82) の関係から、 N_{i_0} を最小にする λ は q 個の中の最小の固有値であることが知れる。したがって、式 (6.82) の数値計算には、 C の最小の固有値をただ一つ求めればよい。そして、それに対応する固有ベクトルを求める。ここでこのような固有ベクトルは任意の定数倍でも成立し無限に存在するから、各要素に関し式 (6.80) が満足されるように規準化して一意に定める。この列ベクトルが、新しい第 i_0 の参考軸の方向余弦を示すことになる。

このように i_0 を $1, 2, \dots, q$ とかえて、1 巡回を終了する。しかし、各列での計算は、式 (6.72) で示される N 値を最小にする全体的な解を与えるものではなく、列を移すごとに C は若干ずつ変化し、 N 値としては十分小さい値

表 6.7 クォーターティミン

観測特性 No. (j)	初期の負荷行列		$i_0=1$						
	A		w_j				C_{11}	C_{21}	C_{22}
	a_{j1}	a_{j2}	a_{j2}^2	a_{j1}^2	$a_{j1}w_j$	$a_{j2}w_j$	$a_{j1}^2w_j$	$a_{j1}a_{j2}w_j$	$a_{j2}^2w_j$
1	0.5807	0.8138	0.6623	0.3372	0.3846	0.5390	0.2233	0.3130	0.4386
2	0.5804	0.8142	0.6629	0.3369	0.3847	0.5397	0.2233	0.3132	0.4394
3	0.6060	0.7953	0.6325	0.3672	0.3833	0.5030	0.2323	0.3048	0.4001
4	0.9200	0.3916	0.1534	0.8464	0.1411	0.0601	0.1298	0.0553	0.0235
5	0.5395	-0.8417	0.7085	0.2911	0.3822	-0.5963	0.2062	-0.3217	0.5020
6	0.9975	-0.0652	0.0043	0.9950	0.0043	-0.0003	0.0043	-0.0003	0.0000
7	0.9978	-0.0652	0.0043	0.9956	0.0043	-0.0003	0.0043	-0.0003	0.0000
8	0.9895	0.1438	0.0207	0.9791	0.0205	0.0030	0.0203	0.0029	0.0004
合計							1.0438	0.6669	1.8040

に収束が安定するまで巡回を繰り返して計算される。したがって、このクォーターティミン法の計算量もたいへんなものとなり、因子が2~3個のときには手計算ができるが、それ以上の場合には電子計算機を援用する必要がある。プログラムは6.4.2項に完備している。

次に、2因子を抽出した検証数値例について、クォーターティミン法による斜交回転の計算手順を示そう。まず、さしあたって必要なものは、 $i_0=1$ として式(6.82)におけるCである。このためには、式(6.79)で示されるように、対角線行列Wをつくることである。いま、因子数qは2であるから、式(6.75)によって w_j はそのまま a_{j2}^2 となる。計算手順は表6.7で左方から漸次右方にすすめられる。

この基礎計算表によって、 $i_0=1$ におけるCは次のように得られる。

$$C = \begin{bmatrix} 1.0438 & 0.6669 \\ 0.6669 & 1.8040 \end{bmatrix}$$

したがって、 λ の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} 1.0438 - \lambda & 0.6669 \\ 0.6669 & 1.8040 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$\lambda^2 - 2.8478\lambda + 1.5432 = 0$$

ン法の基礎計算

$i_0=1$ で更新された因子構造		$i_0=2$							$i_0=2$ で更新された因子構造		
		w_j		a_{j1}^2	a_{j2}^2	$a_{j1}w_j$	$a_{j2}w_j$	C_{11}			C_{12}
q_{j1}	q_{j2}	q_{j1}^2	a_{j2}^2					$a_{j1}w_j$	$a_{j2}w_j$	$a_{j1}^2w_j$	$a_{j1}a_{j2}w_j$
0.0932	0.8138	0.0087	0.6622	0.0051	0.0071	0.0029	0.0041	0.0058	0.0932	0.8722	
0.0927	0.8142	0.0086	0.6629	0.0050	0.0070	0.0029	0.0041	0.0057	0.0927	0.8725	
0.1244	0.7953	0.0155	0.6325	0.0094	0.0123	0.0057	0.0075	0.0098	0.1244	0.8565	
0.5987	0.3916	0.3584	0.1534	0.3297	0.1403	0.3033	0.1291	0.0550	0.5987	0.4894	
0.8893	-0.8417	0.7909	0.7085	0.4267	-0.6657	0.2302	-0.3591	0.5604	0.8893	-0.7779	
0.8952	-0.0652	0.8014	0.0043	0.7994	-0.0523	0.7974	-0.0522	0.0034	0.8952	0.0438	
0.8954	-0.0652	0.8017	0.0043	0.7999	-0.0523	0.7982	-0.0522	0.0034	0.8954	0.0438	
0.7833	0.1438	0.6136	0.0207	0.6072	0.0882	0.6008	0.0873	0.0127	0.7833	0.2507	
							2.7414	-0.2314	0.6562		

を得る。この2根は 0.6563 および 2.1915 となる。そして、最小根 0.6563 に対応する固有ベクトルは方向余弦として規準化され、次の連立方程式の解となる。

$$(1.0438 - 0.6563)n_{11} + 0.6669n_{21} = 0$$

$$n_{11}^2 + n_{21}^2 = 1$$

上式を解くと、 $n_{11} = 0.8646$, $n_{21} = -0.5023$ を得る。

したがって、 A の第1列は

$$q_{j1} \equiv 0.8646a_{j1} - 0.5023a_{j2}, \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

を要素とするベクトルに更新され、 Q の第1列がつくられる。

次に、 $i_0=2$ として、いま求めた q_{j1} によって w_j をつくり、初めに与えられた A とともに、上と同様の計算を行なう。この計算が表 6.7 の右半分に示されている。表の値から

$$C = \begin{bmatrix} 2.7414 & -0.2314 \\ -0.2314 & 0.6562 \end{bmatrix}$$

が求まり、該当する固有値および規準化された固有ベクトルは、次のように得られる。

固有値: 0.6562

固有ベクトル: (0.1089 0.9940)

ゆえに、この第1回の巡回計算によって得られた変換行列 N は

$$N = \begin{bmatrix} 0.8646 & 0.1089 \\ -0.5023 & 0.9940 \end{bmatrix}$$

となり、参考軸における因子構造は表6.7の右端に示される。

これによって基準値 N を算出すると、最初は 1.0436 であったものが今回の結果では 0.6307 となり、0.4129 だけ減少していることが知れる。

このように巡回計算を反復すると、第6回めの巡回計算で基準 N の値は収束し最終結果として

$$N = \begin{bmatrix} 0.8043 & 0.1807 \\ -0.5942 & 0.9835 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -0.0179 & 0.9057 \\ -0.0184 & 0.9061 \\ 0.0133 & 0.8921 \\ 0.5059 & 0.5522 \\ 0.9346 & -0.7296 \\ 0.8402 & 0.1171 \\ 0.8404 & 0.1172 \\ 0.7093 & 0.3212 \end{bmatrix}$$

を得る。なお、このときの N の値は 0.6151 である。

6.3.3 オブリミン法

前項のクァーティミン法は、4乗の位に関する基準 N を最小にすることによって、簡素構造に近接しようとする回転法であった。Carroll はさらに、彼の独創による上の基準を一般化したものを最小にするような斜交回転法を考察し、これをオブリミン法 (Oblimin rotation) と名づけた。すなわち、Kaiser の直交回転に関するバリマックス基準を斜交回転の場合に改良し、これにさらにクァーティミン基準を勘案したものをオブリミン法として提唱した。

バリマックス法における直交性の条件をゆるめた最もわかりやすい基準は

$$C^* = \sum_{i < i'=1}^q (p \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 q_{ji'}^2 - \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 \sum_{j=1}^p q_{ji'}^2) \quad (6.83)$$

である。これは参考軸に関する因子構造の要素の2乗値に関し、各列ベクトル間の共分散 (covariance) の和を意味している。このため、オブリミンという広い構想の中で、式 (6.83) をコバリミン基準 (Covarimin criterion) ともよん

でいる。そしてこれを最小にする回転法をコバリミン法 (Covarimin rotation) という。

上の基準 C^* は、バリマックス基準に関し式 (5.22) で考慮されたように、共有性で規準化される。この新たな基準

$$C = \sum_{i < i' = 1}^q \left\{ p \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji}{}^2}{h_j^2} \right) \left(\frac{q_{ji'}{}^2}{h_j^2} \right) - \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji}{}^2}{h_j^2} \right) \sum_j \left(\frac{q_{ji'}{}^2}{h_j^2} \right) \right\} \quad (6.84)$$

を最小にする方法を規準コバリミン法 (normal Covarimin rotation), または日常にコバリミン法といている。

計算手順は、まず因子負荷行列を各行ごとに、すなわち原点から各観測特性点に至るベクトルの長さを +1 に伸長して斜交回転を行なう。そして、最終的に $AT=Q$ として得られた行列の各行にそれぞれの共有性の平方根を乗じ、もとのベクトルの長さにもどしてやらねばならない。このことは、式 (5.28) の後に記述したように、バリマックス法における場合と同様の考え方である。

次に、前節からの長方形に関する検証例で、コバリミン法の計算を示そう。最初に計算の基礎となる手順を、表 6.8 として示す。

この表で、 $r=1$ とおいているのはオブリミン法として一般性をもたすためであり、 r の値を変えることにより式 (6.92) と (6.93) で示すような回転法となる。ここでの計算手順は式 (6.98) によっている。

まず、 $i_0=1$ の下欄から

$$A' H' W H A = \begin{bmatrix} -6.3220 & 1.5037 \\ 1.5037 & 6.3220 \end{bmatrix}$$

を得る。この固有値と固有ベクトルは、クァーティミン法の表 6.7 の下と全く同じ手順で、

$$\begin{aligned} (\text{根}): & -6.4984 \quad (\text{ベクトル}): (0.9932 \quad -0.1165) \\ & : \quad 6.4984 \quad : (0.1165 \quad 0.9932) \end{aligned}$$

と計算され、最小根 -6.4984 に対応するベクトルを採用する。

したがって、 A の第 1 列は

$$q_{j1} \equiv 0.9932 a_{j1} - 0.1165 a_{j2}, \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

となる。

表 6.8 コバリミン法の基礎計算

観測特性 No.	回転前の初期の解 A		共有性	$i_0=1$						
	$a_{j1}=q_{j1}$	$a_{j2}=q_{j2}$	h_j^2	q_{j1}^2/h_j^2	q_{j2}^2/h_j^2	$w_j = p \left(\frac{q_{j2}^2}{h_j^2} \right) - \gamma \sum_j \left(\frac{q_{j2}^2}{h_j^2} \right)$	$\left(\frac{a_{j1}^2}{h_j^2} \right) w_j$	$\left(\frac{a_{j1} a_{j2}}{h_j^2} \right) w_j$	$\left(\frac{a_{j2}^2}{h_j^2} \right) w_j$	
1	0.5807	0.8138	0.9996	0.3374	0.6626	2.4512	0.8270	1.1590	1.6242	
2	0.5804	0.8142	0.9999	0.3369	0.6631	2.4548	0.8271	1.1603	1.6277	
3	0.6060	0.7953	0.9998	0.3673	0.6325	2.2116	0.8124	1.0662	1.3992	
4	0.9200	0.3916	0.9998	0.8466	0.1534	-1.6226	-1.3737	-0.5847	-0.2489	
5	0.5395	-0.8417	0.9996	0.2912	0.7088	2.8207	0.8214	-1.2815	1.9993	
6	0.9975	-0.0652	0.9994	0.9957	0.0043	-2.8157	-2.8037	0.1832	-0.0120	
7	0.9978	-0.0652	0.9999	0.9957	0.0043	-2.8157	-2.8037	0.1832	-0.0120	
8	0.9895	0.1438	0.9999	0.9793	0.0207	-2.6843	-2.6288	-0.3820	-0.0555	
合計				2.8497				-6.3220	1.5037	6.3220
観測特性 No.	反復計算中の Q		$i_0=2$					反復計算中の Q		
	q_{j1}	q_{j2}	q_{j1}^2/h_j^2	w_j	$\left(\frac{a_{j1}^2}{h_j^2} \right) w_j$	$\left(\frac{a_{j1} a_{j2}}{h_j^2} \right) w_j$	$\left(\frac{a_{j2}^2}{h_j^2} \right) w_j$	q_{j1}	q_{j2}	
1	0.4819	0.8183	0.2323	-2.9478	-0.9945	-1.3938	-1.9532	0.4819	0.9188	
2	0.4816	0.8142	0.2319	-2.9504	-0.9941	-1.3946	-1.9563	0.4816	0.9191	
3	0.5092	0.7593	0.2593	-2.7314	-1.0033	-1.3168	-1.7281	0.5092	0.9061	
4	0.8681	0.3916	0.7536	1.2231	1.0355	0.4408	0.1871	0.8681	0.5786	
5	0.6338	-0.8417	0.4018	-1.5916	-0.4635	0.7231	-1.1286	0.6338	-0.7074	
6	0.9983	-0.0652	0.9966	3.1669	3.1535	-0.2061	0.0135	0.9983	0.1488	
7	0.9986	-0.0653	0.9973	3.1717	3.1581	-0.2063	0.0134	0.9986	0.1489	
8	0.9660	0.1438	0.9332	2.6595	2.6045	0.3785	0.0550	0.9660	0.3513	
合計			4.8060			6.4962	-2.9752	-6.4962		

次いで、 $i_0=2$ として表 6.8 の右方の欄に示すように、同様の計算をすすめる。このときの最小固有値と対応する固有ベクトルは

$$(\text{根}): -7.1451 \quad (\text{ベクトル}): (0.2131 \quad 0.9770)$$

である。

これによって A の第 2 列が変換され、表の最終列に記入されている。これで 1 回の巡回計算が終了したわけであるが、同様にしてこの巡回計算を基準値 C が十分小さくなり、そして安定するまで w_j を更新しつつ反復する。

なお、この第 1 回の巡回による A の変換行列 T は、上の経過から

$$T = \begin{bmatrix} 0.9932 & 0.2131 \\ -0.1167 & 0.9770 \end{bmatrix}$$

で、基準値 C は初期の A において -6.3220 であったが、この回転により -7.1478 となり 0.8258 だけ減じている。

この巡回は 8 回で収束し、最終結果は表 6.9 にまとめられている。

表 6.9 長方形による検証例に関する 3 種類のオプティミム解

観測特性 No.	参考軸による因子構造							
	初期の負荷行列		種々のオプティミム解					
			クォーターティミン解 ($\gamma=0$)		バイクォーターティミン解 ($\gamma=0.5$)		コバリミン解 ($\gamma=1.0$)	
1	0.5806	0.8137	-0.0185	0.9059	0.0695	0.9506	0.2075	0.9779
2	0.5803	0.8141	-0.0190	0.9062	0.0691	0.9506	0.2071	0.9782
3	0.6059	0.7952	0.0128	0.8923	0.1008	0.9406	0.2381	0.9711
4	0.9199	0.3915	0.5055	0.5526	0.5795	0.6499	0.6871	0.7263
5	0.5394	-0.8416	0.9347	-0.7293	0.8999	-0.6407	0.8306	-0.5562
6	0.9974	-0.0651	0.8399	0.1175	0.8844	0.2374	0.9406	0.3385
7	0.9977	-0.0651	0.8401	0.1176	0.8846	0.2375	0.9408	0.3386
8	0.9894	0.1437	0.7089	0.3216	0.7683	0.4344	0.8498	0.5269
変換行列			1	2	1	2	1	2
			1	0.8030	0.1821	1	0.8524	0.3004
巡回計算数			0	7	0	10	0	8
			8.3548	4.9251	1.0164	-0.8211	-6.3220	-7.9406
基準値								

6.3.4 バイクォーターティミン法、一般オプティミム法

クォーターティミン法やコバリミン法を利用して、なにか十分に満足のゆか

ぬ場合がある。このしっくりゆかぬ原因は、経験的に、いつもコバリミン法の結果があまり直交すぎる因子軸へ導かれているかたよりをもち、また他方クァーティミン法が、反対にあまりにも因子間の相関を強調しすぎる嫌いを有するということである。Kaiser や Carroll も経験的な調査によってこれらの傾向を認め、このかたよりを調整する基準を考案した。

Carroll は、基準 N と C の長所を組み合わせ、また欠点を互いに補うものとして

$$B^* = N + \frac{C^*}{p} \quad (6.85)$$

をバイクァーティミン基準とし、この B^* を最小にする回転法をバイクァーティミン法 (Biquartimin rotation) として提唱した。ここに B^* は、それぞれが妥当な基準である N と C^* に関し、これらの合計として最小ならしめる基準となっている。

その後、Carroll は式 (6.85) を一般化し、 N と C^*/p について、相対的に種々の重みづけが可能な線形結合の形の基準として

$$B^* = \alpha N + \beta \frac{C^*}{p}, \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (6.86)$$

を示した。

このようにオブリミン法を総括する基準をつくると、これまでのコバリミン法、クァーティミン法およびバイクァーティミン法の基準は、式 (6.86) の特殊な場合として

$$\begin{aligned} \text{コバリミン基準: } & \alpha = 0, \beta = 1, \\ \text{クァーティミン基準: } & \alpha = 1, \beta = 0, \\ \text{バイクァーティミン基準: } & \alpha = 1, \beta = 1 \end{aligned} \quad (6.87)$$

と整理される。ここに式 (6.86) は、具体的に次式で示される。

$$B^* = \sum_{\substack{i, j=1 \\ (i < j)}}^q \left\{ \alpha \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 q_{ji}^2 + \beta \left(p \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 q_{ji}^2 - \sum_j q_{ji}^2 \sum_j q_{ji}^2 \right) / p \right\} \quad (6.88)$$

また、上式を定数 p 倍して、次のようにまとめることができる。

$$B^* = \sum_{\substack{i,i'=1 \\ (i < i')}}^q \{(\alpha + \beta) \left(p \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 q_{ji'}^2 \right) - \beta \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 \sum_{j=1}^p q_{ji'}^2 \} \quad (6.89)$$

さらに

$$\gamma = \beta / (\alpha + \beta), \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (6.90)$$

とおくと

$$B^* = \sum_{\substack{i,i'=1 \\ (i < i')}}^q \left\{ p \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 q_{ji'}^2 - \gamma \sum_{j=1}^p q_{ji}^2 \sum_{j=1}^p q_{ji'}^2 \right\} \quad (6.91)$$

で示される。これを一般オブリミン基準 (general Oblimin criterion) とよんでいる。

また、コバリミン法で基準を C^* から C に変換したのと全く同様に、上式の B^* における各 q_{ji}^2 を荷荷行列の対応する行の共有性 h_j^2 で割って規準化することによって、

$$B = \sum_{\substack{i,i'=1 \\ (i < i')}}^q \left\{ p \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji}^2}{h_j^2} \right) \left(\frac{q_{ji'}^2}{h_j^2} \right) - \gamma \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji}^2}{h_j^2} \right) \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji'}^2}{h_j^2} \right) \right\}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (6.92)$$

を定義し、これを規準一般オブリミン基準 (normal general Oblimin criterion) という。そして、回転によりこの B の最小化をはかるわけである。

なお、式 (6.90) によると、上の基準は一つの母数 γ の値で規定され、式 (6.87) の特殊な場合は、

$$\begin{aligned} \text{コバリミン基準: } & \gamma = 1, \\ \text{クァーティミン基準: } & \gamma = 0, \\ \text{バイクァーティミン基準: } & \gamma = 0.5 \end{aligned} \quad (6.93)$$

で表現される。

さて、変換行列 N と参考軸による因子構造 Q を実際に求める計算は、さきのクァーティミン法に似た手順によるのであるが、Carroll はとくに大型の行列の場合にも実用的な方法を開発している。

この方法は、まず、初めに与えられた因子荷行列 A の第 i_0 列をとりあげ、残りの $q-1$ 個の列については固定しておく。そして次の値

$$B_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq i_0)}}^q \left\{ p \sum_{j=1}^p \left(\frac{a_{ji_0}^2}{h_j^2} \right) \left(\frac{a_{ji}^2}{h_j^2} \right) - \gamma \sum_{j=1}^p \left(\frac{a_{ji_0}^2}{h_j^2} \right) \sum_{j=1}^p \left(\frac{a_{ji}^2}{h_j^2} \right) \right\} \quad (6.94)$$

が最小になるまで第 i_0 列の要素を変えていく。次に i_0 を変更して、上の反復を行なう。このように q 個の列について順次計算して 1 巡回を終える。この各列要素の算出に、クォーティミン法におけるような最小固有値および対応する固有ベクトルを求める計算が含まれる。

すなわち

$$w_j \equiv \sum_{\substack{i \\ (i \neq i_0)}} \left\{ p \left(\frac{a_{ji}^2}{h_j^2} \right) - \gamma \sum_j \left(\frac{a_{ji}^2}{h_j^2} \right) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (6.95)$$

とし、 \mathbf{W} を w_j の対角線行列とおくと、第 i_0 列の関与する基準値 B_{i_0} は、

$$B_{i_0} = \mathbf{N}_{i_0}' \mathbf{A}' \mathbf{H}' \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{N}_{i_0}, \quad i_0 = 1, 2, \dots, q \quad (6.96)$$

である。この B_{i_0} を最小にする変換行列 \mathbf{N} の第 i_0 列ベクトル \mathbf{N}_{i_0} を

$$\mathbf{N}_{i_0}' \mathbf{N}_{i_0} = 1, \quad i_0 = 1, 2, \dots, q \quad (6.97)$$

なる条件下でまず求めるわけである。このために

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{A}' \mathbf{H}' \mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{A} \quad (6.98)$$

とし、この対称行列の最小固有値とこれに対応する固有ベクトルを算出する。この論理は、式 (6.82) におけると同様で、この固有ベクトルが変換行列の第 i_0 列 \mathbf{N}_{i_0} となり、次いで

$$\mathbf{Q}_{i_0} = \mathbf{A} \mathbf{N}_{i_0} \quad (6.99)$$

によって \mathbf{Q}_{i_0} が作成される。また、このときの \mathbf{C} の最小固有値は式 (6.94) の最小値を示している。

このように逐次 i_0 を更新して 1 巡回の計算を終える。この巡回計算の反復終了には、あらかじめ式 (6.92) に関し収束を判定するための十分小さな定数を与えておき、巡回ごとに変わる基準値の差をこの定数と比較して停止規則を設ける。これらの手順は、常法で、先項のクォーティマックス法やコバリミン法と全く同様である。

さて、このようにして得られた \mathbf{Q} は、いつも、参考軸に関する因子構造であるから注意を要する。これから根元因子解を導くには、6.2.2 項の関数関係

表 6.10 バイクォーターティミン法の基礎計算

観測特性 No.	回転まえの初期の解 A		共有性 h_j^2	$i_0=1$				
	$a_{j1}=q_{j1}$	$a_{j2}=q_{j2}$		q_{j2}^2/h_j^2	$w_j = p \left(\frac{q_{j2}^2}{h_j^2} \right) - \gamma \sum_j \left(\frac{q_{j2}^2}{h_j^2} \right)$	$\left(\frac{a_{j1}^2}{h_j^2} \right) w_j$	$\left(\frac{a_{j1} a_{j2}}{h_j^2} \right) w_j$	$\left(\frac{a_{j2}^2}{h_j^2} \right) w_j$
1	0.5807	0.8138	0.9996	0.6626	3.8760	1.3077	1.8327	2.5682
2	0.5804	0.8142	0.9999	0.6631	3.8796	1.3072	1.8337	2.5725
3	0.6060	0.7953	0.9998	0.6325	3.6365	1.3358	1.7531	2.3007
4	0.9200	0.3916	0.9998	0.1534	-0.1978	-0.1674	-0.0713	-0.0303
5	0.5395	-0.8417	0.9996	0.7088	4.2455	1.2363	-1.9288	3.0092
6	0.9975	-0.0652	0.9994	0.0043	-1.3908	-1.3849	0.0905	-0.0059
7	0.9978	-0.0652	0.9999	0.0043	-1.3908	-1.3849	0.0905	-0.0059
8	0.9895	0.1438	0.9999	0.0207	-1.2594	-1.2334	-0.1792	-0.0260
合計				2.8497		1.0164	3.4212	10.3825

観測特性 No.	反復計算中の Q		$i_0=2$					反復計算中の Q	
	q_{j1}	q_{j2}	q_{j1}^2/h_j^2	w_j	$\left(\frac{a_{j1}^2}{h_j^2} \right) w_j$	$\left(\frac{a_{j1} a_{j2}}{h_j^2} \right) w_j$	$\left(\frac{a_{j2}^2}{h_j^2} \right) w_j$	q_{j1}	q_{j2}
1	0.2995	0.8138	0.0897	-1.3489	-0.4551	-0.6378	-0.8938	0.2995	0.8838
2	0.2991	0.8142	0.0895	-1.3508	-0.4551	-0.6385	-0.8957	0.2991	0.8842
3	0.3293	0.7953	0.1085	-1.1990	-0.4404	-0.5780	-0.7586	0.3293	0.8689
4	0.7531	0.3916	0.5672	2.4706	2.0915	0.8904	0.3791	0.7531	0.5106
5	0.7740	-0.8417	0.5991	2.7262	0.7938	-1.2385	1.9324	0.7740	-0.7623
6	0.9685	-0.0652	0.9380	5.4373	5.4142	-0.3539	0.0231	0.9685	0.0682
7	0.9687	-0.0652	0.9385	5.4417	5.4186	-0.3541	0.0231	0.9687	0.0682
8	0.8960	0.1438	0.8029	4.3566	4.2665	0.6200	0.0901	0.8960	0.2743
合計			4.1334		16.6340	-2.2904	-0.1003		

に基づくわけで、この場合もオブリマックス法の式 (6.66) と (6.67) の前後で記述したことと同様になる。

数値計算の手順を示すため、検証実験例によって基礎計算の部分を表 6.10 に示している。

計算の手順は、 $\gamma=0.5$ とおいたことを除いて、前項のコバリミンの場合と同様である。

$i_0=1$ における固有値の計算は、表の下欄の数値を用いた次式

$$\begin{vmatrix} 1.0164-\lambda & 3.4212 \\ 3.4212 & 10.3825-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を解いて、 $\lambda_1=-0.1002$ および $\lambda_2=11.4991$ を得る。また、この最小根に対応する規準化された固有ベクトルは表 6.7 の下方に示した計算法によって、 $(0.9506, -0.3103)$ となる。この結果から A の第 1 列が変換される。

次いで、 $i_0=2$ では

$$\begin{vmatrix} 16.6340-\lambda & -2.2904 \\ -2.2904 & -0.1003-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

を解いて、 $\lambda_1=-0.4081$ および $\lambda_2=16.9418$ を得、最小根 λ_1 に対応する固有ベクトルは $(0.1332, 0.9911)$ となる。

したがって、 A に対する第 1 巡回での変換行列は

$$T = \begin{bmatrix} 0.9506 & 0.1331 \\ -0.3103 & 0.9910 \end{bmatrix}$$

となっている。そして、 A における初期のバイクォーターティミン基準値 1.0164 は、今回の変換によって -0.4083 となり、基準値は 1.4247 だけ減じている。このような反復巡回は 10 回で収束し、得られる最終結果は、クォーターティミン法 ($\gamma=0$) およびコバリミン法 ($\gamma=1.0$) の結果とともに、表 6.9 にまとめられている。

まず、この表で $\gamma=0$ としたクォーターティミン解の結果を、6.3.2 項のクォーターティミン解と比較してみよう。この両者には、それぞれ式 (6.92) と (6.68) で示されるように、基準値が共有性 h_j^2 で重みづけされているか否かの違いがある。しかし、この表の解と 6.3.2 項の末尾に示した解とは非常によく似ており、

ほとんど一致した性格を示している。このことはもちろん、共有性がかなり1に近い値であったことにもよるが、一般にほとんど同様な解を示すことがいわれている。

また、この表の3種類のオブリミン解を比較すると、コバリミン解は他のどの解よりも簡素構造の観点からみて劣っているようである。しかし、一方でコバリミン解は5.2.2項に示したバリマックス解によく似た結果を示している。このことからコバリミン解はかなり直交性に近い性質を有することがわかり、因子間に相関性が少ないという観点では簡素化されていると考えられる。さらに、根元因子間の因子相関の観点では、クァーティミン解は最も高い相関性を示し、コバリミン解は最も低い相関性を示している。そして、バイクァーティミン解はこれら両極端の間にある。また直接的なグラフ法による表6.2の因子構造は、一般にクァーティミン解に近い結果を示し、因子間相関はバイクァーティミン解よりも高い。

また、オブリマックス解は表6.6のようにあまり良い簡素構造を示していないが、一般オブリミン解の中で比較すると、やはりクァーティミン解の方向にやや近く、根元因子間の相関性は、クァーティミン解と同程度にかなり高い。

要約すると、これまでの多くの計算結果から、コバリミン基準は非常に強い直交性への傾向をもち、クァーティミン基準は根元因子の面で高度の相関性を示す。そして、バイクァーティミン基準はちょうど中間の性質、しいていえば相関のやや低い方向の性質を示すようである。そして、全体的に考慮すると、バイクァーティミン基準が最も望ましいとされている。

6.3.5 カイザー・ディックマン法

この方法は一般オブリミン法の類ではないが、同様の簡素構造を満たす斜交因子解を得るために、新たな基準を最小にする回転の一方法として、Kaiser と Dickman によって提唱された。彼らの基準は次式

$$D = \sum_{i,i' < j}^q \left[\sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji}^2}{h_j^2} \right) \left(\frac{q_{ji'}^2}{h_j^2} \right) \right] / \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji}^2}{h_j^2} \right) \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji'}^2}{h_j^2} \right) \right\} \quad (6.100)$$

で示される。

この基準はこれまでのものに似ているが、元来は一般オブリミン法の γ をい

かに定めるかということに関連して考案された。そして、バイクォーティミン法のように事前に $\gamma=1/2$ と与えないで、クォーティミン法のあまりに斜交しすぎるかたよりやコバリミン法のあまりに直交すぎるかたよりをなくするような、妥当な解を一意に得ることを目的にしている。

ここで、 $\gamma=1/2$ のバイクォーティミン法とこのカイザー・ディックマン法の長短を比較すると、もちろん適用されるデータ構造の性質にも関連するが、データ構造が非常に簡単かまたはきわめて複雑なときにはカイザー・ディックマン法が良く、それ以外のデータ構造の場合、すなわち適度に複雑なときにはバイクォーティミン法が良いようであるといわれている。

さて、この計算の方法は式 (6.100) の基準値 D を最小にするように回転するのであるが、いくぶんオブリマックス法に類似している。

まず、任意の 2 列 i と i' に関する D の成分の値 $D_{ii'}$ をつくる。

$$D_{ii'} = \sum_{j=1}^p \left(\frac{q_{ji}^2}{h_j^2} \right) \left(\frac{q_{ji'}^2}{h_j^2} \right) / \left\{ \sum_j \left(\frac{q_{ji}^2}{h_j^2} \right) \sum_j \left(\frac{q_{ji'}^2}{h_j^2} \right) \right\} \quad (6.101)$$

いま、 i に注目して q_{ji} を回転まえの \mathbf{A} の要素で記述し、さらに便宜的に記号を次のように略記しよう。

$$q_{ji} = a_{ji}t_1 + a_{j'i}t_2 \equiv a + bx \quad (6.102)$$

$$\text{ここに、} x = t_2/t_1$$

$$a = a_{ji}/h_j, \quad b = a_{j'i}/h_j \quad (6.103)$$

このようにおくと、式 (6.101) の $D_{ii'}$ は

$$D_{ii'} = \sum_j (a+bx)^2 \left(\frac{q_{ji'}^2}{h_j^2} \right) / \sum_j (a+bx)^2 \sum_j \left(\frac{q_{ji'}^2}{h_j^2} \right) \quad (6.104)$$

と書ける。常法によって、この式を x で偏微分しゼロに等しいとおく。すなわち次式を得る。

$$\frac{\partial D_{ii'}}{\partial x} = \frac{\sum_j b(a+bx)K \cdot \sum_j (a+bx)^2 - \sum_j b(a+bx) \sum_j (a+bx)^2 K^2}{\sum_j K^2 \cdot \left\{ \sum_j (a+bx)^2 \right\}^2} = 0 \quad (6.105)$$

ここに $K \equiv q_{ji'}^2/h_j^2$ とおいている。

上の式を満たす x は、分子のみを整理して x の 2 次式とし

$i'=(i+1), (i+2), \dots, q$ と動かして、1回の巡回計算が終了する。

これまでの長方形に関する検証例で、上の計算を行なうと表 6.11 の結果をうる。この例で基準 D の値は5回めの巡回計算で小数以下4桁まで一致し、十分に収束して計算を終了する。表 6.11 には、参考のために、初期の因子負荷行列と、第1回の巡回計算の結果および最終の第5回めの計算結果を並べて示している。

さて、この回転結果を種々のオプティム解に関する表 6.9 と比較すると、このカイザー・ディックマン解は、 $\gamma=0.5$ としたバイクォータミン解に非常によく似ていることが知れる。この数値例はかなりデータ構造の明確な場合に相当するが、双方の回転解はよく一致して優劣を論じにくい。

われわれの経験によれば、バイクォータミン法はオプティム系統の斜交解で最も推奨されるがやや低めの因子間相関を示す性質をもちカイザー・ディックマン解はやや高めの因子間相関を示すようである。しかし、両者とも斜交解では最も妥当とされる回転法で、いずれがよいかは本項の初めに記述したように、データ構造の複雑さによると考えられる。

6.3.6 プロマックス法

前項までの斜交回転法は、直交回転の際の直交性の制約をはずして各基準値の最大化または最小化をはかるものであった。しかし、本項の方法はこれらと全く異なった発想に基づき、あらかじめ“理想的”な斜交因子パターンを要素ごとに構成しておき、そして直交回転で得た結果からこのパターンに至る変換行列を最小2乗法で求める。この“理想的”とは Hurley と Cattell によるプロクラステス問題 (Procrustes problem) に基づく考え方を意味している。また、通常このときに利用する直交解は迅速にしかも良好な結果が期待できるバリマックス解であることが多い。このプロマックス法 (PROMAX method) は 1964 年 A. E. Hendrickson と P. O. White により開発され、演算速度が非常に速いという利点も有している。

元来、簡素化された因子パターンの定義は、因子負荷行列中の顕著な要素については $+1$ または -1 で、その他の要素はゼロで表示されるものである。しかし、実際においてこのような因子パターンを直交解や斜交解として明確に得られることは少ない。とくに観測変量の数が大きい場合などでは、簡素化構

造を示す“顕著な”要素を具体的に判断するのに困惑することがある。たとえば、絶対値が0.2以上の要素を“顕著”とするなら因子行列の中で+1や-1と考える要素が非常に多すぎることがある。また0.5以上で判断すると0.49というような要素についてはどのように扱ったらよいか迷う場合がある。このようなことは、とかく、因子解釈がむずかしくなる斜交解の場合に明快な結果が望まれ、プロクラステス問題としてモデル式にあてはめようとするわけである。

いま、直交回転によって得た因子パターンを $G=(g_{ij})$ とし、この要素と未知常数 k により、新たに

$$q_{ij} = |g_{ij}|^{k+1}/g_{ij}, \quad k > 1, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (6.109)$$

からなる行列 $Q=(q_{ij})$ を定義しておく。ただし、この冪乗によって符号は変えないものとする。このとき、直交の因子負荷行列 G を最小2乗法によって Q に最もよくあてはまるような変換行列、すなわち

$$GT \doteq Q \quad (6.110)$$

のような参考軸による因子構造への変換行列 T を考える。このことは、理論的には

$$T = (G'G)^{-1}G'Q \quad (6.111)$$

に相当するものを求めることである。そして、実際上はプロクラステス問題として Q にあてはめたとき残差誤差の2乗和を最小にする変換行列を求めるわけで、5.2.3項のバリジウム法と同様の考え方にたつ。すなわち

$$GT = Q + E \quad (6.112)$$

において $\text{tr}\{EE'\}$ を最小ならしめるような T を求める。ここに $T'T = I$ であるが、バリジウム法と異なって $TT' = I$ という条件はない。そして、このような T が得られれば、通常斜交解と同様にプロマックス法による因子軸間の角度と因子相関も算出する。

上の式(6.109)で示された Q の形は、 G の要素の大小の比が相対的に大きくなる方便として選出されている。ここに、式(6.109)は種々の k に対し一つの族を示すが、 k の任意の一つの値に対して式(6.110)のようなプロマックス回転がなされるわけである。このとき、どのような k の値を与えたとよいかについては、オプティム解などの立場と同様で、理論的に k に特定の値を

定める明確な法則はまだない。したがって、適切な斜交解を得るためには何と
 おりかの k の値に関し実施してみなければならない。ただ、文献にある経験
 的知見によると $k=2$ ではあまりに斜交性が強く、 $k=3$ ではカイザー・ディッ
 クマン法に近い結果を示し、より広範な数値例の検証からの一般的な知見とし
 て $k=4$ が最適といわれている。他面、データがとくに簡潔な構造に基づくと
 きは、 k の値として小さいほうがよいということも当然である。このように本
 項の方法は、直交解から非常に速く良い斜交解を得ることを特徴としている。

6.3.7 その他の回転法への展望

解析的方法による斜交解を一般オブリミン解の系統に拡張した後、Carroll
 は直交解についても同様の一般化を考え、オーソマックス法 (Orthomax meth-
 od) を提唱している。

この基準はクァーティマックス法の基準 Q とバリマックス法の基準 V に
 それぞれ重み α, β をつけ、新たに

$$\alpha Q - \beta V: (\text{最大}) \quad (6.113)$$

を基準として最大ならしめるような変換行列を考えることであつた。ここで、
 当然、 $\alpha=1, \beta=0$ のときはクァーティマックス法、 $\alpha=0, \beta=1$ のときはバリ
 マックス法となる。そして、 $\alpha=1, \beta=1$ のときにはバイクァーティマックス法
 (Biquartimax method) とよばれる。しかし、今日まだ、このような回転解は
 実際に行なわれていないようである。

一般に、直交回転法は現状で相当に満足されていて、たとえ新しく開発され
 てもわずかの改善にすぎないとまで考えられている。しかし、一方、斜交回転
 の方法は基本的に異なった性格のものが望まれ、現在、なお開発の途上にある。

このように斜交した簡素構造をもつ解をうることに、多くの関心が払われて
 いるが、Schmid と Leiman は斜交因子の心理学的な解釈の際に生じるむず
 かしさを論じ、得られた斜交解をさらに分析して、若干個の直交因子を含み
 しかも簡素構造を保つような一つの直交解で示す方法を提唱している。このよ
 うな解法は体系因子解 (hierarchical factor solution) とよばれ、継承的に得
 られるいっそう高次の因子解を目的として行なわれる。すなわち、諸斜交因子
 間の因子相関行列から出発してさらに因子抽出を行なうわけである。彼らの方
 法は、この発想に基づき、はじめに得られた斜交簡素構造の解をいっそう高次

の数個の因子からなる直交した体系因子パターン(hierarchical factor pattern)に焼き直すことを意図しているといえよう。しかし、なお斬新的な斜交解は、今後の問題として残されている。

6.4 計算プログラム

6.4.1 オブリマックス法

斜交回転法の一つで、Saunders によるオブリマックス基準を最大にする。すなわち、因子負荷行列の要素に関する 2 重の分布を考え、この分布の尖度を最大化するのがオブリマックス回転法で、もし因子の直交性の条件を付加すれば 5.3.1 項のクァーティマックス法と同等になる。この基準のもとでは、因子負荷行列の行(変量)方向にも列(因子)方向にもかたよらない等しい重みで変換される。アウトプットは斜交参考因子構造とそれへの変換行列が得られる。因子パターンや斜交根元解は後の 6.4.4 項のプログラムによって、斜交因子相関行列とともに一括して得られる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
IP	観測変量の数	ICY	巡回回数
IQ	共通因子の数	OC	基準値
MAXC	巡回回数の限度	XN(I, J)	変換行列
IOC	ゼロならば最終結果のみ 1ならば中間の巡回結果も示す	A(I, J)	巡回後における因子構造の近似解 および最終的な因子負荷行列の近似解
ISEQ	ゼロならば初めにもどる 1ならば STOP する		

```

C      OBLIQUE ROTATION BY OBLIMAX METHOD
C
C
C      IP --- NO. OF VARIABLES
C      IQ --- NO. OF FACTORS
C      MAXC --- MAX. NO. FOR ITERATION
C      IOC --- 0, IF FINAL RESULTS ARE ONLY WANTED
C      --- 1, IF EVERY INTERMEDIATE RESULT OF CYCLES IS ALSO WANTED
C      ISEQ --- 0, FOR BATCH CALCULATION
C
C      --- 1, OTHERWISE
C      A --- LOADING MATRIX
C
C      SUBROUTINE FOE@ IS REQUIRED
C
C      DIMENSION B(5),X(4),XR(4,2),A(30,30),XN(30,30)
C      COMMON B,XR,A,XN
C      1 READ (40,100) IP,IQ,MAXC,IOC,ISEQ
C      DO 2 I=1,IQ

```

```

2 READ (40,101) (A(J,I),J=1,IP)
  DO 4 I=1,I0
  DO 3 J=1,I0
  XN(I,J)=0.0
3 XN(J,I)=0.0
4 XN(I,I)=1.0
  OBC=0.0
  OC=0.0
  ICYCL=1
  IOM1=I0-1

  IEND=1
  GO TO 33
5 DO 29 I01=1,IOM1
  I011=I01+1
  DO 29 IP1=I011,I0
  A2=0.0
  A4=0.0
  A3B=0.0
  AB=0.0
  A2B2=0.0

  AB3=0.0
  B2=0.0
  B4=0.0
  DO 6 J=1,IP
  A4=A4+A(J,I01)**4
  A2=A2+A(J,I01)**2
  A3B=A3B+A(J,I01)**3*A(J,IP1)
  AB=AB+A(J,I01)*A(J,IP1)
  A2B2=A2B2+A(J,I01)*A(J,IP1)*A(J,I01)*A(J,IP1)
  AB3=AB3+A(J,I01)*A(J,IP1)**3

  B2=B2+A(J,IP1)**2
6 B4=B4+A(J,IP1)**4
  B(1)=AB*B4-B2*AB3
  B(2)=A2*B4+2.0*AB*AB3-3.0*B2*A2B2
  B(3)=3.0*A2*AB3-3.0*B2*A3B
  B(4)=3.0*A2*A2B2-2.0*AB*A3B-B2*A4
  B(5)=A2*A3B-AB*A4
  CALL FOE0
  IW=1
  DO 8 I=1,4

  IF(XR(I,2)) 8,7,8
7 IW=IW+1
8 CONTINUE
  GO TO (25,25,14,9,9),IW
9 DO 11 I=1,3
  I11=I+1
  DO 11 J=I11,4
  IF(XR(I,1)-XR(J,1)) 10,10,11
10 W=XR(J,1)
  XR(J,1)=XR(I,1)

  XR(I,1)=W
11 CONTINUE
  IF(B(1)) 12,12,13
12 X1=XR(1,1)
  X2=XR(3,1)
  GO TO 24
13 X1=XR(4,1)
  X2=XR(2,1)
  GO TO 24
14 J=0

```

```

DO 16 I=1,4
  IF (XR(I,2)) 16,15,16
15 J=J+1
  X(J)=XR(I,1)
16 CONTINUE
  IF (X(1)-X(2)) 17,17,18
17 W=X(1)
  X(1)=X(2)
  X(2)=W
18 IF (B(1)) 19,19,20

19 X1=X(1)
  GO TO 21
20 X1=X(2)
21 IF (X1) 22,23,22
22 X2=-1.0/X1
  GO TO 24
23 X2=1.0
24 XN11=1.0/SQRT(1.0+X1**2)
  XN12=1.0/SQRT(1.0+X2**2)
  XN21=X1*XN11

  XN22=X2*XN12
  GO TO 26
25 XN11=0.7071068
  XN22=0.7071068
  XN12=0.7071068
  XN21=-0.7071068
26 DO 27 K=1,1P
  W=A(K,101)*XN11+A(K,1P1)*XN21
  A(K,1P1)=A(K,101)*XN12+A(K,1P1)*XN22
27 A(K,101)=W

  DO 28 K=1,1Q
  W=XN(K,101)*XN11+XN(K,1P1)*XN21
  XN(K,1P1)=XN(K,101)*XN12+XN(K,1P1)*XN22
28 XN(K,101)=W
29 CONTINUE
  A4=0.0
  A2=0.0
  DO 30 J=1,1P
  DO 30 I=1,1Q
  A4=A4+A(J,I)**4

30 A2=A2+A(J,I)**2
  OC=A4/A2**2
  IF (ABS(OBC-OC)-0.00001) 34,34,31
31 ICYCL=ICYCL+1
  IF (ICYCL-MAXC+1) 32,32,34
32 IEND=1
  IF (IOC) 35,33,35
33 IF (ICYCL-1) 35,35,5
34 IEND=0
35 ICY=ICYCL-1

  WRITE (50,200) ICY,OC
  WRITE (50,201) (I,I=1,1Q)
  DO 36 I=1,1Q
36 WRITE (50,202) I,(XN(I,J),J=1,1Q)
  WRITE (50,203) (I,I=1,1Q)
  DO 37 I=1,1P
37 WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,1Q)
  IF (IEND) 5,38,5
38 IF (ISEQ) 39,1,39
39 WRITE (20,204)

```



```

100 FORMAT (5I5)
101 FORMAT (12F6.5)
200 FORMAT (//17H ITERATION CYCLE=,I5,5X,18HOBILIMAX CRITERION=,E15.8//
1)
201 FORMAT (//65H TRANSFORMATION MATRIX (FROM PRE.STRUCTURE TO REFEREN
1CE STRUCTURE// (15X,7(16.3X)))
202 FORMAT (10X,14,1X,7(F8.4,1X))
203 FORMAT (//37H REFERENCE STRUCTURE (OBLIMAX METHOD)// (15X,7(16.3X))
1)
204 FORMAT (//27H JOB END (OBI IMAX ROTATION)//)
      STOP
      END

```

[付] サブルーティン(4 次方程式の求根)

```

C      SUBROUTINE FOEQ
C          FERRARI METHOD
C
C      SUBROUTINE FOEQ
      DIMENSION A(5),X(4,2)
      COMMON A,X
      DO 1 I=1,4
      DO 1 J=1,2
1  X(I,J)=0.0

      A1=A(2)/A(1)
      A2=A(3)/A(1)
      A3=A(4)/A(1)
      A4=A(5)/A(1)
      SK=-3.0*A1**2/8.0+A2
      SL=A1**3/8.0-A1*A2/2.0+A3
      SM=-3.0*A1**4/256.0+A1*A1*A2/16.0-A1*A3/4.0+A4
      SR=4.0*SK*SM-SL**2
      SP=-4.0*SM/3.0-SK**2/9.0
      SQ=SR-4.0*SK*SM/3.0-2.0*SK**3/27.0

      DD=SQ**2+4.0*SP**3
      IF (DD) 3,2,2
2  AA=(-SQ+SQRT(DD))/2.0
      BB=(-SQ-SQRT(DD))/2.0
      AAA=AA/ABS(AA)
      BBB=BB/ABS(BB)
      AA=ABS(AA)**(1.0/3.0)
      BB=ABS(BB)**(1.0/3.0)
      SU1=AAA*AA+BBB*BB+SK/3.0
      GO TO 4

3  SITA=ATAN((-DD)**0.5/(-SQ))
      SU1=2.0*SQRT(-SP)*SIN(1.57079632-SITA/3.0)+SK/3.0
4  SA=-SU1-SK
      SB=2.0*SL/(ABS(SU1-SK))**0.5
      SC=(ABS(SU1-SK))**0.5/2.0
      IF (SU1-SK) 8,5,15
5  SX=SQRT(ABS(-SK/2.0))
      IF (SK) 6,6,7
6  X(1,1)=SX
      X(2,1)=-SX

```

```

X(3,1)=SX
X(4,1)=-SX
GO TO 21
7 X(3,2)=SX
X(4,2)=-SX
X(1,2)=SX
X(2,2)=-SX
GO TO 21
8 SALPH=((SQRT(SA**2+SB**2)+SA)/2,0)**0,5
SBETA=((SQRT(SA**2+SB**2)-SA)/2,0)**0,5

IF(SL) 14,9,13
9 IF(SA) 10,11,11
10 X(1,2)=-SQRT(ABS(SU1-SK))+SQRT(-SA))/2,0
X(2,2)=-X(1,2)
X(3,2)=X(2,2)+SQRT(-SA)
X(4,2)=-X(3,2)
GO TO 21
11 X(1,1)=SQRT(SA)/2,0
X(2,1)=-X(1,1)
X(3,1)=X(2,1)

X(4,1)=X(1,1)
AAA=-1,0
BBB=-1,0
DO 12 I=1,4
AAA=AAA*BBB
12 X(1,2)=SQRT(ABS(SU1-SK))*AAA/2,0
GO TO 21
13 SC=-SC
14 X(1,1)=SALPH/2,0-A(2)/4,0
X(1,2)=SBETA/2,0+SC

X(2,1)=X(1,1)
X(2,2)=-X(1,2)
X(3,1)=X(1,1)-SALPH
X(3,2)=X(1,2)-2,0*SC
X(4,1)=X(3,1)
X(4,2)=-X(3,2)
GO TO 21
15 J=1
16 IF((SA-SB)/4,0) 17,18,18
17 X(J,1)=SC-A1/4,0

X(J+2,1)=X(J,1)
X(J,2)=(ABS((SA-SB)/4,0))**0,5
X(J+2,2)=-X(J,2)
GO TO 19
18 X(J,1)=SC-A1/4,0+SQRT((SA-SB)/4,0)
X(J+2,1)=SC-A1/4,0-SQRT((SA-SB)/4,0)
X(J,2)=0,0
X(J+2,2)=0,0
19 IF(J-2) 20,21,21
20 J=J+1

SC=-SC
SB=-SB
GO TO 16
21 RETURN
END

```

6.4.2 一般オブリン法(クァーティミン法, バイクァーティミン法, コバリミン法および任意のオブリン基準値による法)

斜交回転のうちで Carroll による一般オブリン解を与える。すなわち規準化された一般オブリン基準では、一つの母数 γ の値をコントロール・カードによって $0 \leq \gamma \leq 1$ 間で任意に与えることができる。

とくに、 $\gamma=0$ ならクァーティミン法、 $\gamma=0.5$ ならバイクァーティミン法、 $\gamma=1$ ならコバリミン法とよばれる斜交解が得られる。ただし、アウトプットは斜交参考因子構造とそれへの変換行列が得られるので、この他の因子パターンなどを得るには、本項のアウトプットを後の 6.4.4 項のプログラムにインプットするとよい。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	変数の数	A(I, J)	因子負荷行列
M	共通因子の数	NCY	巡回回数
ICT	ゼロならば 中間の巡回結果も, 1 ならば最終結果のみ示す	W(J)	参考構造解行列
MCY	巡回回数の限度	T(I, J)	変換行列
ICY	固有値の収束のための巡回回数の 限度	QCR	回転変換基準
G	[0, 1] 間の任意の値でよい とくに 0.0: クァーティミン基準 0.5: バイクァーティミン 基準 1.0: コバリミン基準	DIF	巡回前後の基準値の差
CRT	固有値の収束判定定数		
A(I, J)	因子負荷行列		

```

C
C      OBLIQUE ROTATION BY GENERALIZED OBLIMIN METHOD
C
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      M --- NO. OF FACTORS
C      ICT --- 0, TO OUTPUT EVERY INTERMEDIATE RESULT
C             1, TO OUTPUT FINAL RESULTS ONLY
C      MCY --- MAX. NO. OF ITERATIVE CYCLES IN MAIN PROGRAM
C      ICY --- MAX. NO. TO CONVERGE AN EIGEN VALUE IN SUBROUTINE EIGEN
C
C      G --- AN ARBITRARY VALUE BETWEEN 0 AND 1
C             IF 0.0 , QUARTIMIN METHOD IS APPLIED
C             IF 0.5 , BI-QUARTIMIN METHOD IS APPLIED
C             IF 1.0 , COVARIMIN METHOD IS APPLIED
C      CRT --- DIFFERENCE TO SEE CONVERGENCE TO AN EIGEN VALUE
C      A --- LOADING MATRIX
C
C      SUBROUTINE EIGEN IS REQUIRED
C
C
C
C
C

```

```

DIMENSION A(30,10),V(30,10),C(10,10),U(30,10),T(10,10),W(30),H(30)
COMMON C,U
1 READ (40,100) N,M,ICT,MCY,ICY,G,CRT
  IF(G=0.0) 3,2,3
2 WRITE (50,200)
  GO TO 8
3 IF(G=0.5) 5,4,5
4 WRITE (50,201)
  GO TO 8
5 IF(G=1.0) 7,6,7

6 WRITE (50,202)
  GO TO 8
7 G=G+0.001
  WRITE (50,203) G
8 WRITE (50,204)
  DO 9 J=1,M
  READ (40,101) (A(I,J),I=1,N)
9 WRITE (50,205) (A(I,J),I=1,N)
  DO 11 I=1,N
  H(I)=0.0

  DO 10 J=1,M
  U(I,J)=0.0
  V(I,J)=A(I,J)
10 H(I)=H(I)+A(I,J)**2
  H(I)=SQRT(H(I))
  DO 11 J=1,M
11 A(I,J)=A(I,J)/H(I)
  NCY=0
  ISW=0
  MP=M-1

  AN=N
  PCR=0.0
12 QCR=0.0
  DO 13 I=1,N
  DO 13 J=1,M
13 V(I,J)=V(I,J)/H(I)
  S=0.0
  DO 16 I=1,MP
  SI=0.0
  DO 14 K=1,N

14 SI=SI+V(K,I)**2
  JP=I+1
  DO 16 J=JP,M
  SJ=0.0
  DO 15 K=1,N
  QCR=QCR+(V(K,J)*V(K,I))**2
15 SJ=SJ+V(K,J)**2
16 S=S+SI*SJ
  QCR=AN*QCR-G*S
  DIF=ABS(QCR-PCR)

  IF(DIF=0.00001) 19,19,17
17 IF(MCY=NCY) 19,19,18
18 IF(NCY*ICT) 20,20,26
19 ISW=1
20 WRITE (50,206) NCY
  WRITE (50,207) (K,K=1,M)
  DO 22 I=1,N
  DO 21 J=1,M
21 W(J)=V(I,J)*H(I)
22 WRITE (50,208) I,(W(J),J=1,M)

```

```

      IF(NCY) 25,25,23
23  WRITE (50,209) (K,K=1,M)
      DO 24 I=1,M
24  WRITE (50,208) I,(T(I,J),J=1,M)
      WRITE (50,210) @CR,DIF
      IF(15W) 26,26,1
25  WRITE (50,211) @CR
26  PCR=@CR
      DO 34 K=1,M
      TW=0.0

      DO 29 I=1,N
      W(I)=0.0
      DO 28 J=1,M
      IF(K=J) 27,28,27
27  W(I)=W(I)+V(I,J)**2
28  CONTINUE
29  TW=TW+W(I)
      DO 30 I=1,N
30  W(I)=AN*W(I)-G*TW
      DO 32 I=1,M

      DO 32 J=1,M
      C(I,J)=0.0
      DO 31 L=1,N
31  C(I,J)=C(I,J)+A(L,J)*A(L,I)*W(L)
32  C(J,I)=C(I,J)
      CALL EIGEN (M,CRT,ICY)
      DO 33 I=1,M
33  T(I,K)=U(M,I)
      DO 34 I=1,N
      V(I,K)=0.0

      DO 34 J=1,M
34  V(I,K)=V(I,K)+A(I,J)*H(I)*T(J,K)
      NCY=NCY+1
      GO TO 12
100 FORMAT (515 F2.1,F10.5)
101 FORMAT (12F6.5)
200 FORMAT (/39H OBLIMIN SOLUTION (@QUARTIMIN CRITERION))
201 FORMAT (/41H OBLIMIN SOLUTION (BIQUARTIMIN CRITERION))
202 FORMAT (/39H OBLIMIN SOLUTION (COVARI MIN CRITERION))
203 FORMAT (/37H OBLIMIN SOLUTION (GAMMA CRITFRION = ,F4.1,2H ))

204 FORMAT (/13H INPUT MATRIX)
205 FORMAT (/8F10.5)
206 FORMAT (//20H REFERENCE STRUCTURE,5X,9HCYCLE NO.,14/)
207 FORMAT (5X,9(15,3X))
208 FORMAT (15,9F8.4)
209 FORMAT (/5X,21HTRANSFORMATION MATRIX//5X,9(15,3X))
210 FORMAT (/5X,9HCRITERION,F10.4,5X,10HDIFFERENCE,F10.4/)
211 FORMAT (/5X,9HCRITERION,F10.4/)
      STOP
      END

```

[付] サブルーティン(固有値と固有ベクトルの算出)

```

C      SUBROUTINE EIGEN BY JACOBI-S METHOD
C
C
C
C      A(I,J) --- A REAL SYMMETRIC MATRIX
C              N --- ORDER OF MATRIX A(I,J)
C              CRIT --- CRITERION CONSTANT FOR CONVERGENCE
C              MAXC --- MAX. NO. FOR ITERATIVE CYCLES
C      U(I,J) --- EIGEN VECTORS
C              EIGEN VALUES ARE IN THE DIAGONALS OF A(I,J)
C
C
C
C      SUBROUTINE EIGEN (M,CRIT,MAXC)
C      DIMENSION A(10,10),U(30,10),W(30),V(30)
C      COMMON A,U
C      MC=0
C      MM1=M-1
C      DO 1 I=1,M
C      DO 1 J=1,M
C
C      U(I,J)=0.0
C      1 U(I,I)=1.0
C      2 MC=MC+1
C      IF(MC=MAXC) 3,3,10
C      3 IH=IK=0.0
C      WMAX=-9999.9
C      DO 5 I1=1,MM1
C      I1P1=I1+1
C      DO 5 J1=I1P1,M
C      IF(ABS(A(I1,J1))-WMAX) 5,4,4
C
C      4 WMAX=ABS(A(I1,J1))
C      IH=I1
C      IK=J1
C      5 CONTINUE
C      IF(WMAX-CRIT) 10,10,6
C      6 TAN2S=2.0*A(IH,IK)/(A(IH,IH)+A(IK,IK))
C      SIT=0.5*ATAN(TAN2S)
C      SINSIT=SIN(ABS(SIT))
C      IF(TAN2S) 7,8,8
C      7 SINSIT=-SINSIT
C
C      8 COSSIT=COS(ABS(SIT))
C      W1=COSSIT**2*A(IH,IH)+2.0*SINSIT*COSSIT*A(IH,IK)+SINSIT**2*A(IK,IK)
C      1)
C      W2=SINSIT**2*A(IH,IH)-2.0*SINSIT*COSSIT*A(IH,IK)+COSSIT**2*A(IK,IK)
C      2)
C      DO 9 II=1,M
C      Y1=A(II,IH)*COSSIT+A(II,IK)*SINSIT
C      Y2=A(II,IK)*COSSIT-A(II,IH)*SINSIT
C      A(II,IH)=A(IH,II)=Y1
C      A(II,IK)=A(IK,II)=Y2
C
C      Y1=COSSIT*U(IH,II)+SINSIT*U(IK,II)
C      Y2=COSSIT*U(IK,II)-SINSIT*U(IH,II)
C      U(IH,II)=Y1
C      9 U(IK,II)=Y2
C      A(IH,IH)=W1
C      A(IK,IK)=W2
C      A(IH,IK)=A(IK,IH)=0.0
C      GO TO 2
C      10 XMIN=99999999.0
C      DO 12 I=1,M

```

```

      IF(A(I,1)-XMIN) 11,11,12
11  MINAD=1
      XMIN=A(I,1)
12  CONTINUE
      DO 13 I=1,M
          Z=U(M,I)
          U(M,I)=U(MINAD,I)
13  U(MINAD,I)=Z
          Z=A(MINAD,MINAD)
          A(MINAD,MINAD)=A(M,M)

      A(M,M)=Z
      RETURN
      STOP
      END

```

6.4.3 カイザー・ディックマン法

斜交回転法の一つで、カイザー・ディックマン法を行なう。この方法は、前項の一般オプティミム解を得るときに γ の値を先験的に与えねばならない難点を避ける目的で開発された。前項のバイクータティミン法とともに、このカイザー・ディックマン法は斜交解の代表的なものとされ繁用されている。アウトプットは斜交参考因子構造とそれへの変換行列で、その他を得るにはこの結果を次項 6.4.4 のプログラムにインプットするとよい。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	変数の数	A(I, J)	因子負荷行列
M	共通因子の数	NCY	巡回回数
MCY	巡回回数の限度	W(J)	参考構造解行列
NSEN	ゼロならば中間の巡回結果と最終結果を示し、 1ならば最終結果のみを示す	T(I, J)	変換行列
A(I, J)	因子負荷行列	CR	回転変換基準
		DIF	巡回前後の基準値の差

```

C      OBLIQUE ROTATION BY KAISER-DICKMAN METHOD
C
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      M --- NO. OF FACTORS
C      MCY --- MAXIMUM ITERATION CYCLE
C      NSEN --- 0, TO LIST UP EVERY INTERMEDIATE RESULT
C              --- 1, OTHERWISE (FINAL RESULTS ONLY)
C      A --- LOADING MATRIX

```

C
C

```

DIMENSION A(30,10),V(30,10),T(10,10),H(30),W(10)
1 READ (40,100) N,M,MCY,NSEN
WRITE (50,200)
MM=M-1
DO 2 J=1,M
READ (40,101) (A(I,J),I=1,N)
2 WRITE (50,201) (A(I,J),I=1,N)
DO 4 I=1,N

H(I)=0.0
DO 3 J=1,M
V(I,J)=A(I,J)**2
3 H(I)=H(I)+V(I,J)
DO 4 J=1,M
4 V(I,J)=V(I,J)/H(I)
SW=0
DO 6 I=1,M
DO 5 J=1,M
5 T(I,J)=0.0

6 T(I,I)=1.0
NCY=0
PCR=99999999.0
IF (NCY) 19,19,7
7 NCY=NCY+1
DO 18 K=J,M
SSA=0.0
DO 8 J=1,N
8 SSA=SSA+A(J,K)**2/H(J)
DO 18 L=1,M

IF (L-K) 9,18,9
9 SSBV=0.0
SSB=0.0
SABV=0.0
SAB=0.0
SSAV=0.0
DO 10 J=1,N
SSBV=SSBV+A(J,L)**2/H(J)*V(J,L)
SSB=SSB+A(J,I)**2/H(J)
SABV=SABV+A(J,K)*A(J,L)*V(J,L)/H(J)

SAB=SAB+A(J,K)*A(J,L)/H(J)
10 SSAV=SSAV+A(J,K)**2*V(J,L)/H(J)
D=(SSBV*SSA-SSB*SSAV)**2-4.0*(SSBV*SAB-SABV*SSB)*(SABV*SSA-SAB*SSA
1V)
IF (D) 18,11,11
11 X=(-SSBV*SSA+SSB*SSAV+SQR(D))/(2.0*SSBV*SAB-2.0*SABV*SSB)
Y=(-SSBV*SSA+SSB*SSAV-SQR(D))/(2.0*SSBV*SAB-2.0*SABV*SSB)
DX=(SSAV+2.0*SABV*X+SSBV*X*X)/(SSA+2.0*SAB*X+SSB*X*X)
DY=(SSAV+2.0*SABV*Y+SSBV*Y*Y)/(SSA+2.0*SAB*Y+SSB*Y*Y)
IF (DX-DY) 13,13,12
12 X=Y
13 Y=1.0/SQR(1.0+X**2)
X=X/SQR(1.0+X**2)
T(K,K)=Y
T(L,K)=X
X=0.0
DO 14 I=1,M
14 X=X+T(I,K)**2
X=SQR(X)
DO 15 I=1,M

```


200 — 6 章 斜 交 回 転 法

```

15 T(I,K)=T(I,K)/X
   DO 17 I=1,N
     V(I,K)=0.0
     DO 16 J=1,M
16  V(I,K)=V(I,K)+A(I,J)*T(J,K)
17  V(I,K)=V(I,K)**2/H(I)
18  CONTINUE
19  CR=0.0
   DO 22 K=1,MM
     KK=K+1

     X=0.0
     DO 20 J=1,N
20  X=X+V(J,K)
     DO 22 L=KK,M
       Y=0.0
       Z=0.0
       DO 21 J=1,N
         Y=Y+V(J,K)*V(J,L)
21  Z=Z+V(J,L)
22  CR=CR+Y/(Z*X)

     DIF=ABS(PCR-CR)
     IF(DIF=0.0001) 25,25,23
23  IF(MCY-NCY) 25,25,24
24  IF(NSEN=1) 26,32,32
25  SW=1
26  WRITE (50,202) NCY,(I,I=1,M)
     DO 28 I=1,N
       DO 27 J=1,M
         W(J)=0.0
         DO 27 L=1,M

27  W(J)=W(J)+A(I,L)*T(L,J)
28  WRITE (50,203) I,(W(J),J=1,M)
     WRITE (50,204) (I,I=1,M)
     DO 29 I=1,M
29  WRITE (50,203) I,(T(I,J),J=1,M)
     IF(NCY) 30,30,31
30  WRITE (50,205) CR
     GO TO 32
31  WRITE (50,206) CR,DIF
     IF(SW) 32,32,1

32  PCR=CR
   GO TO 7
100 FORMAT (4I2)
101 FORMAT (12F6.5)
200 FORMAT (/21H INPUT LOADING MATRIX/)
201 FORMAT (8F10.5/)
202 FORMAT (/24H KAISER-DICKMAN SOLUTION.5X.5HCYCLE,I3/5X.19HREFERANC
   1E STRUCTURE//15X,7(16.3X))
203 FORMAT (10X,14,1X,7(F8.4,1X))
204 FORMAT (/22H TRANSFORMATION MATRIX//15X,7(16.3X))

205 FORMAT (/15X.9HCRITERION,F10.4)
206 FORMAT (/15X.9HCRITERION,F10.4.5X.10HDIFFERENCE,F10.4)
   STOP
   END

```

6.4.4 根元解と参考解の各因子パターン，因子構造，因子相関，および斜交因子間角度の算出

さきの 6.4.1 項，6.4.2 項および 6.4.3 項の斜交回転の結果は，斜交参考因子構造とインプットした因子負荷行列からの変換行列のみをアウトプットしている。しかし，一般に斜交解としては参考解のみでなく根元解をも必要とし，またそれぞれについて因子構造と因子パターン，および斜交因子間の相関行列と因子間の交角行列までも算出しておかねばならない。したがって，このプログラムのインプットに，6.4.1 項，6.4.2 項および 6.4.3 項のアウトプットを用いると関数関係によって，標記の一連の結果を得ることができる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
NP	観測変数の数	T(I, J)	因子構造(参考)への変換行列
NQ	共通因子の数	A(J, I)	因子構造(参考)
T(I, J)	因子構造(参考)への変換行列	FR(I, J)	因子相関行列，因子軸間角度，
A(J, I)	因子構造(参考)	G(I, J)	因子構造(根元)および因子パターン(根元)
			因子パターン(参考)

```

C      PRIMARY FACTOR PATTERN , THE STRUCTURE ,
C      THE REFERENCE FACTOR PATTERN , THE STRUCTURE ,
C      THE FACTOR CORRELATION AND THE ANGLES AMONG AXES
C      FROM A REFERENCE FACTOR STRUCTURE
C      AND THE TRANSFORMATION MATRIX
C
C
C      NP --- NO. OF VARIABLES
C      NQ --- NO. OF FACTORS
C
C      T --- TRANSFORMATION MATRIX FROM A LIKELIHOOD FACTOR LOADING
C      TO THE REFERENCE FACTOR STRUCTURE
C      A --- REFERENCE FACTOR STRUCTURE
C
C      SURROUTINE MATINV IS REQUIRED
C
C      DIMENSION T(11,11),A(30,10),FR(10,10),G(30,10),AB(10,10),AC(30,10)
C      DIMENSION D(10,10)
C      COMMON T,A,FR,G,AB,AC,D
C
1  READ (40,100) NP,NQ
   WRITE (50,200)
   DO 2 I=1,NQ
   READ (40,101) (T(I,J),J=1,NQ)
2  WRITE (50,201) (T(I,J),J=1,NQ)
   DO 3 I=1,NQ
   DO 3 J=1,NQ
3  AB(I,J)=T(I,J)
   WRITE (50,202)
   DO 4 I=1,NQ

```

202 — 6 章 斜交回転法

```

READ (40,101) (A(J,I),J=1,NP)
4 WRITE (50,201) (A(J,I),J=1,NP)
CALL MATINV (N0)
DO 5 I=1,NP
DO 5 J=1,N0
AC(I,J)=0.0
DO 5 K=1,N0
5 AC(I,J)=AC(I,J)+A(I,K)*T(K,J)
DO 6 I=1,NP
DO 6 J=1,N0

G(I,J)=0.0
DO 6 K=1,N0
6 G(I,J)=G(I,J)+AC(I,K)*T(J,K)
DO 8 I=1,N0
TT=0.0
DO 7 J=1,N0
7 TT=TT+T(I,J)**2
TT=SQRT(TT)
DO 8 J=1,N0
8 T(I,J)=T(I,J)/TT

DO 9 I=1,N0
DO 9 J=1,N0
FR(I,J)=0.0
DO 9 K=1,N0
9 FR(I,J)=FR(I,J)+T(I,K)*T(J,K)
WRITE (50,203)
DO 10 I=1,N0
10 WRITE (50,204) I,(FR(I,J),J=1,N0)
DO 15 J=1,N0
DO 15 I=1,N0

E=FR(I,J)
SA=SQRT(1.0/F**2-1.0)
IF(E) 12,12,11
11 SH=ATAN(SA)
GO TO 14
12 SH=ATAN(SA)
SH=3.141592-SH
IF(SH-3.1415926) 14,13,13
13 SH=3.1415926-SH
14 SH=SH*180.0/3.1415926

NSH=SH
FNSH=NSH
SH=FNSH+(SH-FNSH)*0.6
15 FR(I,J)=SH
WRITE (50,205)
DO 16 I=1,N0
FR(I,I)=0.0
16 WRITE (50,206) I,(FR(I,J),J=1,N0)
WRITE (50,207)
DO 17 I=1,NP

17 WRITE (50,204) I,(A(I,J),J=1,N0)
WRITE (50,208)
DO 18 I=1,NP
18 WRITE (50,204) I,(G(I,J),J=1,N0)
DO 19 I=1,N0
DO 19 J=1,N0
D(I,J)=0.0
DO 19 K=1,N0
19 D(I,J)=D(I,J)+T(I,K)*AB(K,J)
DO 20 I=1,NR

```

```

DO 20 J=1,N0
FR(I,J)=0.0
DO 20 K=1,N0
20 FR(I,J)=FR(I,J)+G(I,K)*D(J,K)
WRITE (50,209)
DO 21 I=1,NP
21 WRITE (50,204) I,(FR(I,J),J=1,N0)
DO 22 I=1,N0
DO 22 J=1,N0
22 T(I,J)=D(I,J)

CALL MATINV (N0)
DO 23 I=1,NP
DO 23 J=1,N0
FR(I,J)=0.0
DO 23 K=1,N0
23 FR(I,J)=FR(I,J)+A(I,K)*T(K,J)
WRITE (50,210)
DO 24 I=1,NP
24 WRITE (50,204) I,(FR(I,J),J=1,N0)
GO TO 1

100 FORMAT (2I2)
101 FORMAT (12F6.5)
200 FORMAT (/22H TRANSFORMATION MATRIX/)
201 FORMAT (8F10.5)
202 FORMAT (/27H REFERENCE FACTOR STRUCTURE/)
203 FORMAT (/32H FACTOR CORRELATION MATRIX/)
204 FORMAT (2X,12,2X,(9F8.4))
205 FORMAT (/24H ARC ( COS ) MATRIX ,/)
206 FORMAT (2X,12,2X,(9F8.2))
207 FORMAT (/36H FACTOR STRUCTURE ( REFERENCE)/)
208 FORMAT (/36H FACTOR PATTERN ( REFERENCE)/)
209 FORMAT (/36H FACTOR STRUCTURE ( PRIMARY )/)
210 FORMAT (/36H FACTOR PATTERN ( PRIMARY )/)
STOP
END

```

[付] サブルーティン(逆行列の算出)

```

C      SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C      - CROUT METHOD -
C
SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(31,31),B(10),C(10)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
A(I,I)=1.0
DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
DO 3 J=1,N
DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
RETURN

END

```

7 因子の解釈

元来、因子分析法は、実質科学のある領域での現象に関して、 p 種の観測特性をより小さい q 個の内因因子で説明しようとする一つの解析法であり、また観測特性や観測対象などにおける各因子の計量的考察をも意図するものであった。このような因子分析の一連の手順の中で、実質科学に最も密着して重要な手順は、本章の因子の解釈 (factor interpretation) という段階である。ちょうど、前章までの手順は農業における播種と育成にあたり、この因子の解釈およびそれ以降の吟味はいよいよ収穫の時期にあるといえよう。

7.1 解釈の立場とその意義

ある実質科学の分野で実験を行なうとき、あらかじめいくらかの着想や予想を有することは当然であり重要である。因子分析を意図する場合にも、あらかじめ、このような要因ないし内因因子は若干個、ある場合には枚挙にいとまなほほどに、数えあげられよう。しかし、ここで強調したいことは、いまの目的が個々の現象の主観的記述ではなく、得られた観測値群から本質にせまる一般的な法則性とその例外を、科学的に追求する実証の立場とその方法論を重視していることである。このような立場は、因子分析法の適用時だけに限らず、自然科学や人文・社会科学などの分野で、いわゆる科学の研究や調査が普遍的・客観的に科学的方法に基づいてすすめられねばならないことに帰して考えられる。そして、実験の計画やデータ分析にさきだち、データの性格や構造の立場を最初から十分に掘り下げておかないと、因子の解釈に際し、きわめて常識的またはむしろ劣るような結果に墮し、新たな知見が何もないようなことになる。

因子分析の有用性は、明確な要因または内因因子の概念が現在まだ完全に整理されていない実質科学のある分野で、因子による論理体系を築き、この体系により問題とする事象の解明が行なわれ、さらに展開が期待できることにある。

共通因子の解釈は、通常、各因子と観測特性の線形式の関係から、因子パターンの要素の大きいものの組み合わせを重視し、同時に要素の小さいものとの関係を視察して行なわれる。すなわち、因子パターンの第 i 列は第 i 因子 ($i=1, 2, \dots, q$) に負荷する大きさを示すから、この列の要素のうちでまず正負を問わず絶対値の大きい観測特性に注目する。このとき、要素の正負は対応する観測特性の間の定性的な関係としてあたかも相関のような見方で考慮に入れる。このようにして、注目された特性を通じて浮かび上がる共通の性格を起因的に考察する。もし、算出された符号のままでも共通の性格が考えにくければ、その列の符号をいっせいに反転させて考えてもよい。また、このときに注目されなかった観測特性、すなわち要素の絶対値が小さいものについては、この第 i 列が示す因子にそれほど貢献していない特性とみなし、上で考えた因子の性格を補正する。次いで、観測特性の立場から因子パターンを方向に視察する。このときに各観測特性がどの因子にどのような順に寄与しているか、さらに全く寄与しない因子は何かということをも考察する。

このような考察は、斜交解の場合、各因子と観測特性間の相関性を示す根元因子構造によるほうが容易である。すなわち、因子構造は因子パターンよりも通常、ゼロに近い要素を比較的多く含んでいて、さらに参考軸によるものよりも根元因子軸について考えるほうが直接的であるといえる。また、行列の要素がゼロまたはゼロに近いとき、該当する因子がその観測特性に含まれていないとするのはまちがいで、この観測特性はその共通因子に特別には寄与していないと考えるべきである。

いつも因子の解釈には、その現象や観測対象の背後にかくされた基本的な性格をできるだけ客観的に、原因系・器官の機能・能力・作用単位・パラメータや独立な抽象的測度などの概念をもつことばで表現する。このためには感覚的に理解できた後に、適切な語彙で表現し、同時に簡潔な説明を付しておくのがよい。この考究の困難さを避けて、各因子を F_1, F_2, \dots または X_1, X_2, \dots な

表 7.1 各個人の観測特性平均値(各人の平均)

	内 胚 葉 型					中 胚	
	1	2	3	4	5	6	7
全 頭 長	-0.42	-0.72	-0.06	-0.49	-1.49	0.37	0.82
頭 の 幅	-0.59	-0.26	-0.06	0.53	0.02	-0.76	0.37
最 小 前 頭 幅 径	-0.50	-0.37	0.36	0.53	-0.29	-1.71	1.28
両 頬 骨 間 の 長 さ	-0.59	-0.14	0.21	0.82	-0.44	-0.76	1.28
両 角 間 の 長 さ	-0.02	-0.37	-0.34	-0.20	0.61	-0.95	-0.09
顔 面 高	-0.34	-1.06	-0.52	-0.20	0.76	0.56	0.60
上 顔 長	-0.42	-1.41	-0.98	0.09	-0.14	0.75	0.14
鼻 高	-0.83	-0.95	-0.61	0.67	-0.44	-0.01	1.28
鼻 口 幅	-0.83	-0.14	-0.43	0.09	0.16	2.64	0.60
瞳 孔 間 の 長 さ	-0.50	-0.37	0.12	0.53	-0.59	-0.19	-0.09
指 長	-0.59	-1.06	-1.25	-0.78	-0.29	0.56	-0.09
手 掌 長	-0.34	-0.60	-0.80	-1.07	0.61	-0.01	0.82
手 掌 幅	-0.02	-0.72	-0.25	-1.36	0.61	0.37	1.28
上 腕 骨 長	-0.91	-0.26	-1.44	-0.92	-1.49	0.37	-0.77
橈 骨 長	-0.83	0.08	-0.89	-1.79	-0.89	0.56	-1.45
全 腕 長	-0.99	-0.37	-1.16	-1.21	-0.59	1.88	-1.22
翼 幅	-0.67	-0.14	-0.89	-0.92	-0.59	0.56	-0.77
大 腿 骨 長	-1.15	-0.14	-1.07	-0.92	-1.04	-0.01	-0.77
脛 骨 長	-0.50	-0.95	-0.52	-1.36	-1.34	2.26	-2.36
全 脚 長	-0.75	-0.72	-1.16	-0.92	-0.44	0.37	-1.22
坐 高	-0.42	-0.37	-0.25	-0.20	-0.59	-0.95	0.60
胴 長	-0.42	-0.26	-0.06	-0.20	-0.01	-1.14	0.37
両 肩 峰 の 長 さ	-0.26	0.66	-0.06	-0.63	-0.89	0.37	1.05
上 前 腸 骨 棘 間 距 離	1.77	2.84	1.03	1.69	0.91	-1.52	-1.68
胸 幅	0.79	-0.03	1.12	2.27	-0.44	-0.76	0.60
胸 の 厚 み	2.34	1.35	1.40	2.13	0.01	-1.52	-1.22
頭 跗	-0.50	-0.49	-0.16	-0.05	-0.89	-0.19	0.82
首 回 り	0.71	1.00	0.57	0.53	0.91	-0.57	1.28
胸 跗	1.77	1.81	1.67	1.55	1.21	-1.14	0.82
上 腕 跗	2.34	1.46	1.85	0.67	2.86	0.75	0.37
下 腕 跗	1.04	-0.14	0.94	-0.05	1.66	0.94	-0.09
大 腿 の 中 間 跗	1.53	2.61	2.22	0.97	2.11	-0.38	-1.00
ふ くら は き 跗	1.69	0.77	2.22	0.67	1.06	-0.38	-1.22
体 勢 (= 身 長)	-0.59	-0.49	-0.70	-0.49	-0.59	-0.38	-0.31

どと命名するのは好ましくない。このような中途半端な解釈にとどまる命名では、この後の因子評点の考察や次回の実験での因子に関する検証が不明確になるからである。因子の解釈をきびしく掘り下げて実験で追試することは、単に統計的な推論を固めるだけでなく、実質科学での仮説に関し検証実験や研究開

値と標準偏差で各列を規準化している)

葉 型			外 胚 葉 型				
8	9	10	11	12	13	14	15
0.70	0.13	-0.06	0.20	0.67	0.91	-0.10	-0.03
1.45	-1.39	0.35	-0.10	0.45	0.13	0.65	-0.15
0.70	-0.06	-0.47	0.00	0.13	0.24	0.33	0.20
1.20	-0.63	-0.00	-0.10	0.45	0.01	0.22	-0.27
0.70	0.71	-0.67	0.00	0.02	-0.55	0.65	0.56
0.70	1.09	0.15	0.10	0.13	0.80	-0.10	-0.97
-0.80	1.28	-0.06	0.70	0.24	0.69	0.44	0.44
-0.30	-0.25	-0.67	0.10	0.13	0.57	0.87	0.91
0.95	0.71	1.17	-0.20	0.56	0.01	-0.95	-1.21
1.45	0.13	-1.29	0.20	-0.41	0.46	0.65	0.32
-0.55	-0.44	1.17	1.19	0.88	0.24	0.44	0.44
-1.80	-0.82	0.76	0.50	0.56	0.57	0.76	0.44
0.95	-0.06	1.58	0.30	-0.30	0.01	-0.10	-0.39
0.20	-1.39	-1.70	1.19	1.85	1.13	1.19	1.38
-1.80	-0.63	-0.06	1.29	0.77	1.13	0.87	1.49
-1.05	-1.01	-0.26	0.90	1.10	1.02	0.87	1.02
-0.55	-0.44	-0.06	0.60	0.77	0.80	0.65	0.79
-0.80	-1.01	-0.67	1.00	1.21	1.47	1.29	1.14
-1.05	-1.77	-0.47	1.79	0.99	0.69	0.54	1.49
-0.55	-1.20	-0.67	1.39	1.10	0.69	1.08	1.49
-0.05	-0.25	-0.06	0.30	0.24	0.69	0.54	0.44
-0.05	0.33	0.35	0.10	-0.09	0.24	0.76	0.32
0.45	1.09	-0.47	-0.30	0.24	-0.21	-0.20	0.32
-1.55	-1.77	-2.11	-0.79	-0.74	-1.44	-0.31	-0.50
-0.05	1.28	-1.08	-0.49	-0.63	-1.11	-0.63	-0.86
-1.55	1.85	-0.26	-2.08	-1.38	-0.55	-1.70	-0.62
0.70	-0.44	0.15	0.10	0.45	0.57	0.44	-0.03
0.20	0.71	0.76	-0.69	-0.95	-0.99	-0.95	-0.97
-0.55	1.47	0.88	-1.59	-1.71	-1.44	-1.49	-1.44
0.70	1.09	3.01	-2.68	-2.46	-2.67	-2.56	-2.27
2.70	1.47	1.58	-0.79	-1.60	-1.67	-1.28	-1.56
-1.05	0.90	0.76	-1.69	-1.92	-2.00	-2.24	-1.44
0.70	-0.06	0.56	-1.19	-1.38	-1.11	-1.38	-1.44
-0.30	-0.63	-0.26	0.80	0.67	0.69	0.76	1.02

発をすすめていくうえでも重要であろう。

また、因子解釈の際には、はじめに統計的観測の対象となった母集団の規定に慎重に配慮し、因子解釈の適用がどのような範疇まで普遍的でありうるか、その制約を忘れてはならない。

表 7.2 各個人間の相関行列, およ

個人番号	1	2	3	4	5	6	7
1	—	-0.034	-0.005	-0.011	-0.014	-0.015	0.047
2	0.788	—	-0.005	0.020	-0.002	-0.017	-0.024
3	0.900	0.763	—	-0.010	-0.054	-0.010	0.045
4	0.689	0.575	0.753	—	0.030	0.037	-0.018
5	0.746	0.571	0.689	0.416	—	-0.062	-0.045
6	-0.364	-0.389	-0.417	-0.582	-0.145	—	0.124
7	-0.121	-0.222	0.032	0.176	0.098	-0.224	—
8	-0.039	-0.218	0.169	0.101	0.156	0.039	0.497
9	0.513	0.221	0.512	0.472	0.476	-0.119	0.387
10	0.221	-0.026	0.218	-0.153	0.565	0.332	0.274
11	-0.879	-0.745	-0.903	-0.761	-0.751	0.338	-0.207
12	-0.909	-0.683	-0.920	-0.679	-0.838	0.339	-0.111
13	-0.887	-0.742	-0.878	-0.655	-0.842	0.263	-0.061
14	-0.876	-0.692	-0.876	-0.605	-0.760	0.080	-0.065
15	-0.768	-0.557	-0.827	-0.642	-0.802	0.153	-0.308

さて、上のように因子の解釈を適正な方法で行なったとしても、得られた因子についてなお別の解釈もなりたつことがある。すなわち、われわれがすべての因子にいつも真の解釈を下しているという保証は得られない。このようなどき最も建設的で有益なのは、新しく因子分析的な実験を計画し実施して、それらの追跡的な結果により因子の解釈を補正することである。このような実証的な立場と考慮によって、因子分析法は実質科学に有用な役目を果たし、次第にその問題の概念が整理・体系づけられ解明される。したがって、1, 2回の因子分析の結果による因子の解釈は、しばしば、仮りの解釈 (tentative interpretation) とよばれる。

上に記述したことは、因子を解釈する際の考え方と方法および若干の注意であるが、もっと具体的な解釈には、実質科学分野の個別の問題にはいり込み内容的な種々の考察が必要となる。この参考として次節で実例を紹介する。

7.2 因子解釈の実例

因子解釈の典型例として、Howells* による形態学的体形に関する研究を紹

* W. W. : Howells "A factorial study of constitutional type", *Amer. J. Phys. Anthropol.*, 1952, Vol. 10, pp. 91~118.

び3個の因子抽出による残差行列

8	9	10	11	12	13	14	15
0.041	-0.054	0.018	-0.006	0.024	0.000	0.022	0.008
0.045	0.033	-0.016	-0.057	-0.018	0.023	0.031	0.043
-0.067	0.029	0.018	0.013	0.012	-0.009	0.030	0.012
0.003	0.026	0.074	0.022	0.007	-0.019	-0.040	-0.054
0.019	0.037	0.071	0.024	0.030	0.031	-0.078	0.000
-0.003	-0.052	-0.005	0.016	-0.029	0.002	0.098	0.040
0.031	-0.007	-0.087	-0.002	0.035	0.002	0.020	0.007
—	-0.103	0.020	-0.021	0.016	-0.058	0.028	-0.045
0.257	—	0.026	0.020	-0.052	0.037	-0.091	0.036
0.305	0.329	—	-0.028	0.025	-0.004	0.015	0.001
-0.196	-0.649	-0.325	—	0.020	0.034	-0.016	0.017
-0.177	-0.659	-0.376	0.912	—	-0.003	-0.015	-0.040
-0.198	-0.518	-0.357	0.862	0.907	—	-0.022	-0.022
-0.156	-0.666	-0.475	0.894	0.885	0.873	—	0.027
-0.397	-0.645	-0.510	0.873	0.849	0.833	0.904	—

介しよう。この論文はいわゆる Q 技法に基づき、因子分析法の本来の R 技法といくぶん異なる観点をもつうえでも参考となる。

しかし、彼の初期の1952年の論文なので、自由に電子計算機を駆使し正規の成因分析・最尤推定や因子数の検定・また種々の解析的回転法やそれに基づく因子評点の推定などは実験科学的に行なわれていない。これらの精彩な分析はその後長期に継続して展開されているが、ここでは現象に密着した解釈の仕方や結果の考え方と表示の方法に学ぶことが多いので当初の論文を引用する。また、因子の解釈を容易にする図形も示されていて興味ぶかい。

Howells は、従来の文献を調査し、最も代表的な endomorphs (内胚葉型体構)、mesomorphs (中胚葉型体構)、および ectomorphs (外胚葉型体構)に着目して、各体構から5名を選定し合計15名により表7.1に示すような34個の特性項目について観測値行列を得た。

まず、15名の間の体形における相違を規定する因子を探究する目的で、繰り返し観測数を34として、表7.2左下半分に示される15名間の相関行列を作成した。これは Q 技法の考え方である。

この相関行列から、セントロイド法によって3個の因子を抽出し、表7.3の結果を得ている。そしてこのときの残差行列が表7.2右上半分に示されてい

る。ちなみに、第4の因子では寄与する分散値が0.382で、全分散に対する割合は2.5%であったと記述されている。

さて、セントロイド法による表7.3の中では、体形を直接に説明できる因子とは考えない。ただ、特定の15名による34種類の観測特性値から得られる範囲のデータでは、個人の相似と差異に関して適当と考えられる3本の無相関な軸で純粹かつ単純に表現され、各因子が何を意味するにしろ、15名の各個人が3つの因子で測られるということである。

ここに、第1の因子 F_1 は5名の endomorphs と5名の ectomorphs をかなりよく区別している。この段階ではまだ因子軸の回転を行っていないが、この F_1 は明らかに嵩^{かさ}(mass) とか丸さ (globularity) とか肥満 (fat) の程度を示すと考えられた。そして mesomorphs の群の中でも、第6番めの方は丸さというよりも細長であり、第9番めの方はその反対の状態にあることが知られている。第2の因子 F_2 は、主として mesomorphs に属している人を集めており、endomorphs の人に反するようである。第3の因子 F_3 は、mesomorphs

表 7.3 セントロイド解

個人番号	因 子			共有性
	I	II	III	h^2
1	0.877	0.334	-0.220	0.929
2	0.665	0.555	-0.244	0.810
3	0.923	0.259	-0.040	0.921
4	0.721	0.355	0.332	0.756
5	0.817	-0.091	-0.334	0.787
6	-0.329	-0.465	-0.431	0.510
7	0.245	-0.488	0.571	0.624
8	0.265	-0.511	0.266	0.402
9	0.669	-0.266	0.175	0.549
10	0.378	-0.637	-0.380	0.693
11	-0.968	-0.091	-0.028	0.946
12	-0.959	-0.073	0.092	0.933
13	-0.923	-0.101	0.199	0.902
14	-0.916	0.022	0.263	0.909
15	-0.941	0.218	0.038	0.934
全分散 (=15) に寄与してい る分散値	8.513	1.884	1.208	11.605
上値の全分散 に対する比率	56.8%	12.6%	8.1%	

の人を2分していて、第6, 10番めの人と第7(著しい), 8, 9番めの人とに差異を見いだしている。

いまの場合、因子の数が3であるので、各個人は3次元空間で半径1の球内の座標点として表現できる。したがって、各点は球の中心から共有性の平方根の距離にある。図7.1は、 F_1, F_2, F_3 の互いに直交する軸の原点より各個人を示す点に至るベクトルを球面上で表示したもので、各人の集落を見るのに便利であろう。

図7.1から直ちに、endomorphsの5名は F_1 の北極(+)の回りに位置し、一方ectomorphsの人々は南極(-)に密接している。第6, 10の人は、両極と赤道の間で一つの4半球にあり、また第7, 8, 9の人は別の4半球にある。とくに第7の人は離れており、第9の人はendomorphsの人々からそれほど遠くはない。

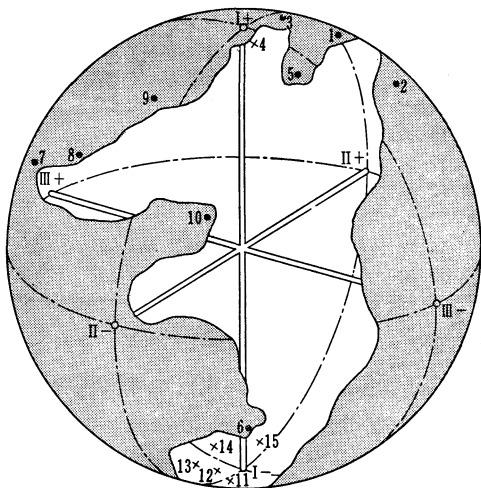


図 7.1 F_1, F_2, F_3 空間内の各人の位置

さらに、上のセントロイド法による因子パターンを回転で改良し、個人個人の関係をいっそう明確にできないか否かを考察している。図7.1で、 F_1 はちょうどよく定められているが、 F_2 と F_3 の軸はもっと移動してみる余地があるように思える。すなわち、 F_2 は第6と第10がどのような特殊な状態であるにしろ、第6と第10の間を通るように、また F_3 は第7と一致するものが望ましく思われた。このような斜交回転をグラフ法によって行ない、表7.4の結果を得ている。

この回転結果を打点してみると、因子パターンの要素の大きさに関して意味のあるものを増大し、無意味なものを減少していることがよくわかる。すなわち、数字からも判断されてくるように、簡素構造の立場からみて全体的にこれらの因子軸をより真実の場所に配置したと考えられる。表の右方には、変換行

表 7.4 斜交因子パターン, 変換行列および因子間の相関行列

個人番号	因 子			変 換 行 列		
	I	II	III	I	II	III
1	0.954	-0.193	0.036			
2	0.804	-0.381	-0.048	0.951	0.198	0.000
3	0.941	0.002	-0.088	0.209	-0.575	-0.474
4	0.684	0.202	-0.461	-0.229	0.794	-0.881
5	0.834	-0.051	0.337			
6	-0.311	-0.140	0.600			
7	0.000	0.782	-0.271			
8	0.084	0.557	0.008			
9	0.541	0.424	-0.028			
10	0.313	0.139	0.637			
11	-0.933	-0.162	0.068			
12	-0.948	-0.075	-0.046			
13	-0.944	0.033	-0.127			
14	-0.927	0.015	-0.242			
15	-0.858	-0.281	-0.137			

因子間の相関行列			
	I	II	III
I	1.000		
II	0.078	1.000	
III	-0.060	0.420	1.000

列と新しい斜交因子間の相関行列が示されている。この回転によって、事実上、第1因子は依然として他の因子と無相関であるが、第2因子と第3因子間の相関係数 r は 0.420 で mesomorphy との基本的な関連を認識するものと思われた。この新因子パターン自体からは、第6と第10の間の差が強められ、また第6, 10と第7, 8, 9との区分もよくつけられている。しかし、このパターンから新しく展開される情報はなく、セントロイド解での考察をより確信づけただけのようであった。

さて、斜交回転があまり満足のゆく目新しい結果を与えなかったために、次に簡単な直交回転が行なわれた。すなわち、セントロイド解自体は一つの直交解であるが、因子間の直交性を保ったまま解を改善する試みとして直交回転が行なわれた。この結果は表 7.5 に示され、これまでのどの因子パターンよりも簡素構造の意味で良い結果を得ている。そして従来の Sheldon の仮説を立証することができた。

次いで、因子評点を算出し、因子の解釈や性質が検討された。 R 技法での因子パターンの観測特性を内因因子によって線形表現するわけで、また逆に各因子を観測特性によって表現しておき、各人の観測特性により各人の諸因子評点

を求める。しかし、この研究でいう因子パターン自体は互いに無相関な3種類の因子によって各人を表現するものであるから、いまは、各人を組成として諸

表 7.5 直交回転解

個人番号	因子		
	I	II	III
1	0.935	-0.232	-0.021
2	0.759	-0.438	-0.005
3	0.944	-0.105	0.134
4	0.705	-0.133	0.493
5	0.839	0.133	-0.256
6	-0.318	0.275	-0.577
7	0.093	0.653	0.433
8	0.155	0.599	0.139
9	0.596	0.408	0.164
10	0.346	0.569	-0.500
11	-0.957	-0.080	-0.157
12	-0.963	-0.064	-0.036
13	-0.948	-0.002	0.062
14	-0.935	-0.102	0.158
15	-0.901	-0.351	0.002
全分散に寄与する分散値	8.576	1.829	1.198

表 7.6 各因子を15名によって表現する式(縦に見る)

個人番号	因子		
	I	II	III
1	0.157	-0.447	-0.193
2	0.055	-0.317	-0.973
3	0.122	-0.183	0.221
4	0.021	-0.044	0.355
5	0.047	0.034	-0.243
6	-0.002	0.049	-0.210
7	-0.013	0.221	0.246
8	-0.004	0.120	0.059
9	0.007	0.106	0.076
10	0.013	0.185	-0.286
11	-0.167	-0.139	-0.473
12	-0.146	-0.051	-0.026
13	-0.109	0.056	0.184
14	-0.117	-0.053	0.381
15	-0.122	-0.366	0.004

表 7.7 直交回転解に基づく

I			II			
2.53	上腕囲	-0.24	胴長	1.90	鼻口幅	
2.03	大腿の中間囲	-0.26	瞳孔間の長さ	1.58	顔面高	
1.68	胸囲	-0.37	頭囲	1.31	下腕囲	*
1.58	胸の厚み	-0.42	全頭長	1.26	手掌幅	
1.52	ふくらはぎ囲	-0.43	坐高	0.85	上腕囲	
1.25	下腕囲	-0.55	手掌長	0.70	全頭長	
1.12	上前腸骨棘間距離	-0.59	上顔長	0.66	両頬骨間の長さ	
0.88	首回り	-0.60	鼻高	0.61	頭囲	
0.76	胸幅	-0.73	翼幅	0.56	上顔長	
0.03	鼻口幅	-0.76	体勢(=身長)	0.52	頭の幅	
-0.02	手掌幅	-0.78	指長	0.50	指長	
-0.04	両肩峰の長さ	-1.01	全腕長	0.45	首回り	
-0.13	両角間の長さ	-1.03	橈骨長	0.29	鼻高	
-0.14	顔面高	-1.04	脛骨長	0.24	最小前頭幅径	
-0.15	両頬骨間の長さ	-1.12	全脚長	0.22	手掌長	
-0.20	最小前頭幅径	-1.18	大腿骨長	0.19	胴長	
-0.20	頭の幅	-1.35	上腕骨長	0.11	両肩峰の長さ	

因子を表現することが望ましい。

さて、各人によって与えられる因子の表現を当初の 34 個の観測項目による因子の表現に置き換えるため、Howells はまず各人(列)ごとの 34 項目の観測値群を規準化した表 7.6 を示している。

次いで、彼は表 7.5 の因子を示す各列の数値を、対応する各人について示した表 7.6 の観測特性値に乗じて特性別に 15 名の合計を算出した。この結果が表 7.7 にまとめられている。

この表は、因子の性格を見つけやすいように、数値の大きい項目から小さいほうにかけて順に配置し整表している。この表 7.7 に基づく因子の解釈は次のとおりである。

第 1 因子: これは周囲の寸法を長さの寸法に対し、おおざっぱにいうと、*endomorph*y に *ectomorph*y を対照せしめるような形状の因子である。この因子を正にもつ人は、短身とか手足が短いということではなく、むしろ長さよりも胴回りの太さが体格上の著しい外観の特徴となる。とりわけ上腕や腿部の肥満が目だっている。そして、肉づきのよい手足に先細りの傾向を有している。反対に、この因子の負の人では著しくやせこけている。外観的に目だつのは、

く観測特性項目の評点

			III					
0.09	坐	高	1.52	胸	幅	0.00	体	勢(=身長)
0.00	瞳	孔間の長さ	1.46	最	小前頭幅径	-0.03	首	回
-0.08	胸	幅	1.30	鼻	高	-0.06	顔	面
-0.20	両	角間の長さ	1.21	瞳	孔間の長さ	-0.06	上	顔
-0.30	翼	幅	1.20	両	頬骨間の長さ	-0.39	ふ	くらはぎ
-0.40	全	腕	0.92	胸	の厚み	-0.50	翼	幅
-0.41	体	勢(=身長)	0.88	胸	囲	-0.63	手	掌
-0.44	ふ	くらはぎ	0.74	頭	の幅	-0.73	全	脚
-0.52	胸	囲	0.72	頭	囲	-0.85	鼻	口
-0.57	大	腿骨	0.65	坐	高	-0.92	大	腿
-0.86	大	腿	0.56	胴	長	-0.96	手	掌
-0.88	全	脚	0.52	全	頭	-1.01	全	腕
-0.89	上	腕	0.47	両	肩	-0.16	橈	骨
-1.08	橈	骨	0.35	上	前腸骨棘間距離	-1.19	下	腕
-1.31	脛	骨	0.35	両	角	-1.20	指	長
-1.44	胸	の厚み	0.09	上	腕	-1.55	上	腕
-2.77	上	前腸骨棘間距離	0.06	大	腿	-1.76	脛	骨

手足とくに上腕や腿部などの第1分節が長いことである。そして手足や胸の回りは貧弱である。総体的な容姿のうえでも同様の特徴が認められるが、頭部や顔面にはこの因子を含んでいないようである。

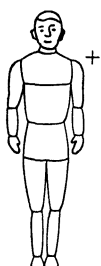
第2因子: この因子はいっそう独特なもので、頭部や胸部を一方の極に、そして他方の極には胴部や脚部に関するものを集めている。たぶんさらに特徴的には、頭部に対しそれ以外の体の部分や、また腕の回りに対し脚部の回りを対照にするような因子である。この因子の正をもつ人は、おおむね頭部から上半身の大きい人で、大きな頑強そうな頭とよく発達しているが短い腕(前腕囲がとくに目だつので endomorphic な腕ではない)、そして短い脚、うすい(小さいことは必要でない)胸、著しくすらっとした臀部などが相対的な特徴となる。これは一種の職業的な強人を思わす。しかし、主として頭部が強調されているので、単なる腕の筋肉の異常な肥大という体形ではない。この因子の負のほうの人は、厚みのある胸や下半身のささえや安定した臀部をもっている。そしてまた、すらっとした比較的長い腕と一般に小さな頭部、とくに狭小な鼻を有するような特徴を示している。

第3因子: この因子は、胴部と脚部との対比を示し、また顔だちと体つきの

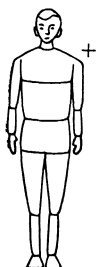
ずんぐりさとも結びついている。因子の正の側では、胸部の肥満、またいくぶん大きな座高や胴長の傾向、さらに上顔面の幅や鼻高などによって特徴づけられる。そして全貌としては比較的脚が小さく、下方分節が短くみえる。たぶん、プロレス選手は典型的にこの因子が高いようである。また、この因子の負



I



II



III



図 7.2 表 7.7 から体形の差異を印象で描いた(したがって、正確な割合をデータからとり入れたのではない)。この図はむしろ現実の体形というよりも、任意の一個人に表現される因子の双極性を示す。

側の人は、上と反対の傾向を有し、比較的長い肥えた脚をもち、とくにふっくらとした腕をもっている。そして胴は比較的短くほっそりし、頭部も体の構成からいって大きくなく、細くきゃしゃな顔をしている。想像される印象は、レスラーよりもウエルター級のボクサーに近い体形である。

このような考察のもとに、図 7.2 のような各因子の正負に関するモデルが図示されている。

Howells はさらに因子間の重複や諸因子の現実性を考察するため、別の資料を用いてさきの斜交解やセントロイド解の結果を同様の計算手順で追試している。

次いで、Howells は表 7.5 に基づき、面接の経験なく写真も見っていない段階で各人の

外観の予測を行ない、これを第 3 者に実物と照合し適中か否かを回答させている。そして、この結果が非常によく適中していたことを報じている。このよう

に個々の対象についての検証は重要なことで是非必要である。ここでは、さらに次のような若干の例を第2被験者以降であげておく。

第2被験者: F_2 について -0.483 であった。予測として、第1の人より顕著な傾向をもって Endo である。比較的小さな頭部と大きな脚、広い臀部を有す——回答： しっかり。比較的、小さい頭部ではあるが、とくに顔が短い。非常に幅広い臀部を有し、また腿は非常に大きく長い。しかし、下脚はそうでなく膝から下が弱いように見受けられる。

第3被験者: F_1 が 0.944 で、他に目だった特徴なし。Endo 型である——回答： しっかり。典型的な Endo 型である。

第4被験者: $F_1=0.703$, $F_3=0.493$ で、他の人より目だたない Endo 型。比較的大きな胴と顔面を有し、脚は短い——回答： 比較的長い胴、非常に広くてかなり厚みのある胸を有している。この人の脚はやや短い、腕よりは短くない。上顔面と鼻が大きい。

第15被験者(最終例): $F_1=-0.901$, $F_2=-0.351$ で Ecto 型。しかし、頭部や腕部に比し胴や脚部に重みがある——回答： しっかり。比較的大きな胴と脚に重点があり、頭部や腕部と対比的である。頭部はむしろ小さく、腕はすらすらとしている。胸部はかなり大きく、丸みをもつ。

Howells は、その後も長年にわたってこのような検証や追試研究を展開し、また調査母集団と標本数などの調査技術にも言及しつつ、人類学的体形に関する医学的研究をすすめ、この分野における1体系を築いている。

8 因子評点の推定

前章までの経緯によって、直交解と斜交解のいずれの場合にも内因因子の推定と解釈が行なわれると、次に各個体 (individuals) がそれらの因子をどれほど所有しているかという各個別の因子評点 (factor score) の推定という段階にはいる。

このことは各個体が所有する諸因子の量を知ることにより、実質科学の研究者に応用上の興味・関心と実際への利用を思わすところであるが、そのまえに強調したい重要な意義がある。それは因子分析のこれまでの過程で検討された内因因子は、まだあくまで抽象的なものである。因子の命名までほとんど完了したとしても、なお実質科学分野の個々の具体的事象で、または個々の症例で確認せねばならないということである。これによって内因因子に関する考察や命名をより適切なものに修正する可能性も経験する。このことは実証を重んずる実質科学面での責務であるが、数学でいう解の吟味とか検算にも相当している。このような必要性は、次の四つの理由に基づく。第1は、数学模型における特殊因子と観測誤差因子が比較的大きい場合には共通因子の推定精度が良くなく、この誤差に基づく因子解釈の食い違いの防止となる。このことは、もちろん、観測資料の数やこれに基づいて採択した因子数にも関連する。第2は、観測特性項目が因子解釈のうえで一意的に決めうるほどに網羅されていたか否かに基づく誤解の防止がある。第3は、実質科学の研究者が具象を抽象化することの不慣れさや困難さを克服する重要な手助けとして是非必要である。そして、第4は、因子分析の方法や過程がまだ数学的な理論として完全でない部分を含み、また一面、たぶん多岐にわたる推測の目的に意を尽くし得てないた

めということでもある。

このような重要な意義のもとに、内因因子の推定や解釈が終了したあとで必ずすべての個々の例について因子評点を算出するわけである。実質科学における欧米の論文では、この段階の検証までを必ず記載して推論の妥当性を例証している。

さて因子評点の推定方法を一言でいうと、内因する各共通因子の評点を諸観測特性値の線形式として表現することである。すなわち、各個体または各現象の諸観測特性値によって各因子評点を推定する立場をとり、通常最小2乗法によるベクトル変量を推定する線形回帰論となる。また、日常業務としての計算量と速度を考慮して、回帰式を得る近似的な変法もいくつか提唱されている。

8.1 因子評点に関する直接的な最小2乗推定

まず、これまでのように j を観測個体番号、 \mathbf{x}_j をその p 次元の観測特性値ベクトル、 \mathbf{f}_j をその q 次元因子評点ベクトル、 \mathbf{A} をすでに与えられた $(p \times q)$ の因子負荷行列として、行列

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{f}_j - \hat{\mathbf{f}}_j)(\mathbf{f}_j - \hat{\mathbf{f}}_j)' \quad (8.1)$$

が示す各対角線要素を最小にするような \mathbf{f}_j の推定量 $\hat{\mathbf{f}}_j$ を求めよう。この考え方は Thomson によりはじめて提唱され、すでに与えられた \mathbf{A} に基づき直接的に因子評点の推定による誤差の平方和をつくり、これを最小にするような推定法を行なうのである。

いま、因子評点 \mathbf{f} を線形式

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{B}\mathbf{x}_j \quad (8.2)$$

なる形で推定する。したがって、推定すべき $(q \times p)$ の係数行列 \mathbf{B} を式(8.1)の各対角線要素が最小になるように定めるのがここでの問題となる。

これには一般のベクトル量に関する線形回帰の場合と同様に、式(8.1)を

$$\sum_j (\mathbf{f}_j - \mathbf{B}\mathbf{x}_j)(\mathbf{f}_j - \mathbf{B}\mathbf{x}_j)' \quad (8.3)$$

と書き直し、上式を \mathbf{B} の要素 b_{ij} ($i=1, 2, \dots, q; j=1, 2, \dots, p$) で偏微分し、正規方程式を解いて得られる。

さて正規方程式は

$$-2 \sum_j \mathbf{x}_j (\mathbf{f}_j - \mathbf{B} \mathbf{x}_j)' = \mathbf{0}, \quad (8.4)$$

すなわち

$$(\sum_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j') \mathbf{B}' = \sum_j \mathbf{x}_j \mathbf{f}_j' \quad (8.5)$$

となる。ここで \mathbf{A} はあらかじめ

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{A} \mathbf{f}_j \quad (8.6)$$

のように与えられ、かつ $\sum_j \mathbf{f}_j = \mathbf{0}$ と $\sum_j \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j' / n = \mathbf{I}$ が仮定されているから、式 (8.5) の右辺の \mathbf{x}_j に式 (8.6) を代入すると

$$(\sum_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j') \mathbf{B}' = \sum_j \mathbf{A} \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j' = n \mathbf{A} \quad (8.7)$$

を得る。また $\sum_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ として、 $\sum \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j' / n$ を標本分散共分散行列 \mathbf{V} で示す

と、上式は

$$\mathbf{V} \mathbf{B}' = \mathbf{A} \quad (8.8)$$

と書ける。すなわち、式 (8.2) における \mathbf{B} は

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}' \mathbf{V}^{-1} \quad (8.9)$$

として得られる。

次に、初期の因子負荷行列 \mathbf{A} が任意の回転行列 \mathbf{T} によって、

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{T} \quad (8.10)$$

に変換された一般の因子パターン \mathbf{K} の場合について考えよう。ここに \mathbf{T} は $(q \times q)$ の正方行列である。このとき、式 (8.6) は

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{K} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{f}_j) \quad (8.11)$$

になっており、この場合の因子評点は $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{f}_j$ である。

これを推定するための正規方程式は、式 (8.5) の \mathbf{f}_j をいまの $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{f}_j$ に置き換えればよく、

$$(\sum_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j') \mathbf{B}' = \sum_j \mathbf{x}_j (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{f}_j)' \quad (8.12)$$

と得られる。さらに、この式 (8.12) の右辺の \mathbf{x}_j に式 (8.11) を代入することによって、

$$VB' = K(T'T)^{-1} \quad (8.13)$$

となる。すなわち

$$B = (T'T)^{-1}K'V^{-1} \quad (8.14)$$

を得る。

とくに、式(8.10)における T が直交回転行列のときには、 $TT' = I$ であるから

$$B = K'V^{-1} \quad (8.15)$$

と簡単に示される。

したがって、式(8.9)または(8.14)の B を用いて、式(8.2)のように Bx_j が個々の観測対象の因子評点ベクトルの推定量 \hat{f}_j となる。

ここで \hat{f}_j の推定精度について簡単に考察しておこう。 f_j の分散は前記のように I が仮定されている。一方、 \hat{f}_j の標本分散共分散行列は A と V の標本誤差を無視すると、式(8.9)から

$$\frac{1}{n} \sum_j \hat{f}_j \hat{f}_j' = \frac{1}{n} A'V^{-1} \sum_j x_j x_j' V^{-1}A = A'V^{-1}A \quad (8.16)$$

である。したがって、 $f_j - \hat{f}_j$ で示される推定誤差の標本分散共分散行列は

$$I - A'V^{-1}A \quad (8.17)$$

と得られる。

また、任意の T で回転されている式(8.10)のときには、同様の計算により、 $f_j - \hat{f}_j$ の標本分散共分散行列は式(8.14)を用いて

$$I - (T'T)^{-1}K'V^{-1}K(T'T)^{-1} \quad (8.18)$$

となる。そして、とくに T が直交回転のときは

$$I - K'V^{-1}K \quad (8.19)$$

を得る。

ここで数値計算の例として、さきの長方形に関する検証例について因子評点を算出してみよう。因子分析法の過程で前章に数多くの参考軸に関する斜交因子構造を示したが、ここでは表6.11に示したカイザー・ディックマン法の因子構造を例にとり、その後の因子評点の数値計算の手順を示す。

カイザー・ディックマン法による最終的な参考軸に関する斜交因子構造を

Q_R とし、初期の直交解 A からの変換行列を N_R とすると、 $Q_R = AN_R$ で、表 6.11 から Q_R と同じく

$$N_R = \begin{bmatrix} 0.8526 & 0.2758 \\ -0.5225 & 0.9611 \end{bmatrix}$$

が示されている。ここに当然、 N_R は各列に関し規準化 (normalize) されている。

さて因子評点を算出するには、まずその定義より根元因子パターン G を得ることから始めねばならない。

ここに G と Q_R との関係は式 (6.66) によって

$$G = Q_R D^{-1}, \quad D = T' N_R = N_R' T$$

であり、上の第2式より $D^{-1} = N_R^{-1} (T')^{-1}$ であることが知れる。

したがって、根元因子パターンは

$$G = AN_R N_R^{-1} (T')^{-1} = A(T')^{-1}$$

表 8.1 各種因子解による因子

解の種類	直交解					
	最尤解 A		クアータティマックス解		バリマックス解	
根元因子パターン	0.5807	0.8138	0.9804	0.1955	0.2071	0.9780
	0.5804	0.8143	0.9804	0.1960	0.2066	0.9783
	0.6060	0.7953	0.9862	0.1647	0.2376	0.9712
	0.9200	0.3916	0.9386	-0.3445	0.6868	0.7266
	0.5395	-0.8417	-0.1830	-0.9828	0.8309	-0.5559
	0.9975	-0.0652	0.6823	-0.7305	0.9404	0.3388
	0.9978	-0.0652	0.6825	-0.7307	0.9407	0.3389
	0.9895	0.1438	0.8196	-0.5726	0.8495	0.5272
上を得るための変換 $(T')^{-1}$ 行列	(直接に最尤推定)		0.7288	-0.6847	0.9167	0.3996
			0.6847	0.7288	-0.3996	0.4167
因子評点のための係数行列 B'	0.0041	0.0848	0.1448	0.1333	-0.0529	0.1574
	0.0406	0.8149	0.2158	0.1988	-0.1353	0.4013
	0.0167	0.1500	0.3015	0.2592	-0.0897	0.3022
	0.1572	-0.0219	0.1734	-0.0854	0.1395	0.1097
	0.1368	-0.1846	-0.0896	-0.3304	0.2612	-0.2002
	0.0659	-0.0478	0.0290	-0.1402	0.1277	-0.0244
	0.4310	-0.3126	0.0890	-0.4326	0.4783	-0.0915
	0.2521	-0.1327	0.1084	-0.2083	0.2084	0.0151

と変形され、式(6.30)が再び確認される。すなわち、 \mathbf{G} は \mathbf{Q}_R に \mathbf{D}^{-1} を乗ずるか、または \mathbf{A} に $(\mathbf{T}')^{-1}$ を乗ずるかによって得られる。ここで上式の $\mathbf{T}'\mathbf{N}_R = \mathbf{D}$ は

$$\mathbf{T}' = \mathbf{D}\mathbf{N}_R^{-1}$$

と変形され、対角線行列 \mathbf{D} は \mathbf{N}_R^{-1} の各行を規準化するものである。

いま

$$\mathbf{N}_R^{-1} = \frac{1}{0.8526 \times 0.9611 + 0.2758 \times 0.5225} \begin{bmatrix} 0.9611 & -0.2758 \\ 0.5225 & 0.8526 \end{bmatrix}$$

であるから、これを各行に関し規準化する \mathbf{D} は、上の分母の値0.9635をそのまま \mathbf{N}_R^{-1} の各要素に乗ずるような行列にほかならない。すなわち

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.9635 & 0 \\ 0 & 0.9635 \end{bmatrix}$$

であり、この逆行列 \mathbf{D}^{-1} は

評点算出のための係数行列

オブリマックス解		クァーティミン解		バイクァーティミン解		コバリミン解		カイザー・ディックマン解	
0.9218	-0.3869	-0.0205	1.0086	0.0716	0.9798	0.2075	0.9779	0.0724	0.9779
0.9218	-0.3875	-0.0211	1.0090	0.0712	0.9801	0.2071	0.9782	0.0719	0.9782
0.9336	-0.3579	0.0142	0.9935	0.1039	0.9695	0.2381	0.9711	0.1048	0.9667
0.9885	0.1506	0.5628	0.6152	0.5973	0.6699	0.6871	0.7263	0.6015	0.6539
0.0164	0.9996	1.0407	-0.8120	0.9276	-0.6604	0.8306	-0.5562	0.9337	-0.6850
0.8142	0.5799	0.9352	0.1308	0.9117	0.2447	0.9406	0.3385	0.9178	0.2205
0.8145	0.5800	0.9354	0.1308	0.9117	0.2448	0.9408	0.3386	0.9180	0.2208
0.9173	0.3979	0.7893	0.3580	0.7920	0.4477	0.8498	0.5269	0.7974	0.4267
0.8506	0.5257	0.8941	0.2027	0.8787	0.3096	0.9168	0.3993	0.8847	0.2863
0.5257	-0.8506	-0.6634	1.0947	-0.5388	0.9831	-0.3991	0.9168	-0.5421	0.9973
0.0129	-0.0230	-0.0159	0.0671	-0.0368	0.1355	-0.0443	0.1417	-0.0018	0.1554
0.5462	-0.9806	-0.1756	0.7345	-0.0746	0.2741	-0.1151	0.3675	-0.0037	0.2979
0.0309	-0.0423	-0.0120	0.1147	-0.0772	0.3363	-0.0859	0.3041	0.0087	0.2776
0.1688	0.2628	0.2107	0.0662	0.1874	0.1628	0.0752	0.0963	0.1153	0.0997
0.0263	0.1195	0.1503	-0.0355	0.2991	-0.2085	0.2756	-0.2478	0.3997	-0.2526
0.0212	0.0550	0.1271	-0.0006	0.1668	-0.0126	0.1302	-0.0206	0.1155	0.0128
0.2034	0.5262	0.3747	-0.0019	0.1953	-0.0147	0.4454	-0.0706	0.2628	0.0291
0.1148	0.2502	0.2829	0.0220	0.3740	0.0719	0.2720	0.0560	0.2626	0.0948

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.9635 & 1 \\ 0 & 0.9635 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0379 & 0 \\ 0 & 1.0379 \end{bmatrix}$$

となる。したがって、 $(T')^{-1} = N_R D^{-1}$ より

$$(T')^{-1} = \begin{bmatrix} 0.8526 & 0.2758 \\ -0.5225 & 0.9611 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0379 & 0 \\ 0 & 1.0379 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8847 & 0.2863 \\ -0.5421 & 0.9973 \end{bmatrix}$$

を得、 G は $A(T')^{-1}$ によって求められる。

または、直接に $G = Q_R D^{-1}$ によって

$$G = \begin{bmatrix} 0.0698 & 0.9423 \\ 0.0693 & 0.9426 \\ 0.1010 & 0.9315 \\ 0.5790 & 0.6298 \\ 0.8996 & -0.6601 \\ 0.8844 & 0.2126 \\ 0.8846 & 0.2126 \\ 0.7684 & 0.4110 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0379 & 0 \\ 0 & 1.0379 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0724 & 0.9779 \\ 0.0719 & 0.9782 \\ 0.1048 & 0.9667 \\ 0.6015 & 0.6539 \\ 0.9337 & -0.6850 \\ 0.9178 & 0.2205 \\ 0.9180 & 0.2206 \\ 0.7974 & 0.4267 \end{bmatrix}$$

と得られる。

このようにして得た G および $(T')^{-1}$ は、式 (8.10) において、それぞれ K および T に対応して整理され、因子評点を得るための係数行列 B は、式 (8.14) で算出される。この結果は次のようになる。

$$B' = \begin{bmatrix} -0.0018 & 0.1554 \\ -0.0037 & 0.2979 \\ 0.0087 & 0.2776 \\ 0.1153 & 0.0997 \\ 0.3997 & -0.2526 \\ 0.1155 & 0.0128 \\ 0.2628 & 0.0291 \\ 0.2626 & 0.0948 \end{bmatrix}$$

したがって、個々の観測値 x_j の因子評点は、上の B を用いて次の式で計算される。

$$f_j = Bx_j, \quad j = 1, 2, \dots, 50$$

さて、このように得られた各 f_j の値は真の各長方形にどれほど近いものを推定し浮き出しているであろうか。これを視察によってわかるように、図 8.1 に示してみた。この図の左側がもともと未知を仮定した長方形で、右側がカイザー・ディックマン法に基づく推定の結果を示している。

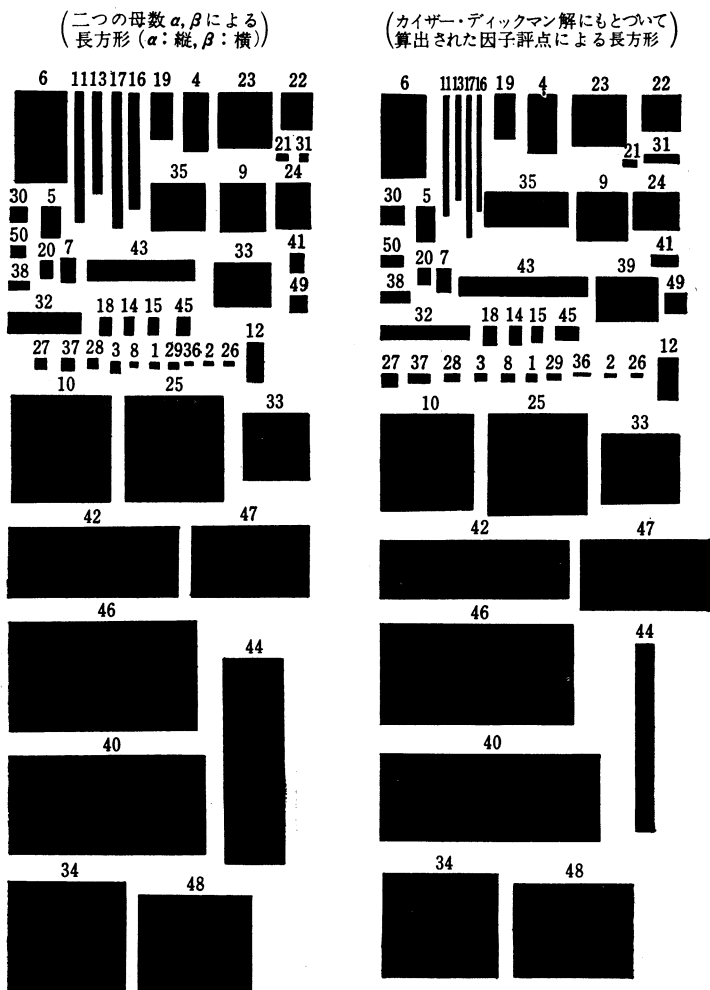


図 8.1 因子評点母数と推定された因子評点の相似

なお、参考として、前節までの各種の因子解について、それぞれの因子評点を算出するための係数行列 B を、計算過程の根元因子パターンとともに表 8.1 に示している。

さらに、これらの各法によって推定された 2 次元の因子評点ベクトルが、もとの 2 種類の真の母数とどれほどに平行的であるか、試算された相関係数の値を表 8.2 で示している。

一見して、どの回転法でもかなり近似した結果が得られているが、なかでもバリマックス解、一般オブリミン解およびカイザー・ディックマン解は二つの

表 8.2 検証数値例における因子評点母数と各

		与えられた母数		直 交 解					
				最 尤 解		クア-ティ マックス解		バリマックス解	
		α	β	1	2	1	2	1	2
与えられた母数	α	1.0000	0.5259	0.8143	0.5803	0.9805	0.1963	0.9784	0.2063
	β	0.5259	1.0000	-0.0652	0.9978	0.6825	-0.7306	0.3389	0.9407
最 尤 解	1	0.8143	-0.0652	1.0000	-0.0000	0.6846	0.7289	0.9166	-0.3997
	2	0.5803	0.9978	-0.0000	1.0000	0.7288	-0.6845	0.3996	0.9166
クア-ティ マックス解	1	0.9805	0.6825	0.6846	0.7288	1.0000	0.0001	0.9189	0.3943
	2	0.1963	-0.7306	0.7289	-0.6845	0.0001	1.0000	0.3946	-0.9188
バリマックス解	1	0.9784	0.3389	0.9166	0.3996	0.9189	0.3946	1.0000	-0.0001
	2	0.2063	0.9407	-0.3997	0.9166	0.3943	-0.9188	-0.0001	1.0000
オブリマックス解	1	0.9218	0.8144	0.5257	0.8506	0.9799	-0.1990	0.8212	0.5695
	2	-0.3877	0.5800	-0.8506	0.5256	-0.1993	-0.9799	-0.5697	0.8219
クア-ティ ミン解	1	0.9998	0.5420	0.8031	0.5957	0.9841	0.1776	0.9743	0.2249
	2	0.4223	0.9930	-0.1820	0.9832	0.5920	-0.8058	0.2260	0.9740
バイクア- ティ ミン解	1	0.9976	0.4659	0.8524	0.5227	0.9649	0.2635	0.9903	0.1383
	2	0.3088	0.9713	-0.3004	0.9538	0.4894	-0.8719	0.1057	0.9943
コバリミン解	1	0.9783	0.3384	0.9168	0.3991	0.9186	0.3951	0.9999	0.0006
	2	0.2067	0.9408	-0.3993	0.9167	0.3947	-0.9187	0.0002	0.9999
カイザー・ ディ ックマン解	1	0.9975	0.4656	0.8526	0.5224	0.9646	0.2633	0.9904	0.1380
	2	0.3330	0.9771	-0.2759	0.9611	0.5115	-0.8591	0.1311	0.9913

因子にわたって良い結果を示している。

もともと50個の長方形の作成にあたって、母数 α_j と β_j は直感的に全く無作為に独立を意図して定めたが、表8.2のように0.5259と相当に高い正の相関が認められる。すなわち、この検証数値例ではすでに母数として二つの因子評点 α と β 間に相関があり、因子軸は斜交して定められていたのである。

したがって、この場合には直交回転よりも斜交回転が望ましかったわけで、事実クォーティミン解が最も良く、次いでバイクォーティミン解とカイザー・ディックマン解が続き、その後にはコバリミン解とバリマックス解が同程度に良法により推定された因子評点間の相関係数

斜 交 解									
オブリマックス解		クォーティミン解		バイクォーティミン解		コバリミン解		カイザー・ディックマン解	
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
0.9218	-0.3877	0.9998	0.4223	0.9976	0.3088	0.9783	0.2067	0.9975	0.3330
0.8144	0.5800	0.5420	0.9930	0.4659	0.9713	0.3384	0.9408	0.4656	0.9771
0.5257	-0.8506	0.8031	-0.1820	0.8524	-0.3004	0.9168	-0.3993	0.8526	-0.2759
0.8506	0.5256	0.5957	0.9832	0.5227	0.9538	0.3991	0.9167	0.5224	0.9611
0.9799	-0.1993	0.9841	0.5920	0.9646	0.4894	0.9186	0.3947	0.9646	0.5115
-0.1990	-0.9799	0.1776	-0.8058	0.2635	-0.8719	0.3951	-0.9187	0.2638	-0.8591
0.8218	-0.5697	0.9743	0.2260	0.9903	0.1057	0.9999	0.0002	0.9904	0.1311
0.5695	0.8219	0.2249	0.9740	0.1383	0.9943	-0.0006	0.9999	0.1380	0.9913
1.0000	-0.0000	0.9290	0.7407	0.8928	0.6534	0.8215	0.5698	0.8927	0.6725
-0.0000	1.0000	-0.3701	0.6717	-0.4504	0.7569	-0.5701	0.8216	-0.4506	0.7399
0.9290	-0.3701	1.0000	0.4395	0.9961	0.3269	0.9742	0.2253	0.9960	0.3509
0.7407	0.6717	0.4395	1.0000	0.3588	0.9925	9.2255	0.9741	0.3585	0.9953
0.8929	-0.4504	0.9961	0.3588	1.0000	0.2425	0.9902	0.1387	0.9999	0.2671
0.6534	0.7569	0.3269	0.9925	0.2425	1.0000	0.1052	0.9944	0.2422	0.9996
0.8215	-0.5701	0.9742	0.2255	0.9902	0.1052	1.0000	-0.0002	0.9903	0.1306
0.5698	0.8216	0.2253	0.9741	0.1387	0.9944	0.0002	1.0000	0.1384	0.9913
0.8297	-0.4506	0.9960	0.3585	0.9999	0.2422	0.9903	0.1384	1.0000	0.2668
0.6725	0.7399	0.3509	0.9953	0.2671	0.9996	0.1306	0.9913	0.2668	1.0000

さを示している。このような斜交性の強い場合には、一般オブリン法の中でも、斜交性を強調する回転法が結果的に最も好ましいことを示唆している。

8.2 観測特性の誤差に関する最小 2 乗推定

前節では因子評点算出の係数を通常回帰論によって直接的に推定する方法を記述したが、これと異なった考え方で因子評点を求める方法が Bartlett によって提唱されている。彼は各特性項目の観測に含まれる特殊因子と誤差の項に関して、最小 2 乗法を適用し因子評点係数の推定を考えた。

いま、観測特性値について共通因子の寄与する部分を除いた残差平方和は、

$$\sum_{i=1}^p (x_i - \sum_{j=1}^q a_{ij} f_j)^2 \quad (8.20)$$

で示される。このとき、上式を式 (3.29) で与えられた標本誤差分散 $\hat{\Psi}_{ii}$ で規準化して

$$\sum_{i=1}^p (x_i - \sum_{j=1}^q a_{ij} f_j)^2 / \hat{\Psi}_{ii} \quad (8.21)$$

を最小にするような各 f_j を考える。このために、常法によって式 (8.21) をそれぞれ f_1, f_2, \dots, f_q で偏微分しゼロに等しいとおいた q 個の連立正規方程式をつくる。

いま、 f_j で偏微分した式は

$$2 \sum_{i=1}^p \{ a_{ij} (x_i - \sum_{r=1}^q a_{ir} f_r) / \hat{\Psi}_{ii} \} = 0 \quad (8.22)$$

となり

$$\sum_{i=1}^p \frac{a_{ij} x_i}{\hat{\Psi}_{ii}} = \sum_{i=1}^p \frac{a_{ij}}{\hat{\Psi}_{ii}} (\sum_{r=1}^q a_{ir} f_r), \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (8.23)$$

を得る。ここに f_i の推定値を \hat{f}_i で示している。

これらの式を行列演算で表現すると

$$A' \hat{\Psi}^{-1} \mathbf{x} = (A' \hat{\Psi}^{-1} A) \mathbf{f} \quad (8.24)$$

または

$$\hat{\mathbf{f}} = (A' \hat{\Psi}^{-1} A)^{-1} A' \hat{\Psi}^{-1} \mathbf{x} \quad (8.25)$$

として得られることになる。

また、任意の T で $AT=K$ と回転した一般の因子パターンの場合の因子評点の推定は次式で示される。

$$T^{-1}\hat{f} = T(K\hat{\Psi}^{-1}K)^{-1}K'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{x} \quad (8.26)$$

このように、前節と本節によって得られる因子評点の推定法の立場も結果も全く異なっている。したがって、ここで双方の結果を式 (8.9) と (8.25) によって、それぞれ

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(1)} &= A'V^{-1}\mathbf{x}, & \hat{f}^{(2)} &= J^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{x} \\ \text{ここに} & & J &\equiv A'\hat{\Psi}^{-1}A \end{aligned} \quad (8.27)$$

とおき、その関係を明らかにしておこう。

このために、 V と $\hat{\Psi}$ の間に容易に成立する次の関係式を適用する。

いま構造模型式 $\mathbf{x} = A\mathbf{f} + \boldsymbol{\varepsilon}$ で、標本分散行列 V が

$$V = AA' + \hat{\Psi}, \quad J \equiv A'\hat{\Psi}^{-1}A$$

で示されるとき、恒等的に次式が成立する。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & V^{-1} = \hat{\Psi}^{-1} - \hat{\Psi}^{-1}A(I+J)^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1} \\ \text{(ii)} \quad & A'V^{-1} = (I+J)^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad (8.28)$$

この証明は、次のとおりである。

(i) については、 $\hat{\Psi} = V - AA'$ であるから

$$I = \hat{\Psi}^{-1}V - \hat{\Psi}^{-1}A(I+J)^{-1}(I+J)A'$$

しかるに、上式右辺第2項の右側は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} (I+J)A' &= (JA' + IA') = A'\hat{\Psi}^{-1}(AA' + \hat{\Psi}) = A'\hat{\Psi}^{-1}V \\ \therefore I &= \hat{\Psi}^{-1}V - \hat{\Psi}^{-1}A(I+J)^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1}V \\ \therefore V^{-1} &= \hat{\Psi}^{-1} - \hat{\Psi}^{-1}A(I+J)^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad \text{qed}$$

(ii) については、(i) の結果を用いて両辺の左から A' を乗ざるとよい。すなわち

$$\begin{aligned} A'V^{-1} &= A'\hat{\Psi}^{-1} - A'\hat{\Psi}^{-1}A(I+J)^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1} \\ &= A'\hat{\Psi}^{-1} - J(I+J)^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1} \\ &= [I - J(I+J)^{-1}]A'\hat{\Psi}^{-1} \\ &= (I+J)^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad \text{qed}$$

したがって、式 (8.28) の右辺により式 (8.27) の $\hat{f}^{(1)}$ は

$$\hat{f}^{(1)} = (I+J)^{-1}A'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{x} \quad (8.29)$$

と書ける。上式と式 (8.27) の $\hat{f}^{(2)}$ の関係より

$$J\hat{f}^{(2)} = (I+J)\hat{f}^{(1)} \quad (8.30)$$

が得られる。これを整理して

$$\hat{f}^{(2)} = (I+J^{-1})\hat{f}^{(1)} \quad (8.31)$$

が示され、前節と本節による因子評点の推定値間の関係が知れる。

上式は直交因子に関する 8.1 節と 8.2 節の因子評点間関係を示したが、斜交因子についても因子評点間関係、すなわち式 (8.14) と (8.26) の関数関係が全く同様にして示される。

いま、任意の回転 T により $K=AT$ として

$$V = K(T'T)^{-1}K' + \hat{\Psi}, \quad J \equiv K'\hat{\Psi}^{-1}K$$

とおいたとき、式 (8.14) で与えられた $B=(T'T)^{-1}K'V^{-1}$ は

$$B = (T'T+J)^{-1}K'\hat{\Psi}^{-1} \quad (8.32)$$

とも示される。

この証明は次のように示される。

$$\begin{aligned} I &= \hat{\Psi}^{-1}\hat{\Psi} = \hat{\Psi}^{-1}[V - K(T'T)^{-1}K'] \\ &= \hat{\Psi}^{-1}V - \hat{\Psi}^{-1}K(T'T+J)^{-1}(T'T+J)(T'T)^{-1}K' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad (T'T+J)(T'T)^{-1}K' &= K' + J(T'T)^{-1}K' \\ &= K' + K'\hat{\Psi}^{-1}K(T'T)^{-1}K' \\ &= K'\hat{\Psi}^{-1}[\hat{\Psi} + K(T'T)^{-1}K'] = K'\hat{\Psi}^{-1}V \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad I = \hat{\Psi}^{-1}V - \hat{\Psi}^{-1}K(T'T+J)^{-1}K'\hat{\Psi}V$$

$$\therefore V^{-1} = \hat{\Psi}^{-1} - \hat{\Psi}^{-1}K(T'T+J)^{-1}K'\hat{\Psi}^{-1}$$

ここで最終的に式 (8.32) は次のように得られる。

$$\begin{aligned} B &= (T'T)^{-1}K'V^{-1} = (T'T)^{-1}[K'\hat{\Psi}^{-1} - K'\hat{\Psi}^{-1}K(T'T+J)^{-1}K'\hat{\Psi}^{-1}] \\ &= (T'T)^{-1}[I - J(T'T+J)^{-1}]K'\hat{\Psi}^{-1} \\ &= (T'T)^{-1}(T'T+J)(T'T+J)^{-1} - J(T'T+J)^{-1}]K'\hat{\Psi}^{-1} \\ &= (T'T+J)^{-1}K'\hat{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad \text{qed!}$$

したがって、式 (8.32) と式 (8.26) を用いて

$$K'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{x} = (T'T+J)\hat{f}^{(1)} = J\hat{f}^{(2)} \quad (8.33)$$

である。これを右辺の等号に関して整理すると

$$\hat{f}^{(2)} = J^{-1}(T'T + J)\hat{f}^{(1)} = (I + J^{-1}T'T)\hat{f}^{(1)} \quad (8.34)$$

を得る。これが本節と前節の因子評点の推定の差異を示す関係式となる。

ここで数値例として、カイザー・ディックマン法による結果を利用し、本節の方法と前節の方法による因子評点の比較を行なってみよう。もちろん、この場合は斜交因子の評点を求めることになる。

本節の方法による因子評点算出のための係数行列 B は次の値を示す。

$$B = \begin{bmatrix} -0.0018 & -0.0037 & 0.0087 & 0.1153 & 0.3997 & 0.1155 & 0.2628 & 0.2627 \\ 0.1554 & 0.2980 & 0.2776 & 0.0997 & -0.2526 & 0.0128 & 0.0291 & 0.0948 \end{bmatrix}$$

この結果は、前節の係数行列とほとんど一致している。これは式 (8.14) と (8.26) における $(T'T + J)^{-1}$ と J^{-1} の相違であって、この数値例では

$$\begin{aligned} (T'T + J)^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.11095 \times 10^{-3} & -0.92733 \times 10^{-5} \\ -0.92733 \times 10^{-5} & 0.88818 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \\ J^{-1} &= \begin{bmatrix} 0.11097 \times 10^{-3} & -0.92782 \times 10^{-5} \\ -0.92782 \times 10^{-5} & 0.88827 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \\ J &= \begin{bmatrix} 0.90907 \times 10^4 & 0.94954 \times 10^3 \\ 0.94954 \times 10^3 & 0.11356 \times 10^5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となっている。そして $J = K'\hat{\Psi}^{-1}K$ の要素が非常に大きく、 $T'T$ の要素が無視されるほどの値となっている。このことは $\hat{\Psi}$ が非常に小さかったことに基づいている。すなわち、残差誤差が小さければ当然のように、前節と本節の因子評点はきわめて近い値を示すことが知れる。

8.3 複合変量による近似的推定

近似的に因子評点を推定する方法はいくつか提唱されているが、それらはほとんど観測特性をいくつかに群分け複合変量 (composite) をつくり推定する方法である。これらの中で Harman による最も簡便な方法を紹介しよう。

まず、内因的に各観測特性の性格の似た、または各因子を効果的に説明づける観測特性の集合をいくつかつくり、各集合ごとに観測特性に重みづけしない単純な複合変量を作成する。次いで、各因子評点を推定するための複合変量に対する係数行列を求める。このような近似法は、多くの観測特性を比較的少数

の集合に完全に区分できるときによく適合する。

いま式 (6.9) におけるように、 q 個の集落によって q 個の複合変量を得たとする。このとき、この複合変量によって $(q \times q)$ の分散共分散行列 V を求めて式 (8.9) を適用する。これだけの操作で、8.1 節の計算の大部分が省かれる。この手順によると、各複合変量に含まれる観測特性項目はすべて同じ重みで評価されている。もし個々の観測特性のいくつかに異なった重みをもたせようとするならば、上の手順を若干変更すればよい。たとえば、初めの 3 個の観測特性項目が第 1 因子をよく表現するものであれば、それらの項目は個々に使用し、他方残りの観測項目は、その他の $(q-1)$ 個の因子に関する複合変量として群分けする。このとき、式 (8.9) の V は、初めの 3 個の観測項目と $(q-1)$ 個の複合変量からなる $(q+2)$ 次の正方行列となり、 V^{-1} が計算される。このようにして、第 2 因子以下の因子の推定の場合にも、逐次、その因子と最も深い関係にある観測特性を残し、他は複合変量として計算手順をすすめる。

次に、この近似法による計算手順を、長方形に関する検証例によって簡単に示そう。

この例では、図 6.2 におけるように、8 個の観測特性は 2 個の複合変量 v_1 , v_2 として式 (6.9) のようにまとめられる。この v_1, v_2 を規準化して式 (6.13) を示すと

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1/\sigma_1 = (x_1+x_2+x_3)/\sqrt{8.9970} \\ u_2 &= v_2/\sigma_2 = (x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)/\sqrt{19.9462} \end{aligned}$$

を得る。また、この u_1 と u_2 の相関係数は次式で求められる。

$$r_{u_1 u_2} = \sigma_{12} / \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \quad (8.35)$$

ここに σ_1^2 と σ_2^2 は式 (6.10) で示されており、表 2.2 の観測項目間の相関行列からの要素の値をひろって、それぞれ 8.9970 と 19.9462 を得る。また、 σ_{12} は同様に表 2.2 を用い、次式によって得られる。

$$\sigma_{12} = \sum_{i>j'} r_{ii'}, \quad i \in G_{j'}, \quad i' \in G_{j'}, \quad i \neq j' \quad (8.36)$$

すなわち、 $\sigma_{12} = 0.8530 + 0.8529 + \dots + 0.6519 + 0.7141 = 6.7692$ である。

したがって、 $r_{v_1 v_2}$ は次のように得られる。

$$r_{v_1 v_2} = 6.7962 / \sqrt{8.9970 \times 19.9462} = 6.7962 / 13.3961 = 0.5073$$

さて、いま二つの斜交因子を複合変量 u_1 および u_2 の線形式として

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2, \\ f_2 &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \end{aligned} \quad (8.37)$$

のように示すわけであるが、上の各式の両辺について、それぞれ複合変量 u_1 および u_2 との相関を考える。たとえば、 f_1 の式に関しては

$$\begin{aligned} r_{u_1 f_1} &= b_{11} + b_{12}r_{u_1 u_2}, \\ r_{u_2 f_1} &= b_{11}r_{u_1 u_2} + b_{12} \end{aligned}$$

が得られる。これらの式は、左辺からわかるように複合変量による縮小因子構造であり、右辺は、式 (8.37) の u_1 と u_2 の未知の係数を除いて、すでに式 (8.35) で計算した複合変量間の相関係数からなっている。したがって、これらの相関係数の値を用いれば、未知係数 b_{11} , b_{12} などに関する 1 次連立方程式を解けばよいことがわかる。

この数値例での第 1 因子に関する連立方程式は

$$\begin{aligned} b_{11} + 0.5073 b_{12} &= 0.9999 \\ 0.5073 b_{11} + b_{12} &= 0.4955 \end{aligned}$$

となる。ここに上式右辺の値は表 6.2 の縮小構造の第 1 列から読み取れる。上の連立方程式を解くと $\hat{b}_{11} = 1.0079$, $\hat{b}_{12} = -0.0158$ を得る。

したがって、第 1 因子の評点は

$$f_1 = 1.0079 u_1 - 0.0158 u_2$$

で示される。さらに、 f_1 は u_1 と u_2 の直接の観測項目によって

$$\hat{f}_1 = 0.3360(x_1 + x_2 + x_3) - 0.0035(x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

と与えられる。すなわち、観測項目 x_1, x_2, \dots, x_8 の値を得れば、上式によって、その観測対象の第 1 因子の因子評点が推定できる。第 2 因子についても、全く同様の計算を行なえばよい。ここで、各複合変量内の観測項目はすべて同じ重みで取り扱われていることも知れよう。

このような近似法は、8.1 節の根拠に基づき、複合変量によって行列計算の簡略化を意図したものであるが、同時に各集合ごとに観測項目の重みを同等に

していることによって、因子評点の算出をも簡便にしている。このことは観測項目の多い場合の実質科学分野の応用面に便利で喜ばれる。しかし、この例のように観測項目がわずか8個のようなときには、この近似法を適用せず、8.1節の方法で行なうのが望ましい。

8.4 簡 潔 法

前節の複合変量による近似的方法は、8.1節の推定法より非常に計算労力の省けた方法であるが、一面かなりあいまいな近似にすぎない場合が少なくない。そこでもっと8.1節の回帰分析結果に近く、しかもあまり計算労力のかからない因子評点の推定法が考案された。

Lederman は、この回帰による因子評点の推定について、簡潔法 (shortened method) という新しい方法を開発し、その後 Harman はこれを斜交因子の場合にも拡張した。この方法は、因子解が適切に得られて残差誤差がほとんどないような場合に、8.1節の結果に非常によく一致する。事実、この簡潔法では観測された相関行列を直接には用いず、再生された相関行列を8.1節の方法で処理する。再生された相関行列が観測された相関行列に同等であるという前提のもとに、 p 次の相関行列をもっと小さな q 次の相関行列に置き換え、労力をかなり減ずるのである。とくに、通常、観測特性項目の数は共通因子の数に比してかなり大きいので、逆行列の計算労力は部分的に減じられる。

いま、標準化された観測値の構造模型 $\mathbf{x}_j = \mathbf{A}\mathbf{f}_j + \mathbf{b}\mathbf{s}_j + \mathbf{c}\mathbf{e}_j$ で、共通因子の独立性を仮定しない式 (3.4) の場合、母相関行列 \mathbf{P} は $\mathbf{P} = \mathbf{A}\Phi\mathbf{A}' + \Psi$ 、標本相関行列 \mathbf{R} は $\mathbf{R} = \sum_j \mathbf{x}_j\mathbf{x}_j'/n$ で示された。そして因子分析の結果、それぞれの推定量を $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\Phi}, \hat{\Psi}$ とすると、観測値ベクトルは共通因子により期待的に

$$\mathbf{x}_j = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{f}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8.38)$$

と考えられる。ここに $\hat{\Phi}$ は q 次正方行列 ($r_{f_i f_j}$) である。したがって、この式 (8.38) のような \mathbf{x}_j による相関行列は、次式の再生された相関行列 \mathbf{R}^+ で示される。

$$\mathbf{R}^+ = \sum \hat{\mathbf{A}}\mathbf{f}_j\mathbf{f}_j'\hat{\mathbf{A}}'/n = \hat{\mathbf{A}}\hat{\Phi}\hat{\mathbf{A}}' \quad (8.39)$$

もし、共通因子の独立性を仮定するなら $\mathbf{R}^+ = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}'$ である。

この因子パターンから計算された R^+ と当初の観測値による R との関係を

$$R = R^+ + bb' + cc' = R^+ + \hat{\Psi} \quad (8.40)$$

と仮定する。すなわち、 R^+ は R の対角線要素だけを共有性で置き換えた相関行列を考える。簡潔法の仮定としたことは、式 (8.40) を意味している。この式 (8.40) の関係によって、因子評点を推定するときの係数式 (8.14) を単純化するのが本節の技法で、一般的に斜交因子の場合にも適用される。

いま、式 (8.40) の両辺に左側から $\hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}$ を乗ずると

$$\hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}R = \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}(\hat{A}\hat{\Phi}A' + \hat{\Psi}) = (\hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}\hat{A}\hat{\Phi} + I)\hat{A}' \quad (8.41)$$

を得、ここで

$$K \equiv \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}\hat{A}\hat{\Phi} \quad (8.42)$$

とおくと

$$(I+K)\hat{A}' = \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}R \quad (8.43)$$

と書ける。上式において左から $(I+K)^{-1}$ を、右から R^{-1} を乗ずると

$$\hat{A}'R^{-1} = (I+K)^{-1}\hat{A}'\hat{\Psi}^{-1} \quad (8.44)$$

を得る。この左辺は本質的に式 (8.14) の右辺の $K'V^{-1}$ と同じものである。すなわち、8.1 節での A は直交解を示し、また任意の回転 T により $K(=AT)$ を一般的な因子パターンとしたとき、この回転に関する因子評点の変化もすでに 8.1 節の後半に記述している。

本節では、 $x = Af + bs + cs$ の立場で、共通因子の独立性を仮定せず、 A をそのまま一般的なパターンとして用いている。したがって、本節での f_j は、式 (8.11) に示したように $T^{-1}f_j$ に相当し、因子間相関行列 $\hat{\Phi}$ は式 (6.17) によって $(T'T)^{-1}$ となる。ゆえに、式 (8.14) は $\hat{\Phi}$ に式 (8.44) を乗じたものにほかならない。すなわち

$$f_j = \hat{\Phi}(I+K)^{-1}\hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}x_j \quad (8.45)$$

を得る。

この式は、むしろ式 (8.14) よりも複雑なようにみえるが、かなり楽な計算ですむ。事実、対角線行列 $\hat{\Psi}$ の逆行列を求めねばならないこと以外には、 q 次の行列計算になってしまう。さらに計算を楽にするために、式 (8.45) の両辺に

左から $(I+K)\hat{\Phi}^{-1}$ を乗ざると

$$(I+K)\hat{\Phi}^{-1}\hat{f}_j = \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{x}_j, \quad (8.46)$$

を得る。この式は q 元のベクトルで、 \hat{f}_j の要素を求める観点からは、 q 個の連立方程式である。ここで上式の右辺の計算は簡単である。左辺の係数には式 (8.42) を代入して、

$$(I+K)\hat{\Phi}^{-1} = (\hat{\Phi}^{-1} + \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}\hat{A}) \quad (8.47)$$

と書き直すことができ、これは対称行列となる。

すなわち、最終的に

$$(\hat{\Phi}^{-1} + \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}\hat{A})\hat{f}_j = \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8.48)$$

によって、 \hat{f}_j を求めればよい。

とくに、共通因子の独立性が仮定されているときは、 $\hat{\Phi} = I$ であるから、

$$(I + \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}\hat{A})\hat{f}_j = \hat{A}'\hat{\Psi}^{-1}\mathbf{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8.49)$$

を解くとよい。

数値計算の方法は上記のように、 R の代わりに $\hat{A}\hat{\Phi}\hat{A}' + \hat{\Psi}$ を用いるわけで、8.1 節の方法と全く同じである。実際、8.1 節に対応してカイザー・ディックマン解に基づき本法による因子評点を算出すると、8.1 節の結果と全く同じ結果を得る。このことは、 A, Φ, Ψ の推定が $\hat{A}\hat{\Phi}\hat{A}' + \hat{\Psi} = R$ となるように求められているので、結果的に 8.1 節と同じような評点を得ているわけである。

8.5 理想的観測特性による因子評点の推定

観測対象が有する各共通因子の量を推定するというよりも、観測の諸特性値が含む共通因子の量を記述する方法がある。この方法は、 p 種のどの観測特性の誤差もゼロまたは相当に小さいと仮定して、与えられた因子パターンから関数関係によって直截的に因子の量を数理的に算出する。したがって、このような観測特性を考へるのは、むしろ理想的な場合とか、仮想的な場合に限られ、この方法がいつでも実用に適しているわけではない。

さて、 q 次元の共通因子空間で、指定された p 種の観測変量について q 本の因子軸に関する射影を考へよう。いま、与えられた因子パターンを A 、共通空間内の変量を \mathbf{x} とすると

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}f \tag{8.50}$$

なる関係がある。ここに \mathbf{x} は共通因子空間に射影された変量値ベクトルを示している。このとき理想的な観測特性における各因子に関して解くには、まず式(8.4)の両辺に左から \mathbf{A}' を乗じ

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{A}'\mathbf{A}f \tag{8.51}$$

を得る。ここで $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ は q 次の対称行列で、逆行列が存在するから

$$\mathbf{f} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{x} \tag{8.52}$$

と書くことができる。この式は因子に対して観測特性 \mathbf{x} で線形表示を与えている。

数値例として、前節にならってカイザー・ディックマン解を用い、本節の計算を行なってみよう。

$$\mathbf{A}'\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.5759 & 0.7413 \\ 0.7413 & 4.0238 \end{bmatrix}$$

であるから

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2908 & -0.0536 \\ -0.0536 & 0.2584 \end{bmatrix}$$

を得、因子評点算出のための係数行列 $(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'$ は次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} -0.0313 & -0.0314 & -0.0213 & 0.1398 & 0.3081 & 0.2550 & 0.2550 & 0.2089 \\ 0.2480 & 0.2489 & 0.2441 & 0.1367 & -0.2270 & 0.0078 & 0.0078 & 0.0675 \end{bmatrix}$$

これによって各個の因子評点を算出すると、この数値例の場合には残差誤差がきわめて小さいために、8.1節の結果と酷似したものが得られる。さらに、もともとの二つの因子評点母数 α, β との相関は、

	本節の因子評点	
	(1)	(2)
α	0.9975	0.3330
β	0.4657	0.9771

で示される。

ちょうど、この数値例は理想的な観測特性の場合にあたっていて都合がよ

い。しかし、一般の場合に本法を適用することは、計算は楽であるが、最初に記したように観測誤差が大きいときに避けるべきである。

8.6 計算プログラム

8.6.1 簡潔法および残差最小2乗法

コントロールカードによって、簡潔法または残差最小2乗法による因子評点のための係数行列を与える。さらに、平均値ベクトルと標準偏差ベクトルおよび根元因子パターンとそれへの変換行列を与えておいて、個別の観測値ベクトルをインプットすることによりそれぞれの因子評点を算出する。

入 力 (input)		出 力 (output)	
NV	変数の数	A(I, J)	根元因子パターン、のちに因子評点係数行列
NF	共通因子の数	T(I, J)	変換行列、のちに因子評点ベクトル
NS	標本の大きさ(数)		
NC	ゼロならば直交因子得点を、 1ならば斜交因子得点を示す		
MC	ゼロならば簡潔法、 1ならば最小残差法を適用する		
PR	ゼロならば参考因子構造から、 1ならば根元因子パターンからの 変換行列を適用する		
A(I, J)	根元因子パターン		
T(I, J)	変換行列		
XM(I)	標本平均ベクトル		
V(I)	標本標準偏差ベクトル		
X(I)	観測値ベクトル		

```

C      ESTIMATION OF FACTOR SCORES
C
C      BY THE METHOD OF REGRESSION (SHORTENED METHOD)
C      OR BY THE METHOD OF MINIMIZING RESIDUALS
C
C
C
C
C      NV --- NO. OF VARIABLES
C      NF --- NO. OF FACTORS
C      NS --- NO. OF SAMPLES
C
C      NC --- 0, FOR ORTHOGONAL FACTORS
C           --- 1, FOR OBLIQUE FACTORS
C      MC --- 0, TO APPLY THE REGRESSION METHOD (SHORTENED METHOD)
C           --- 1, TO APPLY THE MINIMIZING RESIDUALS METHOD
C      PR --- 0, TO USE A TRANS.MATRIX FOR REFERENCE STRUCTURE
C           --- 1, TO USE A TRANS.MATRIX FOR PRIMARY PATTERN
C      A --- A REFERENCE FACTOR STRUCTURE OR PRIMARY FACTOR PATTERN
C      T --- A TRANSFORMATION MATRIX TO THE REFERENCE FACTOR STRUCTURE
C           OR TO THE PRIMARY FACTOR PATTERN
C           FROM A LIKELIHOOD FACTOR LOADING

```

C
C
C
C
C

XM --- MEAN OF EACH VARIABLE
V --- STANDARD DEVIATION OF EACH VARIABLE

SUBROUTINE MATINV AND DETERM ARE REQUIRED

```

DIMENSION A(30,10),V(30),T(10,10),P(31,31),PV(10,10),X(30),XM(30)
COMMON P,T,A,PV,X,XM,V
1 READ (40,100) NV,NF,NS,NC,MC,PR
WRITE (50,200)

DO 2 J=1,NF
READ (40,101) (A(I,J),I=1,NV)
2 WRITE (50,201) J,(A(I,J),I=1,NV)
IF(NC) 3,3,6
3 DO 5 I=1,NF
DO 4 J=1,NF
P(I,J)=0.0
4 PV(I,J)=0.0
P(I,I)=1.0
5 PV(I,I)=1.0

WRITE (50,202)
GO TO 18
6 DO 7 J=1,NF
7 READ (40,101) (T(I,J),I=1,NF)
IF(PR) 8,8,14
8 WRITE (50,203)
DO 9 I=1,NF
DO 9 J=1,NF
9 PV(I,J)=T(I,J)
DO 10 I=1,NF

10 WRITE (50,201) I,(T(I,J),J=1,NF)
CALL DETERM (NF,TT)
DO 12 I=1,NF
DO 11 J=1,NF
11 P(I,J)=0.0
12 P(I,I)=1./TT
DO 13 I=1,NF
DO 13 J=1,NF
T(I,J)=0.0
DO 13 K=1,NF

13 T(I,J)=T(I,J)+PV(I,K)*P(K,J)
14 WRITE (50,204)
DO 15 I=1,NF
15 WRITE (50,201) I,(T(I,J),J=1,NF)
DO 17 I=1,NF
DO 17 J=1,NF
P(I,J)=0.0
DO 16 K=1,NF
16 P(I,J)=P(I,J)+T(K,I)*T(K,J)
P(J,I)=P(I,J)

PV(I,J)=P(I,J)
17 PV(J,I)=PV(I,J)
WRITE (50,205)
CALL MATINV (NF)
18 DO 20 I=1,NV
DO 19 J=1,NF
X(J)=0.0
DO 19 K=1,NF
19 X(J)=X(J)+A(I,K)*P(K,J)
V(I)=1.0

```



```

DO 20 K=1,NF
20 V(I)=V(I)-X(K)*A(I,K)
   IF(MC) 21,21,22
21 WRITE (50,206)
   GO TO 24
22 DO 23 I=1,NF
   DO 23 J=1,NF
23 PV(I,J)=0.0
   WRITE (50,207)
24 DO 26 I=1,NF

   DO 26 J=I,NF
   T(I,J)=0.0
DO 25 K=1,NV
25 T(I,J)=T(I,J)+A(K,I)*A(K,J)/V(K)
   P(I,J)=PV(I,J)+T(I,J)
26 P(J,I)=PV(J,I)+T(I,J)
   CALL MATINV (NF)
DO 28 I=1,NV
DO 27 J=1,NF
X(J)=0.0

DO 27 K=1,NF
27 X(J)=X(J)+P(J,K)*A(I,K)/V(I)
DO 28 K=1,NF
28 A(I,K)=X(K)
   WRITE (50,208)
DO 29 J=1,NF
29 WRITE (50,201) J,(A(I,J),I=1,NV)
DO 30 I=1,NV
30 READ (40,103) XM(I),V(I)
   WRITE (50,209)

N=0
31 READ (40,104) (X(I),I=1,NV)
DO 32 I=1,NV
32 X(I)=(X(I)-XM(I))/V(I)
DO 33 J=1,NF
T(1,J)=0.0
DO 33 I=1,NV
33 T(1,J)=T(1,J)+A(1,I)*X(I)
N=N+1
WRITE (50,210) N,(T(1,J),J=1,NF)

IF(N=NS) 34,1,1
34 GO TO 31
100 FORMAT (2I2,15,2I2,F2.0)
101 FORMAT (10F6.5)
103 FORMAT (2F5.1)
104 FORMAT (8F10.2)
200 FORMAT (//29H INPUT PRIMARY FACTOR PATTERN./)
201 FORMAT (/13,8F9.4)
202 FORMAT (//25H ORTHOGONAL FACTOR SCORES/)
203 FORMAT (/52H INPUT TRANSFORMATION MATRIX FOR REFERENCE STRUCTURE/)
204 FORMAT (/49H TRANSFORMATION MATRIX FOR PRIMARY FACTOR PATTERN/)
205 FORMAT (//22H OBLIQUE FACTOR SCORES/)
206 FORMAT (/10X,27HBY THE MTHOD OF REGRESSION./)
207 FORMAT (/10X,37HBY THE MTHOD OF MINIMIZING RESIDUALS./)
208 FORMAT (39H A COEFFICIENT MATRIX FOR FACTOR SCORES/)
209 FORMAT (//30H FACTOR SCORES FOR INDIVIDUALS//1X,8HCASE NO./)
210 FORMAT (16,5F12.3,(10X,5F12.3))
STOP
END

```

[付] サブルーティン 1 (逆行列の算出)

```

C      SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C      - CROUT METHOD -
C
      SUBROUTINE MATINV (N)
      DIMENSION A(31,31),B(30),C(30)
      COMMON A
      DO 4 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      B(J)=A(J,I)

1  A(J,I)=0.0
   A(I,I)=1.0
   DO 2 J=1,N
2  C(J)=A(I,J)/B(I)
   DO 3 J=1,N
   DO 3 K=1,N
3  A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
   DO 4 J=1,N
4  A(I,J)=C(J)
      RETURN
      END

```

[付] サブルーティン 2 (行列式の求値)

```

C      SUBROUTINE OF DETERMINANT
C
      SUBROUTINE DFTERM (K,T)
      DIMENSION B(31,31),A(10,10)
      COMMON B,A
      T=1.0
      TT=0.0
      KK=K-1
      DO 7 I=1,KK

      IF(A(I,I)) 5,1,5
1  DO 2 J=I,K
      IF(A(I,J)) 3,2,3
2  CONTINUE
   T=0.0
   GO TO 8
3  DO 4 L=1,K
   TT=A(L,J)
   A(L,J)=A(L,I)
4  A(L,I)=TT

   T=-T
5  T=A(I,I)*T
   U=A(I,I)
   DO 6 J=I,K
6  A(I,J)=A(I,J)/U
   DO 7 J=I,KK
   TT=A(J+1,I)
   DO 7 L=I,K
7  A(J+1,L)=A(J+1,L)-A(I,L)*TT
   T=A(K,K)*T
8  RETURN
      END

```

8.6.2 理想的観測特性法および既有的因子評点係数行列の直接利用

根元因子パターン、とくに直交解のときは単に因子パターンを各対象の p 次観測変量とともにインプットして、各対象ごとの因子評点を理想法によって算出する。またはコントロール・カードによって、これまですでに得られている因子評点のための係数行列を用い、各対象の p 次観測変量をインプットして各対象ごとの因子評点を単純に算出することもできる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
K	変数の数	A(I, J)	根元因子パターン, 因子係数行列, のちに因子得点ベクトル
NF	共通因子の数	AM(I)	標本平均ベクトル
IC	係数行列をつくるか否かの制御	AV(I)	標本標準偏差ベクトル
A(I, J)	根元因子パターン		
AM(I)	標本平均ベクトル		
AV(I)	標本標準偏差ベクトル		
X(I)	観測値ベクトル		

```

C      FACTOR SCORE
C
C      BY AN IMMEDIATE USE OF A COEFFICIENT MATRIX ON VARIABLES
C      OR BY APPLING AN IDEAL-VARIABLES METHOD
C                                     BASED ON A PRIMARY FACTOR PATTERN
C
C
C      K --- NO. OF VARIABLES
C      NF --- NO. OF FACTORS
C
C      IC --- 0, TO MAKE A COEFFICIENT MATRIX FROM A PRIMARY FACTOR PATTERN
C      --- 1, TO USE A COEFFICIENT MATRIX WE HAVE ALREADY
C      A --- PRIMARY FACTOR PATTERN
C      AM --- MEAN OF EACH VARIABLE
C      AV --- STANDARD DEVIATION OF EACH VARIABLE
C      N --- CASE NO.
C      X --- FACTOR SCORE
C
C      SUBROUTINE ROOTS IS REQUIRED
C
C
C      DIMENSION A(10,40),AM(30),AV(30),X(30)
C      COMMON A
C      1 READ (40,100) K,NF,IC
C      NFP1=NF+1
C      KK=NF+K
C      IF(IC) 2,2,7
C      2 WRITE (50,200)
C      DO 3 I=1,NF
C      READ (40,101) (A(I,J),J=NFP1,KK)
    
```

```

3 WRITE (50,201) I,(A(I,J),J=NFP1,KK)
DO 5 I=1,NF
DO 5 J=1,NF
A(I,J)=0.0
DO 4 L=NFP1,KK
4 A(I,J)=A(I,J)+A(I,L)*A(J,I)
5 A(J,I)=A(I,J)
CALL ROOTS (NF,KK)
GO TO 9
7 DO 8 I=1,NF

8 READ (40,101) (A(I,J),J=NFP1,KK)
9 READ (40,102) (AM(I),AV(I),I=1,K)
WRITE (50,202)
DO 10 I=1,K
10 WRITE (50,203) I,AM(I),AV(I)
WRITE (50,204)
DO 11 I=1,NF
11 WRITE (50,201) I,(A(I,J),J=NFP1,KK)
N=0
WRITE (50,205)

WRITE (50,206)
12 READ (40,103) (X(I),I=1,K)
DO 13 I=1,K
13 X(I)=(X(I)-AM(I))/AV(I)
DO 14 I=1,NF
A(I,1)=0.0
DO 14 J=1,K
L=J+NF
14 A(I,1)=A(I,1)+A(I,L)*X(J)
KS=1

KE=8
15 IF(NF-KE) 16,16,17
16 KE=NF
17 N=N+1
WRITE (50,207) N,(A(I,1),I=KS,KE)
IF(NF-KE) 12,12,18
18 KS=KE+1
KE=KE+8
GO TO 15
100 FORMAT (3I2)

101 FORMAT (12F6.5)
102 FORMAT (3(1X,2E12.5))
103 FORMAT (8F10.2)
200 FORMAT (/,28HINPUT PRIMARY FACTOR PATTERN,/)
201 FORMAT (15,8F9.5)
202 FORMAT (/32H VAR.NO. MFAN S.D. /)
203 FORMAT (15,2(3X,F12.5))
204 FORMAT (//,26H FACTOR COEFFICIENT MATRIX,/)
205 FORMAT (//,25H INDIVIDUAL FACTOR SCORES,/)
206 FORMAT (33H CASE NO. FACTOR SCORES,/)

207 FORMAT (17,6X,2(F12.5,3X))
STOP
END

```

[付] サブルーティン(連立一次方程式の求根)

```

C      SUBROUTINE OF ROOTS OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUATION
C
C
C      K --- RANK OF MATRIX A(I,J)
C      KK --- K + NO. OF CONST. COLUMN VECTOR
C      ROOTS GIVEN AT A(I,J) , I=1,...,K, J=K+1,...,KK.
C
SUBROUTINE ROOTS(K, KK)

DIMENSION A(10,40), N(10)
COMMON A
DO 1 I=1, K
1 N(I)=I
  I=1
2 L=I
3 IF(A(I, L)) 7, 4, 7
4 IF(L=K) 5, 6, 6
5 L=L+1
  GO TO 3

6 WRITE(50, 200)
  STOP
7 IF(I=L) 8, 10, 8
8 DO 9 M=1, K
  TEMP=A(M, I)
  A(M, I)=A(M, L)
9 A(M, L)=TEMP
  ITEMP=N(I)
  N(I)=N(L)
  N(L)=ITEMP

10 TEMP=A(I, I)
  DO 11 J=1, KK
11 A(I, J)=A(I, J)/TEMP
  DO 14 L=1, K
  IF(L=I) 12, 14, 12
12 TEMP=A(L, I)
  DO 13 J=1, KK
13 A(L, J)=A(L, J)-TEMP*A(I, J)
14 CONTINUE
  I=I+1

  IF(I=K-1) 2, 15, 15
15 KF=K+1
  DO 19 I=1, K
  IF(N(I)=I) 16, 19, 16
16 DO 19 J=1, K
  IF(N(J)=I) 19, 17, 19
17 DO 18 L=KF, KK
  TEMP=A(I, L)
  A(I, L)=A(J, L)
18 A(J, L)=TEMP
19 CONTINUE
200 FORMAT(5X, 15HDETERMINANT = 0)
  RETURN
  END

```

8.6.3 因子評点によるプロフィールの作図

さきの 8.6.1 項または 8.6.2 項で得た因子評点を，視察に便利なプロフィールとして，XY プロッターによってグラフ表示を行なう。すなわち，Y 軸に因子評点の値を，X 軸に因子の種類番号をとり，Y 軸方向の線分の長さで因子評点の大きさを示し，さらに各因子評点の値もプロッターで書かせている。

入 力 (input)		出 力 (output)	
NF	共通因子の数		X-Y プロッターに因子評点が描かれる
NP	縦列に描く図の数		
YW	縦列の図と図の間の距離		
IY	図の Y 軸上のくぎりの数		
N	標本の大きさ(数)		
YMIN	Y 軸上の最小値		
YMAX	Y 軸上の最大値		
IPAT(I)	標本番号		
DATA(I, J)	因子評点		

```

C      PROFILES FOR FACTOR SCORES
C      DRAWING PROFILES BASED ON SEVERAL KINDS OF FACTOR SCORES
C
C      NF --- NO. OF FACTORS
C      NP --- NO. OF PROFILES DRAWN IN A SHEET
C      YW --- INTERVALS AMONG PROFILES
C      IY --- NO. OF INCREMENTS ON Y-AXIS
C      N  --- FINAL NO. OF SAMPLES
C
C      YMIN --- MINIMUM VALUE ON Y-AXIS
C      YMAX --- MAXIMUM VALUE ON Y-AXIS
C
C      SUBROUTINE FRAME IS REQUIRED
C      SUBROUTINES SET, SYMBOL, NUMBER AND PLOT
C      HAVE TO BE BUILT IN THIS COMPILER
C      FOR PLOTTER USE
C      AN X-Y PLOTTER REQUIRED
C

```

```

DIMENSION DATA(200,30),IPAT(200)
COMMON DATA,IPAT
1 READ (40,100) NF,NP,YW,IY,N,YMIN,YMAX
NF1=NF+1
ANF1=NF1
ANP=NP
AIY=IY
XD=20.0
XL=XD*ANF1
YL=210.0/ANP-YW

```

```

YD=YL/AIY
XMIN=0.0
XMAX=ANF1
XU=(XMAX+XMIN)/XL
YU=(YMAX-YMIN)/YL
CALL SET
DO 2 I=1,N
2 READ (40,101) IPAT(I),(DATA(I,J),J=1,NF)
HIGH=105.0-YL
ISE0=0

DO 7 K=1,N
Y=YL+7.0+HIGH
PAT=IPAT(K)
PAT=PAT+0.1
CALL SYMBOL (15.0,Y,3.0,10H CASE NO. ,0.0,10)
CALL NUMBER (50.0,Y,3.0,PAT,0.0,-1)
CALL FRAME (HIGH,IY,NF1,XI,XD,YL,YD)
X=0.0
X=X+XD
Y=DATA(K,1)/YU+HIGH+YL/2.0

CALL PLOT (X,Y,1)
DO 3 I=1,NF
Y=DATA(K,I)/YU+HIGH+YL/2.0
CALL PLOT (X,Y,2)
X=X+XD
3 CONTINUE
CALL PLOT (X,Y,3)
Y=HIGH+YL-1.5
CALL NUMBER (-10.0,Y,3.0,YMAX,0.0,1)
Y=HIGH+YL/2.0-1.5

CALL SYMBOL (-10.0,Y,3.0,4H 0.0,0.0,4)
Y=HIGH-1.5
CALL NUMBER (-10.0,Y,3.0,YMIN,0.0,1)
X1=0.0
Y=HIGH-5.0
DO 4 I=1,NF
X1=X1+XD
X2=X1-8.0
FS=DATA(K,I)
4 CALL NUMBER (X2,Y,3.0,FS,0.0,3)

CALL PLOT (X,Y,3)
ISE0=ISE0+1
IF (ISE0-NP) 5,6,8
5 HIGH=HIGH-YL-YW
GO TO 7
6 X=XL+30.0
Y=0
HIGH=105.0-YL
ISE0=0
CALL PLOT (X,Y,-3)

7 CONTINUE
GO TO 1
100 FORMAT (2I5,F5,0,2I5,2F5,1)
101 FORMAT (I2,2F5,3)
8 STOP
END

```

[付] サブルーティン(プロフィール枠の作成)

```

C      SUBROUTINE FRAME
C          TO MAKE A FRAME REQUIRED TO DRAW PROFILES
C
C
SUBROUTINE FRAME (HIGH, IY, NL, XL, XD, YL, YD)
IP1=1
IP2=2
IP3=3
YA2=YL+HIGH

CALL PLOT (0.0, YA2, IP1)
YA1=HIGH
CALL PLOT (0.0, YA1, IP2)
Y=YA1
CALL PLOT (3.0, Y, IP2)
DO 1 I=1, IY
Y=Y+YD
CALL PLOT (0.0, Y, IP3)
CALL PLOT (3.0, Y, IP2)
1 CONTINUE

Y0=YL/2.0+HIGH
CALL PLOT (0.0, Y0, IP3)
CALL PLOT (XL, Y0, IP2)
X=XL
Y1=Y0+1.0
Y2=Y0-1.0
DO 2 I=1, NL
CALL PLOT (X, Y1, IP3)
CALL PLOT (X, Y2, IP2)
X=X-XD

2 CONTINUE
CALL PLOT (X, Y2, IP3)
RETURN
END

```


9 単一因子解法

これまで記述してきた一連の因子分析は、通常の因子分析法のうちで近年最も繁用されている多因子解法 (multiple factor solution) とよばれるものであった。すでに詳述したように、この構造模型は最も一般的かつ客観的な立場によって、因子の数と種類を推定し、因子構造や因子パターンを探究するものである。そこでは抽出されてくる因子がどのような簡素構造で表現され、どのように因子を解釈するかが問題とされる。そして、あらかじめ構造模型のなかの具体的な共通因子の形式と存在を固定するような仮定はなかった。

他方、目的とする諸共通因子に着目して観測特性群を選択しあらかじめ構造模型を想定しておき、このように規定された模型 (specified model) によって具体的に因子の質と量を推測していく立場がある。このような方法は本来 18 世紀はじめのいわゆる因子分析の誕生期から主流の研究方向として展開されてきたものである。ちょうど、当時の実質科学の進歩がすぐれた洞察のもとでニュートン力学に代表されるような決定論的構造によって展開されてきたのと同様である。そして、この規定構造による因子分析がやがて多因子解法の開発をうながすわけで、いずれの方法も肩を並べて分類される位置を占めるものである。

本章以降では、まず代表的な規定構造の因子分析の方法をいくつか紹介し、その後正準分析法など最近の新しい構造をとく方法について解説をすすめる。

さて本章の解法は、各観測特性がただ一つの共通因子のみを含む場合、すなわち複雑度 (complexity) が 1 の場合の直交解を求める方法 (uni-factor solution) で、実際のデータではなかなか遭遇しそうでないような理想的な場合の

解法と考えられることが多い。

各観測特性が本質的にはただ一つの因子のみを測定し、正確に参考軸の上に一致するようなとき、これらの観測特性による相関行列は図 9.1 に示されるような性質を有する。

このような典型的な直交単一因子解 (orthogonal unifactor solution) は現実にはそれほど頻繁に適用されないと思われるが、ある種の斜交解の近似としては確かに考える場合があり、要は個々の現象や問題のとりあげ方による。

単一因子解における観測特性の一般的な構造模型は、

$$x_j = Af_j + e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9.1)$$

ここに

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots \dots \dots \vdots \\ a_{p_1,1} & 0 & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 \\ 0 & a_{p_1+1,2} & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots \dots \dots \vdots \\ 0 & a_{p_1+p_2,2} & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 \\ 0 & 0 & a_{p_1+p_2+1,3} & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots \dots \dots \vdots \\ 0 & 0 & a_{p_1+p_2+p_3,3} & 0 \dots \dots \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{p_1+p_2+p_3+1,4} \dots \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots \dots \dots \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \dots \dots a_{p,q} \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

$$f_j' = [f_{1j}, f_{2j}, \dots, f_{pj}], \quad e_j' = [e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{pj}]$$

で示される。そして、これまでどおり p および q はそれぞれ観測特性の数と共通因子の数を示し、 p_1, p_2, p_3, \dots はそれぞれの単一共通因子を測定する観測特性の数で $p_1 + p_2 + \dots + p_q = p$ になっている。

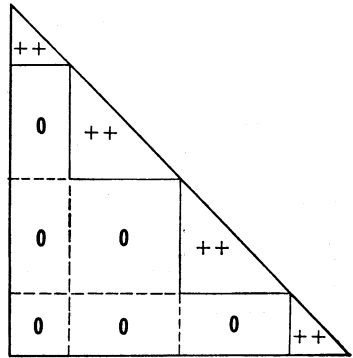


図 9.1 単一因子解法における母相関行列

この単一因子解の構造をもっとわかりやすく示す模型として、しばしば次のような表 9.1 が説明に用いられる。

表 9.1 単一因子解法におけるパターン

観測特性	F_1	F_2	F_3 ---- F_q
1			
2			
3			
⋮			
p			

この表のなかで、縦の棒線は各因子に関する係数の所在を示し、それ以外の空白はゼロ値である。各観測特性には因子的に独自の分担があり、また各観測特性群の間では異質な因子をもち、全体として完全にいくつかの群 (group) で構成されている。

る。

このとき一般に、観測特性の第 k 群 G_k に属する第 i 特性と第 k' 群 $G_{k'}$ に属する第 i' 特性の間の母相関係数は

$$\rho_{ii'} = E\{\sum_j x_{ij}x_{i'j}/n\} = \sum_j a_{ik}f_{kj}a_{i'k'}f_{k'j}/n = a_{ik}a_{i'k'}\rho_{f_k f_{k'}} \quad (9.3)$$

で示される。上の式において、もし第 i と第 i' 観測特性が同一の群に属しているなら、

$$\rho_{ii'} = a_{ik}a_{i'k}, \quad i, i' \in G_k \quad (9.4)$$

となり、またもし相異なった群に属しているのなら、

$$\rho_{ii'} = 0, \quad i \in G_k, \quad i' \in G_{k'} \quad (9.5)$$

にすぎない。これらの式 (9.4) と (9.5) は、図 9.1 で示した内容を具体的に式で表現したものである。

したがって、実際上の配慮や適切な整理によって標本相関行列が図 9.1 のような形に得られるなら、この際の構造模型は表 9.1 を典型的な内容とする単一因子解法の適用が可能になる。このような模型は、なんらかの方法で因子抽出を行なった後の残差相関行列にもよくみられ適用が考えられる。

さて、このように規定された模型での因子の設定や吟味には、単極因子と両極因子の別がしばしば考慮される。すなわち、抽出された因子が正の方向にも、またゼロをこえて負の方向にも因子量を示すものがある。このような因子を両

極因子 (bi-polar factor) とよんでいる。たとえば、快感という因子を正と考えたとき、負の側には不快感が考えられるような場合である。

これに反し、単極因子 (uni-polar factor) とは、その因子の量が正または負の一方方向側にしか考えられないような因子をいう。たとえば、ある種の病気の重篤度を示すような因子は、健常人から重病人の方向にしか考えられない因子である。

単一因子解法や次章以降の二因子解法や双因子解法では、図 9.1 と図 10.1 で示すように、観測特性による相関行列のゼロでない要素がすべて正で、これらの解法から得られる因子はすべて単極因子である。このようなとき、負の側にのみ考える単極因子があれば、あらかじめ観測特性の尺度を逆向きに変えておくことによって、そのまま上の解法が適用できる。また、セントロイド法や成因分析法では、第 1 の因子を除いて他はすべて両極因子が得られる。

単一因子解法における因子係数に関する推定の具体的な計算は、次章に与える二因子解法の方法と同様に解くことができる。

10 二因子解法

前章に類似して観測特性の構造模型を少し変えたものに、Spearman が 1904 年に初めて提唱した二因子解法 (two factor solution) がある。この考え方は p 個のすべての観測特性に共通した、ただ一つの全般因子を想定し、各観測特性にはこの全般因子とともにそれぞれ特有の特殊因子を含むような模型を取り扱う。彼が二因子解法とよんだのは、心理学的なある種の知能活動は、各観測特性のうちに共通した全般的機能 g と各特性に独自の機能 s とからなっていると考え、このような 2 種類の因子を含む観測変量の分析法という意味をもたせた。

したがって、もし、二因子解法において特殊因子の代わりに確率的な偶然誤差因子を考えれば、前章の単一因子解法に帰して図 9.1 のうちの最初の一つの三角形部分を取り扱っていることになる。表 10.1 には、二因子解法における構造模型を示している。

表 10.1 二因子解法におけるパターン

観測特性	f_0	S_1	S_2	S_3	-----	S_p
1		●				
2			●			
3				●		
⋮						
p						●

通常、因子分析の主目的が共通因子の解明にあるために、種々の因子分析の方法は共通因子の性質や数によって名づけられるのが最近の命名法になっている。この意味で、Spearman の二因子解法はむしろ単一因子解法または単独因子解法 (single-

factor solution) とよばれるはずのものである。しかし、歴史的背景を考慮し

て二因子解法の名を伝統的に残している。

二因子解における観測変量の一般的な構造模型は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{a}f_{0j} + \mathbf{b}\mathbf{S}_j + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10.1)$$

ここに

$$\mathbf{a}' = [a_1, a_2, \dots, a_p], \quad \mathbf{S}_j' = [s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{pj}]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_p \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

上式で f_{0j} はただ一つの共通因子を示す全般因子であり、さきの心理学的記述では g 因子とよばれるものに相当している。

さて、このような模型で共通因子空間における観測特性の母相関行列は、どの 2 列をとっても対応する行要素は一定の比率をもつ比例関係 (proportionality) にあることがわかる。

すなわち、もともと第 i 番と第 i' 番の二つの観測特性間の母相関係数 $\rho_{ii'}$ は

$$\rho_{ii'} = E\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}x_{i'j}\right) = a_i a_{i'} \quad (10.3)$$

であるから、相関行列の第 i 行に対する任意の第 l 列と第 k 列の対応する要素は

$$\rho_{li} = a_l a_i, \quad \rho_{ki} = a_k a_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (10.4)$$

となっており、どのような行についても 2 列の対応する要素は $a_l : a_k$ の比率になっていることが知れる。このことは

$$\frac{\rho_{li}}{\rho_{ki}} = \frac{\rho_{li'}}{\rho_{ki'}}, \quad i \neq i' \quad i, i' = 1, 2, \dots, p \quad (10.5)$$

とも書け、分母をはらって

$$\rho_{li}\rho_{ki'} - \rho_{ki}\rho_{li'} = 0, \quad l, k, i, i' = 1, 2, \dots, p, \quad l \neq k \neq i \neq i' \quad (10.6)$$

で示してもよい。Spearman は上式の左辺を四価差 (tetrad differences または tetrads) と名づけている。

したがって、 p 個の観測特性がただ一つの全般因子と互いに独立な p 個の特

殊因子からなりたつための必要かつ十分条件は、可能なすべての四価差について、式 (10.6) の関係が成立することである (Spearman の基本定理) ともいえる。 p 個の観測変量のとき、式 (10.6) のような関係式の数は p の増大に伴って急速に増加するが、すべての四価差を独立に示す式の数 $p(p-3)/2$ 個となっている。

また、式 (10.4) で $l=i$ のときには a_i^2 となり、これは共有性 h_i^2 にほかならない。このとき式 (10.5) は

$$h_i^2 = \rho_{ii'}\rho_{ki}/\rho_{ki'}, \quad i \neq i' \neq k, \quad 1 \leq i', \quad k \leq p, \\ i = 1, 2, \dots, p \quad (10.7)$$

と書け、一般に上式右辺の形式のものを

$$t_{i'k} \equiv \rho_{ii'}\rho_{ik}/\rho_{i'k} \quad (10.8)$$

とおいて $t_{i'k}$ を三価対 (triad) とよんでいる。このような一つの共通因子空間の母相関行列のランクは 1 であり、このとき第 i 特性の共有性は任意の i' と k による一つの三価対で与えられる。このような三価対は行列全体で ${}_{p-1}C_2$ 個あり、この数より 1 だけ減じた値が、 p 変量中に全般因子が一つであるための条件式の数 $p(p-3)/2$ になっている。

二因子解を行なうにあたっては、とくに、因子の構成について十分な統計的考察を行なわねばならない。たとえば、相関行列の表からあらゆる四価差を計算し、その分布の中位数を標本誤差と比較して検定する方法がある。また、基礎的には、四価差の標本分布が 1925 年に Spearman と Holzinger によって考察されている。

すなわち、Spearman は二因子解法を提唱したが、その根拠は式 (10.6) で定義された四価差による基本定理を導入したことにある。しかし、この二因子解法は実際に適用してよく当てはまる場合もあり、またよくない場合も多かった。このようなことから、基準になってくる四価差に関する理論の妥当性が盛んに論議されてきた。

この観点から、Spearman と Holzinger は母集団が二因子解法に適している場合の標本分布について検討し、誤差分布に関する論文 (1924) を発表している。

ここでは、この論文に基づいて四価差の標本分布について紹介していく。

さて、四価差に関する式 (10.6) を次のように変形し、

$$\mu \equiv \rho_{13}\rho_{24} - \rho_{23}\rho_{14} = 0$$

この μ に関する標本分布を考える。ここで上の ρ_{ij} の観測値を r_{ij} とし、 $r_{ij} = \rho_{ij} + dr_{ij}$ のように考える。この dr_{ij} は r_{ij} における観測誤差部分を意味している。

このような設定は、観測値からなる関数の分布法則が非常に複雑になるようなときに、いつも大標本論的に取り扱う際の常法である。もちろん、 dr_{ij} に関する仮定は、本来の分布論上からいって厳密なものではないが、大標本論の立場から便宜的にガウスの誤差分布に従うとするわけである。

いま、上の μ の観測値を m として、次のものを考える。

$$\begin{aligned} m &= r_{13}r_{24} - r_{23}r_{14} \\ &= \mu + (\rho_{13}dr_{24} + \rho_{24}dr_{13} - \rho_{14}dr_{23} - \rho_{23}dr_{14}) + (dr_{13}dr_{24} - dr_{23}dr_{14}) \\ &\equiv \mu + (A) + (B) \end{aligned}$$

したがって、上式の右辺の μ を左辺に移して両辺を平方し、これに関して期待値を求めると、 m の分散となっている。すなわち

$$\sigma_m^2 \equiv E\{(m - \mu)^2\} = E\{(A + B)^2\}$$

を得るから、この式の最右辺 $E\{A^2\} + 2E\{AB\} + E\{B^2\}$ を計算すると m の分散が知れることになる。ここで各 dr_{ij} の分布を、大標本論的に平均値がゼロで分散が $\sigma_{r_{ij}}^2$ の正規分布とし、また r_{ij} と $r_{i'j'}$ との母相関係数を $R_{r_{ij}r_{i'j'}}$ で示して各項を計算する。この結果は次のように得られる。

$$\begin{aligned} E\{A^2\} &= \rho_{24}^2\sigma_{r_{13}}^2 + \rho_{13}^2\sigma_{r_{24}}^2 + \rho_{11}^2\sigma_{r_{23}}^2 \\ &\quad + \rho_{23}^2\sigma_{r_{14}}^2 + 2\rho_{24}\rho_{13}\sigma_{r_{24}}\sigma_{r_{13}}R_{r_{24}r_{13}} \\ &\quad + 2\rho_{14}\rho_{23}\sigma_{r_{14}}\sigma_{r_{23}}R_{r_{14}r_{23}} \\ &\quad - 2\rho_{13}\rho_{23}\sigma_{r_{14}}\sigma_{r_{24}}R_{r_{14}r_{24}} \\ &\quad - 2\rho_{14}\rho_{24}\sigma_{r_{13}}\sigma_{r_{23}}R_{r_{13}r_{23}} \\ &\quad - 2\rho_{23}\rho_{24}\sigma_{r_{13}}\sigma_{r_{14}}R_{r_{13}r_{14}} \\ &\quad - 2\rho_{13}\rho_{14}\sigma_{r_{23}}\sigma_{r_{24}}R_{r_{23}r_{24}} \end{aligned}$$

$$E\{AB\} = 0$$

$$\begin{aligned} E\{B^2\} &= \sigma_{r_{13}}^2 \sigma_{r_{24}}^2 (1 + 2R_{r_{13}r_{24}}) \\ &\quad + \sigma_{r_{23}}^2 \sigma_{r_{14}}^2 (1 + 2R_{r_{23}r_{14}}) \\ &\quad - 2\sigma_{r_{13}} \sigma_{r_{24}} \sigma_{r_{23}} \sigma_{r_{14}} (R_{r_{13}r_{24}} R_{r_{23}r_{14}} \\ &\quad + R_{r_{24}r_{23}} R_{r_{13}r_{14}} + R_{r_{13}r_{23}} R_{r_{24}r_{14}}) \end{aligned}$$

この $E\{B^2\}$ は σ の 4 次 の 項 だ け で、標 本 数 が 少 不 い と か ρ が 非 常 に 小 さ い と か の こ と が な け れ ば、 $E\{A^2\}$ に 比 して 小 さ く、 R を 含 む 項 は 無 視 で き る。し た が っ て、標 本 数 が 50 以 上 な ら、 $E\{B^2\}$ は 次 式 で よ い 近 似 が 得 ら れ る。

$$E\{B^2\} = \sigma_{r_{13}}^2 \sigma_{r_{24}}^2 + \sigma_{r_{23}}^2 \sigma_{r_{14}}^2$$

ま た、標 本 数 n の 相 関 係 数 r の 分 散 の 近 似 と して、次 の 関 係 式

$$\sigma_r^2 = \frac{(1-\rho^2)^2}{n-1} \left\{ 1 + \frac{11\rho^2}{4(n-1)} + \dots \right\} \doteq \frac{(1-\rho^2)^2}{n}$$

が 成 立 す る か ら、上 の 各 項 は す べ て 母 相 関 係 数 で 示 す こ と が で き る。

す な わ ち、各 項 を ま と め て 整 頓 す る と 最 終 的 に

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \frac{1}{n} \{ \rho_{13}^2 + \rho_{14}^2 + \rho_{23}^2 + \rho_{24}^2 - 2(\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{12}\rho_{14}\rho_{24} \\ &\quad + \rho_{13}\rho_{14}\rho_{34} + \rho_{23}\rho_{24}\rho_{34}) + 4\rho_{12}\rho_{13}\rho_{24}\rho_{34} \} \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \{ (1-\rho_{13}^2)^2(1-\rho_{24}^2)^2 + (1-\rho_{23}^2)^2(1-\rho_{14}^2)^2 \} \end{aligned}$$

を 得 る。

ま た、各 ρ_{ij} の 平 均 値 ρ で 上 式 を 近 似 的 に 示 す と、

$$\sigma_m^2 = \frac{4\rho^2(1-\rho)^2}{n} + \frac{2(1-\rho^2)^4}{n^2}$$

と なる。さ ら に、 n と ρ が 小 さ く な け れ ば、上 式 の 右 辺 の 第 1 項 の み で 近 似 し て も よ い。

ま た、上 の σ_m^2 の 平 方 根 に 0.6745 を 乗 ず れ ば m の 中 央 誤 差 が 得 ら れ る。Spearman と Holzinger は、 $\rho=0.00(0.02)0.98$ に つ い て、こ の 中 央 誤 差 の 数 値 表 を 与 え て い る。

次 に、二 因 子 解 の 因 子 パ タ ー ン α を 推 定 す る Spearman の 歴 史 的 な 方 法 に つ い て 記 述 し よ う。

10.1 総 和 法

観測特性間の相関係数が四価差の条件式 (10.6) または同等な三価対の条件式 (10.7) を満たすなら、その因子構造は式 (10.1) のように仮定できて問題は係数 a_i や b_i を推定することになる。

いま、標本誤差を無視して式 (10.7) の条件が統計的に満たされていると仮定し、観測された相関係数について

$$r_{ii'} = \rho_{ii'} = a_i a_{i'}, \quad i, i' = 1, 2, \dots, p \quad (10.9)$$

とする。ここで上式の両辺に、任意の観測特性 x_k における全般因子の係数 a_k の2乗を掛けると

$$a_k^2 r_{ii'} = a_k^2 a_i a_{i'} = (a_k a_i)(a_k a_{i'}) = r_{ki} r_{ki'} \quad (10.10)$$

を得る。上式の結果を i と i' について和をとると

$$\sum_{i < i'=1}^p r_{ki} r_{ki'} = a_k^2 \sum_{i < i'=1}^p r_{ii'}, \quad i, i' \neq k \quad (10.11)$$

となる。この右辺の和は、対称な相関行列において対角線要素より上(または下)の要素の和を示している。

したがって、

$$a_k = h_k = \left(\frac{\sum_{i < i'=1}^p r_{ki} r_{ki'}}{\sum_{i < i'=1}^p r_{ii'}} \right)^{1/2}, \quad i, i' \neq k \quad (10.12)$$

が得られる。この式の計算は見かけよりも簡単で、相関行列の上または下の三角形部分において、分母は k を含まないすべての相関係数の和であり、分子は k と他の観測特性との相関係数の二つずつの積の和である。

たとえば、観測特性が5個であるとき、第1の特性に関する全般因子係数は

$$a_1 = \left(\frac{r_{12}r_{13} + r_{12}r_{14} + r_{12}r_{15} + r_{13}r_{14} + r_{13}r_{15} + r_{14}r_{15}}{r_{23} + r_{24} + r_{25} + r_{34} + r_{35} + r_{45}} \right)^{1/2}$$

と系統的に書ける。

上の式 (10.12) は、それだけで十分簡単であるが、さらに数値計算には上式

を変形した次式のほうがもっと楽になる。

$$a_k = \left\{ \frac{\left(\sum_{i=1}^p r_{ki} \right)^2 - \sum_{i=1}^p r_{ki}^2}{2 \left(\sum_{i < i'=1}^p r_{ii'} - \sum_{i=1}^p r_{ki} \right)} \right\}^{1/2}, \quad i \neq k \quad (10.13)$$

本節の計算手順は平易であるが、次節にある別の解法の結果と比較してみる興味があるので、先章以来の長方形に関する検証実験例について数値計算を示しておく。ここでの相関行列は次のものであった。

表 10.2 相 関 行 列

1	1.0000	0.9998	0.9993	0.8530	-0.3716	0.5262	0.5263	0.6917
2	0.9998	1.0000	0.9993	0.8528	-0.3722	0.5258	0.5260	0.6914
3	0.9993	0.9993	1.0000	0.8691	-0.3425	0.5525	0.5528	0.7141
4	0.8530	0.8528	0.8691	1.0000	0.1666	0.8923	0.8924	0.9668
5	-0.3716	-0.3722	-0.3425	0.1666	1.0000	0.5931	0.5932	0.4128
6	0.5262	0.5258	0.5526	0.8923	0.5931	1.0000	0.9997	0.9778
7	0.5263	0.5260	0.5528	0.8924	0.5932	0.9997	1.0000	0.9780
8	0.6917	0.6914	0.7141	0.9668	0.4128	0.9778	0.9780	1.0000

もちろん、この検証例の構造は、本章の二因子解法に適合したものではないが、 α と β を同様の一つの全般因子と考え、残りは特殊因子と誤差項からなるように考えての試行計算となる。このように、ただ一つの全般因子係数とした計算結果は、次のように得られる。

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.7313, & a_2 &= 0.7310, & a_3 &= 0.7589, & a_4 &= 1.0387 \\ a_5 &= 0.1585, & a_6 &= 0.9434, & a_7 &= 0.9437, & a_8 &= 1.0283 \end{aligned}$$

10.2 三 価 対 法

観測特性群間の相関行列がちょうど1個の共通因子の存在を示すようなとき、どの一つの共有性でも母数による三価対の関係式(10.7)が成立していることが知れた。そして、一つの共有性は次式の m 個

$$m = \binom{p-1}{2} \quad (10.14)$$

の三価対で同等に表現されているわけである。

本節ではこの関係に基づいて前節と異なった二因子解の方法を示す。

いま、標本相関係数によって、次のように i を固定して i' と k に関する一つの三価対を考えよう。

$$t_{i'k} = r_{i'i} r_{ik} / r_{i'k}, \quad i', k \neq i \text{ (固定)}, \quad i' < k, \\ i', k = 1, 2, \dots, p \quad (10.15)$$

このとき、一つの共有性 h_i^2 は、標本誤差による偏差を伴ってはいるが、 i' と k を変えて得られる m 個の三価対 $t_{i'k}$ によっても表現される。

したがって、 m 個の観測された三価対から最小2乗法によって一つの真の共有性を推定しようとする。すなわち、式(10.15)で示される $t_{i'k}$ によって、

$$\sum_{i'} \sum_k (t_{i'k} - h_i^2)^2, \quad i', k \neq i, \quad i' < k, \\ i', k = 1, 2, \dots, p \quad (10.16)$$

を最小ならしめる h_i^2 を推定するわけである。

この解は、式(10.16)と同じ条件下で簡単に次式によって示される。

$$\hat{h}_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{i'} \sum_k t_{i'k}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (10.17)$$

$$\text{または} \quad = \frac{1}{m} \sum_{i'} \sum_k (r_{i'i} r_{ik} / r_{i'k}) \quad (10.18)$$

この式は、共有性としてあらゆる可能な三価対の算術平均で推定されることを意味し、またただ1個の共通因子の共有性であるから、第 i 観測特性のその因子に関する係数は式(10.7)の上方でしるしたように、

$$\hat{a}_i = (\hat{h}_i^2)^{1/2} \quad (10.19)$$

によって与えられる。

この方法での基本的な仮定は、式(10.1)と同様に、観測特性の間にはただ一つの全般因子を含むことで、また任意の特性についてのすべての三価対は母数のうえで同値であるということである。しかし、このほかに、前節では標本相関係数に観測誤差を含まないことを仮定したが、本節ではこのような仮定は必要としない。

しかし、前節の式(10.13)でもまた本節の式(10.17)でも、実際には共有性

を推定する際に暗黙のうちに

$$t_{i'k} = \frac{r_{ii'}r_{ik}}{r_{i'k}} \leq 1 \quad (10.20)$$

を前提としている。さらに、任意に固定した第 i 観測特性についてその共有性と特殊性を加えた信頼性の値を $R_i \equiv h_i^2 + b_i^2$ とすると

$$\frac{r_{ii'}r_{ik}}{r_{i'k}} \leq R_i$$

であることを前提としている。

実際問題で普通この前提は満たされるのであるが、もし三価対の値で 1 をこえるものがあれば、これをはぶいて共有性を推定せねばならない。

さて、本節の数値計算は三価対を用いるので、前節よりいくらかめんどうである。しかし、上述のように前節よりはすぐれた方法なので、種々な組み合わせによる三価対の計算手間を嫌ってはならない。また、このために電子計算機による因子解法のプログラムも完備されている。

前節と同様の立場で長方形に関する検証実験例の相関行列から出発し、三価対法によって、ただ一つの共通因子の係数を算出した結果を示す。

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.7033, & a_2 &= 0.7031, & a_3 &= 0.7222, & a_4 &= 0.8899 \\ a_5 &= 0.2867, & a_6 &= 0.8052, & a_7 &= 0.8054, & a_8 &= 0.8710 \end{aligned}$$

この場合も、検証例における観測特性の構造模型が二因子解に適していないことは前節と同様であるが、計算結果はおおまかにみると前節の結果に類似している。しかし、第 4, 第 5, 第 8 の観測特性は、他の特性に比して妥当なように修正されている。

10.3 計算プログラム

総和法および三価対法 Spearman の提唱した二因子解法を実施する。解法は、コントロール・カードによって、総和法か三価対法のいずれかを選ぶことができる。また、インプットも、すでに得ている相関行列からの場合でも原始資料からの場合でもコントロール・カードで選択できる。いずれにしても、全般因子係数と各対象ごとの因子評点を得ることができる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	R(I, J)	標本相関行列
NS	標本の大きさ(数)	S(I)	共通因子の係数
IND	ゼロならば因子係数のみ, 1ならば因子係数と個々の因子評点を示す	X(I)	因子評点ベクトル
IC	ゼロならば総和法を, 1ならば三価対法を適用する		
IR	相関係数を計算するか否かの制御		
R(I, J)	標本相関行列		
X(I)	観測特性値ベクトル		

```

C      TWO - FACTOR SOLUTION
C
C      BY THE SUMMATION METHOD
C      OR BY THE METHOD OF TRIADS
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      NS --- NO. OF SAMPLES
C      IND --- 1. IF FACTOR COEFFICIENTS AND INDIVIDUAL SCORES ARE NEEDED
C
C      --- 0, OTHERWISE (FACTOR COEFFICIENTS ONLY)
C      IC --- 0, IF SUMMATION METHOD IS APPLIED
C      --- 1, IF METHOD OF TRIADS IS APPLIED
C      IR --- 0, TO MAKE A CORRELATION MATRIX
C      --- 1, TO USE A CORRELATION MATRIX WE HAVE ALREADY
C      R --- A CORRELATION MATRIX
C      X --- INDIVIDUAL OBSERVATIONS
C
C      DIMENSION X(30),S(30),R(30*30)
C
1 READ (40,100) N,NS,IND,IC,IR
   IF(IR) 2,4,2
2 DO 3 I=1,N
3 READ (40,101) (R(I,J),J=1,N)
   NL=N-1
   GO TO 11
4 DO 5 I=1,N
   S(I)=0.0
   DO 5 J=I,N
5 R(I,J)=0.0
C
   AN=0.0
   IX=0.0
6 READ (40,102) (X(I),I=1,N)
   IX=IX+1
   IF(IX=NS) 7,9,9
   IX=X(1)
   IF(IX=999) 7,9,9
7 AN=AN+1.0
   DO 8 I=1,N
   S(I)=S(I)+X(I)
   DO 8 J=I,N
8 R(I,J)=R(I,J)+X(I)*X(J)
   GO TO 6
9 DO 10 I=1,N
   TMP1=AN*R(I,I)-S(I)**2

```

```

DO 10 J=1,N
TMP2=AN*R(I,J)-S(I)*S(J)
TMP3=AN*R(J,J)-S(J)**2
R(I,J)=TMP2/SQRT(TMP1+TMP3)
10 R(J,I)=R(I,J)

11 WRITE (50,200)
DO 12 I=1,N
R(I,I)=1,0
12 WRITE (50,201) I,(R(I,J),J=1,N)
IF(IC) 13,13,18
13 WRITE (50,202)
DO 17 K=1,N
TMP1=0,0
TMP2=0,0
DO 16 I=1,NL
IF(K-I) 14,16,14
14 L=I+1
DO 16 J=L,N
IF(K-J) 15,16,15
15 TMP1=TMP1+R(K,I)*R(K,J)
TMP2=TMP2+R(I,J)
16 CONTINUE
17 S(K)=SQRT(TMP1/TMP2)
GO TO 23
18 WRITE (50,203)

AN=N
AN=(AN-1,0)*(AN-2,0)/2,0
DO 22 K=1,N
S(K)=0,0
DO 21 I=1,NL
IF(K-I) 19,21,19
19 L=I+1
DO 21 J=L,N
IF(K-J) 20,21,20
20 S(K)=S(K)+R(K,I)*R(K,J)/(R(I,J)*AN)

21 CONTINUE
X(K)=S(K)
22 S(K)=SQRT(S(K))
23 WRITE (50,204) (S(I),I=1,N)
IF(IND) 1,1,24
24 WRITE (50,205)
IX=0
25 READ (40,102) (X(I),I=1,N)
IX=IX+1
DO 26 I=1,N

26 X(I)=X(I)*S(I)
WRITE (50,206) IX,(X(I),I=1,N)
IF(IX=NS) 25,1,1
100 FORMAT (I2,15,3I2)
101 FORMAT (10F5,4)
102 FORMAT (8F10,2)
200 FORMAT (///,20H TWO-FACTOR SOLUTION,///5X,18HCORRELATION MATRIX,//
1)
201 FORMAT (/,13,5F8,4/(3X,5F8,4))
202 FORMAT (///5X,51HCOEFFICIENTS OF A COMMON FACTOR BY SUMMATION METH
10D/)
203 FORMAT (///5X,55HCOEFFICIENTS OF A COMMON FACTOR BY THE METHOD OF
1TRIADS/)
204 FORMAT (3X,5F8,4)
205 FORMAT (//,25H INDIVIDUAL FACTOR SCORES,/,9H CASE NO.,/)
206 FORMAT (I6,5(2X,F12,4)/6X,(5(2X,F12,4)))
STOP
END

```

双因子解法

前章の二因子解法を適用する際の不都合さを改良する仕事として、双因子解法 (bi-factor solution) が 1934 年に Holzinger によって提唱された。

このモデルは一つの全般因子といくつかの部分因子および p 個の特殊因子からなり、二因子解法の適用限界を拡張したものである。または、表 9.1 で示された単一因子解に一つの全般因子を含めたものともいえる。

さて、双因子解の一般形は次式のように p 個の観測特性が $q+1$ 個の共通因子の線形式で示されている。

$$x_j = af_{0j} + Af_j + e_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (11.1)$$

ここに右辺の af_{0j} は式 (10.2) で、また $Af_j + e_j$ については式 (9.2) で定義される。

すなわち、上式は具体的に次の内容を示している。

$$\left. \begin{array}{lll} x_{1j} & = a_{1f_0j} & + a_{11}f_{1j} & + e_{1j} \\ x_{2j} & = a_{2f_0j} & + a_{21}f_{1j} & + e_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p_1j} & = a_{p_1f_0j} & + a_{p_11}f_{1j} & + e_{p_1j} \\ \\ x_{p_1+1,j} & = a_{p_1+1,f_0j} & + a_{p_1+1,2}f_{2j} & + e_{p_1+1,j} \\ x_{p_1+2,j} & = a_{p_1+2,f_0j} & + a_{p_1+2,2}f_{2j} & + e_{p_1+2,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p_1+p_2,j} & = a_{p_1+p_2,f_0j} & + a_{p_1+p_2,2}f_{2j} & + e_{p_1+p_2,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{p,j} & = a_{pf_0j} & + a_{p,q}f_{qj} & + e_{p,j} \end{array} \right\} \quad (11.2)$$

ここに $j = 1, 2, \dots, n$

表 11.1 双因子解法におけるパターン

観測特性	F ₀	F ₁	F ₂	F ₃ ----	F _q
1					
2					
3					
...					
p					

この構造をさらにわかりやすい形で示すと、表 11.1 のように書ける。

いま、観測特性を部分因子によって群分けし、第 k 番めと第 k' 番めの群をそれぞれ G_k と $G_{k'}$ としよう。このとき G_k に属する第 i 観測特性 x_i と $G_{k'}$

に属する第 i' 観測特性 $x_{i'}$ との間の母相関係数は、双因子パターンにより

$$\begin{aligned} \rho_{ii'} &= E\left\{\sum_{j=1}^n x_{ij}x_{i'j}/n\right\} = a_i a_{i'} + a_i a_{i'k'} \rho_{F_0 F_{k'}} + a_{ik} a_{i'} \rho_{F_0 F_k} \\ &\quad + a_{ik} a_{i'k'} \rho_{F_k F_{k'}} = a_i a_{i'} + a_{ik} a_{i'k'} \rho_{F_k F_{k'}} \end{aligned} \quad (11.3)$$

と得られる。

そして具体的に、二つの観測特性が異なった群に属す ($k \neq k'$) ときは、

$$\rho_{ii'} = a_i a_{i'}, \quad i \in G_k, \quad i' \in G_{k'} \quad (11.4)$$

であり、同じ群に属すのであれば

$$\rho_{ii'} = a_i a_{i'} + a_{ik} a_{i'k}, \quad i, i' \in G_k \quad (11.5)$$

と簡単に示される。

したがって、式 (11.4) でわかるように、異なった群にまたがる観測特性の相関係数は、全般因子 f_0 のみに関係するので、相関行列のほかの部分に比して、比較的小さい値になりがちである。これらの相関係数は図 11.1 の相関行列の中の四角形の部分にあたっている。また、式 (11.5) で表現される群内の観測特性間の相関係数は、全般因子と一つの部分因子の寄与を受けて、比較的大きな値を示す傾向にある。これらの相関係数は図 11.1 の三角形の部分で示

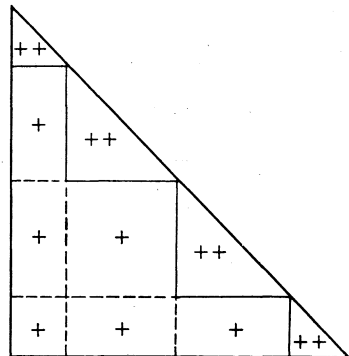


図 11.1 双因子解法における母相関行列

されている。

さて、二因子解法での共通因子空間は1次元であったが、本章の双因子解での共通因子空間の次元は $(q+1)$ である。そして、この双因子解での基礎的な考え方は、表11.1に示されるような部分因子の観点から p 種の観測特性の群分けをまず行なうことである。そして、その後全般因子や部分因子に関する係数を推定することであり、また因子評点も算出できることになる。以下、この順に従って記述していく。

11.1 観測特性の群分け

因子分析の初めに観測特性の取捨選択の吟味を行ない、諸観測特性がいかなる仮説的な因子によって構成されるものであるかを、テスト・メーカーの立場としても、またテスト・ユーザーの立場としても、大約知っておくことはもちろん好ましいことである。そして、一つの因子についていくらかでも重複して測定できるような観測特性が、3~5種類程度は含まれていることが望ましい。これらのことは、因子分析に際する多種観測特性の選び方に関して第1章にしるしたことでもある。

このような慎重な配慮に基づくときには、本節に必要な観測特性の群分け (grouping of variables) を、すでにあらかじめ研究された実質科学的知見によって行なえばよいわけである。

しかし他方、因子分析の方法が情報処理における一つの統計解析として、すでに得られた多変量観測データに遡及的 (retrospective) に適用されることも多い。そして相関行列の解釈や簡素縮小化など諸観測特性の内容的検討として、これら諸特性の群分けが考えられる。本節では、このように統計的な探索や検証の考察を主とするような場合に、相関行列から観測特性の群分けを行なう一つの方法として心理学で繁用されている B 係数法を述べる。

いま、式(11.4)と(11.5)の関係から、一つの部分因子でくくられる1群の観測特性の間では、他のすべての観測特性との相関よりも、比較的高い相関性を有していると考えられる。この発想動機から一つの指標 (index) として、 B 係数 (B -coefficient) または従属係数 (coefficient of belonging) とよばれるものを導入する。

この係数は、1群にくくられた観測特性の間の種々の相関係数の平均値と他のすべての観測特性との相関係数の平均値の比の100倍で定義されている。すなわち、任意の第 k 群 G_k にくくられている観測特性についての B 係数を $B(k)$ として、

$$B(k) = 100 \left(\frac{S}{n_S} \right) \left/ \left(\frac{T}{n_T} \right) \right., \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (11.6)$$

で定義する。ここに S は G_k 内の観測特性間の相関係数の和

$$S = \sum_{i < i'} r_{ii'}, \quad i, i' \in G_k \quad (11.7)$$

を示し、 T は G_k 内の観測特性と G_k 外の観測特性の間の種々な組み合わせによる相関係数の和

$$T = \sum_{i, i'} r_{ii'}, \quad i \in G_k, \quad i' \notin G_k \quad (11.8)$$

を示す。また n_S と n_T をそれぞれ S と T を算出するのに加算された相関係数の個数とし、 G_k 内には p_k 個の観測特性が含まれているとすると

$$\begin{aligned} n_S &= p_k(p_k - 1)/2, \\ n_T &= p_k(p - p_k) \end{aligned} \quad (11.9)$$

となる。

したがって、式 (11.6) は次のようにいくらか楽な計算式に書き換えられる。

$$B(k) = \frac{200(p - p_k)S}{(p_k - 1)T} \quad (11.10)$$

さらに、 T の計算については、式 (11.8) の代わりに次のような計算法に従っても同じことである。

$$T = \sum_{i, i'} r_{ii'} - 2S, \quad i' \neq i, \quad i' = 1, 2, \dots, p, \quad i \in G_k \quad (11.11)$$

また、 S や T を算出するのに、相関係数の和を群内の観測特性について逐次累積して求める系統的な方法もある。

いま、 l をその群に加える当面の観測特性とし、この l とその群内の他の観測特性との相関係数の和を

$$L = \sum_i r_{il}, \quad i, l \in G_k, \quad i \neq l \quad (11.12)$$

とする。そして、 S の計算に用いられる観測特性の数 p_k を相関係数の和 L ,

S, T の添字とすると, S と T の値は逐次的に次のような計算で得られる。

$$S_{p_k} = S_{p_{k-1}} + L_{p_k} \quad (11.13)$$

$$T_{p_k} = T_{p_{k-1}} + \sum_i r_{il} - 2L_{p_k}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad i \neq l \quad (11.14)$$

もちろん, 上にあげたどの計算法によっても全く同等であるが, 観測特性の数が大きいときの労を避けるためには, この方法が最も便利である。電子計算機のプログラミングには, 式 (11.13) と (11.14) を用いるのがよい。

さて, このように定義された B 係数は, p 個の観測特性間の相関係数に基づいて, 観測特性を選択し群分けするのに利用される。

この群分けは, 相関係数の最も高い二つの観測特性を選び出すことから始める。次に, この二つの観測特性と生ずる二つの相関係数の和が最大になるような第3の観測特性を選ぶ。また次には, すでに得られた三つの観測特性との三つの相関係数の和が最大となるような第4の観測特性を選ぶ。このように逐次一つずつ観測特性を増していき, その都度 B 係数を計算しておく。そして, 観測特性を一つずつ増していく各段階で, B 係数の値が急激に低下する最初の段階を捜し出す。この急激な低減があれば, そのときの観測特性を除き, 次に大きい別の観測特性を代わりに用いる。このようにして, いかにしても B 係数の値が著しく低減するとき, その前段階までの観測特性群によって, 一つの群の構成を完了する。

この後の第2の群の構成には, すでに第1の群に編入された観測特性を除いて, それ以外のなかから最大の相関係数値を示している二つの観測特性を捜し出し, 上記と同様の手順により, 観測特性を増しつつ B 係数の値の変化に注目し, B 係数の値が有意な低下 (significant drop) をみるまでのひとくくりの観測特性によって群をつくる。このような過程を経て, すべての観測特性がどの群に属するかまたはどの群にも属さないなどが明らかになるまで続ける。しかし, この B 係数の有意な低減を判定する理論的な基準値はまだない。したがって, グラフを描き, 不連続な大きい低減を直観的に判断せざるをえない。

電子計算機によるプログラムで観測特性の群分けを行なうには, 1群を作成する過程で B 係数の低減を前段階までの平均的な低減の度合いの2倍程度を有意な低減の基準とするのがよさそうである。すなわち, 1観測特性を増すご

表 11.2 相 関 行 列

1	1.000	0.151	0.543	0.154	0.393	0.300	0.240	0.116	0.187
2	0.151	1.000	0.213	0.533	0.322	0.352	0.272	0.181	0.250
3	0.543	0.213	1.000	0.318	0.565	0.338	0.314	0.136	0.249
4	0.154	0.533	0.318	1.000	0.367	0.391	0.273	0.181	0.255
5	0.393	0.322	0.565	0.367	1.000	0.441	0.341	0.243	0.292
6	0.300	0.352	0.338	0.391	0.441	1.000	0.438	0.325	0.351
7	0.240	0.272	0.314	0.273	0.341	0.338	1.000	0.369	0.322
8	0.116	0.181	0.136	0.181	0.243	0.325	0.369	1.000	0.185
9	0.187	0.250	0.249	0.255	0.292	0.351	0.322	0.185	1.000
10	0.195	0.172	0.311	0.164	0.360	0.411	0.361	0.229	0.260
11	0.201	0.197	0.331	0.227	0.352	0.497	0.365	0.290	0.305
12	0.175	0.246	0.251	0.322	0.398	0.360	0.319	0.278	0.339
13	0.215	0.252	0.377	0.307	0.450	0.419	0.383	0.284	0.353
14	0.257	0.246	0.343	0.290	0.363	0.399	0.323	0.200	0.334
15	0.308	0.355	0.398	0.373	0.490	0.496	0.430	0.313	0.417
16	0.041	0.099	0.148	0.109	0.076	0.392	0.190	0.132	0.152
17	0.121	0.185	0.231	0.189	0.255	0.386	0.278	0.187	0.234
18	0.021	0.147	0.130	0.154	0.136	0.322	0.200	0.178	0.087
19	0.087	0.154	0.231	0.148	0.211	0.269	0.197	0.150	0.213

注. 表 5.8 で, 第 1 と第 2 の観測特性の尺度の方向を逆順にしている.

とにそれまでの B 係数値の平均低減の 2 倍程度を基準とし, この値よりも大きな低減を示せばその観測特性を除いて 1 群を形成する。他方, この値よりも小さな低減であれば, さらに次の 1 観測特性を選び B 係数の値とこれまでの平均低減値の 2 倍を新たに計算して比較するように工夫するとよい。これはたぶん経験的なもので理論上のことではないが, 通常はあてはまるようである。

ここで, B 係数の値 $B(k)=100$ ということは, この第 k 群に属する観測特性間の相関係数の平均が, この群に属さない残りの観測特性との相関係数の平均と等しいことを示し, このような観測特性がすべて同一の第 k 群に属しているとは考えられない。同一の群に属するとみなしうる B 係数は, 通常 100 よりかなり大きい値を, たとえば 130 以上の値をもたねばならないと仮定されている。しかも, 観測特性を一つずつ増加する各段階での B 係数値について有意な差を判定する標本分布公式はまだなく, B 係数値の低減に関し有意水準値を決めるには観測特性の性質によって考えるしかないことになる。

観測特性は B 係数の計算にすでに組み入れられた特性と相関の高いものか

(初老期痴呆の例)

0.195	0.201	0.175	0.215	0.257	0.308	0.041	0.121	0.021	0.087
0.172	0.197	0.246	0.252	0.246	0.355	0.099	0.185	0.147	0.154
0.311	0.331	0.251	0.377	0.343	0.398	0.148	0.231	0.130	0.231
0.164	0.227	0.322	0.307	0.290	0.373	0.109	0.189	0.154	0.148
0.360	0.352	0.398	0.450	0.363	0.490	0.076	0.255	0.136	0.211
0.411	0.497	0.360	0.419	0.399	0.496	0.392	0.386	0.322	0.269
0.361	0.365	0.319	0.383	0.323	0.430	0.190	0.278	0.200	0.197
0.229	0.290	0.278	0.284	0.200	0.313	0.132	0.187	0.178	0.150
0.260	0.305	0.339	0.353	0.334	0.417	0.152	0.234	0.087	0.213
1.000	0.733	0.236	0.376	0.234	0.331	0.376	0.465	0.383	0.394
0.733	1.000	0.239	0.433	0.322	0.389	0.458	0.530	0.413	0.387
0.236	0.239	1.000	0.510	0.296	0.385	0.133	0.210	0.080	0.227
0.376	0.433	0.510	1.000	0.358	0.495	0.188	0.366	0.211	0.333
0.234	0.322	0.296	0.358	1.000	0.516	0.226	0.346	0.241	0.258
0.331	0.389	0.385	0.495	0.516	1.000	0.306	0.349	0.228	0.276
0.376	0.458	0.133	0.188	0.226	0.306	1.000	0.471	0.509	0.276
0.465	0.530	0.210	0.366	0.346	0.349	0.471	1.000	0.487	0.579
0.383	0.413	0.080	0.211	0.241	0.228	0.509	0.487	1.000	0.375
0.394	0.387	0.227	0.333	0.258	0.276	0.276	0.579	0.375	1.000

ら次第に群に加えられていくので、計算に組み入れられる観測特性が増せば増すほど、通常 B 係数の分子は減少する。また B 係数の分母は群内の観測特性と残りのすべての観測特性との相関係数の平均であり、群に組み入れられる観測特性の数が増加するほど、この分母も減少するのが普通である。しかし、一般に分子の減少の度合いが分母の減少よりも大きく、 B 係数の値としては減少する。

次に、 B 係数による観測特性の群分けに関する数値計算の手順を示そう。

双因子解法では、観測特性による相関行列が図 11.1 で示されているように、ほとんどすべて正の相関係数から成立する場合を考えており、 B 係数の適用もこのような場合を暗に前提としている。すなわち、すべての観測特性が一方方向の符号に整理でき、正の相関をもつような構造模型を考えているわけである。このことはすでに第 9 章の末尾に述べた単極因子の性格に関係する。

いま、数値計算法をわかりやすくするために、第 5 章で紹介した初老期痴呆の診断に関する表 5.8 の相関行列に適用してみよう。表 5.8 をよく視察する

と、第1および第2観測特性の尺度を逆向きに変えることによって、表11.2のようにすべての相関行列の要素が正值となる。この例が医学的背景から双因子パターンとして解釈しうるか否かの疑問は別として、いま表11.2を形式的に双因子パターンによる相関行列と仮定し、 B 係数による観測特性の群分けの計算手順を示す素材にする。

さて、表11.2の相関行列の非対角要素のうち、最も大きな値は第10と第11観測特性間の相関係数 0.733 である。ここで B 係数を求めると 222.64 となる。

次に、この二つの特性と別な一つの特性との相関係数の和が最大となるような第三の観測特性を選び出す。このように捜すと、第17観測特性が選び出される。ここで三つの特性値による B 係数の値を求めると 183.43 となり、値の減少がみられる。

次いで、すでに選ばれた第10、第11および第17の観測特性との相関係数の和が最大となる他の一つの観測特性を選び出す。これを実行すると第19観測特性が選び出される。ここで B 係数の値は 180.39 となり、前回に比して微減している。同様に、第10、第11、第17および第19の四つの観測特性との相関係数の和が最大となる別な一つの観測特性を捜すことになる。このようにして、第18観測特性が選び出され、このときの B 係数の値は 183.51 となる。

この手順を繰り返すと、第10、11、17、19、18、16の特性を群に加えてきたあと、第6の観測特性が選び出されてくる。このときの B 係数値は 177.48 となり、前段階での B 係数の値との差は 17.77 で大きな減少をみる。一方、それまでの各段階での B 係数の平均の減少値は 6.84 であって、この2倍値は 13.68 である。したがって、第6の特性を群に加えることにより 17.77 という有意な B 係数の減少を示したため、第6特性を除いて、もういちど別の観測特性を選んでみる。さて、第10、11、17、19、18、16の6個の各特性との相関係数の和が、第6特性に次いで大きいのを捜すと、第15特性が選ばれる。これをさきの6個の特性と一しょにし、1群として B 係数の値を算出すると 162.71 を得る。この値もさきの6個の特性による B 係数値より一段と低い有意な減少を示している。ここにおいて、この段階までの第10、11、17、19、18、16の6特性によって1群を構成する。

次いで、第2の群をつくるには、もとの相関行列から上にあげられた6個の観測特性に関するすべての相関係数を除外し、残りの相関係数の中での最大の値をもっている特性の組を捜す。この例では、第3と第5の特性間の0.565が最大であり、この組み合わせから出発し、上記と同様の手順で B 係数の値を算出しつつ1観測特性ずつ群に加えていく。

第2群では、第3、第5、第1の3特性に第15の特性が加えられたとき、 B 係数の値は 162.00 となり、大きな減少がみられる。ここで第15特性を除いて別の観測特性を選ぶ。第3、5、1の3特性との相関係数の和が、第15特性に次いで大きいのは、第6特性である。上の3特性と第6特性を1群にして B

表 11.3

GROUPING OF VARIABLES BY B-COEFFICIENT METHOD											
B-COEFFICIENTS, ITEM NO.											
GROUP-1	222.64	10	11								
	183.43	10	11	17							
	180.39	10	11	17	19						
	183.51	10	11	17	19	18					
	195.25	10	11	17	19	18	16				
	177.48	10	11	17	19	18	16	6			
	162.71	10	11	17	19	18	16	15			
GROUP-2	185.57	3	5								
	197.09	3	5	1							
	162.00	3	5	1	15						
	150.90	3	5	1	6						
	129.93	2	4	6	15	13	12	7	14	9	8
GROUP-3	226.07	2	4								
	152.17	2	4	6							
	140.26	2	4	6	15						
	131.26	2	4	6	15	13					
	133.68	2	4	6	15	13	12				
	132.23	2	4	6	15	13	12	7			
	131.94	2	4	6	15	13	12	7	14		
	134.05	2	4	6	15	13	12	7	14	9	
	129.93	2	4	6	15	13	12	7	14	9	8
	RESULT OF GROUPING OF VARIABLES										
ITEM NO.											
GROUP-1	10	11	17	19	18	16					
GROUP-2	3	5	1								
GROUP-3	2	4	6	15	13	12	7	14	9	8	

係数の値を求めると 150.90 を得る。この値も 3 特性を 1 群としたときの値より有意に大きな低減を示している。したがって、第 3, 第 5 および第 1 の観測特性で第 2 群が構成される。

第 3 群の構成には、第 1 群と第 2 群にすでに組み込まれた観測特性に関する相関係数を除き、残りの相関係数のうちの最大な特性の組み合わせから出発する。ここでは、第 2 と第 4 観測特性の相関係数 0.533 が最大を示し、この特性の組から 1 観測特性ずつ同様の手順で加えていく。この例の結果では、残りの特性がすべて第 3 群となる。

観測特性が多いときに、この計算はかなり労力的なものになる。このためには、電子計算機による情報処理が必要となる。表 11.3 には、電子計算機のプログラムによる印刷結果を示して計算手順の全容を知る参考に供している。

11.2 全般因子の係数の推定

前節などにより観測特性の群分けが定めれば、いよいよ与えられた相関行列に基づいて双因子解を行なう。

この手順はまず全般因子の係数を得、次いで各部分因子の係数を求めることになる。本節では、まず全般因子の係数を得るために、10.1 節の総和法を適用する。

いま、必要に応じ B 係数などによって観測特性がすでに群分けされ、双因子パターンとして式 (11.1) または式 (11.2) が仮定されているとする。このとき、異なった群から観測特性を 1 個ずつとって一つの集まりを考えると、この集まりについては二因子パターンのただ一つの共通因子と特殊因子だけからなるモデルになっている。

ここに、任意の三つの異なった群を $G_k, G_{k'}, G_{k''}$ とし、それぞれから一つずつ観測特性をとり、この組を (i, i', i'') とする。ただし、 $i \in G_k, i' \in G_{k'}, i'' \in G_{k''}$ である。このようにすると (i, i', i'') のような観測特性の組がたくさんできるが、いずれもただ一つの共通因子だけをもつわけである。そして、これらの観測特性の間には式 (11.4) の関係

$$\rho_{ii'} = a_i a_{i'}, \quad i \in G_k, \quad i' \in G_{k'}, \quad i \neq i' \quad (11.15)$$

が成立している。この式は、もちろん母数の関係を示しているが、この相関係数を観測された標本相関係数におきかえ、さらに両辺に $a_i'^2$ を乗ずる。すなわち、

$$a_i'^2 r_{ii'} = (a_i' a_i)(a_i'' a_i') = r_{ii''} r_{i'i''}, \quad i'' \in G_{k''} \\ k \neq k' \neq k'' \quad (11.16)$$

を得、これによって全般因子の係数は

$$\hat{a}_{i'} = (r_{ii''} r_{i'i''} / r_{ii'})^{1/2}, \quad i'' \in G_{k''} \quad (11.17)$$

と推定される。この係数は任意の $i \in G_k, i' \in G_{k'}$ について得られる。

しかし、 $\rho_{ii'}$ を $r_{ii'}$ で置き換えた標本誤差を考慮し、いっそう信頼性のある値として、式 (11.16) の両辺で i および i' に関して和をとり、式 (11.6) を次のように書き換える。

$$a_i'^2 \sum_{i,i'} r_{ii'} = \sum_{i,i'} r_{ii''} r_{i'i''} \quad (11.18)$$

したがって、式 (11.17) を改良した式として

$$\hat{a}_{i'} = \left(\sum_{i,i'} r_{ii''} r_{i'i''} / \sum_{i,i'} r_{ii'} \right)^{1/2} \\ i \in G_k, i' \in G_{k'}, k, k' \neq k'', k < k' = 1, 2, \dots, q \quad (11.19)$$

が双因子解における全般因子の係数の推定量とされる。この公式は、すべての観測特性がただ一つの共通因子を含む場合の式 (10.12) に対応する。

ここで、前節で引用した初老期痴呆の相関行列の表 11.2 に基づいて、全般因子係数および残差行列の計算例を示しておく。

この際の 19 種類の観測特性は、すでに前節の数値例として B 係数の方法によって群分けされ、第 I 群(第 10, 11, 17, 19, 18, 16 番めの観測特性)、第 II 群(第 3, 5, 1 番めの観測特性)および第 III 群(残りの観測特性)とみなされている。このような群分けの結果に基づいて、全般因子係数は式 (11.19) によって、またこの因子の抽出後の残差行列は次節の初めに説明される式 (11.20) によって計算される。計算手順は簡単であるから、表 11.4 に結果のみを示す。

なお、この例の観測特性の群分けについて、第 I 群と第 II 群をそのままにして、第 III 群をさらに 2 群に分け、新たに第 III 群(第 2, 4, 6 番めの特性)と第 IV 群(第 15, 13, 12, 7, 14, 9, 8 番めの特性)をつくり、全体で 4 個の群に分

表 11.4 初老期痴呆の例における全般因子係数と

全般因子係数									
	1(10)	2(11)	3(17)	4(19)	5(18)	6(16)	7(3)	8(5)	9(1)
	0.524	0.574	0.435	0.366	0.246	0.241	0.524	0.590	0.307
中間の残差相関係数									
1(10)	0.725								
2(11)	0.432	0.670							
3(17)	0.236	0.280	0.810						
4(19)	0.201	0.176	0.419	0.865					
5(18)	0.253	0.271	0.379	0.284	0.939				
6(16)	0.249	0.319	0.365	0.187	0.449	0.941			
7(3)	0.036	0.029	0.002	0.038	0.000	0.021	0.725		
8(5)	0.050	0.012	-0.002	-0.005	-0.009	-0.066	0.255	0.651	
9(1)	0.033	0.024	-0.013	-0.025	-0.054	-0.033	0.381	0.211	0.905
10(2)	-0.056	-0.053	-0.004	-0.006	0.039	-0.006	-0.015	0.064	0.016
11(4)	-0.093	-0.055	-0.025	-0.032	0.032	-0.009	0.060	0.076	0.002
12(6)	-0.032	0.011	0.018	-0.041	0.113	0.187	-0.105	-0.058	0.039
13(15)	-0.092	-0.075	-0.002	-0.020	0.028	0.110	-0.025	0.012	0.059
14(13)	-0.022	-0.003	0.035	0.054	0.023	0.004	-0.021	0.000	-0.019
15(12)	-0.036	-0.059	-0.016	0.036	-0.047	0.007	-0.021	0.091	0.015
16(7)	0.023	-0.004	-0.002	-0.039	0.041	0.034	-0.023	-0.039	0.041
17(14)	-0.119	-0.065	0.052	0.010	0.074	0.062	-0.010	-0.035	0.049
18(9)	-0.009	0.009	0.009	0.024	-0.039	0.027	-0.020	-0.012	0.028
19(8)	0.014	0.054	0.008	0.000	0.077	0.033	0.078	0.000	0.010

表 11.5 初老期痴呆の例における

全般因子係数										
	1(10)	2(11)	3(17)	4(19)	5(18)	6(16)	7(3)	8(5)	9(1)	10(2)
	0.505	0.573	0.453	0.371	0.290	0.291	0.523	0.614	0.328	0.423
中間の残差相関行列(略)										

けたとすると、全般因子係数は表 11.5 のように得られる。

さらに、上の第 IV 群を 2 群に分けて新たに第 IV 群(第 15, 14, 9 番めの特性)と第 V 群(第 13, 12, 7, 8 番めの特性)として、全体を 5 個の群に分けたとすると表 11.6 のように得られる。

これらの表 11.4, 表 11.5, 表 11.6 の試行によって、観測特性の群分けが多少異なっても、全般因子係数の値にはそれほど大きな変化をきたさないことが知れる。このことは双因子解の修正(11.4 節)にいくらかの知識を与えよう。

これによる残差行列 (3群とした場合)

10(2)	11(4)	12(6)	13(15)	14(13)	15(12)	16(7)	17(14)	18(9)	19(8)
0.436	0.491	0.845	0.808	0.760	0.519	0.643	0.675	0.514	0.409

0.809									
0.318	0.758								
-0.016	-0.024	0.285							
0.002	-0.024	-0.187	0.346						
-0.079	-0.066	-0.223	-0.119	0.422					
0.019	0.066	-0.078	-0.034	0.115	0.730				
-0.008	-0.043	-0.106	-0.090	-0.106	-0.015	0.585			
-0.048	-0.041	-0.171	-0.029	-0.155	-0.054	-0.111	0.544		
0.025	0.001	-0.084	0.000	-0.038	0.071	-0.009	-0.013	0.735	
0.002	-0.020	-0.021	-0.018	-0.027	0.065	0.105	-0.076	-0.025	0.832

全般因子係数 (4群とした場合)

11(4)	12(6)	13(15)	14(13)	15(12)	16(7)	17(14)	18(9)	19(8)
0.472	0.766	0.765	0.688	0.516	0.613	0.623	0.503	0.409

11.3 部分因子の係数の推定

全般因子の係数が算出された後、部分因子の係数を求めることが残されている。この第1段階は、全般因子の寄与の分を取り除いた残りの相関行列を得ることである。このような全般因子の残差 (general-factor residuals) は

$$\hat{r}_{ii'} = r_{ii'} - a_i a_{i'}, \quad i, i' = 1, 2, \dots, p \quad (11.20)$$

で示される。この残差相関行列の典型は図 10.1 で示された形式のものとなる。

表 11.6 初老期痴呆の例における全般因子係数と

全般因子係数									
	1(10)	2(11)	3(17)	4(19)	5(18)	6(16)	7(3)	8(5)	9(1)
	0.503	0.574	0.461	0.380	0.293	0.300	0.522	0.618	0.336
中間の残差相関係数									
1(10)	0.746								
2(11)	0.443	0.669							
3(17)	0.232	0.264	0.786						
4(19)	0.202	0.168	0.403	0.855					
5(18)	0.235	0.244	0.351	0.263	0.913				
6(16)	0.224	0.285	0.332	0.161	0.420	0.909			
7(3)	0.047	0.030	-0.010	0.032	-0.023	-0.009	0.726		
8(5)	0.048	-0.003	-0.030	-0.024	-0.045	-0.109	0.241	0.617	
9(1)	0.025	0.007	-0.034	-0.040	-0.077	-0.060	0.367	0.184	0.886
10(2)	-0.043	-0.049	-0.012	-0.008	0.021	-0.029	-0.010	0.057	0.007
11(4)	-0.076	-0.047	-0.031	-0.033	0.014	-0.034	0.068	0.071	-0.006
12(6)	0.030	0.063	0.037	-0.018	0.100	0.165	-0.056	-0.025	0.046
13(15)	-0.048	-0.044	0.001	-0.010	0.006	0.079	0.004	0.023	0.054
14(14)	-0.066	-0.020	0.070	0.031	0.065	0.046	0.031	-0.005	0.056
15(9)	0.001	0.010	-0.002	0.018	-0.063	-0.001	-0.018	-0.024	0.014
16(13)	0.034	0.043	0.053	0.075	0.012	-0.015	0.022	0.030	-0.012
17(12)	-0.026	-0.060	-0.030	0.028	-0.072	-0.023	-0.021	0.075	-0.000
18(7)	0.057	0.018	-0.000	-0.032	0.023	0.008	-0.000	-0.031	0.037
19(8)	0.027	0.059	0.002	-0.002	0.060	0.011	-0.073	-0.004	-0.018

さて、このように全般因子を除いた残りの因子空間で、 p 種の観測特性は単一因子パターンで表現される。すなわち、もともと双因子パターンは全般因子を添加した単一因子パターンとも考える。観測特性の各群について、式(11.20)は階数(ランク)が1の行列で示され、各群はそれぞれただ一つの共通因子を測るものとなる。そして、部分因子の係数を求める計算は10.1節の総和法または10.2節の三価対法のいずれでも可能である。しかし、各群の観測特性の数は比較的小さいのが通常なので、三価対法のほうがより良い方法といえよう。

三価対法を適用することによって、任意の群 G_k における観測特性 i の部分因子の係数 $a_{i'k'}$ は

$$\hat{a}_{ik} = \sqrt{\frac{2}{(p_k-1)(p_k-2)}} \sum_{i', i''} (\hat{r}_{ii'} \hat{r}_{ii''} / \hat{r}_{i'i''})$$

$$i', i'' \in G_k, \quad i' < i'', \quad i', i'' \neq i, \quad k = 1, 2, \dots, q \quad (11.21)$$

これによる残差行列 (5 群とした場合)

10(2)	11(4)	12(6)	13(15)	14(14)	15(9)	16(13)	17(12)	18(7)	19(8)
0.427	0.476	0.754	0.753	0.596	0.512	0.677	0.520	0.602	0.400

0.816									
0.328	0.772								
0.029	0.031	0.430							
0.032	0.013	-0.072	0.432						
-0.009	0.005	-0.050	0.066	0.644					
0.030	0.010	-0.035	0.031	0.028	0.737				
-0.038	-0.016	-0.092	-0.015	-0.046	0.005	0.540			
0.023	0.073	-0.032	-0.007	-0.014	0.072	0.157	0.728		
0.014	-0.014	-0.016	-0.023	-0.036	0.013	-0.025	0.005	0.636	
0.009	-0.010	0.022	0.011	-0.038	-0.020	0.012	0.069	0.127	0.839

で示される。ここに p_k は群 G_k に含まれている観測特性の数である。もちろん、この公式は、全般因子の残差行列を観測された相関行列とし、 p_k をいま考察中の観測特性の総数と考えたときに、式 (10.18) と全く一致する。

このようにして、式 (11.2) で定義される双因子パターンは公式 (11.17) と (11.21) によって完全に解けるわけである。

すべての係数が算出されて後、最終的な残差相関行列 (final residuals) が得られる。これにはすべての因子の寄与を除いて

$$\begin{aligned} \bar{r}_{ii'} &= r_{ii'} - \rho_{ii'} = r_{ii'} - a_i a_{i'} - a_{ik} a_{i'k} = \hat{r}_{ii'} - a_{ik} a_{i'k} \\ & \quad i, i' \in G_k \end{aligned} \tag{11.22}$$

で示される。

もし、観測特性 i と i' が同じ群に属していなければ

$$\bar{r}_{ii'} = \hat{r}_{ii'}, \quad i \in G_k, \quad i' \in G_{k'}, \quad k \neq k' \tag{11.23}$$

表 11.7 さきの表 11.4 による部分因子係数と

部分因子係数									
	1(10)	2(11)	3(17)	4(19)	5(18)	6(16)	7(3)	8(5)	9(1)
	0.512	0.559	0.664	0.449	0.630	0.584			
							2.453	0.375	0.561
最終の残差相関係数									
1(10)	0.462								
2(11)	0.145	0.357							
3(17)	-0.103	-0.091	0.369						
4(19)	-0.028	-0.074	0.120	0.663					
5(18)	-0.069	-0.081	-0.039	0.001	0.541				
6(16)	-0.050	-0.007	-0.022	-0.075	0.080	0.599			
7(3)	0.036	0.029	0.002	0.038	0.000	0.021	-5.296		
8(5)	0.050	0.012	-0.002	-0.005	-0.009	-0.066	-0.666	0.509	
9(1)	0.033	0.024	-0.013	-0.025	-0.054	-0.033	-0.996	0.000	0.589
10(2)	-0.056	-0.053	-0.034	-0.006	0.039	-0.006	-0.015	0.064	0.016
11(4)	-0.093	-0.055	-0.025	-0.032	0.032	-0.009	0.060	0.076	0.002
12(6)	-0.032	0.011	0.018	-0.041	0.113	0.187	-0.105	-0.058	0.039
13(15)	-0.092	-0.075	-0.002	-0.020	0.028	0.110	-0.025	0.012	0.059
14(13)	-0.022	-0.003	0.035	0.054	0.023	0.004	-0.021	0.000	-0.019
15(12)	-0.036	-0.059	-0.016	0.036	-0.047	0.007	-0.021	0.091	0.015
16(7)	0.023	-0.004	-0.002	-0.039	0.041	0.034	-0.023	-0.039	0.041
17(14)	-0.119	-0.065	0.052	0.010	0.074	0.062	-0.010	-0.035	0.049
18(9)	-0.009	0.009	0.009	0.024	-0.039	0.027	-0.020	-0.012	0.028
19(8)	0.014	0.054	0.008	-0.000	0.077	0.033	-0.078	0.000	-0.010

で示される。すなわち、全般因子による残差がそのまま最終的な残差行列となり、これらの要素の値はゼロと有意に異なってはいけないのである。

他方、一つの群内の観測特性についての全般因子の残差は、観測特性の間に全般因子以外に部分因子を有しているという仮定を保証するために有意でなければならない。

もし、異なった群の観測特性間の残差相関が有意な値を示すなら、もっと簡単な形の双因子解でやり直さなければならない。また、同一群内の観測特性間の残差相関がほとんどゼロに近いような場合にも、同様にやり直さなければならない。この修正については、次節で記述する。

ここで、前節に続き初老期痴呆の分析によって、部分因子係数および最終的な残差行列の数値例および計算にあたっての考え方を示そう。

まず、19種類の観測特性を3群に分けた表 11.4 に基づいて、部分因子係数

最終の残差行列 (3 群とした場合)

10(2)	11(4)	12(6)	13(15)	14(13)	15(12)	16(7)	17(14)	18(9)	19(8)
0.744	0.274	0.612	0.183	0.417	0.112	0.202	0.168	0.051	0.125
0.255									
0.114	0.682								
-0.472	-0.192	-0.090							
-0.134	-0.074	-0.299	0.312						
-0.390	-0.181	-0.479	-0.196	0.247					
-0.064	0.035	-0.148	-0.055	0.068	0.717				
-0.159	-0.099	-0.230	-0.127	-0.190	-0.038	0.544			
-0.173	-0.088	-0.274	-0.060	-0.225	-0.073	-0.145	0.516		
-0.012	-0.012	-0.115	-0.008	-0.059	0.065	-0.019	-0.022	0.732	
-0.091	-0.054	-0.098	-0.041	-0.079	0.051	0.079	-0.097	-0.032	0.816

を式 (11.21) により、また最終的な残差行列を式 (11.22) により、そのまま計算した結果を表 11.7 に示そう。計算の手順はわかりやすいから読者は各自の計算結果と比べるとよい。

この結果からすぐわかることは、第 II 群の中で部分因子係数が 1 をこえている特性があること、また残差行列の要素にはゼロと有意に異なる値を示すものが多いということである。このような場合には、通常、観測特性の群分けの不適切によると考えられるのであるが、ときには観測特性が双因子パターンに適合しないためであることもある。そして、次節に記述する双因子解の修正 (adjustments) が必要になる。

上の計算例では、とくに第 III 群の残差行列が良くないので、この群の構成に難点があると考えられる。この例で行なわれた種々の検討を通じて、全般因子の抽出後もまた部分因子の抽出後も、残差行列の対角線要素すなわち誤差分

散はかなり大きいことが知れる。また、全般因子の抽出後の残差行列の非対角要素が比較的整然とするのは、 B 係数の方法による第 III 群をさらに 3 分類した表 11.4 に基づく場合で、これを用いて双因子解の修正を行なうことが妥当と考えられる。

11.4 双因子解の修正

もともと双因子解法は、観測特性について式 (11.2) で示された数学的模型を仮定して、この模型式に従って解析するのであるから、観測特性とその模型式とのあてはまりの良さ (goodness of fit) が検討されねばならない。しかし、まだ厳密な統計的検定法はないので、共通因子の係数や残差相関行列については近似的な標本誤差論を適用することになる。

さて、あてはまりの良さの検討の中で最も重要なことは観測特性の群分けに関する妥当性についてである。もちろん、これは先験的な知識に基づく洞察力に強く依存するが、また一方 B 係数法などの結果で客観的な考慮のもとに分類する場合も多い。そして、このような際の妥当性はもちろん観測データによって実証されねばならず、主として全般因子や部分因子の係数を求める過程や、相関行列から推定した因子の寄与を取り除いた残差相関行列を検討することにより行なわれる。

双因子解にあたって、与えられた相関行列の中で特定の観測特性に負の相関係数が多く出現していれば、その特性の測度の大小が逆順になるように変えて正の相関係数ができるだけ多く並ぶように、初めの相関行列を見直しておかねばならない。このことはさきの数値例の際に記述したが、双因子解の構造模型として重要である。

また、初めの相関行列で若干個の有意でない負の要素があれば、これをゼロに置き換えて全般因子の係数を推定してみることも構造模型の実質科学的な観点からは合理的であり、双因子解の吟味に役だつことであろう。また、同様の配慮として、 $+1$ をこえるすべての三価対は省いて分析せねばならない。

もし、いくつかの観測特性が明確に一つの群を構成するにもかかわらず、その群が全般因子を抽出した後の残差行列で、行にも列にも全く有意な要素がないような場合には、その群の観測特性は部分因子の係数の推定計算から除外す

る。そして、それらの観測特性は部分因子の測定には利用せず、ただ全般因子を測定するだけに用いる。

他方、もし全般因子と部分因子による寄与を除いた最終の残差行列で、なおいくつかの要素がゼロと異なる有意な値をもっていれば、さらに因子抽出の必要性を考えねばならない。このような残差を示す観測特性はまだ一つの因子をもつわけで、観測特性全体の因子パターンにそのような関連の共通因子を付加し修正を行なう。そして、もしそれらの観測特性に一つの新しい共通因子が見いだされれば、さきにそれらの観測特性から抽出した部分因子の係数を修正する必要がある。このことは観測特性の構造が部分因子をただ一つだけ有するという双因子解法の仮定に関する妥当な修正である。

観測特性の群分けが合理的に行なわれていると、全般因子の寄与を除いた残差行列は、各群内の相関行列部分を除いて、そのほとんどがゼロに近くなっているはずである。この判定には、残差行列の要素を r とすると、表 11.11 によって

$$|r| \leq 2\sigma_r \quad (11.24)$$

なら r はゼロと有意差なしと結論する。しかし、もし不等号が逆向きなら、 r はゼロと有意な差を示して、さらに群分けを検討せねばならない。また、部分因子の係数を算出する際に、式 (11.21) の値が虚数となる不合理な場合も、もちろん観測特性の群分けを再考する必要がある。

このように最も重要なことは、観測特性に関する双因子解に基づいて新しい構造模型を計画し、改造していくことである。そして、この修正ができる因子の係数を求める計算は比較的簡単である。

まず、二つの観測特性が一つの共通因子以上は含まないような三価対だけを選び、適切な三価対について式 (11.17) または (11.21) の公式によって因子係数を計算する。もし、観測特性間で重複が非常に大きく、適切な三価対が選べ出せないときには、共有性に基づいて直接的に別の構造模型を考えねばならなくなる。

双因子解法における観測特性の構造模型の修正は、たぶんに視察的な思考に基づき行なわれるが、その変更は近似的な標本分布の公式を適用して、非常に簡便な方法で検討できる。すなわち、因子係数や残差行列の要素に関する有意

性の検定は、表 11.11 や表 11.12 によって容易に行なえる。そして、1 観測特性またはいくつかの観測特性に関する残差だけでなく、全体的な配列のうえて因子パターンの修正に手がかりを与える。

たとえば、残差行列で一つだけ有意な大きな要素があり他の要素はすべて有意でない残差であるときは、ただ二つの観測特性だけに共通した因子(ダブルレット, doublet) の存在が仮定される。ここにダブルレットとは共通因子のうちで二つの観測特性だけに含まれる部分因子をいう。

一般に任意の二つの観測特性間にはほとんど無限の可能性で単一な共通因子が考えられ、因子係数を一意的に決めるには少なくとも 3 観測特性を必要とする。二つの観測特性では単に潜在的な因子を示すだけで、もしその因子をいくぶんでも規制する別の観測特性が付加されていると、潜在因子を明確に把握されると考えられている。したがって、ダブルレット因子が数多く出現するのは、テスト・メーカの立場からもテスト・ユーザの立場からも、分析結果の解釈を考えるとき、その信頼性のうえてあまり好ましいことではない。

観測特性に対するダブルレットの係数は、次のような異なった 2 とおりの考え方によって算出される。

すなわち、第 1 は残差の値をそっくり 2 観測特性に帰してしまう考え方、第 2 はいくらかの標本誤差を考慮して残差から標本誤差だけ除いた残りを 2 観測特性の間で分けてしまう考え方の 2 様の方法が考えられている。

いま、第 l 番めのダブルレット因子を D_l と書き、この因子を含む二つの観測特性を第 j と第 k 特性、各特性のこの因子に関する係数を d_{jl} , d_{kl} とする。さて、因子係数を求める 2 とおりの方法は次のとおりである。

前者の考え方による方法では

$$d_{ji} = d_{kl} = \sqrt{\hat{r}_{kj}} \quad (11.25)$$

与えられ、ここに \hat{r}_{kj} は式 (11.20) で示されている。

また、後者の考え方によると

$$d_{ji} = d_{kl} = \sqrt{\hat{r}_{kj} - \sigma_{\hat{r}}} \quad (11.26)$$

与えられ、ここに \hat{r} は初めに与えられた相関行列のすべての非対角要素に関する平均値を示し、 $\sigma_{\hat{r}}$ は \hat{r} によって表 11.11 を利用して読み取られる。

表 11.8 さきの表 11.6 の第 I 群と第 II 群による部分因子係数と最終の残差行列

部分因子係数		1(10)	2(11)	3(17)	4(19)	5(18)	6(16)	7(3)	8(5)	9(1)
		0.520	0.550	0.652	0.439	0.604	0.543			
								1.674	0.347	0.529
最終の残差相関係数										
1(10)		0.474								
2(11)		0.156	0.365							
3(17)		-0.107	-0.095	0.360						
4(19)		-0.026	-0.073	0.116	0.662					
5(18)		-0.079	-0.089	-0.043	-0.002	0.547				
6(16)		-0.058	-0.014	-0.022	-0.077	0.091	0.613			
7(3)		0.047	0.030	-0.010	0.032	-0.023	-0.009	-2.078		
8(5)		0.048	-0.003	-0.030	-0.024	-0.045	-0.108	-0.341	0.496	
9(1)		0.025	0.007	-0.034	-0.040	-0.076	-0.060	-0.519	0.000	0.605

表 11.9 双因子解の修正による因子の係数行列 (初老期痴呆の例)

観測特性	全般因子	部 分 因 子					
	F_0	F_1	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1(10)	0.503	0.520	—	—	—	—	0.308
2(11)	0.574	0.550	—	—	—	—	0.308
3(17)	0.461	0.652	—	—	—	—	—
4(19)	0.380	0.439	—	—	—	—	—
5(18)	0.293	0.604	—	—	—	—	—
6(16)	0.300	0.543	—	—	—	—	—
7(3)	0.522	—	—	—	0.424	0.553	—
8(5)	0.618	—	—	—	0.424	—	—
9(1)	0.336	—	—	—	—	0.553	—
10(2)	0.427	—	0.517	—	—	—	—
11(4)	0.476	—	0.517	—	—	—	—
12(6)	0.754	—	—	—	—	—	—
13(15)	0.753	—	—	—	—	—	—
14(14)	0.596	—	—	—	—	—	—
15(9)	0.512	—	—	—	—	—	—
16(13)	0.677	—	—	0.310	—	—	—
17(12)	0.520	—	—	0.310	—	—	—
18(7)	0.602	—	—	—	—	—	—
19(8)	0.400	—	—	—	—	—	—

表 11.10 表 11.9 に基づく

最終の残差相関係数									
1(10)	0.380								
2(11)	0.061	0.271							
3(17)	-0.107	-0.095	0.360						
4(19)	-0.026	-0.074	0.116	0.661					
5(18)	-0.080	-0.089	-0.043	-0.002	0.547				
6(16)	-0.058	-0.014	-0.022	-0.077	0.091	0.613			
7(3)	0.047	0.030	-0.010	0.032	-0.023	-0.009	0.239		
8(5)	0.048	-0.003	-0.030	-0.024	-0.045	-0.109	0.020	0.436	
9(1)	0.025	0.007	-0.034	-0.040	-0.077	-0.060	0.060	0.183	0.579
10(2)	-0.043	-0.049	-0.012	-0.008	0.021	-0.029	-0.010	0.057	0.007
11(4)	-0.076	-0.047	-0.031	-0.033	0.014	-0.034	0.068	0.071	-0.006
12(6)	0.030	0.063	0.037	-0.018	0.100	0.165	-0.056	-0.025	0.046
13(15)	-0.048	-0.044	0.001	-0.010	0.006	0.079	0.004	0.023	0.054
14(14)	-0.066	-0.020	0.070	0.031	0.065	0.046	0.031	-0.005	0.056
15(9)	0.001	0.010	-0.002	0.018	-0.063	-0.001	-0.018	-0.024	0.014
16(13)	0.034	0.043	0.053	0.075	0.012	-0.015	0.022	0.030	-0.012
17(12)	-0.026	-0.060	-0.030	0.028	-0.072	-0.023	-0.021	0.075	-0.000
18(7)	0.057	0.018	-0.000	-0.032	0.023	0.008	-0.000	-0.031	0.037
19(8)	0.027	0.059	0.002	-0.002	0.060	0.011	-0.073	-0.004	-0.018

双因子解における構造模型の修正 (adjustment) は、おもに全般因子が抽出された後の解析で注意をはらうことになる。ここで観測特性の群分けの変更やいくつかの観測特性による部分因子の発見にもとづく部分的な修正は、通常全般因子係数にそれほど大きな変化をきたさない (表 11.4, 11.5, 11.6 の試行例を参照)。すなわち、それぞれの全般因子係数は多数の相関係数に基づいて算出されるので、因子パターンのいくらかの変更はそれほど全般因子係数に影響を示さない。しかし、部分因子係数の計算で異常に調子はずれの三価対などがあれば大きな影響を示すので、1 をこえた三価対は使用せず、また全般因子抽出後の有意でない残差要素による三価対も使用すべきでない。

部分因子を測定する観測特性の確認にも、 B 係数の方法が適用できる。すなわち、群分けされた観測特性のうちで、ある疑わしい観測特性の除去を証明する目的で、全般因子の残差行列に B 係数の方法を用いる。このときには疑わしいものを含めた 2, 3 の観測特性の組み合わせについて B 係数の値を算出し、その大きさによって従属の度合いを視察することになる。この要領は 11.1

最終の残差行列

0.549										
0.061	0.505									
0.029	0.031	0.430								
0.032	0.013	-0.072	0.432							
-0.009	0.005	-0.050	0.066	0.644						
0.030	0.010	-0.035	0.031	0.028	0.737					
-0.038	-0.016	-0.092	-0.015	-0.046	0.005	0.444				
0.023	0.073	-0.032	-0.007	-0.014	0.072	0.061	0.632			
0.014	-0.014	-0.016	-0.023	-0.036	0.013	-0.025	0.005	0.636		
0.009	-0.010	0.022	0.011	-0.038	-0.020	0.012	0.069	0.127	0.839	

節に記述したとおりである。

これまで、主として、残差行列における若干個の観測特性から、より高度の複雑度 (complexity) を必要とする方向への双因子解法の修正を述べてきた。しかし、一つの観測特性についてある因子に関する係数がゼロと有意差のないときには、その観測特性の複雑度を減じうるような逆の場合もある。このように、全般因子の係数が標準誤差範囲内においてさらに標本数を増すと1,2個の観測特性の全般因子係数がゼロとなる場合がある。このとき、これらの観測特性は全般因子を測定するために除外されるか、または修正された双因子パターンの中では全般因子を有しないようになるはずである。一般に、双因子パターンでの係数をゼロとみなすには、そこで算出された因子係数を表11.12で示される係数の標準誤差と比較し、ゼロとの有意差検定によって検証できる。

このように双因子解を得ようとするには、まず単一因子解法や二因子解法などを行なってみるのが通常で、次いでこの双因子解法の過程の中で双因子パターンの修正をも含め、最終的な因子パターンが決定されてくる。

表 11.11 因子の影響効果を除去した

標本数 n \ ρ	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
20	0.343	0.336	0.327	0.317	0.305	0.292
30	0.280	0.274	0.267	0.258	0.249	0.238
40	0.243	0.237	0.231	0.224	0.215	0.206
50	0.217	0.212	0.207	0.200	0.193	0.184
60	0.198	0.194	0.189	0.183	0.176	0.168
70	0.183	0.180	0.175	0.169	0.163	0.156
80	0.172	0.168	0.163	0.158	0.152	0.146
90	0.162	0.158	0.154	0.149	0.144	0.137
100	0.154	0.150	0.146	0.142	0.136	0.130
110	0.146	0.143	0.139	0.135	0.130	0.124
120	0.140	0.137	0.133	0.129	0.124	0.119
130	0.135	0.132	0.128	0.124	0.120	0.114
140	0.130	0.127	0.124	0.120	0.115	0.110
150	0.125	0.123	0.119	0.116	0.116	0.106
160	0.121	0.119	0.116	0.112	0.108	0.103
170	0.118	0.115	0.112	0.109	0.105	0.100
180	0.114	0.112	0.109	0.106	0.102	0.097
190	0.111	0.109	0.106	0.103	0.099	0.095
200	0.109	0.106	0.103	0.100	0.096	0.092
250	0.097	0.095	0.092	0.090	0.086	0.082
300	0.089	0.087	0.084	0.082	0.079	0.075
350	0.082	0.080	0.078	0.076	0.073	0.070
400	0.077	0.075	0.073	0.071	0.068	0.065
450	0.072	0.071	0.069	0.067	0.064	0.061
500	0.069	0.067	0.065	0.063	0.061	0.058

注. 算出された残差相関係数 r を近似的に母集団の値 ρ とみなして, 上表により σ_r を見いだす。

$$\sigma_r = (1-\rho)\sqrt{5+8\rho+2\rho^2/2n}$$

そして, 新しく修正されたパターンについては, その後の追跡調査において B 係数の方法や有意性の検定や, さらに全般因子による残差行列の視察などで, そのたびごとに検証されるのである。

ここで, 双因子解の修正の数値例を示そう。前節の末尾には表 11.6 に基づいて, すでに双因子解の修正を行なう必要性を記述した。

さて, 表 11.6 の残差行列でまず注意すべきことは, ゼロと有意な差のある非対角線要素の存在である。すなわち, 観測特性の第 III, IV, V 群内の各小行列の中には有意な値の要素が非常に少ないことである。たとえば, 第 V 群に属

残差相関係数の標準偏差

0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
0.277	0.261	0.244	0.225	0.205	0.184	0.161	0.138
0.226	0.213	0.199	0.184	0.167	0.150	0.132	0.112
0.196	0.185	0.172	0.159	0.145	0.130	0.114	0.097
0.175	0.165	0.154	0.142	0.130	0.116	0.102	0.087
0.160	0.151	0.141	0.130	0.118	0.106	0.093	0.079
0.148	0.139	0.130	0.120	0.110	0.098	0.086	0.074
0.138	0.130	0.122	0.113	0.103	0.092	0.081	0.069
0.131	0.123	0.115	0.106	0.097	0.087	0.076	0.065
0.124	0.117	0.109	0.101	0.092	0.082	0.072	0.062
0.118	0.111	0.104	0.096	0.087	0.078	0.069	0.059
0.113	0.107	0.099	0.092	0.084	0.075	0.066	0.056
0.109	0.102	0.096	0.088	0.080	0.072	0.063	0.054
0.105	0.099	0.092	0.085	0.078	0.070	0.061	0.052
0.101	0.095	0.089	0.082	0.075	0.067	0.059	0.050
0.098	0.092	0.086	0.080	0.073	0.065	0.057	0.049
0.095	0.090	0.084	0.077	0.070	0.063	0.055	0.047
0.092	0.087	0.081	0.075	0.068	0.061	0.054	0.046
0.090	0.085	0.079	0.073	0.067	0.060	0.052	0.045
0.088	0.083	0.077	0.071	0.065	0.058	0.051	0.044
0.078	0.074	0.069	0.064	0.058	0.052	0.046	0.039
0.071	0.067	0.063	0.058	0.053	0.047	0.042	0.036
0.066	0.062	0.058	0.054	0.049	0.044	0.039	0.033
0.062	0.058	0.054	0.050	0.046	0.041	0.036	0.031
0.058	0.055	0.051	0.047	0.043	0.039	0.034	0.029
0.055	0.052	0.049	0.045	0.041	0.037	0.032	0.028

す。この r の標準偏差は母数 ρ に関係し次式で示される。

している第 18 と第 19 特性間の残差相関係数 0.127 について考えよう。この初老期痴呆の標本数は 500 症例であるから、表 11.11 によって $\rho=0.15$ のとき $\sigma_r=0.067$ であることが知れる。したがって、 $2\sigma_r=0.134$ となり、上の 0.127 はゼロと有意差のある値と認められない。

このようにして、第 III 群では 0.328, 第 V 群では 0.157 だけが、ダブルット因子を示す要素とされ、第 6, 15, 14, 9, 7, 8 の観測特性はただ全般因子だけを測定する項目と考えられ、部分因子係数の推定からは除かれる。

ここで 0.328 について第 2 と第 4 観測特性のダブルット因子係数を算出して

表 11.12 推定された因子

ρ	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26
20	0.587	0.530	0.485	0.448	0.417	0.390	0.366	0.345	0.326
30	0.479	0.433	0.396	0.366	0.340	0.318	0.299	0.282	0.266
40	0.415	0.375	0.343	0.317	0.295	0.276	0.259	0.244	0.231
50	0.371	0.335	0.307	0.283	0.264	0.247	0.232	0.218	0.206
60	0.339	0.306	0.280	0.259	0.241	0.225	0.211	0.199	0.188
70	0.314	0.283	0.259	0.239	0.223	0.208	0.196	0.184	0.174
80	0.293	0.265	0.242	0.224	0.208	0.195	0.183	0.173	0.163
90	0.277	0.250	0.229	0.211	0.196	0.184	0.173	0.163	0.154
100	0.262	0.237	0.217	0.200	0.188	0.174	0.164	0.154	0.146
110	0.250	0.226	0.207	0.191	0.128	0.166	0.156	0.147	0.139
120	0.240	0.216	0.198	0.183	0.170	0.159	0.150	0.141	0.133
130	0.230	0.208	0.190	0.176	0.163	0.153	0.144	0.135	0.128
140	0.222	0.200	0.183	0.169	0.158	0.147	0.138	0.130	0.123
150	0.214	0.193	0.177	0.164	0.152	0.142	0.134	0.126	0.119
160	0.207	0.187	0.171	0.158	0.147	0.138	0.129	0.122	0.115
170	0.201	0.182	0.166	0.154	0.143	0.134	0.126	0.118	0.112
180	0.196	0.177	0.162	0.149	0.139	0.130	0.122	0.115	0.109
190	0.190	0.172	0.157	0.145	0.135	0.126	0.119	0.112	0.106
200	0.186	0.168	0.153	0.142	0.132	0.123	0.116	0.109	0.103
250	0.166	0.150	0.137	0.127	0.118	0.110	0.104	0.098	0.092
300	0.151	0.137	0.125	0.116	0.108	0.101	0.095	0.089	0.084
350	0.140	0.127	0.116	0.107	0.100	0.093	0.088	0.083	0.078
400	0.131	0.118	0.108	0.100	0.093	0.087	0.082	0.077	0.073
450	0.124	0.112	0.102	0.094	0.088	0.082	0.077	0.073	0.069
500	0.117	0.106	0.097	0.090	0.083	0.078	0.073	0.069	0.065

注. 算出された残差相関係数 r を近似的に ρ とみなして, 上表により σ_a を見いだす.
推定された因子係数 a の標準偏差は, 母数 ρ に関係し, 次式で示される.

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \sqrt{(3/\rho - 2 - 5\rho + 4\rho^2)/n}$$

みよう。この計算は式 (11.26) によって行なわれるが, 表 11.2 (初老期痴呆の相関行列) における非対角線要素の平均値 \bar{r} は 0.295 と得られる。したがって, 表 11.11 により $n=500$, $\rho=0.30$ に対応する標準偏差 $\sigma_{\bar{r}}=0.061$ を読み取る。ゆえに, この際のダブルレット因子係数 $d_{1,2}$, $d_{1,4}$ は次式で得られる。

$$d_{1,2} = d_{1,4} = \sqrt{0.328 - 0.061} \doteq 0.517$$

同様に

$$d_{2,12} = d_{2,13} = \sqrt{0.157 - 0.061} \doteq 0.310$$

係数の標準偏差

0.28	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75
0.309	0.293	0.258	0.227	0.201	0.177	0.155	0.134	0.115	0.097	0.079
0.252	0.239	0.210	0.186	0.164	0.144	0.126	0.110	0.094	0.079	0.065
0.218	0.207	0.182	0.161	0.142	0.125	0.109	0.095	0.081	0.068	0.056
0.195	0.185	0.163	0.144	0.127	0.112	0.098	0.085	0.073	0.061	0.050
0.178	0.169	0.149	0.131	0.116	0.102	0.089	0.077	0.066	0.056	0.046
0.165	0.157	0.138	0.122	0.107	0.094	0.083	0.072	0.061	0.052	0.042
0.154	0.146	0.129	0.114	0.100	0.088	0.077	0.067	0.057	0.048	0.040
0.146	0.138	0.121	0.107	0.095	0.083	0.073	0.063	0.054	0.046	0.037
0.138	0.131	0.115	0.102	0.090	0.079	0.069	0.060	0.051	0.043	0.035
0.132	0.125	0.110	0.097	0.086	0.075	0.066	0.057	0.049	0.041	0.034
0.126	0.120	0.105	0.093	0.082	0.072	0.063	0.055	0.047	0.039	0.032
0.121	0.115	0.101	0.089	0.079	0.069	0.061	0.053	0.045	0.038	0.031
0.117	0.111	0.097	0.086	0.076	0.067	0.058	0.051	0.043	0.036	0.030
0.113	0.107	0.094	0.083	0.073	0.065	0.056	0.049	0.042	0.035	0.029
0.109	0.104	0.091	0.080	0.071	0.062	0.055	0.047	0.041	0.034	0.028
0.106	0.100	0.088	0.078	0.069	0.061	0.053	0.046	0.039	0.033	0.027
0.103	0.098	0.086	0.076	0.067	0.059	0.052	0.045	0.038	0.032	0.026
0.100	0.095	0.084	0.074	0.065	0.057	0.050	0.044	0.037	0.031	0.026
0.098	0.093	0.081	0.072	0.064	0.056	0.049	0.042	0.036	0.031	0.025
0.087	0.083	0.073	0.064	0.057	0.050	0.044	0.038	0.032	0.027	0.022
0.080	0.076	0.067	0.059	0.052	0.046	0.040	0.035	0.030	0.025	0.020
0.074	0.070	0.062	0.054	0.048	0.042	0.037	0.032	0.027	0.023	0.019
0.069	0.065	0.058	0.051	0.045	0.040	0.035	0.030	0.026	0.022	0.018
0.065	0.062	0.054	0.048	0.042	0.037	0.033	0.028	0.024	0.020	0.017
0.062	0.059	0.052	0.045	0.040	0.035	0.031	0.027	0.023	0.019	0.016

さて表 11.6 における第 I 群と第 II 群の残差行列によって、部分因子係数と最終的な残差行列を求めると表 11.8 のような解を得る。

この解を見ると、第 II 群に属する因子係数とその結果の残差行列が合理的でない。これらの観測特性は医学的に 1 個の部分因子で説明されると考えられていたが、観測誤差が大きかったために表 11.8 のような結果になったと考えられる。ここでは第 3 と第 5 観測特性および第 3 と第 1 観測特性間のダブルット因子として処理し、因子係数は次のようになる。

$$d_{3,3} = d_{3,5} \doteq 0.424, \quad d_{4,8} = d_{4,1} \doteq 0.553$$

また、最終の残差行列で第 10 と第 11 観測特性間でもダブルット因子が考えられ、ここでは一応の参考に算出して置く。

$$d_{5,10} = d_{5,11} \doteq 0.308$$

これまでの各因子の係数行列を表 11.9 でまとめて示している。またこれに基づく最終的な残差行列は、表 11.10 に示している。

この症例解析は、第 5 章のオブリマックス解とバリマックス解の数値例として、すでに多因子解法で有用な結果と解釈が得られている。本節の結果をバリマックス解と比較すると若干の似た成績を示しているのもおもしろい。

しかし、結論として、この症例を双因子解法の模型にあてはめて解くのは適切でないようである。ここでは、双因子解法とその修正法についての考え方と計算手順を知るうえに役だててみたにすぎない。

[補注] 残差相関行列および推定された因子係数の標準誤差 因子分析法で出てくる種々の統計量の標本分布は、多くが心理学などの分野の実践的な考察によって急速に展開されてきたが、数理面での考究には非常に複雑なことが多い。しかし、四偏差の標本分布については 1924 年の Spearman と Holzinger の仕事がある。また、1933 年には Hotelling が成因分析法を整理した際に固有方程式の根の分布問題についてすでに論じている。その後、因子分析法が大きく展開した 1940 年代にはいり、まず 1940 年 Lawley が初めて因子分析法に最尤推定法を導入し、Lawley, Bartlett, Anderson などにより近代数理統計論のうえで次第に整理された。しかし、まだこの分野では統計数学として未解決の問題点が山積している。

本章では 1941 年 Holzinger と Harman の提唱した 1 因子の影響効果を除去した残りの残差相関行列と推定された因子係数の標準誤差の数表を引用した。これらはもちろん、精密標本論ではなく、かなりあらい大標本論の近似公式によって算出されたものである。この標準誤差の期待値は標本数 n と母相関係数 ρ によって示されるが、 ρ は未知なため標本相関係数を代用して値を示している。このようにして r/σ_r または a/σ_a の比をつくり、正規分布 $N(0, 1)$ に近似すると考えて種々の有意差の検定を正規確率または χ^2 検定によることをすすめている。

11.5 計算プログラム

11.5.1 B 係数法

p 個の観測特性に関する群分けを B 係数法によって行なう。この方法は、

観測特性間の相関行列の要素のなかで、いつも最高の値を示す二つの要素対から出発し、それらの要素に高い相関をもつ要素を加えるたびに B 係数を算出する。そして、この B 係数の値が急激な低減をみたときに、その際の群の構成をおえ、次の群の構成にとりかかる。インプットはコントロールによって相関行列からでも原始資料からでもよく、アウトプットでは群分けの構成過程に対応して係数値の変化も示される。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	R(I, J)	標本相関行列
NS	標本の大きさ(数)	NG	グループ番号
IC	相関係数をつくるか否かの制御	BB	B 係数
SIGD	B 係数の有意な低下を判定する基準値	NT(J)	同一群に属すと仮定する観測特性、のちに最終的にグループ分けされた観測特性
R(I, J)	標本相関行列	B	B 係数
X(I)	観測特性値ベクトル	I	グループ番号

```

C      GROUPING OF VARIABLES BY B-COEFFICIENT METHOD
C
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      NS --- NO. OF SAMPLES
C      IC --- 0, TO MAKE A CORRELATION MATRIX
C      --- 1, TO USE A CORRELATION MATRIX WE HAVE ALREADY
C      R --- A CORRELATION MATRIX
C      X --- INDIVIDUAL OBSERVATIONS
C
C      SIGD --- CRITERION RATIO TO GIVE SIGNIFICANT DROP OF B-COEFFICIENT
C
C
C      DIMENSION S(30),R(31,30),X(30),NT(30),NP(30)
C      COMMON S,R,X,NT,NP
C      1 READ (40,100) N,NS,IC,SIGD
C      NH=N+1
C      DO 2 I=1,N
C      NT(I)=I
C      2 NP(I)=0
C
C      WRITE (50,200)
C      IF(IC) 5,5,3
C      3 DO 4 J=1,N
C      4 READ (40,101) (R(I,J),J=1,N)
C      GO TO 11
C      5 N1=0
C      DO 6 I=1,N
C      S(I)=0.0
C      DO 6 J=1,N
C      6 R(I,J)=0.0

```

```

7 READ (40,101) (X(I),I=1,N)
  N1=N1+1
  DO 8 I=1,N
    S(I)=S(I)+X(I)
    DO 8 J=I,N
8 R(I,J)=R(I,J)+X(I)*X(J)
    IF(N1=NS) 7,9,9
9 AN=N1
  DO 10 I=1,N
    TMP1=AN*R(I,1)-S(I)**2

    DO 10 J=I,N
      TMP2=AN*R(I,J)-S(I)*S(J)
      TMP3=AN*R(J,J)-S(J)**2
      R(I,J)=TMP2/SQRT(TMP1*TMP3)
10 R(J,I)=R(I,J)
11 DO 12 I=1,N
12 WRITE (50,201) I,(R(I,J),J=1,N)
    WRITE (50,202)
    AN=N
    DO 13 I=1,N

      R(NH,I)=-1.0
      DO 13 J=1,N
13 R(NH,I)=R(NH,I)+R(J,I)
      NPT1=1
      NG=0
14 RMAX=-999.9
      NG=NG+1
      WRITE (50,203) NG
      DO 17 I=NPT1,N
        II=NT(I)

        DO 17 J=NPT1,N
          JJ=NT(J)
          IF(II-JJ) 15,17,15
15 IF(R(II,JJ)-RMAX) 17,17,16
16 RMAX=R(II,JJ)
          MI=II
          NI=I
          NJ=J
          MJ=JJ
17 CONTINUE

      K=NT(NPT1)
      NT(NPT1)=NT(NI)
      NT(NI)=K
      K=NT(NPT1+1)
      NT(NPT1+1)=NT(NJ)
      NT(NJ)=K
      AS=RMAX
      AT=R(NH,MI)+R(NH,MJ)-2.0*AS
      BB=200.0*(AN-2.0)*AS/AT
      CR=1.0E+20

      BMA=BB
      NPT2=NPT1+1
      WRITE (50,204) BB,(NT(J),J=NPT1,NPT2)
      ISEQ=0
      IG=3
      NPT4=NPT2
      IF(NPT2-N) 18,29,99
18 RMAX=-999.9
      K=NPT2+1
      DO 21 I=K,N

```

```

    I1=NT(I)
    U=0.0
    DO 19 J=NPT1,NPT4
    JJ=NT(J)
    U=U+R(JJ,I1)
19 CONTINUE
    IF(U-RMAX) 21,21,20
20 RMAX=U
    MI=I1
    NI=I

21 CONTINUE
    AL=RMAX
    AS=AS+AL
    AT=AT+R(NH,MI)-2.0*AL
    PP=IG
    B=200.0*(AN-PP)*AS/((PP-1.0)*AT)
    IF(BMA-B-CR) 23,23,22
22 ISEQ=ISEQ+1
    NPT3=K-ISEQ
    WRITE (50,204) B,(NT(J),J=NPT1,NPT3),MI

    AS=AS-AL
    AT=AT-R(NH,MI)+2.0*AL
    NPT5=NPT5+1
    IF(ISEQ-2) 24,25,99
23 WRITE (50,204) B,(NT(J),J=NPT1,NPT4),MI
    BMA=B
    ISEQ=0
    CR=SIGD*(BB-B)/(PP-1.0)
    NPT5=IG+NPT1-1
    IG=IG+1

    NPT4=NPT5
24 NPT2=NPT2+1
    K=NT(NPT5)
    NT(NPT5)=NT(NI)
    NT(NI)=K
    IF(NPT2-N) 18,26,99
25 NP(NG)=NPT2-NPT1
    NPT1=NPT2
    GO TO 14
26 IF(ISEQ-1) 27,28,99

27 NP(NG)=NPT2-NPT1+1
    GO TO 30
28 NG=NG+1
    WRITE (50,203) NG
    WRITE (50,205) NT(N)
    NP(NG)=1
    GO TO 30
29 NP(NG)=2
30 WRITE (50,206)
    L=0

    DO 31 I=1,NG
    L=L+NP(I)
    K=L-NP(I)+1
31 WRITE (50,207) I,(NT(J),J=K,L)
    GO TO 1
100 FORMAT (3I5,F5.1)
101 FORMAT (19F4.3)
200 FORMAT (///46H GROUPING OF VARIABLES BY B-COEFFICIENT METHOD///5X,
    118HCORRELATION MATRIX//)
201 FORMAT (/12,2X,10F7.4/(4X,10F7.4))

```

```

202 FORMAT (///4X,41H8-COEFFICIENT OR COEFFICIENT OF BELONGING//)
203 FORMAT (/5X,6HGROUP-,13)
204 FORMAT (5X,F9.2,5X,2013/(19X,2013))
205 FORMAT (19X,2013)
206 FORMAT (///4X,21HGROUPING OF VARIABLES/)
207 FORMAT (/5X,6HGROUP-,13,5X,2013/(19X,2013))
99 STOP
END
    
```

11.5.2 各因子の係数行列および残差相関行列の算出

Holzinger による双因子解を行ない、全般因子負荷ベクトルおよびこれを抽出した後の残差相関行列、さらに部分因子負荷ベクトルおよび最終的な残差相関行列を得ることができる。この双因子解のインプットには、あらかじめ部分因子に関連した観測特性の群分けを指示せねばならない。このため、たとえば前項または他の解析的方法を適用するか、または実質科学上の知識に基づいて群分けを考察しておかねばならない。

入 力 (input)		出 力 (output)	
NG	グループ数	I	観測特性の初期のコード番号
N	観測特性の数	I1	観測特性のコード変換後の番号
NX(I)	各グループの観測特性数	R(I, J)	コード変換後の標本相関行列、 のちに中間の残差相関行列、 さらに最終的な残差相関行列
NY(I)	初期に与えられた観測特性のコード番号	X(I)	全般因子係数ベクトル
GT(I, J)	標本相関行列	GT'(II, J)	部分因子係数

```

C      BI-FACTOR SOLUTION
C
C      GENERAL-FACTOR COEFFICIENTS, GROUP-FACTOR COEFFICIENTS
C      AND RESIDUAL CORRELATION MATRIX
C
C      NG --- NO. OF GROUPS
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      GT --- A CORRELATION MATRIX
C
C      NX --- NO. OF VARIABLES IN EACH GROUP
C      NY --- CODE NO. OF VARIABLE GIVEN AT INITIAL INPUT
C
C      DIMENSION R(30,30),NX(10),NY(30),GT(31,30),NYY(30),X(30),S(30)
C      COMMON R,GT
1 READ (40,100) NG,N
NH=N+1
NGL=NG-1
WRITE (50,200)
    
```

```

READ (40,100) (NX(I),I=1,NG)
READ (40,100) (NY(I),I=1,N)
DO 2 I=1,N
2 READ (40,101) (GT(I,J),J=1,N)
DO 3 I=1,N
DO 3 J=1,N
3 GT(J,I)=GT(I,J)
DO 4 I=1,N
I1=NY(I)
DO 4 J=1,N

J1=NY(J)
4 R(I,J)=GT(I,J1)
DO 5 I=1,NH
DO 5 J=1,NG
5 GT(I,J)=0.0
LE=0
DO 7 II=1,NG
LE=LE+NX(II)
LS=LE-NX(II)+1
DO 6 I=LS,LE

I1=NY(I)
6 WRITE (50,201) I,I1,(R(I,J),J=1,N)
7 WRITE (50,202)
LE=0
DO 8 I=1,NG
LE=LE+NX(I)
LS=LE-NX(I)+1
DO 8 J=LS,LE
8 NYY(J)=I
DO 10 I=1,N

DO 10 J=1,N
J1=NYY(J)
I1=NYY(I)
IF(I1=J1) 9,10,9
9 GT(I,J1)=GT(I,J1)+R(I,J)
GT(NH,J1)=GT(NH,J1)+R(I,J)
10 CONTINUE
S(1)=0.0
DO 11 I=1,NG
11 S(1)=S(1)+GT(NH,I)/2.0

DO 12 I=1,NG
12 GT(NH,I)=S(1)-GT(NH,I)
DO 14 I=1,N
X(I)=0.0
L=NYY(I)
GT(I,L)=GT(I,1)
DO 13 J=2,NGL
M=J+1
DO 13 K=M,NG
13 X(I)=X(I)+GT(I,J)*GT(I,K)

14 X(I)=SQRT(X(I)/GT(NH,L))
WRITE (50,203) (X(I),I=1,N)
DO 15 I=1,N
DO 15 J=1,N
15 R(I,J)=R(I,J)-X(I)*X(J)
WRITE (50,204)
LE=0
DO 17 II=1,NG
LE=LE+NX(II)
LS=LE-NX(II)+1

```



```

DO 16 I=LS,LF
I1=NY(I)
16 WRITE (50,201) I,I1,(R(I,J),J=1,I)
17 WRITE (50,202)
LE=0
DO 23 I1=1,NG
LE=LE+NX(I1)
LS=LE-NX(I1)+1
NNL=LE-1
AN=NX(I1)

AN=(AN-1.0)*(AN-2.0)/2.0
DO 22 K=LS,LE
S(K)=0.0
DO 21 I=LS,NNL
IF(K-I) 18,21,18
18 L=I+1
DO 20 J=L,LE
IF(K-J) 19,20,19
19 S(K)=S(K)+R(K,I)*R(K,J)/(R(I,J)*AN)
20 CONTINUE

21 CONTINUE
22 S(K)=SQRT(S(K))
23 CONTINUE
DO 24 I=1,NG
DO 24 J=1,N
24 GT(I,J)=0.0
WRITE (50,205)
ME=LE=0
DO 26 I1=1,NG
LE=LE+NX(I1)

LS=LE-NX(I1)+1
DO 25 I=LS,LE
ME=ME+1
25 GT(I1,I)=S(ME)
26 WRITE (50,206) (GT(I1,J),J=LS,LE)
LE=0
DO 27 I1=1,NG
LE=LE+NX(I1)
LS=LE-NX(I1)+1
DO 27 I=LS,LF

DO 27 J=LS,LF
27 R(I,J)=R(I,J)-S(I)*S(J)
WRITE (50,207)
LE=0
DO 29 I1=1,NG
LE=LE+NX(I1)
LS=LE-NX(I1)+1
DO 28 I=LS,LE
I1=NY(I)
28 WRITE (50,201) I,I1,(R(I,J),J=1,I)

29 WRITE (50,202)
GO TO 1
100 FORMAT (40I2)
101 FORMAT (19F4,3)
200 FORMAT (1X,20HBI=FACTOR SOLUTION // 2X, 25HINPUT CORRELATION MATR
11X //)
201 FORMAT (15,1H,13,1H,10F7,3/10(10X,10F7,3/))
202 FORMAT (11H -----)
203 FORMAT (///2X,27HGENERAL=FACTOR COEFFICIENTS//10X,10F7,3/10(10X,10
1F7,3/))

204 FORMAT (///41H INTERMEDIATF RESIDUAL CORRELATION MATRIX//)
205 FORMAT (///2X,25HGROUP=FACTOR COEFFICIENTS,/)
206 FORMAT (10X,10F7,3/)
207 FORMAT (// 2X,27HRESIDUAL CORRELATION MATRIX//)
STOP
END

```

12 多群解法

この解法の基本的な考え方は、観測特性をいくつかの群に分け、与えられた相関行列に関して実用的な因子解を得ることである。この解法は互いに斜交した因子を通常与えるが、あらかじめ種々の考察のもとで観測特性を群分けして、すべての全般因子を1回の計算で抽出できる。このような迅速さは、これまで記述してきた因子分析のどの方法に比しても特徴的にすぐれた性格である。この因子抽出の考え方と計算の迅速さに関しては、直截的な本法と複雑な成分分析法の中間に前章の双因子解法を位置づけて考えうる。この多群解法では、いくつの共通因子があっても、双因子解法にみられるような全般因子の抽出とその後の部分因子の抽出という2段階で残差行列を算出する労力もいらない。

また、通常得られる解は多少とも斜交していると考えられるので、この分析法の解には因子パターンと因子構造を備える必要がある。ここに、第6章で記述したように、因子パターンとは観測特性の線形表現における各因子ごとの係数を与え、因子構造とは観測特性と各因子との相関を示すものである。さらに、各因子軸間のなす角を求めるには因子間相関行列も必要になる。そして、多因子解におけるように、簡素構造を追求するための種々の回転解をも望むなら、初めに直交参考軸を得ておくと直接に便利である。このとき斜交因子パターンから直交因子パターンや斜交因子構造への変換も容易に行なえる。

本章の方法は多群解法 (multiple-group solution) とよばれるが、標本相関行列から式 (3.4) のように $AA'A' + \Psi$ の形式で、因子行列を簡素化する多因子解での部分因子 (group factor) の概念とは全く別のものである。

1930年代に因子分析法は急激な発展を示したが、部分因子にも多くの解釈や

研究がなされた。たとえば、Burt の群在因子解法 (group factor method)、Tyron の集落分析法 (cluster analysis) や、前述の Holzinger の双因子解法などがある。しかし、これらの解法は部分因子の概念を含んではいるが、一つの行列によって同時に多くの因子を抽出するような意図はもっていなかった。

1937 年に Horst は本章の多群解法の模型を最初に想定したが、理論的に適用できる段階まではもち込まなかった。逆に、1944 年に Guttman はただ理論だけを論じ計算方法は示さなかった。また Holzinger と Thurstone はそれぞれ個別に同じ 1945 年に多群因子分析法 (group factor analysis) として理論的に上記とほぼ同じ内容の簡単な計算手順を提唱した。そこで Harman は、このように個々に展開された方法を比較検討し、1954 年に多群解法として体系化したのである。

多群解法の最も特徴とするところは、あらかじめ観測特性の群分けを与えておいて、1 回の計算で観測特性群の数だけの全般因子を抽出できることである。したがって、この特徴を最大限に発揮するためには線形を仮想した独立な観測特性群をつくっておく必要がある。この群の数は縮小された相関行列の位数 (ランク) になり、非常にまれな場合を除き斜交した共通因子が得られる。

この解法も双因子解法と同様に観測特性の群分けを必要とし、その後には果たす機能も似ている。さらに相関行列を再生することも、またこれにより残差行列を求めることもできる。もし、残差行列がゼロ行列に十分近くなければ、再び残差行列によって多群解法を適用することができる。また、ゼロ行列に近い残差行列を得ても、Thurstone のように、このような多群解は回転問題に至るまで予備的な全般因子を得る段階と考え、軸の回転によって部分因子による簡素構造を追求する必要性を強調する立場もある。

したがって、多群解の適用面において他の因子分析の方法と異なる特性は、上の論議にも関連して解析的な面より、むしろ実質科学上の仮説の定式化ということになる。Guttman や Holzinger によると、多群解法はある先験的な心理学上の理論や仮説と結びつけることに十分役だてうると述べている。さらに Guttman は多群解法の計算手順はどのような現象にも適用できるが、予想される仮説はデータによる検定を通してのみ、心理学的意味づけに高い価値を認めうることを強調している、そして、これらの仮説は観測特性を群分けする種

々なやり方によって、斜交する共通因子の性格に反映するものであるとしている。しかし Thurstone によると、多群解法の結果は観測特性の群分けの仕方にそれほど関係なく、むしろ相関性をいろいろと加味して随意的の様式で群分けし、以後の取り扱いを慎重に考えている。

これらのことを要約すると次のように考えられる。まず Holzinger は、もとの相関行列がすなおにほぼ階数(ランク)1の観測特性群に分割できるときのみ多群解の有効性を論じている。また Guttman は、あとで因子軸を回転する必要性をできるだけ避けるように観測特性を群分けするのが好ましいとしている。これに反して Thurstone は、共通因子を抽出する他の有効な因子分析の方法と同様に、一つの直交因子行列を得るための初発の因子分析法の別法であるとし、むしろ回転問題に関する出発点と考えている。すなわち、セントロイド法や成因分析法などと並ぶ解法と考えるわけである。

さて、多群解法の有用性として残差行列に関する計算労力を大幅に減少することに疑問の余地はない。この解法は、毎回1因子ずつ抽出したりそのたびに残差行列を算出するのではなく、いくつかの因子をいちどに抽出し残差行列をただ1回計算するだけである。そして、観測特性の線形な群の数がちょうど共通因子空間の次元数だけ選出される限り、反復のない計算で終了する。しかし、初めの特性の群の数があまり小さいと、その残差行列によってもういちど同様の計算を繰り返さねばならない。さらに、このようなことで残差の値がゼロまたは負の値に近くなるまで何回も反復される可能性もある。また群の数があまり大きすぎると、因子相関行列の位数は減じ逆行列も存在しなくなる。

上のような多群解法の継続的・反復的な適用で、各段階で抽出された共通因子は互いに斜交しているが、異なった段階で得られた共通因子どうしは直交する。したがって、もし先験的な仮説が斜交因子構造を有するものであれば、すべての共通因子を同時にいちどの計算で抽出するか、または継続的に得られた因子の軸を斜交回転せねばならない。しかし、要約していうと、多群解法はきわめて実用的で簡便な因子分析の1方法であろう。

12.1 斜 交 解

上に記述したように、多群解法は一般に斜交解を与えるので、もし直交解が

必要であれば引き続き直交回転を行なわねばならない。すなわち、この多群解法では観測特性の各群の重心を通る参考軸で因子を表現している。そして観測特性のこのような群は、互いに直交していないのが普通なので、いちどの多群解法の計算で得られる共通因子軸も斜交して得られるわけである。そして、この解法は初めから縮小相関行列 (reduced correlation matrix) の存在を仮定し、その対角線要素を推定した共有性 (communalities) で置き換える。

まず、 B 係数の方法または実質科学上の根拠によって、あらかじめ p 種の観測特性は適切な q 個の群 G_1, G_2, \dots, G_q に群分けが行なわれる。このような群はそれぞれの複合変量 (composite variable) を意味すると考え、個々の観測特性は平均値がゼロで分散が 1 と規準化されているので、複合変量についての規準化は考えない。

さて、一つの複合変量 v_j が n_j 個の観測特性の群 G_j の中を通ると仮定する。すなわち

$$v_{jk} = \sum_i x_{ik}, \quad i \in G_j, \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, q \\ k = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \quad (12.1)$$

とおき、このような v_j で示される複合変量がそれぞれ斜交因子を構成する。さらに、観測特性間の相関係数の和について w_{ij} および $W_{jj'}$ を次のように定義しておく。

いま、 p 種のなかの任意の第 i 観測特性と各群 G_j に属している n_j 個の観測特性との相関係数の和を w_{ij} とおく。すなわち

$$w_{ij} = \sum_{i'} r_{ii'}, \quad i' \in G_j, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \quad (12.2)$$

ここで添字 i' が指定された添字 i を選ぶとき、すなわち自己相関 (self-correlation) のときには、 r_{ii} として式 (10.18) で与えられた共有性の値 ($r_{ii} = h_i^2$) を用いる。

また上の w_{ij} の和に関し、 $W_{jj'}$ を次のようにおく

$$W_{jj'} = \sum_i w_{ij'}, \quad i \in G_j, \quad j, j' = 1, 2, \dots, q \quad (12.3)$$

ここに、 $W_{jj'}$ は群 G_j に属するすべての観測特性と群 $G_{j'}$ に属するすべての観測特性とによってできる相関係数のすべての和を意味し、また $j=j'$ の場合の W_{jj} をも含めて同様に定義する。

したがって、式 (12.3) の $W_{jj'}$ は直接に観測特性間の相関係数によって次のようにも書ける。

$$W_{jj'} = \sum_{i, i'} r_{ii'}, \quad i \in G_j, \quad i' \in G_{j'}, \quad j, j' = 1, 2, \dots, q \quad (12.4)$$

さらに、上で定義した複合変量 v_j の分散について考えておこう。一般に、式 (12.1) の右辺の分散は n_j 個の規準化された観測特性の分散とそれらの観測特性相互の共分散の和で示されるから

$$\hat{\sigma}_{v_j}^2 = n_j + 2 \sum_{i, i'} r_{ii'}, \quad i < i', \quad i, i' \in G_j \quad (12.5)$$

と書ける。ここに $\hat{\sigma}^2$ としたのは標本分散を示している。また、上の式で r_{ii} を共有性で置き換えると、簡単に

$$\hat{\sigma}_{v_j}^2 = \sum_{i, i'} r_{ii'}, \quad i, i' \in G_j \quad (12.6)$$

と書け、 $r_{ii} = h_i^2$ が式 (10.18) による値で適用される。

ここで、式 (12.4) の記号を用いると

$$\hat{\sigma}_{v_j}^2 = W_{jj}, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (12.7)$$

で示される。

このような準備のもとに、まず斜交因子間の相関行列を求めよう。任意の2個の複合変量を v_j および $v_{j'}$ とすると、その間の相関係数は定義によって

$$r_{v_j v_{j'}} = \frac{\sum_{k=1}^n v_{jk} v_{j'k}}{n \sqrt{\hat{\sigma}_{v_j}^2 \hat{\sigma}_{v_{j'}}^2}} \quad (12.8)$$

で示され、上式の $\hat{\sigma}_{v_j}^2$ は式 (12.7) で示されたもので、分母の平方根部分を除くと次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n v_{jk} v_{j'k}}{n} &= \frac{\sum_{k=1}^n (\sum_i x_{ik}) (\sum_{i'} x_{i'k})}{n} = \frac{\sum_{i, i'} (\sum_k x_{ik} x_{i'k})}{n} \\ &= \sum_{i, i'} r_{ii'} = W_{jj'}, \quad i \in G_j, \quad i' \in G_{j'} \end{aligned} \quad (12.9)$$

したがって、式 (12.8) に (12.7) と (12.9) の関係を代入すると、任意の2つの斜交因子間の相関係数は次式で示される。

$$r_{v_j v_{j'}} = W_{jj'} / \sqrt{W_{jj} W_{j'j'}}, \quad j, j' = 1, 2, \dots, q \quad (12.10)$$

また、この値を一般の (j, j') 要素としてできる $(q \times q)$ 行列が因子相関行列を与えることになる。

次に、各観測特性と各因子間の $(p \times q)$ の相関行列すなわち斜交因子構造 \mathbf{Q} を求めよう。

いま、この行列 \mathbf{Q} の要素を q_{ij} とおき、第 i 観測特性と第 j 番めの複合変量との相関係数 $r_{x_i v_j}$ を意味するものとする。このとき q_{ij} は直ちに次式で示される。

$$q_{ij} = r_{x_i v_j} = w_{ij} / \sqrt{W_{jj}}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q \quad (12.11)$$

そしてこの q_{ij} の (i, j) をいろいろ変えて因子構造が得られる。

さらに、斜交因子解を仕上げるために、抽出された因子によって各観測特性を線形式で表示しよう。ここに、この線形式の係数行列が因子パターン \mathbf{G} といわれるものである。

いま

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{G}\mathbf{f}_k + \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (12.12)$$

とおくと、すでに多因子解で記述したように、観測誤差 \mathbf{e}_k を除いて、因子パターン \mathbf{G} は各観測特性を示す点の斜交因子軸に対する座標を示すとも考えられる。

この因子パターンは上に得られた因子構造 \mathbf{Q} と因子相関行列から容易に得られる。すなわち、因子構造と因子パターンの関係は、式 (6.25) から (6.27) にわたって説明されているが、因子パターン \mathbf{G} は次式で導かれる。

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}^{-1}, \quad (12.13)$$

ここに

$$\boldsymbol{\theta} = [r_{v_j v_{j'}}].$$

このようにして、因子構造と因子パターンを得てのち、斜交解の形で最終的な多群解とするのであれば、むすびとして、抽出された因子により再生される相関行列 (reproduced correlation matrix) とその残差行列 (residual matrix) を算出する段階にはいる。

さて、再生された相関行列 \mathbf{R}^\dagger は、式 (8.40) におけるように、次式の中で

示される。

$$\begin{aligned} R &= \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \mathbf{x}'_k / n = \sum_k \mathbf{G} \mathbf{f}_k \mathbf{f}'_k \mathbf{G}' / n + \sum_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}'_k / n \\ &= \mathbf{G} \boldsymbol{\theta} \mathbf{G}' + \hat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{R}^\dagger + \hat{\boldsymbol{\psi}} \end{aligned} \quad (12.14)$$

ここに

$$\mathbf{R}^\dagger \equiv \mathbf{G} \boldsymbol{\theta} \mathbf{G}' \quad (12.15)$$

また、上の \mathbf{R}^\dagger は式 (12.13) によって

$$\mathbf{R}^\dagger = \mathbf{Q} \mathbf{G}' \quad (12.16)$$

または

$$= \mathbf{G} \mathbf{Q}' \quad (12.17)$$

とも表わせる。もちろん、上の二つの関係式は直交解の場合でも成立する。

したがって、 q 個の斜交因子が \mathbf{R} から抽出された後の残差行列 $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ は

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{R} - \mathbf{R}^\dagger \quad (12.18)$$

で与えられる。以上の過程を経て、ひととおりの多群解法による q 個の斜交因子の解析は完結したわけである。

このようにして得た解に回転を要するか否かという論議は、本章の初めにしるしたとおりである。Guttman は 1952 年の“多群解法の根拠と計算および解釈”という論文で、多群解の立場について次のように論じている。“もし、回転が実際上必要になるようなときには、共通因子の性質に関する最初の仮説が誤っていたのである。データを検討したあとの事後仮説 (*a posteriori* hypothesis) は、通常どのような事後的論理にもつきまとうように、種々の不確定性などの論争にみまわれる。しかし、もし観測特性の群分けが心理学の理論に従って先験的 (*a priori*) に行なわれ、データのうえで実証されるならば、因子分析の結果は非常にたかい信頼に値するものとなろう。このように先験的な推測の手順のほうが、既知の事実に適する事後的な理論を展開する手順よりも、科学的にいっそうの重みを感じさすものである”。そして、彼の一面の見識として、このような立場と配慮に基づき多群解における因子軸の回転を論評している。

ここでは本節の数値例として、当初から利用している長方形による検証例を用いてみよう。

この例のグラフ法による斜交解は、6.1 節および 6.2 節で考察されていて

図 6.2 で示されたように、8 種類の観測特性のうちの第 1, 2, 3 の特性と残りの第 4 から第 8 特性までの 2 群に群分けしてよいことを示唆している。本節では、この群分けに基づいて斜交解のままの多群解を試みよう。

まず、観測特性間の相関行列の対角線要素に共有性を入れた次の相関行列 R から出発する (表 12.1)。

表 12.1 8 観測特性間の相関行列

1	0.9996	0.9998	0.9993	0.8530	-0.3716	0.5262	0.5264	0.6917
2	0.9998	0.9999	0.9994	0.8529	-0.3722	0.5259	0.5261	0.6915
3	0.9993	0.9994	0.9998	0.8691	-0.3425	0.5527	0.5529	0.7141
4	0.8530	0.8529	0.8691	0.9998	0.1666	0.8923	0.8925	0.9668
5	-0.3716	-0.3722	-0.3425	0.1666	0.9996	0.5932	0.5933	0.4128
6	0.5262	0.5259	0.5527	0.8923	0.5932	0.9994	0.9997	0.9778
7	0.5264	0.5261	0.5529	0.8925	0.5933	0.9997	0.9999	0.9781
8	0.6917	0.6915	0.7141	0.9668	0.4128	0.9778	0.9781	0.9999

まず式 (12.2) により w_{ij} を計算し、これに基づき式 (12.3) によって $W_{jj'}$ を求める。この例では $p=8, q=2$ であるから計算は容易である。この $W_{jj'}$ が $\sigma_{v_j}^2$ の推定量になっていることは、式 (12.7) で記述した。これらの値は次の表 12.2 で示される。

表 12.2 w_{ij} と $W_{jj'}$ の値

w_{ij}	群 I			群 II				
	1	2	3	4	5	6	7	8
(群) 1	2.9987	2.9991	2.9986	2.5750	-1.0862	1.6048	1.6054	2.0973
2	2.2257	2.2242	0.3463	3.9180	2.7655	4.4624	4.4635	4.3354

$W_{jj'}$		1	2
j'	j		
1	1	8.9964	6.7962
2	2	6.7962	19.9447
$\sqrt{W_{jj}}$		2.9994	4.4659

さて、これらの値を組み合わせ、式 (12.10) によって因子相関行列 θ が表 12.3 のように求められる。

表 12.3 斜交因子の相関行列

1	1.0000	0.5073
2	0.5073	1.0000

また、 w_{ij} と $\sqrt{W_{jj}}$ を組み合わせ
た式(12.11)によって次の因子構造 Q
が得られる。

表 12.4 因 子 構 造

1	0.9997	0.4983
2	0.9999	0.4980
3	0.9997	0.5253
4	0.8585	0.8773
5	-0.3621	0.6192
6	0.5350	0.9992
7	0.5352	0.9994
8	0.6992	0.9707

表 12.5 因子パターン

1	1.0058	-0.0119
2	1.0062	-0.0124
3	0.9873	0.0244
4	0.5566	0.5948
5	-0.9108	1.0813
6	0.0378	0.9800
7	0.0379	0.9802
8	0.2783	0.8295

上に得られた θ の逆行列および Q によって、因子パターン G は式 (12.13) によって計算される。

さらに、解析結果の参考として、再生された相関行列 R^+ をこれらの結果によって式 (12.16) または (12.17) によって算出すると、表 12.6 が得られる。

表 12.6 再生された相関行列

1	0.9996	0.9997	0.9992	0.8530	-0.3716	0.5262	0.5264	0.6917
2	0.9997	0.9999	0.9994	0.8529	-0.3721	0.5258	0.5260	0.6914
3	0.9992	0.9994	0.9999	0.8690	-0.3424	0.5526	0.5528	0.7141
4	0.8530	0.8529	0.8690	0.9997	0.1667	0.8922	0.8924	0.9667
5	-0.3716	-0.3721	-0.3424	0.1667	0.9994	0.5931	0.5932	0.4128
6	0.5262	0.5258	0.5526	0.8922	0.5931	0.9994	0.9997	0.9778
7	0.5264	0.5260	0.5528	0.8924	0.5932	0.9997	0.9999	0.9780
8	0.6917	0.6914	0.7141	0.9667	0.4128	0.9778	0.9780	0.9999

表 12.7 残 差 行 列

1	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
2	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0001	-0.0000	-0.0001	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
4	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	-0.0000
6	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000
7	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
8	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

この再生された相関行列 R^+ は初めの相関行列 R ときわめて良く一致しており、残差行列のすべての要素は ± 0.0001 またはそれ以下の値を示している。すなわち、この数値例は非常に良いあてはまりを示している。

12.2 直 交 解

完備した多群解の終結として直交解までを必要とする場合や、多群解後の回転問題を積極的に配慮してその最初の手がかりとして多群解における直交解を必要として求めておく場合がある。本節では、このような際の直交した多群解の求め方について記述する。この手順は前節で得た斜交解に継続して直交回転を実施する。すなわち、斜交解における因子パターン G または因子構造 Q を直交因子の係数行列 A に変換することになる。

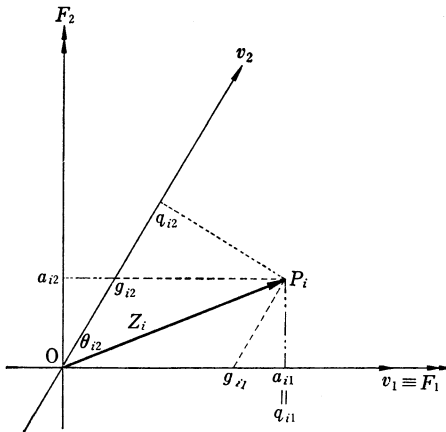


図 12.1 多群解における斜交軸から直交軸への変換

さて、一般に斜交因子座標軸を直交軸に変換する方法はいくらでも考えられるが、ここに多群解で適用される特定の方法がある。すなわち、新しく得られる座標系の最初の軸は第1の斜交軸に一致させ、新しい第2の軸は最初の2本の斜交軸の張る平面内で第1の新軸に直交するように決定する。以降は逐次このような方法で直交軸を求めていくのであるが、図 12.1 はまず最初の段階を示している。

いま、2次元の共通因子空間における p 個の観測特性のうち、簡単のために一つの観測特性点を P_i とする(図 12.1 参照)。ここで原点から点 P_i に至るベクトル Z_i は次式で示される。

$$Z_i = g_{i1}v_1 + g_{i2}v_2 \tag{12.19}$$

$$\text{または} \quad = a_{i1}F_1 + a_{i2}F_2 \tag{12.20}$$

ここに F_1, F_2 は直交座標系を示し v_1, v_2 は斜交参考軸を示している。また

斜交参考軸系で点 P_i の直交射影を行なうと、その軸上の値は点 P_i の座標とは異なって因子構造の要素の値を示すから

$$q_{i1} = r_{z_i v_1}, \quad q_{i2} = r_{z_i v_2} \quad (12.21)$$

となっている。

さて、斜交軸から上記のような特定の直交軸に変換するには、双方の軸の座標について、次の関係を満たさねばならない。

$$\left. \begin{aligned} a_{i1} &= g_{i1} + g_{i2} \cos \theta_{12} \\ a_{i2} &= g_{i2} \sin \theta_{12} \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

ここに θ_{12} は斜交軸 v_1 と v_2 のなす角を示す。

また、すでに式 (6.17) で示したように、 v_1 と v_2 のなす角の余弦 (cosine) はベクトル v_1 と v_2 が意味する変量間の相関係数であるから

$$\cos \theta_{12} = r_{v_1 v_2} \quad (12.23)$$

である。ゆえに、式 (12.22) は

$$\left. \begin{aligned} a_{i1} &= g_{i1} + g_{i2} r_{v_1 v_2} \\ a_{i2} &= g_{i2} \sqrt{1 - r_{v_1 v_2}^2} \end{aligned} \right\} \quad (12.24)$$

と書ける。この式は行列演算で

$$[a_{i1}, a_{i2}] = [g_{i1}, g_{i2}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r_{v_1 v_2} & \sqrt{1 - r_{v_1 v_2}^2} \end{bmatrix} \quad (12.25)$$

と表現される。

したがって、斜交軸 v_1, v_2 を直交軸 F_1, F_2 に移す座標変換は、上式の右辺のように斜交因子間の相関係数のみに関する行列で得られることが知れる。ここで、この変換行列の各行要素の2乗和が1で、各行の要素はそれぞれの軸の勾配を示しているから、この変換行列を T' とおく。すなわち、式 (12.25) を一般化して p 種の観測特性における q 個の共通因子の場合とすると、

$$A = GT' \quad (12.26)$$

で示すことができる。さらに式 (12.13) から $G = Q\theta^{-1}$ で、 θ は式 (6.17) より明らかなように

$$\theta = T'T \quad (12.27)$$

である。ゆえに式 (12.26) の T' は、通常の数値(スカラー)に関することばでいうと、 θ の“平方根”に相当することが知れる。したがって、正方行列 θ が与えられたとき、式 (12.27) で示される行列 T を算出する方法は平方根法 (square root method) によって容易に求められる。この計算法は巻末の付録を参照されたい。

たとえば、式 (12.25) の変換行列について $T'T$ をつくと、

$$T'T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & \sqrt{1-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & \sqrt{1-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix} = \theta$$

になっている。

さて、式 (12.26) を因子構造 Q によって示すと次式を得る。

$$A = GT' = Q\theta^{-1}T' = QT^{-1} \quad (12.28)$$

したがって、(12.27) を満たす T を得れば、前節で求めた斜交解を用い式 (12.26) または (12.28) によって、直交因子の負荷行列 A が得られる。

この多群解における直交解についても、再生された相関行列 R^\dagger に関する式 (12.14) は不変であって

$$R^\dagger = G\theta G' = AA' \quad (12.29)$$

となるから、前節の結果と全く同等に

$$R = R^\dagger + \hat{\Psi} \quad (12.30)$$

の関係は維持されている。

このように本節の立場は、すでに 6.1 節で考察した直交因子負荷行列 A を変換行列 T により斜交因子パターンまたは斜交因子構造を得るのと全く逆の手順となっている。すなわち、式 (12.26) および (12.28) は、それぞれ式 (6.30) および (6.22) の右辺の T についての逆行列を左辺に施した式となっている。そして第 6 章で変換行列 T を求める立場が、本節では参考軸の変換行列を意味する T^{-1} を求める立場になっている。さらに、第 6 章と異なって本章の多群解では、このような変換行列 T を $\theta = T'T$ から、すなわち平方根法によって求めることが著しい特徴となっている。

前節の長方形の検証例では、多群解そのままの結果として斜交解が得られたわけであるが、この結果に接続して本節における直交解の数値計算例としよ

う。

さて、直交解は式 (12.28) によって得られるのであるが、そのままに因子相関行列 Θ から式 (12.27) を満たす T を平方根表によって算出しておかねばならない。この計算手順は本書の付録にゆだね、ここでは Θ から T を算出した結果だけを示しておく。

$$\begin{array}{cc} \text{入力行列 } \Theta & \text{平方根解 } T \\ \left[\begin{array}{cc} 1.0000 & 0.5073 \\ 0.5073 & 1.0000 \end{array} \right] & \longrightarrow \left[\begin{array}{cc} 1.0000 & 0.5073 \\ 0.0000 & 0.8617 \end{array} \right] \end{array}$$

このように T が算出されると、前節の結果として得られた因子パターン G を用い、 $GT' = A$ によってただちに直交解が求められる。

$$\begin{array}{c} \text{多群解(直交解)} \\ A = \left[\begin{array}{cc} 0.9997 & -0.0102 \\ 0.9999 & -0.0106 \\ 0.9996 & 0.0210 \\ 0.8583 & 0.5125 \\ -0.3622 & 0.9318 \\ 0.5349 & 0.8445 \\ 0.5351 & 0.8447 \\ 0.6991 & 0.7148 \end{array} \right] \end{array}$$

この結果によって、再生された相関行列 R^+ を式 (12.29) によって計算すると、表 12.8 を得る。

この R^+ は前節の斜交解における R^+ と一致し、したがって $R - R^+$ で計算される残差行列も前節と全く同様の結果が得られる。

表 12.8 再生された残差行列

1	0.9996	0.9997	0.9992	0.8528	-0.3717	0.5261	0.5263	0.6916
2	0.9997	0.9999	0.9993	0.8527	-0.3721	0.5258	0.5260	0.6914
3	0.9992	0.9993	0.9997	0.8688	-0.3425	0.5525	0.5527	0.7139
4	0.8528	0.8527	0.8688	0.9994	0.1666	0.8920	0.8923	0.9664
5	-0.3717	-0.3721	-0.3425	0.1666	0.9995	0.5931	0.5932	0.4128
6	0.5261	0.5258	0.5525	0.8920	0.5931	0.9994	0.9996	0.9776
7	0.5263	0.5260	0.5527	0.8923	0.5932	0.9996	0.9999	0.9779
8	0.6916	0.6914	0.7139	0.9664	0.4128	0.9776	0.9779	0.9997

12.3 計算プログラム

12.3.1 斜 交 解

Harman の提唱した多群解法を行なう。すなわち、あらかじめ観測特性の群分けを指示して標本相関行列をインプットすれば、全般因子を巡回計算によらず迅速に抽出する。この方法は特性の群分けによって複合変量を作成し、さらにこの新変量間の相関を因子間の相関行列として得る。次いで、因子パターンおよび因子構造を得る。一般にこの解法によると斜交解が得られる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
NP	観測特性の数	R(I, J)	標本相関行列
NQ	群分けした数	WIJ(N, J)	任意の観測特性とある群に属する n 個の観測特性の間の相関係数の和
NG(I)	同上の各群内の観測特性の数	WJJ(L, I)	任意の群に属するすべての観測特性と別の群に属するすべての観測特性によってできる相関係数のすべての和
IC	相関係数を計算するか否かの制御	T	同一群間の観測特性によってできる相関係数のすべての和
R(I, J)	標本相関行列 (対角要素は共有性)	H(I, J)	斜交因子係数行列
		Q(I, J)	斜交因子構造行列
		G(I, J)	斜交因子パターン
		PR(I, J)	再生された相関行列, のちに残差相関行列

```

C      MULTIPLE - GROUP SOLUTION
C      ( THE OBLIQUE SOLUTION )
C
C
C      NP --- NO. OF VARIABLES
C      NQ --- NO. OF GROUPS
C      NG --- NO. OF VARIABLES IN EACH GROUP
C      IC --- 0, TO MAKE A CORRELATION MATRIX
C           --- 1, TO USE A CORRELATION MATRIX WE HAVE ALREADY
C
C      R --- A SAMPLE CORRELATION MATRIX
C
C      SUBROUTINE MATINV IS REQUIRED
C
C
C      DIMENSION R(30,31),WIJ(30,11),WJJ(10,11),NG(10),RR(30)
C      DIMENSION H(11,11),G(30,10),G(30,11),PR(30,31)
C      COMMON H,R,WIJ,WJJ,G,RP
1 READ (40,100) NP,NQ,(NG(I),I=1,NQ),IC
WRITE (50,200)
    
```

```

WRITE (50,201)
DO 2 I=1,NP
2 READ (40,101) (R(I,J),J=1,NP)
IF(I<1) 3,11,3
3 DO 10 I=1,NP
  FM=0.0
  RR(I)=0.0
  DO 9 J=1,NP
  IF(I-J) 4,9,4
4 DO 8 K=1,NP

  IF(I-K) 5,8,5
5 IF(J-K) 6,8,6
6 T=(R(I,J)*R(I,K))/R(J,K)
  IF(T<1.0) 7,8,8
7 RR(I)=RR(I)+T
  FM=FM+1.0
8 CONTINUE
9 CONTINUE
10 R(I,I)=RR(I)/FM
11 CC=0.0

  JJ=0
  DO 13 K=1,NQ
  II=JJ+1
  JJ=JJ+NG(K)
  DO 12 I=II,JJ
12 WRITE (50,202) I,(R(I,J),J=1,NP)
13 WRITE (50,203)
  WRITE (50,204)
  N=0
  JL=0

  DO 17 L=1,NQ
  IL=JL+1
  JL=JL+NG(L)
  DO 14 I=1,NQ
14 WJJ(L,I)=0.0
  DO 17 K=IL,JL
  N=N+1
  JJ=0
  DO 16 I=1,NQ
  II=JJ+1

  JJ=JJ+NG(I)
  WIJ(N,I)=0.0
  DO 15 J=II,JJ
15 WIJ(N,I)=WIJ(N,I)+R(N,J)
16 WJJ(L,I)=WJJ(L,I)+WIJ(N,I)
17 WRITE (50,202) N,(WIJ(N,I),I=1,NQ)
  WRITE (50,205)
  DO 18 L=1,NQ
  WRITE (50,202) L,(WJJ(L,I),I=1,NQ)
  T=SQRT(WJJ(L,L))

18 WRITE (50,206) T
  WRITE (50,207)
  DO 19 I=1,NQ
  DO 19 J=I,NQ
  H(I,J)=WJJ(I,J)/SQRT(WJJ(I,I)*WJJ(J,J))
19 H(J,I)=H(I,J)
  DO 20 I=1,NQ
20 WRITE (50,202) I,(H(I,J),J=1,NQ)
  DO 21 J=1,NQ
  DO 21 I=1,NP

```



```

21 @ (I,J)=W/J(J,J)/SQRT(W/J(J,J))
DO 22 I=1,N@
DO 22 J=1,N@
22 W/J(I,J)=H(I,J)
CALL MATINV (N@)
WRITE (50,208)
DO 23 I=1,NP
23 WRITE (50,202) I,(@(I,J),J=1,N@)
DO 24 I=1,NP
DO 24 J=1,N@

G(I,J)=0.0
DO 24 K=1,N@
24 G(I,J)=@(I,K)*H(K,J)+G(I,J)
WRITE (50,209)
DO 25 I=1,NP
25 WRITE (50,202) I,(G(I,J),J=1,N@)
DO 26 I=1,NP
DO 26 J=1,NP
PR(I,J)=0.0
DO 26 K=1,N@

26 PR(I,J)=G(I,K)*@(J,K)+PR(I,J)
WRITE (50,210)
DO 27 I=1,NP
27 WRITE (50,202) I,(PR(I,J),J=1,NP)
WRITE (50,211)
DO 28 I=1,NP
DO 28 J=1,NP
28 PR(I,J)=R(I,J)-PR(I,J)
DO 29 I=1,NP
29 WRITE (50,202) I,(PR(I,J),J=1,NP)

GO TO 1
100 FORMAT (16I5)
101 FORMAT (12F6.5)
200 FORMAT (//26H MULTIPLE - GROUP SOLUTION//5X,24H( THE OBLIQUE SOLUT
1ION ))
201 FORMAT (//25H INPUT CORRELATION MATRIX/)
202 FORMAT (15,3X,8(F8.5,1X))
203 FORMAT (3X,5H-----)
204 FORMAT (//13H SMALL W(J,J)/)
205 FORMAT (//15H CAPITAL W(I,J)/)

206 FORMAT (17X,F8.5)
207 FORMAT (//27H OBLIQUE FACTOR CORRELATION/)
208 FORMAT (//25H OBLIQUE FACTOR STRUCTURE/)
209 FORMAT (//23H OBLIQUE FACTOR PATTERN/)
210 FORMAT (//30H REPRODUCED CORRELATION MATRIX/)
211 FORMAT (//16H RESIDUAL MATRIX/)
STOP
END

```

[付] サブルーティン(逆行列の算出)

```

C SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C - CROUT METHOD -
C
SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(20,21),R(10),C(10)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

```

```

1 A(J,I)=0.0
  A(I,I)=1.0
  DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
  DO 3 J=1,N
  DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
  DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
  RETURN
END

```

12.3.2 斜交解による直交解の算出

多群解法の結果が一般に斜交解であるので、このプログラムは、斜交している多群解を用いて独自の直交回転を行ない直交解に導く。すなわち、前項のプログラムで得られる斜交参考因子パターンとその因子相関行列をインプットすれば、主要な計算として平方根法を用い、直交因子負荷行列および残差相関行列を得ることができる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	A(I, J)	斜交因子係数行列, 変換行列(平方根法), のちに再生された相関行列 斜交因子パターン, のちに直交解
M	共通因子の数	B(I, J)	
A(I, J)	斜交因子係数行列		
B(I, J)	斜交因子パターン		

```

C      MULTIPLE-GROUP SOLUTION
C      ( THE ORTHOGONAL SOLUTION )
C
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      M --- NO. OF FACTORS
C      A --- FACTOR CORRELATION MATRIX FROM OBLIQUE MULTIPLE
C           GROUP SOLUTION
C      B --- PRIMARY FACTOR PATTERN FROM THE OBLIQUE M. G. SOLUTION
C
C
C      DIMENSION A(30,30),B(30,10)
1 READ (40,100) N,M
  WRITE (50,200) (I,I=1,M)
  DO 2 I=1,M
    READ (40,101) (A(I,J),J=1,M)
2 WRITE (50,201) I,(A(I,J),J=1,M)
  DO 10 I=1,M
    II=I-1

```

```

      IJ=I+1
      IF(I) 3,3,5
3  A(1,1)=SQRT(A(1,1))
      DO 4 J=2,M
      A(1,J)=A(1,J)/A(1,1)
4  A(J,1)=0.0
      GO TO 10
5  T=0.0
      DO 6 J=1,I
6  T=T+A(J,1)**2

      A(1,1)=SQRT(A(1,1)-T)
      IF(I=N+1) 7,7,10
7  DO 9 J=1,M
      T=0.0
      DO 8 K=1,I
8  T=T+A(K,1)*A(K,J)
      A(1,J)=(A(1,J)-T)/A(1,1)
9  A(J,1)=0.0
10 CONTINUE
      WRITE (50,202) (I,I=1,M)

      DO 11 I=1,M
11 WRITE (50,201) I,(A(I,J),J=1,M)
      WRITE (50,203) (I,I=1,M)
      DO 12 I=1,N
      READ (40,101) (B(I,J),J=1,M)
12 WRITE (50,201) I,(B(I,J),J=1,M)
      DO 14 I=1,N
      DO 13 J=1,M
      B(N+1,J)=0.0
      DO 13 K=1,M

13 B(N+1,J)=B(N+1,J)+B(I,K)*A(J,K)
      DO 14 J=1,M
14 B(I,J)=B(N+1,J)
      WRITE (50,204) (I,I=1,M)
      DO 15 I=1,N
15 WRITE (50,201) I,(B(I,J),J=1,M)
      WRITE (50,205) (I,I=1,N)
      DO 16 I=1,N
      DO 16 J=1,N
      A(I,J)=0.0

      DO 16 K=1,M
16 A(I,J)=A(I,J)+B(I,K)*B(J,K)
      DO 17 I=1,N
17 WRITE (50,201) I,(A(I,J),J=1,N)
      GO TO 1
100 FORMAT (2I2)
101 FORMAT (10F8,5)
200 FORMAT (2X,23HMULTIPLE-GROUP SOLUTION/10X,25H(THE ORTHOGONAL SOLUT
1ION)///4X,42HINPUT FACTOR CORRELATION MATRIX OBTAINED H/15X,25HFRO
2M THE OBLIQUE SOLUTION//8X,8(15,4X)/)

201 FORMAT (15,3X,8(F8,5,1X))
202 FORMAT (///4X, 23HSQUARE ROOT SOLUTION T/12X,14HWHERE H=TT*T //
1.6X,3HT =-//8X,8(15,4X))
203 FORMAT (///4X,23HINPUT FACTOR PATTERN G/11X,25HFROM THE OBLIQUE S
1OLUTION//8X,8(15,4X)/)
204 FORMAT (///4X,23HTHE ORTHOGONAL SOLUTION//8X,8(15,4X)/)
205 FORMAT (///4X,29HREPRODUCED CORRELATION MATRIX//8X,8(15,4X)/)
      STOP
      END

```

13 正準相関分析法

これまでは、歴史的な必然性のもとに展開されてきた諸種因子分析の考え方やそれらの解法を、伝統的な解法や成因分析なども含め、いわゆる狭義の因子分析法 (factor analysis) として個別に列挙しながら記述してきた。そして、そこで観測される構造模型は確定と不確定を問わず、いずれも多種の観測特性による1群の統計的資料から内在する因子を追究し、実質科学上の事象を解明しようとする立場にあった。この意味で、これまでの記述は対内的因子分析法 (internal factor analysis) とよばれるものに関してであった。

しかし、もし同一対象に関し異なった2群の観測特性による統計的多変量資料があるならば、この2群の特性を対応づけながらどのようにして内因因子の追求が可能であろうか。そして、この2群の異なった観測特性の間の因子的な関連は相対的にどのようになるか。また別に、同一観測特性群を用いているとしても、明らかに異なった2群の観測対象による多変量観測値が与えられたとき、各群間の性格的特徴の相違を内因因子のうえから相対的に考察するには、どのように解けばよいであろうか。もちろん、これまでの因子分析の方法によって1群ずつ解明し、そして最終的に各群間の特徴を比較検討するのも1方法ではある。しかし、いちどの因子分析によって対象群相互の性格的差異を明確にするような観点の因子抽出の方法はないであろうか。このように因子分析の基準を外に向け相対的な因子を抽出する考え方と諸法を、さきの対内的因子分析法に対し、対外的因子分析法 (external factor analysis) とよんでいる。したがって、本章においてはこの対外的因子分析法に関する各法を系統的に記述する。

ここでは、同一対象に関するこのような2群の多変量観測値を互いに内在す

る共通因子の観点から同時に比較探索する一つの考え方として、まず正準*相関分析法 (canonical* correlation analysis) とよばれる解法を解説する。通常の統計的多変量解析論では、この正準相関分析法を他の推定・検定論や回帰論などに近いところで別に論じることもあるが、因子分析法とは思想的に極く近い関連にある。

さて、同一対象について異なった2群の多変量観測特性を同時に取り扱うには、これらの同時分布 (joint distribution) を考えねばならない。しかし、このときまず各観測特性群ごとに、その中の特性を線形に結合して抽象的に何かを意味し要約して表現する新変量(正準変量)を想定する。そして、このような各群の新変量を2群間で互いに相関性が最大になるように、双方の新変量を決定する。ここに、各群の多変量観測特性で要約的に表現された正準変量どうしが互に対応して何を示唆するかということに関し、一つの内在する共通因子的な解釈が可能になる。

次いで、このような推測を継続して、さらに第2の新変量を各群で想定する。ただし、条件として第2の新変量は第1の新変量に無相関なものを考える。そして、各群の第2新変量どうしの相関が最大となるように、具体的に各群とも対応して観測特性の線形結合を第2の新変量として求める。この双方の新変量は第2の共通因子として解釈を与える。全く同様に、第3の新変量や第4の新変量がそれまでの新変量と無相関に、しかも対応する新変量どうしの相関性を最大にするように決められる。このように、新変量系すなわち新因子軸系がいずれかの群の多変量観測特性を完全に規定するまで、同様の手順が続けられる。

このような統計的方法は、実質科学分野において多種の変量で測定したときの理論的な複雑さを整頓し、現象の構造を追求する探索的な (exploratory) 場合にとくに有用である。そして多くの観測特性からなる2群の資料があるとき、両観測特性の相互関係を明確にできる。また、2群の観測特性が非常に多いようなときには、群間で最も高い相関性をもつ若干個の線形式で表現される新変量だけで考察することもできるわけである。

* canonical とは、元来、“教会法による、正典による、法典の、正規の”などの意で、他の分野の数学や物理学では、ほとんど“標準”と訳されている。今日、“正準”という語は、あまりびったりしない古い語彙のように思われるが、通常の間関分析と区別して、“正統的”などの意を汲んでいる。

わかりやすい応用例として、たとえば色彩における3色配色の感情分析の研究があげられる。このときの変量観測特性の1群は明度・彩度・色相などの物理的な諸計測特性で、他方の群は暖かい・快適な・目立ったなどの意味構造論 (semantic differential) 的な諸特性の評点であった。この結果、観測特性の両群間の関係は、相関の大きさの順にそれぞれ若干個の新変量でほとんど完全に対応づけられることがわかり明確な説明ができた。

この正準相関分析の理論は、1935年から1936年にかけて H. Hotelling によって開発されたものである。M. G. Kendall によると、通常、正準相関分析の結果の解釈は前章までの因子分析法の場合よりもむずかしいと述べている。しかし、どのような2群の変量観測特性に適用するかに関して実質科学上の配慮があらかじめ必要であり、基本的なことになる。近年、種々の知能テストや教育研究の場や頭蓋骨の形状と知的精神的問題などの場合に、正準相関分析法による興味ある研究が多くみられるようになってきている。

なお、観測特性をとりあげる考え方には、さきの因子分析法におけるように、 O -, P -, Q -, R -, S -, T -技法的な考察が当然この場合にも生じてくる。

13.1 正準変量と正準相関

いま p 種の計測特性からなる n 個の変量観測値ベクトル \mathbf{x}_j を考える ($j=1, 2, \dots, n$)。そして、この p 種の計測特性を、本章の初めに記した目的で、 p_1 種と p_2 種の2群の計測特性に分けて、次のようにおく。

$$\mathbf{x}_j' = [\mathbf{x}_j^{(1)'}, \mathbf{x}_j^{(2)'}], \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13.1)$$

ここに $\mathbf{x}_j^{(1)}$, $\mathbf{x}_j^{(2)}$ はそれぞれ p_1 次と p_2 次の観測ベクトルで、 $p_1 + p_2 = p$ となる。さらに、 \mathbf{x}_j の母分散共分散行列 Σ は正値定符号行列で、 p_1 要素と p_2 要素に分けて次のように小行列を定義しておく。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (13.2)$$

次いで、第1群の計測特性の任意の線形結合による新変量を

$$u_j = \alpha_1 x_{1j}^{(1)} + \alpha_2 x_{2j}^{(1)} + \dots + \alpha_{p_1} x_{p_1 j}^{(1)} \quad (13.3)$$

とし、第2群の計測特性についても同様に、任意の線形式を

$$v_j = \beta_1 x_{1j}^{(2)} + \beta_2 x_{2j}^{(2)} + \dots + \beta_{p_2} x_{p_2 j}^{(2)} \quad (13.4)$$

とする。ここに、 u_j と v_j を互に対応する新変量とする。上の 2 式を行列演算で示すと、簡単に

$$u_j = \alpha' x_j^{(1)}, \quad v_j = \beta' x_j^{(2)}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13.5)$$

と書ける。

そして、このようなあらゆる係数を取りうる $\{u_j, v_j\}$ の集まりの中で、 u と v の相関が最大になるように係数ベクトル α と β を定めることが主題となる。このような新変量 u_j と v_j を正準変量 (canonical variable) といい、この対応する変量間の相関を正準相関 (canonical correlation) という。

とくに、 $p_1=1$ で $p_2>1$ であれば、この問題は通常の多重偏回帰式を求めることと同じで、このときの正準相関はいわゆる重相関係数 (multiple correlation coefficient) と一致する。

このような発想から上記の一般の場合においても、 $x_j^{(1)}$ を基準変量 (criterion variable, または単に criteria), $x_j^{(2)}$ を予測変量 (predictor) という名称でよぶことがある。

したがって、正準相関分析では普通 $p_1>1$, $p_2>1$ の場合を取り扱い、 $x^{(1)}$ と $x^{(2)}$ のそれぞれから対応して作成される 1 次独立な正準変量の対 (pair) の数は p_1 と p_2 の小さいほうの数だけ得られることになる。また、解析的には $x^{(1)}$ と $x^{(2)}$ のいずれが予測変量で他方が基準変量であっても、また p_1 と p_2 のいずれが大きくても変わらない。したがって、本稿の以降では一般性を失わず $p_1 < p_2$ として記述する。

たとえば、職業の適性と日常の関心についての 2 種類の調査表がある。これらの p_1 種と p_2 種の特性は表面上の現象として全く異なっている。しかし、2 種類の調査表の間にかくれた相関性の系を明らかにする目的で正準相関分析を行なうとする。この際、相関性の系は相対応する正準変量でむすばれ、この間の相関性の深さは正準相関の値で示される。そして、解析にはいずれの調査表を $x^{(1)}$ または $x^{(2)}$ にして考えても同じ結果が得られる。

さて、上に導入した 2 種類の観測ベクトル $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ について、

$$E\{x^{(1)}\} = 0, \quad E\{x^{(2)}\} = 0 \quad (13.6)$$

を仮定する。したがって、式 (13.5) で定義されるように u と v の期待値は

$$E\{u\} = \alpha' E\{x^{(1)}\} = 0, \quad \text{同様に } E\{v\} = 0 \quad (13.7)$$

となる。

さらに、 u と v の分散がともに 1 になるように、任意の係数ベクトル α と β に制限をつけておく。すなわち、

$$V\{u\} = E\{u^2\} = E\{\alpha'x^{(1)}x^{(1)'}\alpha\} = \alpha'\Sigma_{11}\alpha = 1 \quad (13.8)$$

同様に

$$V\{v\} = E\{v^2\} = \beta'\Sigma_{22}\beta = 1 \quad (13.9)$$

が α, β についてなりたっているとする。

このとき u と v の間の相関係数は、式 (13.7) によって簡単に u と v の積の期待値で示され、次式のように算出される。

$$E\{uv\} = E\{\alpha'x^{(1)}x^{(2)'}\beta\} = \alpha'\Sigma_{12}\beta \quad (13.10)$$

したがって、本節の問題は式 (13.8) と (13.9) の条件下で式 (13.10) を最大ならしめるような α と β を決めることと要約される。

いま、式 (13.10) が上のような条件のもとに、 α と β に関して最大値を有することは明らかであるから、ラグランジュの乗数 (Lagrange multiplier) を λ および μ として、次の関数をつくる。

$$\alpha'\Sigma_{12}\beta - (\alpha'\Sigma_{11}\alpha - 1)\frac{\lambda}{2} - (\beta'\Sigma_{22}\beta - 1)\frac{\mu}{2} \quad (13.11)$$

さて、常法に従って、この関数を α および β の各要素で偏微分し、ゼロに等しいとおいて p 個 ($=p_1+p_2$) の連立 1 次方程式を解く。すなわち

$$\Sigma_{12}\beta - \lambda\Sigma_{11}\alpha = 0 \quad (13.12)$$

$$\Sigma_{12}'\alpha - \mu\Sigma_{22}\beta = 0 \quad (13.13)$$

を λ, μ および α と β について式 (13.8) と (13.9) のもとで解けばよい。

ここで、式 (13.12) の左側から α' を、また式 (13.13) の左側から β' をそれぞれ両辺に乗ざると、式 (13.8) および (13.9) によって

$$\lambda = \mu = \alpha'\Sigma_{12}\beta \quad (13.14)$$

または

$$= \beta'\Sigma_{12}'\alpha$$

が知れる。このことは式 (13.10) によって λ と μ が実は u と v の相関係数になっていることを示している。

ゆえに、式 (13.12) と (13.13) は $\Sigma_{12}' = \Sigma_{21}$ を用いて

$$-\lambda \Sigma_{11} \alpha + \Sigma_{12} \beta = 0 \quad (13.15)$$

$$\Sigma_{21} \alpha - \lambda \Sigma_{22} \beta = 0 \quad (13.16)$$

と書き換えられる。これらの式を一つの行列演算で示すと

$$\begin{bmatrix} -\lambda \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \quad (13.17)$$

となる。上の式は、式 (13.8) と (13.9) に対して意味をもたない $\alpha=0$ かつ $\beta=0$ でもないかぎり、左側の行列式がゼロであることを示している。

すなわち、 α と β の要素が同時にすべてゼロでない解をもつとして

$$\begin{vmatrix} -\lambda \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda \Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (13.18)$$

が必要である。この行列式は λ に関する p 次の多項式で、 p 個の実根を有することが容易に証明される。この p 個の実根を大きさの順に

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \quad (13.19)$$

としておく。

さて、 λ は式 (13.14) と (13.10) から u と v の相関係数すなわち正準相関であることが知られているから、ここでの λ の解として相関性を最も大きくするという見地にたって式 (13.19) で最大の λ_1 を採用する。そして、この λ_1 に対応する固有ベクトル α, β を $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}$ として、 u および v をこの係数ベクトルによって、次のように定める。

$$u_1 = \alpha^{(1)'} x^{(1)}, \quad v_1 = \beta^{(1)'} x^{(2)} \quad (13.20)$$

次いで、上に得た u_1 と v_1 に無相関で、しかも新たに $x^{(1)}$ の線形式 $u = \alpha' x^{(1)}$ と $x^{(2)}$ の線形式 $v = \beta' x^{(2)}$ との相関が最大になるような第 2 の正準変量の係数 $\alpha^{(2)}$ と $\beta^{(2)}$ を算出し、 u_2 と v_2 を定めることになる。このように $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots$ と同様の手順で、逐次新しい u と v を対 (pair) で求めていく。

この算出の手順を、一般化して第 r 番めの (u_r, v_r) まで得られた後に第 $r+1$ 番めの対を求める段階で示そう。すなわち、

$$u_i = \alpha^{(i)'} x^{(1)}, \quad v_i = \beta^{(i)'} x^{(2)}, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (13.21)$$

がすでに得られたとして、 u_{r+1} と v_{r+1} を定める。ここに第 $r+1$ 番めの任意の線形式の対を、新たに式 (13.5) のように u_{r+1} と v_{r+1} とすると、式 (13.21) のどれとも無相関であるためには、

$$\begin{aligned} E\{u_{r+1}u_i\} &= \alpha' \Sigma_{11} \alpha^{(i)} = 0, \\ E\{u_{r+1}v_i\} &= \alpha' \Sigma_{12} \beta^{(i)} = 0, \\ E\{v_{r+1}u_i\} &= \beta' \Sigma_{21} \alpha^{(i)} = 0, \\ E\{v_{r+1}v_i\} &= \beta' \Sigma_{22} \beta^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (13.22)$$

という条件を満足していなければならない。そして $E\{u_{r+1}v_{r+1}\}$ を最大ならしめるように係数 α と β を決めるわけである。

このためには、さきの式 (13.11) と同様にラグランジュの方法によって次の関数をつくる。

$$\begin{aligned} &\alpha' \Sigma_{12} \beta - (\alpha' \Sigma_{11} \alpha - 1) \frac{\lambda}{2} - (\beta' \Sigma_{22} \beta - 1) \frac{\mu}{2} \\ &+ \sum_{i=1}^r \frac{\nu_i}{2} \alpha' \Sigma_{11} \alpha^{(i)} + \sum_{i=1}^r \frac{\theta_i}{2} \beta' \Sigma_{22} \beta^{(i)} \end{aligned} \quad (13.23)$$

ここに λ , μ , ν_i および θ_i はラグランジュの乗数である。

この関数をそれぞれ α および β の各要素で偏微分して、ゼロに等しいとおくと、次の $p_1 + p_2$ 個の連立方程式を得る。

$$\Sigma_{12} \beta - \lambda \Sigma_{11} \alpha + \sum_i \nu_i \Sigma_{11} \alpha^{(i)} = 0 \quad (13.24)$$

$$\Sigma_{21} \alpha - \mu \Sigma_{22} \beta + \sum_i \theta_i \Sigma_{22} \beta^{(i)} = 0 \quad (13.25)$$

これらの式を整頓するために、まず ν_i と θ_i について解いてみる。いま、式 (13.24) の両辺に左から $\alpha^{(j) \prime}$ を、また式 (13.25) の両辺に左から $\beta^{(j) \prime}$ を乗じ、式 (13.22) の条件を適用する。ここに $1 \leq j \leq r$ 。この演算によって

$$\nu_j \alpha^{(j) \prime} \Sigma_{11} \alpha^{(j)} = \nu_j = 0 \quad (13.26)$$

$$\theta_j \beta^{(j) \prime} \Sigma_{22} \beta^{(j)} = \theta_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (13.27)$$

が得られ、実はすべての ν_j と θ_j はゼロであることが知れる。

したがって、上の式 (13.24) と (13.25) は次式のように簡略化される。

$$\Sigma_{12}\beta - \lambda\Sigma_{11}\alpha = 0 \quad (13.28)$$

$$\Sigma_{21}\alpha - \mu\Sigma_{22}\beta = 0 \quad (13.29)$$

ところで、これらの式は、第1番めの正準変量を求めたときの式(13.12)と(13.13)にそれぞれ全く同じ式になっている。そして、式(13.17)のように示されることになる。

このことから、第 r 番め ($r=1, 2, \dots$) の正準変量が得られた後に、式(13.8)、(13.9) および (13.22) のもとでの第 $r+1$ 番めの正準変量 u_{r+1} および v_{r+1} は、式(13.17)の解で第 $r+1$ 番めに大きな固有値 λ_{r+1} に対応する固有ベクトル ($\alpha^{(r+1)'}$, $\beta^{(r+1)'}$) を係数として示されることが知れる。すなわち、

$$u_{r+1} = \alpha^{(r+1)'}x^{(1)}, \quad v_{r+1} = \beta^{(r+1)'}x^{(2)} \quad (13.30)$$

で与えられる。

次いで、このような正準変量の対はいくつまで得られるであろうか。これに関係してすでに式(13.17)または(13.18)で固有値が p 個の実根として得られることを記述した。ここではもう少し詳しく調べるため、式(13.18)を $\lambda \neq 0$ として、次のように変形してみる。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{vmatrix} &= |-\lambda\Sigma_{22}| \cdot |-\lambda\Sigma_{11} - \Sigma_{12}(-\lambda\Sigma_{22})^{-1}\Sigma_{21}| \\ &= (-\lambda)^{p_2} \cdot |\Sigma_{22}| \cdot |-\lambda^{-1}(\lambda^2\Sigma_{11} - \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})| \\ &= (-\lambda)^{p_2-p_1} |\Sigma_{22}| \cdot |\lambda^2\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}| = 0 \end{aligned} \quad (13.31)$$

ここに $|\Sigma_{22}| \neq 0$ としているから

$$|\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} - \lambda^2\Sigma_{11}| = 0 \quad (13.32)$$

としてよい。

すなわち、式(13.18)における p_1+p_2 個の実数固有値のうち、 $2p_1$ 個はゼロでない $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \dots, \pm\lambda_{p_1}$ なる実根をもつことがわかる。ただし、いま λ は相関係数を意味し、大きいほうの値のみを問題としているから、

$$1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{p_1} > 0 \quad (13.33)$$

の関係がある。また式(13.18)は $\lambda=0$ であっても成立し、 p_1+p_2 個の実数固有値のうちで上に示されたゼロでない固有値の数を減じて、結局、式(13.18)は $(p_1+p_2)-2p_1=p_2-p_1$ 個の $\lambda=0$ を重根としてもつことが知れる。

さて、このような固有値と固有ベクトルの結果を正準変量間の相関行列の上でまとめてみよう。

まず、行列 A , B_1 , B_2 および Λ を次のように

$$\begin{aligned} A &\equiv [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(p_1)}], \\ B_1 &\equiv [\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(p_1)}], \\ B_2 &\equiv [\beta^{(p_1+1)}, \beta^{(p_1+2)}, \dots, \beta^{(p)}], \end{aligned}$$

$$A \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_{p_1} \end{bmatrix} \quad (13.34)$$

と定義する。

したがって、正準変量は

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{p_1}]' = A' \mathbf{x}^{(1)} \quad (13.35)$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = [v_1, v_2, \dots, v_{p_1}]' = B_1' \mathbf{x}^{(2)} \quad (13.36)$$

で示され、これまでの結果から $(p_1 \times p_1)$ 行列として

$$\begin{aligned} A' \Sigma_{11} A &= I, & A' \Sigma_{12} B_1 &= A, \\ B_1' \Sigma_{22} B_1 &= I \end{aligned} \quad (13.37)$$

がなりたっている。

また、 $p_2 \times (p_2 - p_1)$ 行列の B_2 に関しては、次のように定める。

まず、 $\beta^{(p_1+1)}$ を $\Sigma_{22} B_1$ に直交し、かつ $\beta^{(p_1+1)'} \Sigma_{22} \beta^{(p_1+1)} = 1$ と規準化して定める。次いで、 $\beta^{(p_1+2)}$ を $\Sigma_{22}(B_1 \beta^{(p_1+1)})$ に直交し、かつ $\beta^{(p_1+2)'} \Sigma_{22} \beta^{(p_1+2)} = 1$ と規準化する。このように逐次 $\beta^{(p)}$ まで定めていくと行列 B_2 について次の関係式が成立する。

$$B_2' \Sigma_{22} B_1 = 0 \quad (13.38)$$

$$B_2' \Sigma_{22} B_2 = I \quad (13.39)$$

ここで、もとの多変量観測特性ベクトル $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ の正準変量の見地から

$$\mathbf{u} = A' \mathbf{x}^{(1)}, \quad \mathbf{v}^{(2)} = B_1' \mathbf{x}^{(1)}, \quad \mathbf{v}^{(2)} = B_2' \mathbf{x}^{(2)} \quad (13.40)$$

$$\mathbf{v}' = [\mathbf{v}^{(1)'}; \mathbf{v}^{(2)'}] \quad (13.41)$$

とおき、上記の正準相関の関係をまとめて整理しよう。

いま、各観測変量の期待値がゼロであるから、母正準相関行列は直ちに次式で示される。

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} [\mathbf{u}' \mathbf{v}'] \right\} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1' \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{13.42}
 \end{aligned}$$

上の最終的な相関行列の構成をていねいに示すと、次のようになっている。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 u_1 & u_2 & \dots & u_{p_1} & v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \dots & v_{p_1}^{(1)} & v_{p_1+1}^{(2)} & v_{p_1+1}^{(2)} & \dots & v_p^{(2)} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & & v_{p_1}^{(1)} & v_{p_1+1}^{(2)} & v_{p_1+1}^{(2)} & & v_p^{(2)} & & & & \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 v_p^{(2)} & & & & & & & & & & &
 \end{array} \\
 \left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc}
 1 & & & & \lambda_1 & \lambda_2 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right] \tag{13.43}
 \end{array}$$

この章の初めに、正準相関分析は2群の多変量観測特性における共通因子によって対応づけられる正準変量の抽出とその因子解釈を目的とすると記述した。そして、この数理的な表現としては、 $\mathbf{x}^{(1)}$ と $\mathbf{x}^{(2)}$ があるとき、各ベクトル要素の線形表示間の相関を最大にし、 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{p_1}$ なる順序で、式(13.43)の形式を満たす $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_{p_1}, v_{p_1})$ を推定し、因子的解釈を行なうことといえる。ここで、この推定法の基本は式(13.17)を解いて (α, β) を求めることになる。

13.2 回帰論からの正準相関の解釈

正準相関分析は、これまで記述してきたように、2群の多変量観測特性において群ごとに観測特性の線形式を考え、その間の最大相関を論じて両群に対応する因子抽出を行なうのであり、このような解析法はまた別の観点として回帰

論の側から直截的に整理することもできる。心理学や精神医学など実質科学領域の現実の問題としても、この回帰論の立場から正準相関分析が解法の対象として考慮され、実際に適用を必要とする場合がある。

いま、前節と同じ記号で、2群の観測特性を $\mathbf{x}^{(1)}$ および $\mathbf{x}^{(2)}$ とし、全体としての観測値ベクトルを $\mathbf{x}' = [\mathbf{x}^{(1)'}, \mathbf{x}^{(2)'}]$ とする。このとき \mathbf{x} の分布に関しては

$$\mathbf{x} \in N(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (13.44)$$

$$\text{ここに } \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$$

を仮定する。

さらに、ここで $\mathbf{x}^{(2)}$ の値を固定したときの $\mathbf{x}^{(1)}$ の条件つき分布について

$$E\{\mathbf{x}^{(1)} | \mathbf{x}^{(2)}\} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)} \quad (13.45)$$

がなりたっているとする。このとき

$$\mathbf{B} = \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \quad (13.46)$$

の関係が示されることは、通常回帰論で明らかである。また

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)} + (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)}) \quad (13.47)$$

とおくと、右辺第2項の $(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)})$ は回帰式 (13.45) における残差誤差項を意味し、

$$E\{(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)})(\mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)})'\} = \mathbf{0}$$

となる。 $\mathbf{x}^{(1)}$ の回帰からのはずれに関する誤差の分散共分散行列 Ψ は次式で示される。

$$\begin{aligned} \Psi &= E\{(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)})(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)})'\} \\ &= E\{(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)})\mathbf{x}^{(1)'}\} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \end{aligned} \quad (13.48)$$

さて、このような回帰分析の適用で $\mathbf{x}^{(2)}$ の要素の線形結合により $\mathbf{x}^{(1)}$ を各要素ごとに推測できる。ただ、この際の配慮として正準相関分析では $\mathbf{x}^{(1)}$ の要素を個別に推測するのではなく、さらに $\mathbf{x}^{(1)}$ の要素を線形に結合した値(スカラー)に対する推測を $\mathbf{x}^{(2)}$ の要素の線形結合による値(スカラー)で最も良く相関するように、双方の線形結合を各段階ごとに互いに独立な関係で、 $\mathbf{x}^{(1)}$ の次数だけの対として求めることを問題とする。

このように $\mathbf{x}^{(1)}$ と $\mathbf{x}^{(2)}$ の双方の側から相対応して得られる線形式は、2群の多変量観測特性に潜在する共通の原因系を明らかにすることになり、 $\mathbf{x}^{(1)}$ と $\mathbf{x}^{(2)}$ における共通因子を表現していると考えてよい。この意味において、正準相関分析法も一つの因子分析の方法とみなすことができる。この思想を次のように定式化していく。

まず、 $\mathbf{x}^{(1)}$ の要素の任意の線形結合を

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}'\mathbf{x}^{(1)} \quad (13.49)$$

とする。ここに式 (13.45) と (13.48) の関係があるから

$$E(\mathbf{u}) = \mathbf{a}'\mathbf{B}\mathbf{x}^{(2)} \quad (13.50)$$

$$V(\mathbf{u}) = \mathbf{a}'\Psi\mathbf{a} = \mathbf{a}'\Sigma_{11}\mathbf{a} - \mathbf{a}'\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\mathbf{a} \quad (13.51)$$

は明らかである。

しかも、 $\mathbf{x}^{(1)}$ の要素の線形式 \mathbf{u} を $\mathbf{x}^{(2)}$ の要素の線形式として考えると、 n 個の $\mathbf{x}_j^{(2)}$ ($j=1, 2, \dots, n$) による回帰式の値 u_j の期待値の平均平方和は

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \{E(u_j)\}^2 = \frac{1}{n} \sum_j (\mathbf{a}'\mathbf{B}\mathbf{x}_j^{(2)}) (\mathbf{a}'\mathbf{B}\mathbf{x}_j^{(2)})' = \mathbf{a}'\mathbf{B}\mathbf{S}_{22}\mathbf{B}'\mathbf{a} \quad (13.52)$$

$$\text{ここに} \quad \mathbf{S}_{22} \equiv \sum_j \mathbf{x}_j^{(2)}\mathbf{x}_j^{(2)'} / n \quad (13.53)$$

となっている。ここで、 $\mathbf{x}_j^{(2)}$ を固定した変量 (確定変量, fixed variable) としてでなく、無作為な確率変量 (random variable) と考えれば、式 (13.53) は期待値として Σ_{22} に相当し、式 (13.52) は (13.51) の最右辺の第2項 $\mathbf{a}'\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\mathbf{a}$ と同じものになっている。

いま、 $\mathbf{x}_j^{(1)}$ の要素の線形式の上で、 $\mathbf{x}_j^{(1)}$ の要素からなる u_j に関する回帰式を最もあてはまりよく得ることは、式 (13.51) で示される u_j の分散 $\mathbf{a}'\Psi\mathbf{a}$ を一定にしておいて、その中で式 (13.52) を最大にするような \mathbf{a} を求めることである。ここでは $\mathbf{a}'\Psi\mathbf{a}=1$ のもとで \mathbf{a} を求める。

このために、いつものようにラグランジュの乗数 λ を用いた関数

$$\mathbf{a}'\mathbf{B}\mathbf{S}_{22}\mathbf{B}'\mathbf{a} - \lambda(\mathbf{a}'\Psi\mathbf{a} - 1)$$

を \mathbf{a} および λ で偏微分してゼロとおく。すなわち、 $\mathbf{a}'\Psi\mathbf{a}=1$ と次式

$$(\mathbf{B}\mathbf{S}_{22}\mathbf{B}' - \lambda\boldsymbol{\Psi})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (13.54)$$

の連立方程式をとく。ここで $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ として

$$|\mathbf{B}\mathbf{S}_{22}\mathbf{B}' - \lambda\boldsymbol{\Psi}| = 0 \quad (13.55)$$

を満足する λ を求め、これに対応する $\boldsymbol{\alpha}$ を求める。

ここで式 (13.54) の左から $\boldsymbol{\alpha}'$ を乗じて整頓すると

$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{B}\mathbf{S}_{22}\mathbf{B}'\boldsymbol{\alpha} = \lambda \quad (13.56)$$

となっている。

さて、式 (13.55) は λ に関する p_1 次の多項式で、 p_1 個の実根をもつことが容易に知れる。また、式 (13.56) の左辺は式 (13.52) そのもので、これを最大とするものであるから、式 (13.56) の λ としては最大根 λ_1 を採用する。したがって、 $\boldsymbol{\alpha}$ は λ_1 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ に定まる。次いで、 $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ に直交する第2の線形式 $u_2 = \boldsymbol{\alpha}^{(2)'}\mathbf{x}^{(1)}$ をさきと同様に $\mathbf{x}^{(2)}$ との関連で考え、式 (13.52) を最大にするような $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$ を求める。この解は式 (13.55) の第2番めに大きな実根 λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\alpha}^{(2)}$ として得られる。以下同様に、第 p_1 の線形式 $u_{p_1} = \boldsymbol{\alpha}^{(p_1)'}\mathbf{x}^{(1)}$ に関する $\boldsymbol{\alpha}^{(p_1)}$ は第 p_1 番めに大きな λ_{p_1} に対応する固有ベクトルとして得られる。

さて、これまでは $\mathbf{x}^{(2)}$ を確定変数とした回帰論の立場で式 (13.52) の最大値を導き $\boldsymbol{\alpha}$ を求めてきたが、前節の立場で \mathbf{S}_{22} を期待値 $\boldsymbol{\Sigma}_{22}$ で置き換えると式 (13.55) は、

$$|\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} - \lambda(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21})| = 0 \quad (13.57)$$

となる。この式を

$$|\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_{11}| = 0 \quad (13.58)$$

と書き改めると、 $\lambda/(1+\lambda)$ を固有値として前節の結果に一致する。

また、このような関係は回帰に関する分散分析の結果として、式 (13.51) からも直接的に考えることができる。すなわち、式 (13.51) の右辺第2項を移項して、

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\alpha} \quad (13.59)$$

を得る。この式は次のように解釈できる。

$$\left(\begin{array}{l} \mathbf{a}'\mathbf{x}^{(1)} \text{ の} \\ \text{全分散} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{回帰に基} \\ \text{づく分散} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{回帰からのはずれ} \\ \text{による誤差分散} \end{array} \right)$$

$$\text{または} \quad = \left(\begin{array}{l} \text{層間分散} \\ \text{層内誤差分散} \end{array} \right)$$

したがって回帰からのはずれによる誤差分散を最小にするには、 $\mathbf{a}'\Sigma_{11}\mathbf{a}=1$ の一定条件で $\mathbf{a}'\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\mathbf{a}$ を最大にするといふ。ここでラグランジュの方法により

$$\mathbf{a}'\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{a}'\Sigma_{11}\mathbf{a} - 1) \quad (13.60)$$

を \mathbf{a} により偏微分し、ゼロとおくことにより

$$(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} - \lambda\Sigma_{11})\mathbf{a} = 0 \quad (13.61)$$

を得る。

ここで $\mathbf{a} \neq 0$ として、 λ は

$$|\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} - \lambda\Sigma_{11}| = 0 \quad (13.62)$$

の根である。また式 (13.61) の左から \mathbf{a}' を乗ずると、 $\mathbf{a}'\Sigma_{11}\mathbf{a}=1$ によって

$$\mathbf{a}'\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\mathbf{a} = \lambda \quad (13.63)$$

を得る。

したがって、 λ として式 (13.62) の最大根 λ_1 を採らねばならず、さらに \mathbf{a} は、この λ_1 に対応する固有ベクトル $\mathbf{a}^{(1)}$ で定められることになる。第 2 ベクトル $\mathbf{a}^{(2)}$ 以降も、さきと全く同様の関係で得られる。

13.3 予測の立場からの正準相関の解釈

すでに、 $\mathbf{x}^{(1)}$ を基準変量、 $\mathbf{x}^{(2)}$ を予測変量とよぶことは 13.1 節で述べたが、本節では、このような予測の立場から正準相関分析を整理してみよう。

いま、二つの確率変数 u と v があり、これらについて

$$\begin{aligned} E(u) &= E(v) = 0, \\ V(u) &= \sigma_u^2, \quad V(v) = \sigma_v^2, \quad \rho(u, v) = \rho \end{aligned} \quad (13.64)$$

を仮定しておく。さらに、 u を v の定数 b 倍で近似できる、すなわち、二つ

の確率変数の間に

$$u \doteq bv \quad (13.65)$$

で示される簡単な関数関係をおく。ここで $u-bv$ の分散を考えると容易に次式を得る。

$$\begin{aligned} E\{(u-bv)^2\} &= \sigma_u^2 - 2b\rho\sigma_u\sigma_v + b^2\sigma_v^2 \\ &= (1-\rho^2)\sigma_u^2 + (b\sigma_v - \rho\sigma_u)^2 \end{aligned} \quad (13.66)$$

さて、この際の b の決め方は、上の予測の誤差を最小ならしめるものが望ましい。このためには式 (13.66) の右辺第 2 項をゼロにするとよいから

$$b = \rho \frac{\sigma_u}{\sigma_v} \quad (13.67)$$

が得られる。

したがって、上の b によって v から u を線形で予測することができ、このときの予測誤差分散は $(1-\rho^2)\sigma_u^2$ である。また、この u の予測誤差分散とももとの u の分散との比は

$$\frac{(1-\rho^2)\sigma_u^2}{\sigma_u^2} = (1-\rho^2) \quad (13.68)$$

となり、これは u に関する v の予測の相対効率 (a relative effect of v on u) を示す一つの尺度と考えることができる。ここに、当然 ρ^2 が 1 に近いほど u を予測するうえで、 v の効率が大きいわけである。

次に、このような予測の観点から正準相関分析について考察する。いま、 \mathbf{x}' を式 (13.1) のように $(\mathbf{x}^{(1)'}, \mathbf{x}^{(2)'})$ からなる確率ベクトルとし、線形式 $u = \mathbf{a}'\mathbf{x}^{(1)}$ を予測するために、 $v = \mathbf{\beta}'\mathbf{x}^{(2)}$ を用いることを考えよう。

このとき、 u と v の間の相関係数が最大であれば、 v は u を最善 (best) に予測するといひ、 $\mathbf{\beta}'\mathbf{x}^{(2)}$ は最善の予測値である。さて、式 (13.65) による u の予測に関する v の効率を知るために、 u の分散を v の側で考えると、式 (13.67) によって

$$E\{(bv)^2\} = \rho^2 \frac{\sigma_u^2}{\sigma_v^2} E\{v^2\} = \rho^2 \sigma_u^2 \quad (13.69)$$

であり、予測の相対効率は ρ^2 となる。

このように、 $\mathbf{x}^{(1)}$ の要素の線形式の予測に関する $\mathbf{x}^{(2)}$ の要素の線形式の最

大効率は、 $\alpha^{(1)'}\mathbf{x}^{(1)}$ の予測に関する $\beta^{(1)'}\mathbf{x}^{(2)}$ の効率で定められる。 $\mathbf{x}^{(2)}$ が確率ベクトルでない場合も、全く同様に論じられる。とくに、 $p_1=1$ のときには、正準相関係数は $\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}^{(2)}$ の間の重相関係数に相当している。

13.4 正準変量と正準相関の推定と検定

前節までは、正準変量と正準相関の定義や特性をしらべるために、関係式を主として母数の上で取り扱ってきた。

したがって、本節では実際に観測データが与えられたとき、これをいかに前節の結果に具体的に適用するかという推定の方法、およびこのような $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ の推定値やそれらの基礎となっている λ_i の実現値が統計的に有意義な (significant) 数値であるか否かという検定の方法について記述する。

13.4.1 推定の方法

いま、本章の初めのように p 次元の多変量観測ベクトルを \mathbf{x}_j ($j=1, 2, \dots, n$) とし、これらがいずれも互いに独立な $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ からの標本とする。また、 \mathbf{x}_j の p 個の要素を p_1 個と p_2 個 ($p_1 \leq p_2$) の要素に分け $\mathbf{x}_j^{(1)}$ と $\mathbf{x}_j^{(2)}$ とし、式 (13.1) および (13.2) のように定義しておく。

このとき、最大尤度法 (maximum likelihood method) によって母数 $\boldsymbol{\mu}$ および $\boldsymbol{\Sigma}$ の推定量を求めると

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j / n \quad (13.70)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{11} & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{12} \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \sum_j (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})' \\ &= \frac{1}{n} \left[\begin{array}{l} \sum_j (\mathbf{x}_j^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})(\mathbf{x}_j^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})' \quad \sum_j (\mathbf{x}_j^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})(\mathbf{x}_j^{(2)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)})' \\ \sum_j (\mathbf{x}_j^{(2)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)})(\mathbf{x}_j^{(1)} - \bar{\mathbf{x}}^{(1)})' \quad \sum_j (\mathbf{x}_j^{(2)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)})(\mathbf{x}_j^{(2)} - \bar{\mathbf{x}}^{(2)})' \end{array} \right] \end{aligned} \quad (13.71)$$

が与えられる。

さらに、式 (13.34) で定義した正準相関行列 \mathbf{A} および正準変量の係数 \mathbf{A} と \mathbf{B}_1 の最尤推定はいずれも $\boldsymbol{\Sigma}$ の関数であるからやはり上の最尤推定 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ を適用することができる。また、もし正準相関係数がすべて異なって \mathbf{A} の各列の最

初の要素が非負であれば、行列 \mathbf{A} , \mathbf{A} および \mathbf{B}_1 は一意に定められる。 \mathbf{B}_2 の不定性 (indeterminacy) に関しては、右側から $(p_2 - p_1)$ 次の直交行列を乗じてもよく、 \mathbf{B}_2 の形に関する要請を条件に付加して一意に定められる。

さて、 \mathbf{A} の対角線要素 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p_1}$ の最尤推定量は、式 (13.18) に対応し

$$\begin{vmatrix} -\lambda \hat{\Sigma}_{11} & \hat{\Sigma}_{12} \\ \hat{\Sigma}_{21} & -\lambda \hat{\Sigma}_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (13.72)$$

の根として $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{p_1}$ として得られる。

そして、 $\hat{\lambda}_i$ に対応する $\hat{\mathbf{A}}$ と $\hat{\mathbf{B}}_1$ の第 i 列は、それぞれ次式を満足する $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ および $\hat{\mathbf{b}}^{(i)}$ となる。

$$\begin{bmatrix} -\hat{\lambda}_i \hat{\Sigma}_{11} & \hat{\Sigma}_{12} \\ \hat{\Sigma}_{21} & -\hat{\lambda}_i \hat{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{b}}^{(i)} \end{bmatrix} = 0 \quad (13.73)$$

$$\hat{\mathbf{a}}^{(i)'} \hat{\Sigma}_{11} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} = 1,$$

$$\hat{\mathbf{b}}^{(i)'} \hat{\Sigma}_{22} \hat{\mathbf{b}}^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p_1 \quad (13.74)$$

また、 $\hat{\mathbf{B}}_2$ については

$$\hat{\mathbf{B}}_2' \hat{\Sigma}_{22} \hat{\mathbf{B}}_1 = 0 \quad (13.75)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_2' \hat{\Sigma}_{22} \hat{\mathbf{B}}_2 = \mathbf{I} \quad (13.76)$$

を満たす。

このように前節の母数に関する結果に対応して最尤推定量を代用すればよく、 $\hat{\mathbf{a}}^{(i)'} \mathbf{x}^{(1)}$ と $\hat{\mathbf{b}}^{(i)'} \mathbf{x}^{(2)}$ を標本正準変量、また $\hat{\mathbf{A}}$ を標本正準相関行列とよんでいる。

もし、 Σ の推定量として、式 (13.71) のような最尤推定量ではなく、次式で示される不偏推定量

$$\hat{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{11} & \hat{\Sigma}_{12} \\ \hat{\Sigma}_{21} & \hat{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \equiv \frac{n}{n-1} \hat{\Sigma} \quad (13.77)$$

を使用するならば、式 (13.74) から知れるように

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} &= \sqrt{\frac{n-1}{n}} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} \\ \hat{\mathbf{b}}^{(i)} &= \sqrt{\frac{n-1}{n}} \hat{\mathbf{b}}^{(i)} \end{aligned} \quad (13.78)$$

の関係が示される。しかし、正準相関行列 \mathbf{A} の推定には変わらない。

さて、ここで $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ と $\hat{\mathbf{\beta}}^{(i)}$ の具体的な計算方法について述べよう。

数値計算は、上で示したように式 (13.73) に基づいて忠実に多項式の解として $\hat{\lambda}_i$ を求め、これに対応する固有ベクトル $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ と $\hat{\mathbf{\beta}}^{(i)}$ を算出すればよいのであるが、式 (13.73) または式 (13.17) によらず、直接に固有値と固有ベクトルの解法の形式にしたほうが楽である。

このために、式 (13.15) の段階で両辺に λ を乗じ

$$\lambda \Sigma_{12} \beta = \lambda^2 \Sigma_{11} \alpha \quad (13.79)$$

を得、また式 (13.16) の両辺に左から Σ_{22}^{-1} を乗じ

$$\lambda \beta = \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \alpha \quad (13.80)$$

を得ておく。ここで、式 (13.80) の $\lambda \beta$ を式 (13.79) の左辺に代入し、整頓すると次式が得られる。

$$[\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} - \lambda^2 \mathbf{I}] \alpha = 0 \quad (13.81)$$

したがって、上式の各母数に対応する推定量を用いて、 p_1 次正方行列 $\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$ の p_1 個の固有値 $\hat{\lambda}_1^2 \geq \hat{\lambda}_2^2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{p_1}^2$ と、それぞれに対応する固有ベクトル $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ を算出すればよい。ただし、各 λ_i は相関係数に相当し大きい順に意味をもたせているから、上に得た固有値の平方根をとり、式 (13.43) に示すように $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_{p_1}$ を得る。

次いで $\beta^{(i)}$ を求めるには、上に得た $\hat{\lambda}_i$ と $\hat{\mathbf{a}}^{(i)}$ を用いながら式 (13.80) の関係によって

$$\hat{\mathbf{\beta}}^{(i)} = \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \hat{\mathbf{a}}^{(i)} / \hat{\lambda}_i, \quad i = 1, 2, \dots, p_1 \quad (13.82)$$

を計算するとよい。

もちろん、式 (13.81) の代わりに、式 (13.16) に λ を乗じ、また式 (13.15) の左から Σ_{11}^{-1} を乗じて

$$\begin{aligned} \lambda \Sigma_{21} \alpha &= \lambda^2 \Sigma_{22} \beta, \\ \lambda \alpha &= \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \beta \end{aligned} \quad (13.83)$$

を導き、

$$[\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} - \lambda^2 \mathbf{I}] \beta = 0 \quad (13.84)$$

から得てもよい。

しかし、式 (13.84) による場合は p_2 個の固有値を得るが、いま $p_2 > p_1$ であって式 (13.32) から明らかなように $p_2 - p_1$ 個の固有値はゼロとなる。すなわち、ゼロでない固有値は p_1 個となる。したがって、計算時間と労力の節約からいって、式 (13.84) から数値計算するよりも式 (13.81) から計算を始めるほうが望ましいわけである。そして、このような通常の行列の固有値と固有ベクトルの計算は電子計算機のプログラムによるのがよい。

このようにして、正準変量の係数 α と β が推定されると、他の解法でも因子評点 (factor score) を算出するように、各観測対象ごとに $\hat{\alpha}'x_j^{(1)}$ と $\hat{\beta}'x_j^{(2)}$ ($j=1, 2, \dots$) を算出する。そして、正準変量の意味する評点 (score) について、ふたたび正準変量の解釈を吟味して、さらに検討する実質科学上の仕事がある。

13.4.2 検定の方法

正準相関分析に関する検定は、正準変量そのものについてよりも、その基礎となっている正準相関係数について行なわれる。

すなわち、 p_1 個の観測特性と p_2 個の観測特性がそれぞれ対応して構成する二つの正準変量の間的相关性はゼロであるという帰無仮説を検定する。そして、 p_1 個の正準相関係数のうち、いくつまでが上の帰無仮説に関して統計的に有意性を示すのか、これに伴って正準変量を取りあげる基準にすることができる。ここでは最も頻用されている検定法として、Bartlett が 1941 年に *Biometrika* に提唱した方法を引用する。

いま、簡単のために前節で推定された正準相関係数 $\hat{\lambda}_i$ を単に λ_i とし、これらが大きさの順に $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{p_1}$ とおかれているとする ($p_1 \leq p_2$)。

このとき、 λ_i^2 の同時分布は

$$C \cdot \prod_{i=1}^{p_1} \{\lambda_i^{p_2-p_1-1} (1-\lambda_i^2)^{(n-p_1-p_2-1)/2} \prod_{j=i+1}^{p_1} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2) \cdot d\lambda_i^2\} \quad (13.85)$$

ここに

$$C \equiv \pi^{p_1/2} \prod_{i=1}^{p_1} \frac{\Gamma\left\{\frac{1}{2}(n-i+1)\right\}}{\Gamma\left\{\frac{1}{2}(p_1-i+1)\right\} \Gamma\left\{\frac{1}{2}(p_2-i+1)\right\} \Gamma\left\{\frac{1}{2}(n-p_2-i+1)\right\}} \quad (13.86)$$

で与えられる。

さて、Wilks や Hotelling らによっても提唱されたように、いくつかの λ_i が同時にゼロでないことを検定する有力な基準 (criterion) として

$$A \equiv \prod_{i=1}^{p_1} (1 - \lambda_i^2), \quad p_1 \leq p_2 \quad (13.87)$$

で示される統計量を設ける。

ここで、もし $p_1=1$ であれば、 A の分布は本質的には λ_1^2 の分布であり、式 (13.85) の分布は Fisher の z 分布に変換でき、これによって容易に検定できる。また、 $p_1=2$ では、Wilks により同様の分布が \sqrt{A} について示されている。

さらに、 $p_1 > 2$ に関し Bartlett はすべての λ_i がゼロであるという帰無仮説のもとに、良い近似で次の統計量

$$\chi^2 \equiv - \left\{ n - \frac{1}{2} (p_1 + p_2 + 1) \right\} \log A \quad (13.88)$$

が自由度 $p_1 p_2$ の χ^2 分布に従うことを示している。

そして、この検定によって帰無仮説が棄却されれば、 A に最も大きく寄与する λ_1 を除いて、 $p_1 - 1$ 個の根 $\lambda_2, \dots, \lambda_{p_1}$ について同様の有意性の検定を行なっていくことを提唱している。すなわち

$$A_1 \equiv \prod_{i=2}^{p_1} (1 - \lambda_i^2) \quad (13.89)$$

とおいて、

$$\chi^2 \equiv - \left\{ n - \frac{1}{2} (p_1 + p_2 + 1) \right\} \log A_1 \quad (13.90)$$

が自由度 $(p_1 - 1)(p_2 - 1)$ の χ^2 分布に良い近似で従っていることを用いて検定を行なう。

このように逐次的に検定し一般に $r - 1$ 番めまでの検定でその帰無仮説が棄却されたとして、その後は残りの $p_1 - r + 1$ 個の根についてゼロであるという仮説を

$$A_{r-1} \equiv \prod_{i=r}^{p_1} (1 - \lambda_i^2), \quad r = 2, 3, \dots, p_1 \quad (13.91)$$

とにおいて

$$\chi^2 \equiv - \left\{ n - \frac{1}{2} (p_1 + p_2 + 1) \right\} \log A_{r-1} \quad (13.92)$$

が自由度 $(p_1 - r)(p_2 - r)$ の χ^2 分布に従うことによって検定する。

この逐次的な検定により、正準相関係数の大きいほうから次第に小さいほうにわたって帰無仮説をせばめていく。そして、いくつまでの正準相関係数を除いたときに帰無仮説が捨てられなくなるかを知る。この継続的な検定手順によって、統計的に有意な正準相関または正準変量のみをとりあげ、実質科学上の考察を行なうのである。

次に、正準相関分析の数値計算例を、普通感冒 (common cold) の状態像に関する調査例* で示そう。ここでは比較的観察しやすい6種類の全身症状と7種類の呼吸器症状の間の正準相関の検定を行ない、正準変量の意味する因子的解釈を検討している。

ここでとりあげられた全身症状は、頭痛、悪感、食欲不振、倦怠感、関節痛および作業意欲の6項目、呼吸器症状は、くしゃみ、鼻汁、鼻閉、咽頭痛、嗄声、咳および痰の7項目で、いずれも頻度 (frequency) と強度 (intensity) を適切に勘案した4点法を各症状項目の重篤さの評価尺度として観測している。観測資料は1週間以内に治療した軽度の219例の初診時の詳しい記録に基づいている。

次の表 13.1 は、各症状項目ごとに素点分布を正規化したあとの13症状間の相関行列 \mathbf{R} を示している。

もちろん、正準相関分析は標本分散共分散行列から出発して解析できるのであるが、ここでは各症状項目の値をすべて $N(0, 1)$ に標準化した分布として各症状項目の重みを同一にして解析を行なっている。この出発が分散共分散行列である場合の差異は本節末尾の試算結果で吟味しよう。すなわち、この適用例では式 (13.1) の $\mathbf{x}_j^{(1)}$ は全身症状特性 ($p_1=6$)、 $\mathbf{x}_j^{(2)}$ は呼吸器症状特性 ($p_2=7$) で、

$$\mathbf{x}_j' = [\mathbf{x}_j^{(1)'}; \mathbf{x}_j^{(2)'}], \quad j = 1, 2, \dots, 219$$

とおいている。また、式 (13.70) では

* 御旅屋、藤元により第14回生物統計学会 (1966) 総会で発表された一部分である。

表 13.1 普通感冒における 13 症

	全 身 症 状					
	頭 痛 X_1	悪 感 X_2	食欲不振 X_3	倦 怠 感 X_4	関 節 痛 X_5	作業意欲 X_6
X_1	1.0000	0.4047	0.2030	0.4933	0.1890	0.3497
X_2	0.4047	1.0000	-0.0038	0.3336	0.3680	0.3653
X_3	0.2030	-0.0038	1.0000	0.4384	0.0069	0.4075
X_4	0.4933	0.3336	0.4384	1.0000	0.2197	0.5592
X_5	0.1890	0.3680	0.0069	0.2197	1.0000	0.1831
X_6	0.3497	0.3653	0.4075	0.5592	0.1831	1.0000
X_7	0.2731	0.0448	0.0990	0.1713	0.0508	0.0419
X_8	0.3755	0.1401	0.1339	0.2734	0.1018	0.1540
X_9	0.1545	0.1233	-0.0157	0.1552	-0.0092	0.0945
X_{10}	0.2531	0.0941	0.1294	0.1875	0.0496	0.2129
X_{11}	0.0292	0.0602	0.0511	0.1144	0.0615	0.1209
X_{12}	0.1483	0.0800	0.0919	0.0924	0.1377	0.0476
X_{13}	0.1598	0.0974	0.1658	0.1883	0.1017	0.1541

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 0, \quad \hat{\Sigma} = R$$

である。

したがって、正準相関係数の 2 乗を固有値とする式 (13.81) に必要な $p_1 \times p_1$ 非対称行列を $\hat{\Sigma}_{11}^{-1} \hat{\Sigma}_{12} \hat{\Sigma}_{22}^{-1} \hat{\Sigma}_{21}$ とし、 R を同形に分割して $R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}$ を計算すればよい。この $p_1 \times p_1$ 行列を算出すると表 13.2 のように得られる。

表 13.2 正準相関と正準変量を算出のための 6×6 行列 ($R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}$)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)	0.1661	0.0453	0.0594	0.0982	0.0408	0.0535
(2)	-0.0230	0.0029	-0.0147	-0.0090	-0.0058	-0.0066
(3)	0.0232	0.0013	0.0293	0.0142	0.0217	0.0099
(4)	0.0414	0.0260	0.0122	0.0467	0.0082	0.0256
(5)	0.0178	0.0035	0.0194	0.0089	0.0273	0.0006
(6)	-0.0049	0.0067	0.0116	0.0135	-0.0087	0.0427

さて、この固有値は大きさの順に

$$\lambda_1^2 = 0.2006 = (0.4479)^2, \quad \lambda_4^2 = 0.0192 = (0.1386)^2$$

$$\lambda_2^2 = 0.0518 = (0.2271)^2, \quad \lambda_5^2 = 0.0067 = (0.0818)^2$$

$$\lambda_3^2 = 0.0351 = (0.1874)^2, \quad \lambda_6^2 = 0.0020 = (0.0446)^2$$

状の重症度間の相関行列

呼 吸 器 症 状							(参考) 標準偏差
くしゃみ X_7	鼻汁 X_8	鼻閉 X_9	咽頭痛 X_{10}	嘔声 X_{11}	咳 X_{12}	痰 X_{13}	
0.2731	0.3755	0.1545	0.2531	0.0292	0.1483	0.1593	0.7531
0.0448	0.1401	0.1233	0.0941	0.0602	0.0800	0.0974	0.5284
0.0990	0.1339	-0.0157	0.1294	0.0511	0.0919	0.1658	0.6102
0.1713	0.2734	0.1552	0.1875	0.1144	0.0924	0.1883	0.7734
0.0508	0.1018	-0.0092	0.0496	0.0615	0.1377	0.1017	0.3323
0.0419	0.1540	0.0945	0.2129	0.1209	0.0476	0.1541	0.7164
1.0000	0.4967	0.1812	0.1801	0.0420	0.0506	0.1575	0.8546
0.4967	1.0000	0.3151	0.2310	0.0274	0.0949	0.2357	0.8010
0.1812	0.3151	1.0000	0.2936	0.2369	0.1136	0.1324	0.8563
0.1801	0.2310	0.2936	1.0000	0.2957	0.3240	0.2563	0.7921
0.0420	0.0274	0.2369	0.2957	1.0000	0.1486	0.1559	0.5097
0.0506	0.0949	0.1136	0.3240	0.1486	1.0000	0.5467	0.8657
0.1575	0.2357	0.1324	0.2563	0.1559	0.5467	1.0000	0.7363

と得られ、正準相関係数はこれらの平方根として上に小数第4位まで正確に示している。

次いで、これらの固有値に対応する固有ベクトルを求めるわけであるが、このベクトルを一意的に定めるには、式 (13.74) のように $\hat{\alpha}^{(i)'} \hat{R}_{11} \hat{\alpha}^{(i)} = 1$ を満たすように算定する。また、 $\hat{\alpha}^{(i)}$ に対応する他方の正準変量の係数ベクトル $\hat{\beta}^{(i)}$ は式 (13.82) によって直接に求められる。

これらの正準相関係数と正準変量の係数ベクトルの計算結果を示すと、表 13.3 の形式にまとめられる。

また、このときの \hat{B}_2 は表 13.4 に整理し、 $\mathbf{x}^{(2)}$ に関する係数行列 $[\hat{B}_1', \hat{B}_2']$ として示している。

このようにして、式 (13.35) および (13.36) にあたる正準変量が得られる。ここで、数値計算の検算のために、いちど算出された正準変量の間の相関行列、すなわち式 (13.42) または (13.43) を求めておくとよい。表 13.5 では、相関行列の最も主要な $\hat{A}'R_{11}$ 、 $\hat{B}_1'R_{22}\hat{B}_1$ 、 $\hat{A}'R_{12}\hat{B}_1$ 、 $\hat{B}_2'R_{22}\hat{B}_1$ 、 $\hat{B}_2'R_{22}\hat{B}_2$ および $\hat{A}'R_{12}\hat{B}_2$ の部分に点線を入れて算出した結果を示している。

この数値例では相当に正確な結果を得ていることが知れる。

表 13.3 正準相関係数と正準変量の

正準相関係数 正準変量の係数		$\lambda_1=0.4479$		$\lambda_2=0.2271$		$\lambda_3=0.1874$	
		$\hat{a}^{(1)}$	$\hat{\beta}^{(1)}$	$\hat{a}^{(2)}$	$\hat{\beta}^{(2)}$	$\hat{a}^{(3)}$	$\hat{\beta}^{(3)}$
X 1	X 7	0.8430	0.2294	-0.4810	-0.5289	-0.3029	-0.1732
X 2	X 8	-0.1223	0.6537	0.1770	-0.0358	-0.2009	-0.0173
X 3	X 9	0.1455	-0.0481	-0.2760	0.3222	0.7599	-0.8235
X 4	X10	0.2224	0.3569	0.3147	0.4436	-0.4047	0.1323
X 5	X11	0.1118	-0.0320	-0.4064	0.3066	0.6666	0.3259
X 6	X12	-0.0082	0.1319	0.9186	-0.7898	0.3005	0.1659
	X13		0.1016		0.5576		0.4768

表 13.4 $\mathbf{x}^{(2)}$ に関する係数行列

$$[\hat{B}_1' \hat{B}_2'] = \begin{bmatrix} 0.2294 & -0.5289 & -0.1732 & -0.1156 & -0.7141 & -0.2184 & -0.6374 \\ 0.6537 & -0.0358 & -0.0173 & 0.2001 & 0.3211 & -0.2158 & 0.9344 \\ -0.0481 & 0.3222 & -0.8235 & 0.4109 & 0.1162 & 0.3467 & -0.3629 \\ 0.3569 & 0.4436 & 0.1323 & -0.9013 & 0.2742 & 0.0123 & -0.2786 \\ -0.0320 & 0.3066 & 0.3259 & 0.4993 & -0.0399 & -0.8265 & -0.1063 \\ 0.1319 & -0.7898 & 0.1659 & 0.3821 & 0.7551 & 0.0244 & -0.3646 \\ 0.1016 & 0.5576 & 0.4768 & 0.2215 & -0.6788 & 0.6756 & 0.0438 \end{bmatrix}$$

次に、表 13.3 で示した正準相関係数の有意性の検定を 13.4.2 項の方法で行なってみよう。このためには、まず式 (13.87) や (13.91) によって A_1, A_2, \dots, A_6 を求め、これらの対数値を用いた式 (13.88) または (13.92) で χ^2 検定を行なうことになる。この計算手順と結果および検定を表 13.6 で示している。

表 13.5 正 準 変 量 間

0.9999	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.9999	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	0.9999	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.9999	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.9999	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.9999

0.4478	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
0.0000	0.2271	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	-0.0000	0.1874	0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.1386	-0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0818	-0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0446

0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000

表 13.6 正準相関の検定

正準相関係数	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
	0.4479	0.2271	0.1874	0.1386	0.0818	0.0446
$1-\lambda_i^2$	9.7994	0.9482	0.9649	0.9802	0.9933	0.9980
A_{i-1}	0.7236	0.9052	0.9381	0.9723	0.9913	0.9980
$X_{obs.}^2$	72.23	24.76	13.54	5.96	1.85	0.42
d.f.	42	30	20	12	6	2
χ^2 値 (5%)	(58.14)	(43.8)	(31.4)	(21.0)	(12.59)	(5.99)
1%	66.20	50.9	37.6	26.2	16.81	9.21
有意性の判定	**	—	—	—	—	—

注. ** は 1% の危険率で有意性を示す.

した結果を参考として表 13.7 に示しておく。

さきの表 13.3 とこの表を比較し、固有値は全く同一であり、係数ベクトルは表 13.7 の係数ベクトルの各要素 ($i=1, 2, \dots, 13$) に対応する標準偏差 (表 13.1) を乗じた値が、表 13.3 の結果になっていることを明示している。

13.4.3 観測特性を m 個の部分ベクトルとする正準相関分析

これまでは多変量観測特性を 2 群に分けた際の正準相関分析を記述してきた。Horst は、1961 年にこれを一般化して、多変量観測特性を m 群に分けたときの正準相関分析を展開した。したがって、この場合の解析の実質科学的な意図および用途はこれまでの 2 群の場合と全く同様で、単に考案と定式化上の拡張にあたる。

いま、 p 次元観測特性ベクトル \mathbf{x} を要素がそれぞれ p_i の m 個の部分ベクトル $\mathbf{x}^{(i)}$ に分けて考える。すなわち $p = \sum_{i=1}^m p_i$ として

表 13.7 分散共分散行列を用いて解析した正準相

正準相関係数		$\lambda_1=0.4479$		$\lambda_2=0.2271$		$\lambda_3=0.1874$	
正準変量の係数		$\hat{\alpha}^{(1)}$	$\hat{\beta}^{(1)}$	$\hat{\alpha}^{(2)}$	$\hat{\beta}^{(2)}$	$\hat{\alpha}^{(3)}$	$\hat{\beta}^{(3)}$
X 1	X 7	1.1194	0.2685	-0.6387	-0.6189	-0.4023	-0.2027
X 2	X 8	-0.2314	0.8061	-0.3351	-0.0442	-0.3802	-0.0213
X 3	X 9	0.2347	-0.0563	-0.4451	0.3762	1.2254	-0.9616
X 4	X10	0.2876	0.4506	0.4069	0.5601	-0.5233	0.1671
X 5	X11	0.3267	-0.0629	-1.1869	0.6016	1.9468	0.6394
X 6	X12	-0.0115	0.1525	1.2822	-0.9124	0.4195	0.1917
	X13		0.1381		0.7573		0.6476

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_{p_i}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13.93)$$

とおく。また、これらの n 個の観測値ベクトルには観測番号 (j) を添字とし、一括して次のような観測値行列 \mathbf{X} を新たに定義しておく。

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_j^{(i)'}] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(1)'} & \mathbf{x}_1^{(2)'} & \dots & \mathbf{x}_1^{(m)'} \\ \mathbf{x}_2^{(1)'} & \mathbf{x}_2^{(2)'} & \dots & \mathbf{x}_2^{(m)'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_n^{(1)'} & \mathbf{x}_n^{(2)'} & \dots & \mathbf{x}_n^{(m)'} \end{bmatrix} \quad (13.94)$$

したがって、上の \mathbf{X} の各要素がすでに規準化されているとすると、標本相関行列 \mathbf{R} は、

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}'\mathbf{X}/n \quad (13.95)$$

で示され、この \mathbf{R} と \mathbf{X} は観測特性の m 個の部分ベクトルの観点から

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_{ij}], \quad \mathbf{X} = [\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(m)}] \quad (13.96)$$

とも書くことができる。 $i, j = 1, 2, \dots, m$

さらに、対応する m 対の正準変量としてつくりうる数 k としては

$$k = \min(p_1, p_2, \dots, p_m) \quad (13.97)$$

であり、第 i 部分ベクトルの要素でできる k 個の正準変量を

$$\mathbf{Z}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i)}\mathbf{b}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13.98)$$

とする。ここに、 $\mathbf{Z}^{(i)}$ は $n \times k$ 行列、 $\mathbf{X}^{(i)}$ は $n \times p_i$ の観測行列であり、 $\mathbf{b}^{(i)}$

関係数と正準変量の係数ベクトルの計算結果

$\lambda_4=0.1386$		$\lambda_5=0.0818$		$\lambda_6=0.0446$		$\hat{B}_2' = \hat{\beta}^{(7)}$
$\hat{\alpha}^{(4)}$	$\hat{\beta}^{(4)}$	$\hat{\alpha}^{(5)}$	$\hat{\beta}^{(5)}$	$\hat{\alpha}^{(6)}$	$\hat{\beta}^{(6)}$	
-0.7878	-0.1353	0.3313	-0.8356	-0.0348	-0.2556	-0.7459
1.0560	0.2468	0.7275	0.3960	1.8313	-0.2661	1.1521
-0.1375	0.4798	-0.6200	0.1357	1.1993	0.4049	-0.4238
1.1301	-1.1379	-1.0059	0.3462	-0.5868	0.0156	-0.3518
1.0117	0.9795	1.1779	-0.0785	-1.5150	-1.6213	-0.2086
-0.8625	0.4414	0.6673	0.8722	-0.4692	0.0282	-0.4211
	0.3009		-0.9217		0.9175	0.0595

$$D_b = \begin{bmatrix} b^{(1)} & & & \\ & b^{(2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b^{(m)} \end{bmatrix}, \quad D_\beta = \begin{bmatrix} \beta^{(1)} & & & \\ & \beta^{(2)} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta^{(m)} \end{bmatrix} \quad (13.112)$$

このとき

$$R^* = D_t^{-1} R D_t'^{-1}, \quad (13.113)$$

$$D_t'^{-1} D_\beta = D_b, \quad (13.114)$$

かつ

$$\rho = D_\beta' R^* D_\beta \quad (13.115)$$

であることがわかる。

さて、これまでは単なる変数変換を考えてきたが、ここで式 (13.100) で示されている ρ にある基準 (criterion) を導入し、 y に対する正準変量の係数行列 D_β を決定する問題を考える。もし、この D_β が得られれば式 (13.114) により D_b は得られ、初めに意図した正準変量の式 (13.98) が求められたことになる。この基準について 13.1 節の 2 個の部分ベクトル ($m=2$) からなる観測特性ベクトルの正準相関分析の場合には、式 (13.21) の正準変量の対として $\alpha^{(h)'} x^{(1)}$ と $\beta^{(h)'} x^{(2)}$ の相関性を最大ならしめる係数ベクトル $\alpha^{(h)}$ と $\beta^{(h)}$ を相関係数の大きなほうから順に $h=1, 2, \dots, p_1$ ($p_1 \leq p_2$) と求め、対の異なる正準変量間の相関はゼロとするものであった。本節の m 個の部分ベクトルの場合に、前節の第 h 正準変量の係数ベクトル $\alpha^{(h)}$, $\beta^{(h)}$ に相当するのは、各係数行列 $\beta^{(i)}$ の第 h 列ベクトル $\beta_{\cdot h}^{(i)}$ である。ここに $\beta_{\cdot h}^{(i)}$ は p_i 次ベクトルで、 $i=1, 2, \dots, m$ かつ $h=1, 2, \dots, k$ となっている。これについて、次の $p \times m$ 行列 $D_{\beta_{\cdot h}}$ を定義しておく。

$$D_{\beta_{\cdot h}} = \begin{bmatrix} \beta_{\cdot h}^{(1)} & & & 0 \\ & \beta_{\cdot h}^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_{\cdot h}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (13.116)$$

ここで、この m 組の第 1 正準変量間の相関行列を ρ_1 とすると、この行列は m 次で

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1^{12} & \rho_1^{13} & \dots & \rho_1^{1m} \\ \rho_1^{21} & 1 & \rho_1^{23} & \dots & \rho_1^{2m} \\ \rho_1^{31} & \rho_1^{32} & 1 & \dots & \rho_1^{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_1^{m1} & \rho_1^{m2} & \rho_1^{m3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (13.117)$$

$$= D_{\beta_1} {}'R^* D_{\beta_1} \quad (13.118)$$

と示すことができる。ここに ρ_1 の対角線要素は 1 であり、 D_{β_1} の要素はすべて規準化されている。

したがって、観測特性ベクトルを m 個の部分ベクトルとして正準相関分析を行なう基準として、まず $h=1$ の場合に各 $\beta_{1i}^{(1)}$ が規準化されているという条件下で、 ρ_1 のすべての要素の和を最大ならしめるような各 $\beta_{1i}^{(1)}$ を決定する。すなわち

$$\phi_1 \equiv \mathbf{1}'\rho_1\mathbf{1} - m \quad (13.119)$$

を最大化するような規準化された各 $\beta_{1i}^{(1)}$ を求めることになる。ここに $\mathbf{1}$ はすべての要素を 1 とする m 次ベクトルである。

また、このことは

$$P_1 \equiv R^* - I \quad (13.120)$$

とおいて、式 (13.118) により

$$\phi_1 = \mathbf{1}'D_{\beta_1} {}'P_1 D_{\beta_1} \mathbf{1} \quad (13.121)$$

を

$$D_{\beta_1} {}'D_{\beta_1} = I$$

なる条件下で最大ならしめる D_{β_1} を求めるといってもよい。

これを解くには、常法によりラグランジュの m 次乗数ベクトル λ_1 を用いて

$$\phi_1 = \phi_1 - \mathbf{1}'D_{\beta_1} {}'D_{\beta_1} \lambda_1 \quad (13.122)$$

を D_{β_1} の各要素により偏微分し、その結果をゼロとおいてできる m 元連立方程式を各 $\beta_1^{(i)}$ の規準化のもとで解くとよい。すなわち

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial (1'D_{\beta_1})} = P_1 D_{\beta_1} 1 - D_{\beta_1} \lambda_1 = 0 \quad (13.123)$$

を得る。上式の左から D_{β_1}' を乗ずると式 (13.121) の条件により

$$D_{\beta_1}' P_1 D_{\beta_1} 1 = \lambda_1 \quad (13.124)$$

を得、これは式 (13.118) により

$$\rho_1 1 - 1 = \lambda_1 \quad (13.125)$$

とも書ける。また、このとき式 (13.121) は (13.124) によって

$$\phi_1 = 1' \lambda_1 \quad (13.126)$$

であり、 ϕ_1 は λ_1 の要素の総和になっている。

実際に D_{β_1} を算出するには、式 (13.123) を反復収束の計算を行なって得られる。すなわち、 λ_1 の要素からなる対角線行列を A とすると、式 (13.123) は $P_1 D_{\beta_1} 1 = D_{\beta_1} A 1$ と書けるから、

$$P_1 D_{\beta_1} = D_{\beta_1} A \quad (13.127)$$

に基づいて D_{β_1} を求める。この式は、 P_1 に関して m 個の固有値を値の大きいほうから求めてそれらに対応する固有ベクトルを算出することになる。この際の固有ベクトルが D_{β_1} を構成する。したがって、算法としてはパワー法が適用できる。

この手順は、次の方法によって、 $r=1, 2, \dots$ として係数行列 D_{β_1} が数値的に十分に収束するまで演算を繰り返す。

まず、 D_{β_1} のあらい第 1 近似の $D_{\beta_1}^1$ を与え、

$$\left[\begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} P_1 D_{\beta_1}^r \cong D_{\beta_1}^r \\ D_{\beta_1}^{r'} D_{\beta_1}^r \cong A^2 \\ D_{\beta_1}^r A^{-1} \cong D_{\beta_1}^{r+1} \end{array}$$

の順に計算をすすめ、(iii) の段階では $D_{\beta_1}^r$ と $D_{\beta_1}^{r+1}$ の接近を調べる。そして、まだ十分な収束解でなければ、 r を更新して (i) の演算にもどる。

さて、このようにして D_{β_1} が得られれば、次いで第 2 の正準変量の係数行

列 D_{β_2} を求める。この際の基準としては、

$$D_{\beta_2}'D_{\beta_1} = 0 \quad (13.128)$$

$$D_{\beta_2}'D_{\beta_2} = I \quad (13.129)$$

の条件のもとで

$$\phi_2 = \mathbf{1}'D_{\beta_2}'P_1D_{\beta_2}\mathbf{1} \quad (13.130)$$

を最大化する D_{β_2} を求めることを考える。

この解法も第1正準変量の場合と同様に、ラグランジュの乗数ベクトル λ_2 および γ_{21} によって、次の関数

$$\phi_2 = \phi_2 - \mathbf{1}'D_{\beta_2}'D_{\beta_1}\gamma_{21} - \mathbf{1}'D_{\beta_2}'D_{\beta_2}\lambda_2 \quad (13.131)$$

をつくる。そして、この関数を D_{β_2} の要素で偏微分した結果をゼロとおいて、 m 元連立方程式を式(13.128)と(13.129)のもとで解くことになる。すなわち

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial (\mathbf{1}'D_{\beta_2}')} = P_1D_{\beta_2}\mathbf{1} - D_{\beta_1}\gamma_{21} - D_{\beta_2}\lambda_2 = 0 \quad (13.132)$$

を得る。上の式の左から D_{β_1}' を乗じ、式(13.128)および(13.129)によって整頓すると

$$D_{\beta_1}'P_1D_{\beta_2}\mathbf{1} = \gamma_{21} \quad (13.133)$$

を得、これを式(13.132)に代入すると、

$$(\mathbf{I} - D_{\beta_1}D_{\beta_1}')P_1D_{\beta_2}\mathbf{1} = D_{\beta_2}\lambda_2 \quad (13.134)$$

となる。これは、また式(13.128)によって、

$$(\mathbf{I} - D_{\beta_1}D_{\beta_1}')P_1(\mathbf{I} - D_{\beta_1}D_{\beta_1}')D_{\beta_2}\mathbf{1} = D_{\beta_2}\lambda_2 \quad (13.135)$$

とも表現できる。ここで上の式を一貫した形式にするために、

$$P \equiv (\mathbf{I} - D_{\beta_1}D_{\beta_1}')P(\mathbf{I} - D_{\beta_1}D_{\beta_1}') \quad (13.136)$$

とおくと、式(13.135)は

$$P_2D_{\beta_2}\mathbf{1} = D_{\beta_2}\lambda_2 \quad (13.137)$$

と書ける。この式は式(13.123)と同じ形式で、これによって第2の正準変量の係数も第1の正準変量の場合と同様に算出できることがわかる。

次に、一般に第 h 番めの正準変量に関する D_{β_h} について考える。このときは、

$$D_{\beta_h}' D_{\beta_h} = I, \quad h = 1, 2, \dots, k \quad (13.138)$$

$$D_{\beta_h}' D_{\beta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, h-1 \quad (13.139)$$

の条件のもとで、

$$\phi_h = \mathbf{1}' D_{\beta_h}' P_1 D_{\beta_h} \mathbf{1} \quad (13.140)$$

を最大化する D_{β_h} を求めることになる。

そこでラグランジュの関数は

$$\phi_h = \phi_h - \sum_{j=1}^{h-1} \lambda_j D_{\beta_h}' D_{\beta_j} \boldsymbol{\gamma}_{h_j} - \lambda_h D_{\beta_h}' D_{\beta_h} \boldsymbol{\lambda}_h \quad (13.141)$$

で示され、 $\boldsymbol{\gamma}_{h_j}$ と $\boldsymbol{\lambda}_h$ を常数ベクトルとしている。この関数を D_{β_h} の要素で偏微分し、その結果をゼロとおく。すなわち

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_h}{\partial (\mathbf{1}' D_{\beta_h})} = P_1 D_{\beta_h} \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{h-1} D_{\beta_j} \boldsymbol{\gamma}_{h_j} - D_{\beta_h} \boldsymbol{\lambda}_h = 0 \quad (13.142)$$

を得る。この連立方程式のそれぞれに対応する D_{β_j}' を左から乗じ、式(13.138)と(13.139)の条件を適用すると

$$D_{\beta_j}' P_1 D_{\beta_h} \mathbf{1} = \boldsymbol{\gamma}_{jh}, \quad j = 1, 2, \dots, h-1 \quad (13.143)$$

を得る。ここで式(13.136)のように、次式

$$P_h \equiv \left(I - \sum_{j=1}^{h-1} D_{\beta_j} D_{\beta_j}' \right) P \left(I - \sum_{j=1}^{h-1} D_{\beta_j} D_{\beta_j}' \right) \quad (13.144)$$

を定義すると、上の P_h はまた

$$P_h = \left(I - D_{\beta_{(h-1)}} D_{\beta_{(h-1)}}' \right) P_{h-1} \left(I - D_{\beta_{(h-1)}} D_{\beta_{(h-1)}}' \right) \quad (13.145)$$

とも書ける。

したがって、式(13.143)は上の記号を用いて

$$P_h D_{\beta_h} \mathbf{1} = D_{\beta_h} \boldsymbol{\lambda}_h \quad (13.146)$$

と表現することができる。この式の形も式(13.123)および(13.137)と同じ形式で、ただ第1、第2正準変量の際の P_1 , P_2 を第 h 正準変量の場合は P_h に変えるだけの系統的な手順で D_{β_h} が得られることがわかる。すなわち、式(13.146)の形式で $h=1, 2, \dots, k$ に関して成立している。したがって、実際の計算も D_{β_1} で記述したとおりの手順で得られる。

このようにして、一般に $D_{\beta, h}$ を得れば式 (13.114) により D_b が得られ、初めに定義した正準変量が式 (13.98) の形で求められたことになる。なお、この正準変量のできばえとして ρ を算出するには、式 (13.114) と (13.115) によって

$$\rho = D_b'RD_b \quad (13.147)$$

と容易に得られる。

13.5 異なった観測対象群に関する正準分析法

これまでに記述してきた因子分析法は、一言でいうと 1 群の観測対象での多変量観測値をもとにして、どのような因子が抽出されるか、また対象の個別ごとに各因子を量的にどれほど所有しているかを知る方法であった。

また、前節の正準相関分析は、数種の多変量観測特性群により同一対象群で得た統計資料に基づいて、各特性群間で高い相関性を示すような諸特性の線形式を特性群ごとに対応して求め、この操作を繰り返し、逐次それまでの段階で得た線形式と無相関なものを求め、各特性群に共通して内在する因子を正準変量として抽出するような方法であった。

本節では、これらの考え方と全く異なった発想動機に基づく正準分析法 (canonical analysis) を述べる。この方法は、あらかじめ差異のあるいくつかの母集団またはカテゴリーについて、 p 種からなる一群の多変量特性で観測した資料を用い、各観測対象群の性格的な差異を積極的に表現する新しい座標軸を算定しようとする解法である。このように母集団またはカテゴリーの違いを特徴的に示す新しい軸を正準軸 (canonical axis) とよび、実質科学ではこの新しい測度を与える変量の意味するものを解釈し、場合によっては、新しく抽出された軸を抽象的・潜在的な共通因子のように考察できる性格のものである。

いま、 p 種の特性について k 個の母集団またはカテゴリーを対象とし、観測ベクトル $x_j^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, n_i$) が得られたとする。ここに各母集団内の分散共分散行列 $\Sigma_w^{(i)}$ はすべて同一の Σ であると仮定する。

このようにすると、まず第 i 母集団における母分散共分散行列 $\Sigma_w^{(i)}$ は不偏推定量の形式として

$$\hat{\Sigma}_W^{(i)} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)})(\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}}^{(i)})'}{(n_i - 1)} \quad (13.148)$$

$$\text{ここに } \bar{\mathbf{x}}^{(i)} = \sum_j \mathbf{x}_j^{(i)} / n_i$$

で与えられ、しかも各 $\Sigma_W^{(i)}$ がすべて共通の Σ であるという仮定によって、 Σ の最良推定量としては k 個の $\hat{\Sigma}_W^{(i)}$ を併合した次式

$$\hat{\Sigma}_W = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \hat{\Sigma}_W^{(i)}}{(n - k)} \quad (13.149)$$

が得られる。これは k 個の母集団における標本群内分散共分散行列 (sample within-variance-covariance matrix) とよばれるものである。

一方、上記の k 個の母集団に関して得られた標本の全分散共分散行列 (total variance-covariance matrix) $\hat{\Sigma}_0$ は

$$\hat{\Sigma}_0 = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j^{(i)} - \bar{\mathbf{x}})'}{(n - 1)} \quad (13.150)$$

$$\text{ここに } n \equiv \sum_i n_i, \quad \bar{\mathbf{x}} \equiv \sum_i \sum_j \mathbf{x}_j^{(i)} / n$$

で与えられる。

したがって、 k 個の母集団に関する標本群間分散共分散行列 (sample between-variance-covariance matrix) $\hat{\Sigma}_B$ は、独立な分散共分散行列の加法性 $\Sigma_W + \Sigma_B = \Sigma_0$ に基づき、偏差積和行列 (dispersion matrix) の引き算から

$$\hat{\Sigma}_B = \frac{(n-1)\hat{\Sigma}_0 - (n-k)\hat{\Sigma}_W}{k-1} \quad (13.151)$$

によって示される。

さて、このような p 次元空間における観測点の k 個の群の標本分散 $\hat{\Sigma}_B$ を最大限に表現するような新しい軸

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (13.152)$$

を、 $p \geq q$ なる q 次のベクトルで考えていく。ここに \mathbf{C} は $q \times p$ の行列を示している。この q が正準軸または共通因子の数と考えられ、この $\mathbf{C}\mathbf{x}$ によって、これらの軸が何を意味するか、また新しい標本を得たときにこの標本が $\mathbf{C}\mathbf{x}$ の測度のうえでどの母集団またはカテゴリーに近い性格のものであるかを考え

ることでもある。

しかし、あらかじめこのような q はわからないので、 \mathbf{C} を最大限の $p \times p$ 行列として解析をすすめ、その数値結果によって、ちょうど主成分分析法で行なったように、解法の中の固有値を大きい順に並べて吟味する。すなわち、観測データの変動を説明するに十分な固有値を考察する。このことは、固有値の大きいほうからの累和がその行列のトレース (trace) に対し 70~80% 程度の百分率を示すような固有値の数 q を採用することになる。

いま、式(13.152)の \mathbf{C} を \mathbf{x} から \mathbf{y} に変える変換行列として考え、この \mathbf{y} によって、最大化をはかる群間分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_B$ をつくと

$$\mathbf{C}\hat{\Sigma}_B\mathbf{C}' \quad (13.153)$$

を得る。ただし、 \mathbf{C} の要素が無制限に大きくなる不定性があるので、次の

$$\mathbf{C}\hat{\Sigma}_W\mathbf{C}' = \mathbf{I} \quad (13.154)$$

なる制約条件を設ける。そして、式(13.154)のもとで式(13.153)を最大にするような \mathbf{C} を求めることに帰着させる。このように考え方と取り扱いを整理してくると、この解法はすでに記述した正準相関分析 (canonical correlation analysis) に類似してくる。

いま、式(13.154)をもっとわかりやすい形式

$$\mathbf{L}\mathbf{L}' = \mathbf{I} \quad (13.155)$$

とするために

$$(\mathbf{C}\hat{\Sigma}_W^{1/2})(\hat{\Sigma}_W^{1/2}\mathbf{C}') = (\mathbf{C}\hat{\Sigma}_W^{1/2})(\mathbf{C}\hat{\Sigma}_W^{1/2})' = \mathbf{L}\mathbf{L}'$$

すなわち
$$\mathbf{L} = \mathbf{C}\hat{\Sigma}_W^{1/2} \quad (13.156)$$

とおく。ここに、この \mathbf{L} によって式(13.153)は

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\hat{\Sigma}_B\mathbf{C}' &= (\mathbf{C}\hat{\Sigma}_W^{1/2})\hat{\Sigma}_W^{-1/2}\hat{\Sigma}_B\hat{\Sigma}_W^{-1/2}(\mathbf{C}\hat{\Sigma}_W^{1/2})' \\ &= \mathbf{L}(\hat{\Sigma}_W^{-1/2}\hat{\Sigma}_B\hat{\Sigma}_W^{-1/2})\mathbf{L}' \end{aligned} \quad (13.157)$$

となる。

したがって、本節での問題は

$$\mathbf{A} = \hat{\Sigma}_W^{-1/2}\hat{\Sigma}_B\hat{\Sigma}_W^{-1/2} \quad (13.158)$$

とおくとき、 $\mathbf{L}\mathbf{L}' = \mathbf{I}$ のもとに $\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{L}'$ を最大にする \mathbf{L} を求めることになる。

このためには、式 (13.54) で行なったのと同様に、ラグランジュの乗数を対角線行列にした A を用い

$$LAL' - A(LL' - I)$$

の対角要素を L' の対応する列要素で偏微分してゼロとおき次式を得る。

$$AL' = L'A \quad (13.159)$$

ここに、 A は式 (13.158) で定義された A の p 個の固有値で得られるが、 L' はこの p 個の λ の値に対応して得られる直交した固有ベクトルを規準化して各列とした正方行列を示している。

このようにして L を得れば、式 (13.156) の関係から $L\Sigma_w^{-1/2}$ によって C が得られ、前述のように固有値の累和とトレースの百分率を配慮して q を定め、式 (13.152) により最終的に求めている y が得られるわけである。

とくに、式 (13.159) において、観測変数の数 p と母集団またはカテゴリーの数 k の間で、もし $p \leq k-1$ であれば独立な相異なった固有値は p 個だけ得られ、また他方 $p > k-1$ であれば固有値は $p-(k-1)$ 個のゼロ値と $k-1$ 個の相異なった根が得られる。このことは固有値に対応する固有ベクトルの採否に関係し、 $p \leq k-1$ ならば p 本の正準軸が得られ、 $p > k-1$ なら $k-1$ 本の正準軸が 1 次独立なものとして得られることを示している。

上の式 (13.159) は数式の形式としてよく整っているが、実際の計算にはあらかじめ $\hat{\Sigma}_w^{-1/2}$ を計算しておかねばならない。このために数値計算としてはむしろ式 (13.153) と (13.154) から直接的に出発するほうが楽である。すなわち

$$C\hat{\Sigma}_B C' - A(C\hat{\Sigma}_w C' - I)$$

の対角要素を C' の対応する列要素で偏微分しゼロとおいて

$$\hat{\Sigma}_B C' - \hat{\Sigma}_w C' A = O \quad (13.160)$$

を得る。さらに、上式の両辺に左から $\hat{\Sigma}_w^{-1}$ を乗じて、

$$\hat{\Sigma}_w^{-1} \hat{\Sigma}_B C' = C' A \quad (13.161)$$

をつくり、 $\hat{\Sigma}_w^{-1} \hat{\Sigma}_B$ の固有値の行列 A と固有ベクトル行列 C を求め、後に C を $C\hat{\Sigma}_w C' = I$ となるように規準化するほうがよい。

ここで、 $\Sigma_W^{-1}\Sigma_B$ は一般に対称行列でないから、主成分分析での計算法は使えない。普通は固有多項式の根から固有ベクトルを逐次収束的に計算する方法や非対称のときのパワー法 (power method) などが適用される。詳しくは、固有値と固有ベクトルに関する電子計算機のプログラムまたは図書を参照されたい。

また、式 (13.151) についての Σ_0 、 Σ_W および Σ_B の関係は、多変量の際の分散共分散分析表として次の表 13.8 の形式にまとめられる。そして、ちょうど単一変量のとときに F 検定を行なうように、 $\Sigma_W = \Sigma_B$ に関する帰無仮説の検定も偏差積和行列の値の比を用いて行なえる。

表 13.8 分散共分散分析表

変 動 因	自 由 度	平 方 和
群 間	$k-1$	$(k-1)\Sigma_B$
群 内	$n-k$	$(n-k)\Sigma_W$
全 体	$n-1$	$(n-1)\Sigma_0$

次に、先節からの長方形に関する検証例を用い数値計算の手順を示そう。

いま、表 2.3 の観測資料が表 13.9 のように 3 個の母集団(またはカテゴリ)に分類できていると仮定する。

表 13.9 母集団ごとの観測対象

	観 測 対 象 の 番 号																n_i		
	1	3	4	5	6	7	8	11	12	14	15	16	17	18	19	20		44	
第1群	1	3	4	5	6	7	8	11	12	14	15	16	17	18	19	20	44	17	
第2群	2	9	10	13	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	41	45	49	18
第3群	32	33	34	35	36	37	38	39	40	42	43	46	47	48	50	15			

この分類は、各長方形が図 8.1 のように二つの因子 α と β の相対的な大きさで示されるので、その形状のたて長(第1群)、ほぼ正方(第2群)、よこ長(第3群)で雑な区分をしている。また、各群内の標本分散共分散行列に有意差は認められないので、ここで各群内の母分散共分散は同一であると仮定しうる。

数値計算は、まず式 (13.148) によって各群内標本分散共分散行列 $\Sigma_w^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$) を計算することから始まる。同時に、群別を無視して全 50 標本による分散共分散行列 Σ_0 を式 (13.150) により算出しておく。

次いで、式 (13.149) によって各 $\Sigma_W^{(i)}$ を組み合わせ、3群に共通な Σ_W の最良推定量 $\hat{\Sigma}_W$ を求める。さらに、この $\hat{\Sigma}_W$ と $\hat{\Sigma}_0$ を用い、式 (13.151) に従って $\hat{\Sigma}_B$ を計算する。ここに、 $n=50, k=3, n_1=17, n_2=18, n_3=15$ である。表 13.10 の上方には、 $\hat{\Sigma}_W$ および $\hat{\Sigma}_B$ を示している。この計算結果を用い、

表 13.10 群内と群間分散共分散行列および

群内分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_W$ ，ただし要素 $\times 10^4$

	X 1	X 2	X 3	X 4
X 1	4.3053	171.8891	131.4734	6.8512
X 2	171.8891	6865.2425	5251.2610	273.8757
X 3	131.4734	5251.2610	4018.8696	211.6765
X 4	6.8512	273.8757	211.6765	13.1535
X 5	-1.7485	-69.6119	-51.0615	-0.5545
X 6	2.5695	102.8896	80.8916	6.3343
X 7	51.1681	2048.4137	1610.5641	126.2000
X 8	119.7104	4788.3487	3728.2267	257.7570

群間分散共分散行列 $\hat{\Sigma}_B$ ，ただし要素 $\times 10^2$

	X 1	X 2	X 3	X 4
X 1	5.2856	211.1861	163.0084	9.8639
X 2	211.1861	8438.9927	6506.1295	386.4741
X 3	163.0084	6506.1295	5065.9658	347.9732
X 4	9.8639	386.4741	347.9732	67.7356
X 5	-0.6870	-35.1193	22.7936	48.2804
X 6	4.6910	179.7582	188.6668	58.3322
X 7	91.2865	3494.0294	3694.3465	1160.9936
X 8	189.6837	7349.0216	7167.1229	1838.4640

固有値と固有ベクトル算出のための行列 $\hat{\Sigma}_W^{-1} \hat{\Sigma}_B$ ，ただし要素 $\times 10^4$

	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	-0.1976	-0.3204	0.4860	0.2772
(2)	-8.0658	-12.3032	18.7882	11.1517
(3)	-5.1077	-12.7329	18.6041	8.1121
(4)	0.7425	-3.8160	4.9859	0.0250
(5)	1.1423	-3.1917	4.0351	-0.5307
(6)	0.9465	-3.5072	4.5140	-0.2565
(7)	18.9056	-70.1607	90.3087	-5.0996
(8)	26.3534	-108.3426	140.1922	-4.8681

ここでは式 (13.161) の形式で固有値と固有ベクトルを解くために、 $\Sigma_W^{-1}\Sigma_B$ を求める。表 13.10 の下方に、この行列計算の結果を示している。

さて、最終的に $\Sigma_W^{-1}\Sigma_B$ の固有値と対応する固有ベクトルを $C\Sigma_W C' = I$ の条件下で求めることになる。この数値例での計算結果を固有値の大きいほう

固有値と固有ベクトル算出のための行列

X 5	X 6	X 7	X 8
-1.7485	2.5695	51.1681	119.7104
-69.6119	102.8896	2048.4137	4788.3487
-51.0615	80.8916	1610.5641	3728.2267
-0.5545	6.3343	126.2000	257.7570
2.9271	1.1834	23.6560	18.0980
1.1834	3.7827	75.2546	138.6042
23.6560	75.2546	1500.2196	2762.4779
18.0980	138.6042	2762.4779	5340.7311

X 5	X 6	X 7	X 8
-0.6870	4.6910	91.2865	189.6837
-35.1193	179.7582	3494.0294	7349.0216
22.7936	188.6668	3694.3465	7167.1229
48.2804	58.3322	1160.9936	1838.4640
49.8876	49.2039	983.4833	1466.8873
49.2039	53.9924	1076.6746	1660.3504
983.4833	1076.6746	21471.2281	33088.3406
1466.8873	1660.3504	33088.3406	51481.3143

(5)	(6)	(7)	(8)
0.5226	-0.2578	0.1469	-0.1317
21.2033	-10.2813	5.9584	-5.3162
14.2801	-8.0532	4.0170	-3.7525
-1.0979	-0.5981	-0.3044	0.1030
-2.1510	-0.0841	-0.6004	0.3675
-1.6335	-0.3389	-0.4549	0.2372
-32.6096	-6.8028	-9.0814	4.7292
-43.6362	-12.7735	-12.1387	5.7689

から順に示したのが表 13.11 である。

この例では $k-1=2$ であるから、初めから二つの固有値に対応する固有ベクトルまでが意義をもちうる。参考までに、トレース (trace) に対する比率を求め、今回の全観測値における各正準軸のもつ意味の強さを示している。

表 13.11 $\Sigma_W^{-1}\Sigma_B$ の固有値・固有ベクトルの計算結果

固有値	固有値	(1)	(2)	(3)	……
			30.118	2.471	0.885×10^{-7}
	トレースに対する比率(%)	92.41	7.58	0.00	……
	同上比率の累和(%)	92.41	99.99	$\cong 100$	……
固有ベクトル	C 1	0.0269	-0.0657	-0.0598	……
	C 2	-0.0858	-0.0551	-0.0300	……
	C 3	0.1095	0.0919	0.0546	……
	C 4	-0.0102	0.0812	0.0716	……
	C 5	-0.0488	0.1649	0.1532	……
	C 6	-0.0053	-0.0697	-0.0593	……
	C 7	-0.0136	0.0463	0.0329	……
	C 8	0.0078	-0.0398	-0.0292	……

注. トレース=32.5909.

さて、ここでこの 2 本の正準軸を因子として考察するわけである。

しかし、このベクトルのままでは解釈がむずかしいので、その援けとして式 (13.152) の示すように、各 \mathbf{x}_j を代入して

$$\mathbf{y}_j \equiv \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0.0269 & -0.0858\dots & 0.0078 \\ -0.0657 & -0.0551\dots & -0.0398 \end{bmatrix} \mathbf{x}_j$$

の右辺を計算し、 \mathbf{y}_j の第 1 要素の値を Y_1 軸、第 2 要素の値を Y_2 軸とし、これらの値を各 j ($j=1, 2, \dots, 50$) について散布図に示したのが図 13.1 である。

この散布図によって、第 1 固有ベクトルに関する Y_1 軸が 92.4% の意味の強さをもって長方形の形状として表現される。これは 2 因子 α と β の相対的な大きさの比較を意味し、その形状のたて長・ほぼ正方・よこ長を示していると考えられる。また、第 2 固有ベクトルに関する Y_2 軸は 7.58% の意味の弱さではあるが、長方形の面積的な大きさを多少とも示しているように思われる。

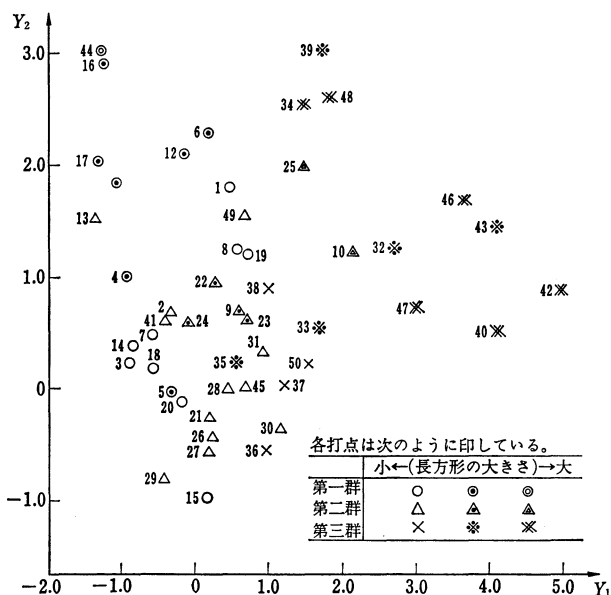


図 13.1 二つの因子評点に関する 50 例の散布図

もちろん、この検証例については、 Y_1 軸のみで第 1 群、第 2 群、第 3 群の類別を示すに十分 (92.4%) な測度を与えていると解釈でき、 Y_2 軸 (7.58%) については無視してさしつかえないようである。いずれにしても、初めに形状を意識して仮定した群分けが解析結果としても示され、実際と良く合致した興味ある成績がみられている。

この例で示したように、正準分析法は母集団またはカテゴリー間の性格の差異を最もよく表現するような正準軸または因子を探究する方法である。そして、軸での座標または因子評点と考えた y_j の値を利用して、種々の考察や試算が行なわれる。

たとえば、あらかじめ y_j によって各群(カテゴリー)別に重心を算定しておき、新しく個々の観測値 x_r を正準軸のはる空間での個々の点 y_r として、この点から各重心までの距離を計算する。そして、この観測対象を距離の最も近い群のカテゴリーに属するものとして層別するような考察も可能となる。

このような考察は判別関数法* (discriminant function theory) とごく近い関係にある。もし、 k 群の観測対象に正準分析を行ない可能な $k-1$ 種までの正準変量を得たような場合、新しい観測対象をこの $k-1$ 次元空間で距離の最も近い母集団に帰属させる判別の方法を適用するならば、誤まった判別による損失や帰属する母集団に関する事前確率を適用しない線形判別関数* (linear discriminant function) と同じだけの意図と情報を有している。すなわち、正準変量の係数ベクトルと線形判別関数の係数ベクトルとは各要素の間で線形関係が示される。とくに、 $k=2$ であれば正準変量はただ 1 種類得られるだけで、正準分析の後に判別の考察を行なうことは判別関数法と全く同等になる。

しかし、正準分析の本来の目的は、観測対象の属する母集団への判別 (discrimination) や一群の対象の層別 (classification) をはかるのではなく、観測特性の次数 p や対象群の数 k よりも低い、基本的に $k-1$ 種より低減した次数の正準変量を推測して、因子的考察を意図するものである。しかし、このように $k-1$ より小さい次元の因子空間で正準分析の結果を判別に利用するのであれば、判別に関する判断基準のうえで判別関数法に劣ることになる。

したがって、一般に、正準分析法を線形判別関数法とは全く異なった目的と基準 (criterion) をもつ分析法と考えておかねばならない。もし、分析が単に k 個の母集団のうちのどれかへの判別を目的とするならば、正準分析を行なうよりも、直接に判別関数法に訴え $k(k-1)/2$ 本の線形式による判別のほうが数等すぐれた精度の判別が行なえる。

13.6 主因子分析法

これまでは正準相関分析法と正準分析法の基本的な考え方と解釈を記述してきた。本節以降では、これらの考え方を p 種類からなる 1 観測特性群の場合の因子分析に適用し、観測資料に含まれるなんらかの成分を対外的基準のようにして、因子負荷行列を直接に算出する諸方法を記述する。そして、因子負荷行列を得れば、因子の抽出と解釈さらに因子評点などの一連の考察がさきの因子分析法と同様に行なえる。

* たとえば、塩谷 実、浅野長一郎共著、「多変量解析論」、情報科学講座 (共立出版)、第 2 編 第 3 章参照。

これらの方法は4種類に分類され、主因子分析法 (principal factor analysis, 本節), 正準因子分析法 (canonical factor analysis, 13.7 節), アルファ因子分析法 (alpha factor analysis, 13.8 節) および アルファ・マックス因子分析法 (alpha-maximized factor analysis, 13.9 節) とよばれ、主として C. R. Rao, L. J. Cronfach, H. F. Kaiser などにより開発されてきたものである。

さて、これまでの諸解法と同様に p 次元観測値ベクトル \mathbf{x}_j の基本的な構造式を式 (3.1) または 3.4 節のように

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{A}\mathbf{f}_j + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (13.162)$$

とおく。ここに、 \mathbf{A} は $p \times q$ 因子負荷行列、 \mathbf{f}_j は q 次の共通因子ベクトル、 \mathbf{e}_j は p 次の確率的誤差ベクトルまたは特殊因子ベクトルである。

また、この \mathbf{x}_j および \mathbf{f}_j の規準化を仮定すると、この場合の母分散共分散行列は母相関行列 \mathbf{P} と同じで、式 (3.29) のように $\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{A}' + \mathbf{\Psi}$ の関係を仮定し

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{P} - \mathbf{\Psi} \quad (13.163)$$

と書ける。ここに $\mathbf{\Psi}$ は誤差分散を対角要素とする対角行列で、また共有性 (communalities) を対角要素とする行列を \mathbf{H}^2 とすると、式 (3.7) により

$$\mathbf{\Psi} + \mathbf{H}^2 = \mathbf{I} \quad (13.164)$$

である。したがって、式 (13.163) は

$$\mathbf{A}\mathbf{A}' = \mathbf{P} - \mathbf{I} + \mathbf{H}^2 \quad (13.165)$$

とも書ける。

先章での多因子解法の因子の抽出と解釈には、まず \mathbf{A} と $\mathbf{\Psi}$ の最尤推定を行ない、そのあとで因子負荷行列を種々の回転法によって変換し決めたわけである。

このことは、最尤推定を行なうと誤差分散共分散行列 $\mathbf{\Psi}$ の推定は一意的に決まるが、因子負荷行列 \mathbf{A} の推定には式 (4.2) で示したように共通因子空間内での回転変換に関する不定性があることに起因した。事実、この因子負荷行列の不定性のために、ある基準を設けて直交回転または斜交回転を行ない、簡素化構造や部分因子を考える余地があったわけである。

しかし、上に列記した4種類の推定法は、この回転に関する因子負荷行列の不定性の心配を除去して、正準相関分析の考え方を役立たせ、ある基準を最大または最小にすることによって一意な解を得る方法となる。

いま、式 (13.162) で共通因子に関する部分を

$$C = Af \quad (13.166)$$

とおくとき、主因子分析法は正準相関分析の考え方を適用して、 C の要素の任意の線形式 $a'C$ と観測特性 x との相関ベクトルの内積を最大にすることを意図する。ここに a は係数ベクトルを示す。これは x の変動を最大限に $a'C$ で説明できるような共通因子を抽出しようとするようになる。

ここで簡単に

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x, a'C) &= (P - \Psi)a, \\ V(a'C) &= a'(P - \Psi)a \end{aligned} \quad (13.167)$$

がいえるから、 x のそれぞれの要素と $a'C$ と相関係数ベクトルは

$$\frac{\text{Cov}(x, a'C)}{\sqrt{V(a'C)}} = \frac{(P - \Psi)a}{\sqrt{a'(P - \Psi)a}} \quad (13.168)$$

となる。そして、 x のすべての要素に関する全変動で $a'C$ の果たす寄与は、上式の内積

$$\frac{a'(P - \Psi)(P - \Psi)a}{a'(P - \Psi)a} \equiv \lambda \quad (13.169)$$

で示される。

したがって、主因子分析での解法は、式 (13.169) で示される λ を最大ならしめるような a を求めることがおもな仕事になる。

この解法は、常法によりラグランジュの関数をつくり、これを推定すべき母数で偏微分することになる。いまラグランジュの乗数を λ とし、この関数を

$$\phi \equiv a'(P - \Psi)(P - \Psi)a - \lambda a'(P - \Psi)a \quad (13.170)$$

とすると、 $\partial\phi/\partial a = 0$ により

$$[(P - \Psi) - \lambda I]\gamma = 0 \quad (13.171)$$

を得、したがって $a \neq 0$ として

$$|(P - \Psi) - \lambda I| = 0 \quad (13.172)$$

がいえる。ここに

$$\gamma = (P - \Psi)a \quad (13.173)$$

とおいている。また、式 (13.171) から

$$(P - \Psi)\gamma = \lambda\gamma = \lambda(P - \Psi)a,$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\gamma} = \lambda \boldsymbol{a} \quad (13.174)$$

と示される。

このとき \boldsymbol{x} と $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{C}$ の共分散ベクトルの式 (13.167) は、式 (13.173) および (13.174) によって、簡単に

$$\text{Cov}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}'\boldsymbol{C}) = \lambda_1 \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\gamma} \quad (13.175)$$

となり、 \boldsymbol{x} と $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{C}$ の相関係数ベクトルは式 (13.168) によって

$$\frac{\lambda_1 \boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{\Psi})\boldsymbol{a}}} = \frac{\sqrt{\lambda_1} \boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}}} \quad (13.176)$$

と書ける。ここに λ_1 は第 1 の因子変量における固有値を示している。

このように第 1 の因子変量 (factor variable) として線形式 $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{C}$ が求められたわけであるが、次いで第 2 の因子変量の抽出を考える。この求め方は、すでに記述した主成分分析法 (principal component analysis) や 13.1 節の正準相関と正準変量におけるのと全く同様に、第 1 の線形式に独立でかつこの線形式による残差変動を最大限に説明するような第 2 の線形式を考える。このように線形式を互いに独立に、逐次的に前段階までの残差変動を最大に減ずるように定めていく。この式は $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{\Psi}$ のランク q の数だけ得られ、これによって q 個の因子変量が解釈される。この q 個の線形式を逐次抽出していく計算手順も、やはり正準相関分析の 13.1 節と同じ事情にあり、式 (13.171) の q 個の固有値と固有ベクトルを求めることによって同時に得られる。ここに $q \leq p$ である。

ここで、式 (13.171) の q 個の固有値を対角要素とする対角行列を \boldsymbol{A} とし、また対応する q 個の固有ベクトルを列に並べてこの $p \times q$ 行列を $(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_q) \equiv \boldsymbol{\Gamma}$ と定義すると、式 (13.163) を (13.171) に適用し

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A} \quad (13.177)$$

と書ける。

また、 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A}^{1/2}(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A}^{1/2})'$ と変形できるから

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A}^{1/2} \quad (13.178)$$

を得る。

この \boldsymbol{A} を主因子負荷行列 (principal factor loading matrix) とよび、当初の式 (13.166) における \boldsymbol{A} が定められたことになる。

さて、実際の数値計算には式 (13.171) で $\mathbf{P}-\Psi$ の標本推定量を用い、一連の固有値とそれに対する固有ベクトルを求めねばならない。

このためには、標本相関係数 \mathbf{R} から Lawley らの最尤推定法で一意に求められる $\hat{\Psi}$ を減じて式 (13.171) の $\mathbf{P}-\Psi$ に代用してもよいが、かなりの手間を要する。ここでは、もっと簡単な計算で反復収束による手順を考えよう。

まず、式 (13.155) で共有性を要素とする対角行列 \mathbf{H}^2 を $\hat{\mathbf{H}}^2 = \mathbf{I} - (\text{diag. } \mathbf{R}^{-1})^{-1}$ 、またはもっと単純に $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{I}$ とおき、式 (13.163) に対応する $\mathbf{R} - \mathbf{I} + \hat{\mathbf{H}}^2$ をつくる。この $p \times p$ 行列の固有値と固有ベクトルを求め、式 (13.177) に用いた $\hat{\mathbf{A}}$ と $\hat{\mathbf{F}}$ をつくる。次いで、 $\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{F}}'$ なる $p \times p$ 行列を作成し、新たな共有性行列 $\tilde{\mathbf{H}}^2 = \text{diag.}(\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{F}}')$ を求める。ここで、さきの $\hat{\mathbf{H}}^2$ を $\tilde{\mathbf{H}}^2$ に置き換え、 $\mathbf{R} - \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{H}}^2$ の固有値と固有ベクトルを求める。このように、毎回 \mathbf{H}^2 の推定量をつくりかえては $\hat{\mathbf{A}}$ および $\hat{\mathbf{F}}$ を算出する。そして最終的に $\hat{\mathbf{A}}$ および $\hat{\mathbf{F}}$ が、反復計算で大きな変化を示さず十分な必要精度以内に収束したときをもって、 $\hat{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{A}}^{1/2}$ により \mathbf{A} の推定を行なえばよい。

ここで q 個の共通因子を示す $\mathbf{P}-\Psi$ 、または $\mathbf{R}-\hat{\Psi}$ のランクについて考えてみよう。一般に、 $\mathbf{P}-\Psi$ は q 個の共通因子以外に各観測特性に独自の特殊因子 (specific factors) をもつことが多い。さらに、実際に得られる標本相関行列は互いに独立な無作為誤差項を含む p 次観測ベクトルであるために、通常、 $\mathbf{R}-\hat{\Psi}$ のランクは依然として p で、式 (13.177) では $q=p$ の場合となる。

したがって、 p 個の固有値とそれらに対応する固有ベクトルのうち、何個を選んで共通因子数 q とすればよいか問題となる。そして、この整数 q は少なくとも偶然誤差にまどわされないうちに真に意味をもつ (significant) 個数でなければならない。ここに共通因子数 q に関する統計的な仮説検定の方法が必要になる。このため、通常のように \mathbf{x} の正規性を仮定して尤度比検定法を行なう。この根拠と検定のやり方は、すでに 3.5 節に記述しているのでこれに従ってできる。

また、本節の方法を第 2 章の主成分分析法 (principal component analysis) と比較すると、式 (13.171) での $\mathbf{P}-\Psi$ の代わりに、単に \mathbf{P} を用いたのが主成分分析になっている。このことは、すべての特殊因子が同じ Ψ という分散をもつと考えたときに相当する。すなわち、

$$\Psi = \Psi I \quad (13.179)$$

のときで、式 (13.171) は内容的に

$$[(P + \Psi I) - \lambda I] \gamma = 0 \quad (13.180)$$

となっている。この式は

$$P \gamma = (\lambda - \Psi) \gamma \equiv \nu \gamma \quad (13.181)$$

と変形され、上の ν および γ はそれぞれ式 (2.8) の中で λ および L で書かれている。したがって、第2章の主成分分析はすべての特殊因子の分散が等しいとして相対的に等しい重みをもたせたときの因子負荷行列を与える一種の主因子分析法であるといえることができる。

いま、1, 2の数値例で計算の手順と数値の経過を示そう。次節以降に記述する類似の分析法との比較には、定式化から考えて、あまり共有性の高くない例が性格的にわかりやすく、他方、前節までの種々の因子分析法との比較には相当に共有性の高い長方形に関する検証例がよいと思われる。

まず前者の例として、表 13.1 に示した普通感冒における全身症状の6項目に関し、医学的な意味はさておいて、まず単に数値の解法を示す。この計算の出発となる相関行列は表 13.12 に示してある。

表 13.12 普通感冒における全身症状項目間の相関行列 (219 症例)

	全 身 症 状					
	頭 痛 X_1	悪 感 X_2	食欲不振 X_3	倦怠感 X_4	関節痛 X_5	作業意欲 X_6
X_1	1.0000	0.4047	0.2030	0.4933	0.1890	0.3497
X_2	0.4047	1.0000	-0.0038	0.3336	0.3680	0.3653
X_3	0.2030	-0.0038	1.0000	0.4384	0.0069	0.4075
X_4	0.4933	0.3336	0.4384	1.0000	0.2197	0.5592
X_5	0.1890	0.3680	0.0069	0.2197	1.0000	0.1831
X_6	0.3497	0.3653	0.4075	0.5592	0.1831	1.0000

数値計算の手順として、まず初期の共有性行列 \hat{H}^2 を $I - (\text{diag. } R^{-1})^{-1}$ から求めねばならない。表 13.13 には相関行列の逆行列 R^{-1} を示している。

この表によって初期の共有性行列は簡単に得られ、表 13.14 の第1例に示されている。

この \hat{H}^2 によって 6×6 対称行列 $R - I + \hat{H}^2$ を計算し、この固有値と固有

ベクトルを求め、固有値を要素とする対角行列 \hat{A} と固有ベクトルを列に並べた行列 \hat{F} を得る。表 13.15 は固有値の収束状況を示したもので、初期の \hat{H}^2 を用いた固有値は表の第 1 列に示されている。

また、上の固有値を大きさの順にみてわかるように、第 1 と第 2 の固有値の間に 1.0 をはさんで、かなりの差異があり、3.5 節の統計的仮説検定を行なうまでもなく、有意な因子を 1 個と考えることができよう。ここでは数値の例題として初期の固有値の大きな 2 個に対応する固有ベクトルを表 13.16 の中に示しておく。

上に得た固有値と固有ベクトルは、初期のかりに求めた \hat{H}^2 によるものであ

表 13.13 普通感冒の相関行列 (表 13.12) の逆行列

	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6
X 1	1.4488	-0.3879	-0.0396	-0.5419	-0.0035	-0.0451
X 2	-0.3879	1.4823	0.3046	-0.1405	-0.3733	-0.3831
X 3	-0.0396	0.3046	1.3829	-0.4748	0.0647	-0.4073
X 4	-0.5419	-0.1405	-0.4748	1.8870	-0.1485	-0.5937
X 5	-0.0035	-0.3733	0.0647	-0.1485	1.1740	-0.0207
X 6	-0.0451	-0.3831	-0.4073	-0.5937	-0.0207	1.6575

表 13.14 主因子分析法による共有性の収束

	初 期	1 回め	2 回め	3 回め	4 回め	9 回め
X 1	0.3098	0.3655	0.4039	0.4286	0.4454	0.4855
X 2	0.3254	0.4392	0.5018	0.5430	0.5718	0.6376
X 3	0.2769	0.3716	0.4183	0.4432	0.4555	0.4684
X 4	0.4700	0.5831	0.6305	0.6554	0.6695	0.6967
X 5	0.1482	0.2126	0.2352	0.2507	0.2626	0.2924
X 6	0.3967	0.4796	0.5146	0.5388	0.5562	0.5985

表 13.15 主因子分析法における $R-I+\hat{H}^2$ の固有値の収束

	初 期	1 回め	2 回め	3 回め	4 回め	9 回め	
固有値の大きな順	(1)	1.9516	2.0431	2.0868	2.1135	2.1307	2.1684
	(2)	0.4934	0.5881	0.6356	0.6648	0.6835	0.7216
	(3)	0.0065	0.0733	0.1096	0.1334	1.1498	0.1886
	(4)	-0.0882	-0.0061	0.0277	0.0492	0.0642	0.0993
	(5)	-0.1855	-0.0873	-0.0419	-0.0168	-0.0026	0.0219
	(6)	-0.2509	-0.1594	-0.1134	-0.0844	-0.0648	-0.0210

るが、この \hat{A} と \hat{F} により改めて第1回の \hat{H}^2 を $\text{diag.}(\hat{F}\hat{A}\hat{F}')$ によって求める。この値が表 13.14 の第2列に示されている。次いで、 $R-I+\hat{H}^2$ により固有値と固有ベクトルを計算し直す。この結果が表 13.15 および 13.16 に示されている。

表 13.16 主因子分析法における $R-I+\hat{H}^2$ の二つの固有ベクトルの変化

		初 期		1 回 め		2 回 め		9 回 め	
固有値		1.9516	0.4934	2.0431	0.5881	2.0868	0.6356	2.1684	0.7216
固有ベクトル	X 1	0.4238	-0.1527	0.4166	-0.1467	0.4157	-0.1443	0.4163	-0.1276
	X 2	0.3779	-0.5702	0.3814	-0.5886	0.3849	-0.6004	0.3974	-0.6287
	X 3	0.3104	0.6096	0.3111	0.6091	0.3113	0.6103	0.3043	0.5917
	X 4	0.5369	0.2036	0.5423	0.2079	0.5431	0.2108	0.5382	0.2279
	X 5	0.2375	-0.4526	0.2345	-0.4326	0.2323	-0.4151	0.2312	-0.3893
	X 6	0.4865	0.1832	0.4848	0.1748	0.4828	0.1720	0.4820	0.1868

このようにして、逐次 \hat{H}^2 を更新し、固有値と固有ベクトルがある必要な精度で安定して得られるまで反復する。この収束は、通常、固有値に関しては比較的速いが、固有ベクトルについては対応する要素ごとの収束を意味するので相当の計算量を要する。このようにして十分に安定した \hat{A} および \hat{F} を得れば、最終的に $\hat{F}\hat{A}^{1/2}$ を計算し、主因子負荷行列 \hat{A} とする。この結果は表 13.17 に示されている。

表 13.17 普通感冒例 (表 13.10) における主因子負荷行列

	F 1	(F 2)	(F 3)	(F 4)	(F 5), (F 6)
X 1	0.6130	-0.1084	-0.3101	-0.0647	...
X 2	0.5851	-0.5341	0.0775	-0.0953	...
X 3	0.4481	0.5026	0.0679	0.0336	...
X 4	0.7926	0.1936	-0.1157	0.1171	...
X 5	0.3404	-0.3307	0.1228	0.2330	...
X 6	0.7110	0.1587	0.2310	-0.1297	...

この例では9回の反復計算でほぼ満足のゆく収束を示し、上の結果を得ている。この因子負荷行列で意味をもたせることができる列は、固有値の大きさを検定して知るわけであるが、表 13.17 では第1列の F 1 のみで、第2列以降の F 2~F 6 は積極的に利用しないほうがよい。

次に、第2の数値例として、先節からの長方形に関する検証例の結果を要約して示そう。この例で固有値の大きさ順にみていくと、第2と第3の間に明確な大きい減少が認められる。すなわち、小数第4けたまで正確に示すと、5.7700, 2.2300, 0.0037, 0.0005, 0.0001, 0.0000, -0.0000 である。

したがって、このときにはきわめて明確に、有意な因子個数は2であることを示している。表 13.18 には、この2個の固有値に対応する固有ベクトルの変化を示している。

表 13.18 長方形の検証例における $R-I+\tilde{H}^2$ の固有ベクトルの変化

		初 期		1 回 め		13 回 め	
固有値		5.7699	2.2300	5.7700	2.2300	5.7700	2.2300
固有 ベ ク ト ル	X 1	0.3617	0.3613	0.3617	0.3613	0.3617	0.3613
	X 2	-0.3327	-0.3323	-0.3327	-0.3323	-0.3327	-0.3323
	X 3	-0.8660	0.2327	-0.8660	0.2325	-0.8660	0.2323
	X 4	0.0909	-0.3261	0.0912	-0.3283	0.0917	-0.3329
	X 5	-0.0109	0.4363	-0.0099	0.3806	-0.0079	0.2789
	X 6	0.0009	-0.1332	0.0033	-0.2327	0.0053	-0.3226
	X 7	-0.0079	0.5813	-0.0079	0.5872	-0.0079	0.6068
	X 8	-0.0027	0.2294	-0.0034	0.2310	-0.0039	0.2102

表 13.18 の中の第13回めの十分に安定した固有値と固有ベクトルから、主因子負荷行列を求めた結果を表 13.19 に示している。

表 13.19 長方形の検証例における主因子負荷行列

	F 1	F 2	(F 3)	...	(F 8)
X 1	0.8688	-0.4968	-0.0529	...	-0.0000
X 2	0.8679	-0.4962	0.0142	...	0.0027
X 3	0.8833	-0.4685	0.0139	...	-0.0020
X 4	0.9994	0.0295	0.0113	...	-0.0003
X 5	0.1377	0.9905	-0.0184	...	-0.0000
X 6	0.8786	0.4769	0.0034	...	0.0007
X 7	0.8789	0.4770	0.0032	...	0.0016
X 8	0.9589	0.2837	0.0072	...	-0.0024

13.7 正準因子分析法

この因子分析の方法は 1955 年に C. R. Rao によって初めて *Psychometrika*

に発表されたもので、前節の主因子分析法よりもさらに正準相関分析法に近い立場で因子負荷行列の最尤解を一意的に推定する。したがって、この解法を正準因子分析法 (canonical factor analysis) と命名した。そして、この解法は観測値ベクトルの正規分布性のもとで残差誤差の形式に関して式 (3.14) を制約条件に付した際の因子負荷行列の最尤解と同じ結果を与える。

さて、式 (13.162) から (13.166) ままでを前提とし、 C の要素の任意の線形式 $\alpha'C$ に $\beta'x$ を対応させる。ここに α と β は p 次の係数ベクトルである。

このとき、本節の考え方の特徴は、 $\alpha'C$ と $\beta'x$ の相関性を最大ならしめるような α と β を決めることである。ただし、最大の相関性とはいっても α と β が相対的にいくらでも大きくなって意味をもたなくなることを防ぐために、 $\alpha'C$ および $\beta'x$ の分散をそれぞれ 1 と規準化しておき、 α および β を一意に決定する。この二つの線形式の相関性については、すでに述べた正準相関分析の場合と全く同じ形式をとっているわけである。

いま、 x と C に関する分散共分散は次のようになっている。

$$\begin{aligned} E(xx') &= P, \\ E(CC') &= E(Aff'A') = AA' = P - \Psi, \\ E(xC') &= E[(Af+e)f'A'] = AA' \end{aligned} \quad (13.182)$$

すなわち

$$\text{Cov}(x, C) = \begin{matrix} x' & C' \\ \dots & \dots \\ x: & \begin{bmatrix} P & P - \Psi \\ P - \Psi & P - \Psi \end{bmatrix} \\ C: & \end{matrix} \quad (13.183)$$

で示される。

したがって、正準因子分析法での解法は、

$$\alpha'(P - \Psi)\alpha = 1, \quad \beta'P\beta = 1 \quad (13.184)$$

の条件下で、 $\alpha'C$ と $\beta'x$ の相関係数を最大にするような α, β を定めることを主題とする。

このような α と β は、常法によってラグランジュの乗数 λ および μ を用い、次の関数

$$\phi \equiv \alpha'(P - \Psi)\beta - \frac{1}{2} \lambda \{\alpha'(P - \Psi)\alpha - 1\} - \frac{1}{2} \mu \{\beta'P\beta - 1\} \quad (13.185)$$

を α と β の各要素で偏微分し、ゼロに等しいとおき、式 (13.184) によって整頓すればよい。

これを実施すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = (\mathbf{P} - \Psi)\beta - \lambda(\mathbf{P} - \Psi)\alpha = 0 \quad (13.186)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta} = (\mathbf{P} - \Psi)\alpha - \mu\mathbf{P}\beta = 0 \quad (13.187)$$

を得、式 (13.186) に α' を、式 (13.187) に β' をそれぞれ左から乗じ、式 (13.184) によるとスカラーとして

$$\alpha'(\mathbf{P} - \Psi)\beta = \lambda = \mu \quad (13.188)$$

が得られる。

つづいて、式 (13.186) から

$$\beta = \lambda\alpha \quad (13.189)$$

を得、これを式 (13.187) に代入し

$$[(\mathbf{P} - \Psi) - \lambda^2\mathbf{P}]\alpha = 0 \quad (13.190)$$

が誘導される。ここに固有値 λ^2 は正準相関係数を 2 乗したものに相当している。

すなわち、次式は正準相関係数を意味している。

$$\text{Cov}(\alpha'C, \beta'x) = \alpha'(\mathbf{P} - \Psi)\beta = \lambda \quad (13.191)$$

さて、 θ^2 と γ を新たに

$$\theta^2 \equiv \lambda^2/(1 - \lambda^2), \quad \gamma \equiv \Psi\alpha \quad (13.192)$$

のように定義すると、式 (13.190) は

$$[\Psi^{-1/2}(\mathbf{P} - \Psi)\Psi^{-1/2} - \theta^2\mathbf{I}]\gamma = 0 \quad (13.193)$$

と変形できる。

さらに数値計算のためには

$$[\Psi^{-1/2}\mathbf{P}\Psi^{-1/2} - \nu^2\mathbf{I}]\gamma = 0 \quad (13.194)$$

$$\text{ここに } \nu^2 = \theta^2 + 1$$

と書き換えて固有値と固有ベクトルを算出するほうが楽である。ここに固有値 θ^2 は式 (13.192) によって λ^2 に、固有ベクトル γ は式 (13.192) によって $\alpha = \Psi^{-1}\gamma$ に、また同時に、式 (13.189) によって β にもどされる。

このようにして、 $\alpha'C$ と $\beta'x$ の第1の正準相関係数および正準変量の係数ベクトルが求められるが、継続的に第2, 第3, ..., 第 q 番めの正準相関係数および正準変量の係数ベクトルまでも、式 (13.194) の q 個の大きさ順の固有値と固有ベクトルによって同時に得られる。このことは 3.1 節ですでに記述した事情と全く同様に導かれる。

ここで、式 (13.193) で定義された q 個の大きさ順の固有値 $\theta_1^2, \theta_2^2, \dots, \theta_q^2$ を要素とする対角行列を Θ^2 , 対応する q 個の固有ベクトルを列に並べた $p \times q$ 行列を Γ と定義すると、本節で目的とする正準因子分析法の因子負荷行列 A は容易に次のように示される。

$$A = \Psi^{1/2} \Gamma \Theta \quad (13.195)$$

実際に標本値によって上の値を推定するには、式 (13.194) で P および Ψ の推定量を必要とする。 P については標本相関行列 R を用い、 Ψ については式 (13.164) から $I - H^2$ と等しいので、次のような反復収束の計算を行なうことになる。

まず、共有性の対角行列 H^2 の初期値を $\hat{H}^2 = I - (\text{diag. } R^{-1})^{-1}$ または $\hat{H}^2 = I$ によって与え、 $\hat{\Psi} = I - \hat{H}^2$ をつくり、 $\hat{\Psi}^{-1/2} R \hat{\Psi}^{-1/2} - I$ の固有値と固有ベクトルを算出する。これによって、 Θ および Γ の推定量として $\hat{\Theta}$ および $\hat{\Gamma}$ を得る。ここで、式 (13.195) により A の推定量として $\hat{A} = \hat{\Psi}^{1/2} \hat{\Gamma} \hat{\Theta}$ を得る。

次いで、いま得た \hat{A} によって $\hat{H}^2 = \text{diag. } (\hat{A}\hat{A}')$ を算出する。ここで上の手順にもどって、新たに $\hat{\Psi} = I - \hat{H}^2$ とおき、以下の手順により A の推定量を出す。この計算手順を繰り返し、 \hat{A} が十分に収束し安定した値を示すまで巡回計算 (cycles of calculation) を行なう。この安定した \hat{A} が式 (13.195) に相当する最終結果となる。

上の式 (13.195) の性質として、 Γ の各列の直交性から

$$A' \Psi^{-1} A = \Theta^2 \quad (13.196)$$

となることが知れる。

また、この正準因子分析の性質として、観測ベクトルの各要素の単位すなわち尺度 (scaling) に対して、式 (13.194) の固有値と固有ベクトルには不変性があることも容易に知れる。いま、 \mathbf{S} を標準偏差または任意の尺度変換のための正則な対角行列とする。このとき、観測値ベクトルの分散共分散行列は \mathbf{SRS} となるが、これに基づいても θ^2 と $\boldsymbol{\gamma}$ の結果は変わらない。すなわち、この場合の式 (13.193) に相当する式は

$$[\hat{\Psi}^{-1/2}\mathbf{S}^{-1}\{\mathbf{S}(\mathbf{R}-\hat{\Psi})\mathbf{S}\}\mathbf{S}^{-1}\hat{\Psi}^{-1/2}-\theta^2\mathbf{I}]\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0} \quad (13.197)$$

となり、これは式 (13.193) とまったく同等になる。ただし、この場合の正準因子負荷行列は、式 (13.195) における $\hat{\Psi}^{1/2}$ が $\mathbf{S}\hat{\Psi}^{1/2}$ になり、 $\hat{\mathbf{A}}$ は $\mathbf{S}\hat{\mathbf{A}}$ で示されることに注意を要する。

ここで前節の主因子分析法と本節の正準因子分析法を比較して、どちらが良い分析結果を与えるか、双方の長短を考えてみよう。

もちろん、理論的には、主因子分析法は観測値の分散を最大限に説明する q 個の因子を追求し、また正準因子分析は観測値との相関性を最高に説明するような q 個の因子を抽出する方法であるわけで、分析の意図にかなりの差異がある。たとえば、心理学などの分野では主要な関心が後者にある場合が多いようである。

統計的推定論の立場からいえば、前者は最小 2 乗推定量を与え、後者は観測値の分布の正規性および式 (3.14) の $\boldsymbol{\Psi}$ に関する制約条件を付した場合の最尤推定量を与えている。したがって、後者の最尤推定量には一貫性や有効性などの良い性質があり、同時に最尤推定量に基づいて容易に導入できる統計的検定の基準も存在している。しかし、前者の最小 2 乗推定では直ちに利用できる適切な検定の方法がない。

他方、別の面で因子分析の結果を吟味するのに、因子数に関する理論的な考察も重要である。通常、独立な因子の数に関する帰無仮説が現実の構造模型にかなりはずれているときには、厳密な仮説検定の理論がなくとも、そのような否定さるべき仮説は棄却できるのが実際である。すなわち、観測資料から計算された標準誤差よりも大きな値を示す有意な因子の存在をみつけ出すような工夫もできよう。

このように、現実の個々の問題で理論的かつ実際的な観点から選択を考える

べきで、一概にいずれの方法がよいとはいえないことである。

ここで、普通感冒に関する表 13.12 によって数値計算の経過とその結果を示そう。

数値計算は、標本相関行列 R により初期の暫定的な共有性行列 \hat{H}^2 を $I - \text{diag.}(R^{-1})^{-1}$ で算出することから始まる。そして、本節の解法で中心的に反復利用する唯一性 (uniqueness) $\hat{\Psi}$ を $I - \hat{H}^2$ で求める。しかし、次回からの反復計算では、この $\hat{\Psi}$ を $I - \hat{H}^2$ で計算していく。この $\hat{\Psi}$ の収束の様子を表 13.20 で示している。

表 13.20 正準因子分析法における唯一性の収束

	初期	1回目	2回目	3回目	4回目	9回目
X 1	0.6902	0.6268	0.5802	0.5496	0.5289	0.4797
X 2	0.6746	0.5688	0.5125	0.4766	0.4522	0.3972
X 3	0.7231	0.6147	0.5627	0.5360	0.5233	0.5112
X 4	0.5300	0.4331	0.3915	0.3698	0.3577	0.3349
X 5	0.8518	0.7802	0.7549	0.7346	0.7169	0.6656
X 6	0.6033	0.5214	0.4860	0.4614	0.4433	0.3938

さて、 $\hat{\Psi}$ を得れば、式 (13.193) により 6×6 の対称行列 $\hat{\Psi}^{-1/2} R \hat{\Psi}^{-1/2} - I$ をつくり、この行列の固有値と固有ベクトルを求める。そして、この固有値の大きさ順に対角要素を並べて $\hat{\Theta}^2$ をつくり、また対応して固有ベクトルを列に並べて行列 \hat{F} をつくる。この固有値を反復計算で求めていく毎回の経過を、表 13.21 に固有値の大きさ順で示している。

表 13.21 正準因子分析法における $\hat{\Psi}^{-1/2} R \hat{\Psi}^{-1/2} - I$ の固有値の収束

	初期	1回目	2回目	3回目	4回目	9回目	
固有値の 大きな順	(1)	3.1353	3.8522	4.2932	4.5968	4.8075	5.3314
	(2)	0.6892	0.9647	1.1412	1.2652	1.3512	1.5533
	(3)	0.0092	0.1262	0.2095	0.2734	0.3222	0.4570
	(4)	-0.1248	-0.0082	0.0479	0.0894	0.1226	0.2181
	(5)	-0.2992	-0.1670	-0.0863	-0.0356	-0.0053	0.0494
	(6)	-0.3772	-0.2790	-0.2173	-0.1725	-0.1393	-0.0516

ここに固有値が負を示すのは不合理であるが、比較的初期において数値計算の丸めの誤差によって起こることがある。しかし、反復計算によって次第に締

密な精度になるにつれて、きわめて小さな正根のときは遅延するが、次第に正值となっていくものである。

表 13.21 のようになりに安定化した 9 回めの固有値 θ^2 を、式 (13.192) によって正準相関係数の 2 乗値 λ^2 にもどしてみると、表 13.22 のようになる。

表 13.22

θ^2	5.3314	1.5533	0.4570	0.2181	0.0494	-0.0516
λ^2	(0.9176) ²	(0.7799) ²	(0.5500) ²	(0.4130) ²	(0.2167) ²	—

これを 13.4.2 項の検定法によって採択する因子数を決めればよい。この表で、最小の第 6 番めの根はまだ負を示しているが、これは相当に小さな正值と考えられる。また第 5 番めの根 0.0494 も、13.4.2 項の検定法により信頼度 99% で有意とは認められない。したがって、この 219 症例での有意な因子は 4 個とみなされる。表 13.23 は、参考として、大きなほうから二つの固有値に対応する固有ベクトルの変化を示している。

表 13.23 正準因子分析法における $\hat{\Psi}^{-1/2}R\hat{\Psi}^{-1/2}-I$ の二つの固有ベクトルの変化

		初 期		1 回 め		2 回 め		9 回 め	
固有値		3.1353	0.6892	3.8522	0.9647	4.2932	1.1412	5.3314	1.5533
固有 ベ ク ト ル	X 1	0.4043	-0.1837	0.3856	-0.1846	0.3834	-0.1864	0.3888	-0.1609
	X 2	0.3548	-0.5955	0.3535	-0.6220	0.3571	-0.6375	0.3870	-0.6707
	X 3	0.3020	0.5982	0.3059	0.6005	0.3063	0.6031	0.2803	0.5695
	X 4	0.5772	0.1902	0.5953	0.1873	0.6012	0.1903	0.5881	0.2342
	X 5	0.1993	-0.4362	0.1874	-0.4029	0.1800	-0.3740	0.1780	-0.3394
	X 6	0.4965	0.1652	0.4933	0.1448	0.4876	0.1379	0.4929	0.1729

このように $\hat{\Psi}$, $\hat{\Theta}$ および \hat{F} を得れば、正準因子負荷行列 \hat{A} は $\hat{\Psi}^{1/2}\hat{F}\hat{\Theta}$ を演算して得られる。

しかし、これまでは初期の $\hat{\Psi}$ に基づいて計算をすすめてきたわけで、反復巡回計算のためには、いま得た \hat{A} を用いて $\hat{\Psi}$ を計算し直す。このために、新たに $\text{diag.}(AA')$ を \hat{H}^2 として $\hat{\Psi}=I-\hat{H}^2$ によって $\hat{\Psi}$ を更新する。そして上記の手順のように、行列 $\hat{\Psi}^{-1/2}R\hat{\Psi}^{-1/2}-I$ をつくり、固有値と固有ベクトルを計算する。

このような反復計算によって、 $\hat{\Psi}$, $\hat{\Theta}$ および \hat{F} が十分に収束し安定になったところの \hat{A} を正準因子分析の最終的な結果とする。表 13.24 は、この最終的に推定された正準因子負荷行列を示している。

表 13.24 普通感冒例 (表 13.10) における正準因子負荷行列

	F 1	F 2	F 3	F 4	(F 5)
X 1	0.6219	-0.1389	-0.3364	-0.0661	-0.0402
X 2	0.5632	-0.5269	0.0874	-0.0654	-0.0345
X 3	0.4628	0.5074	0.0536	0.0498	-0.1142
X 4	0.7853	0.1689	-0.0984	0.0832	0.0709
X 5	0.3352	-0.3451	0.1284	0.3023	-0.0212
X 6	0.7183	0.1360	0.2384	-0.1187	0.0271

さらに、先節からの長方形による検証例について、本法の数値結果を示そう。この場合は固有値の統計的仮説検定を行なうまでもなく、有意な因子は2個であることがわかり、6回の反復計算で表 13.25 に示される正準因子負荷行列が得られる。

表 13.25 長方形の検証例における正準因子負荷行列 (第6回め)

	F 1	F 2	(F 3)	(F 4)	(F 5)	(F 6~F 8)
X 1	0.6747	0.7379	-0.0122	0.0087	-0.0001	...
X 2	0.6744	0.7382	-0.0006	0.0025	-0.0039	...
X 3	0.6976	0.7165	-0.0057	-0.0030	0.0004	...
X 4	0.9606	0.2778	0.0056	0.0002	0.0077	...
X 5	0.4340	-0.9007	-0.0159	0.0040	0.0020	...
X 6	0.9824	-0.1851	-0.0020	-0.0010	0.0109	...
X 7	0.9827	-0.1851	-0.0017	-0.0014	-0.0004	...
X 8	0.9997	0.0234	0.0037	0.0015	-0.0003	...

13.8 アルファ因子分析法

前節の正準因子分析法に非常に類似するが、主として L. J. Cronbach や H. F. Kaiser などにより心理学的配慮を含んだ一つの因子分析の方法として、アルファ因子分析法 (alpha factor analysis) が提唱されている。この心理学的配慮の立場は、得られた対象を無作為標本とする母集団 (population) の因子を母数として推測するよりも、これらの因子が完備した観測特性の母集団

(universe) の中のたまたま p 個の特性だけでとらえられるにすぎないことを重要視している。ここでの方法は、このような見地から発生する推測の誤差に配慮し、因子分析を意義づける分析法といえる。本節の因子分析法の名称につけられているアルファとは、心理学における一種の信頼性 (reliability) の係数を示している。

いま、13.6 節の式 (13.166) で定義した $C=Af$ によって q 次の共通因子評点ベクトル f は

$$f = (A'A)^{-1}A'C \quad (13.198)$$

と書ける。

上式を f の第 s 番目の要素 f_s で示すと

$$f_s = \sum_{j=1}^p w_{sj}c_j, \quad s = 1, 2, \dots, q \quad (13.199)$$

と書け、ここに w_{sj} は $q \times p$ 行列 $W \equiv (A'A)^{-1}A'$ としたときの (s, j) 要素である。

しかし、上記の心理学的な推測の立場から考えると、式 (13.198) または (13.199) はただ p 種の観測特性に基づいたときのことであり、真の共通因子の近似にしかすぎない。すなわち、真の共通因子はこれに関係ある十分に大きな観測特性の集合全体が適用されて、初めて決められるものである。したがって、本節の立場では、式 (13.199) をこのような観測特性の集合に対する共通因子評点として

$$\xi_s = \sum_{j=1}^{\infty} w_{sj}c_j, \quad s = 1, 2, \dots, q \quad (13.200)$$

で示さねばならない。ここに c_j は観測特性の集合における \mathbf{x} の共通部分を示し、 w_{sj} はその係数を示している。

このような考察のもとに、アルファ因子分析法は式 (13.199) における共通因子評点 f_s が観測特性母集団 (universe) における共通因子評点 ξ_s と最大の相関性を示すように因子負荷行列を求めることになる。ここに正準相関分析の考え方が適用される。

もともと、あらゆる観測特性で示される式 (13.200) のように、厳密な表現式を追求して信頼性の高い推測を得ようとするやみがたい心理学的な考察は、

1937 年来の一般化性 (generalizability) の概念をなしている。また、同じ年にはよく知られた Kuder-Richardson の公式 (21) も提唱され、信頼性に関する基礎がためがなされた。

このような考え方は Cronbach らにより引き継がれ、 f_s と ξ_s の相関係数の 2 乗を一般化性の係数 (coefficient of generalizability) とよんでいる。信頼性の係数としては、この一般化性の係数を種々に変形した係数が工夫されているが、いずれも伝統的な類似の公式を用い、そこには Kuder-Richardson 信頼係数または Cronbach のアルファ係数とよばれる一つの基準値

$$\alpha = \left(\frac{p}{p-1} \right) \left(1 - \frac{w'H^2w}{w'(P-\Psi)w} \right) \quad (13.201)$$

を導入している。ここに H^2 は共有性 (communalities) を要素とする対角行列である。

さらに、この基準値 α を最大ならしめるために、F.M. Load は次式で定義される μ^2 を最大ならしめることを考えた。

$$\mu^2 = \frac{w'(P-\Psi)w}{w'H^2w} \quad (13.202)$$

このことは、式 (13.163) および (13.165) の中で $P-\Psi$ を観測ベクトル x の共通部分の全分散 Σ とし、 H^2 を群内分散 Σ_w 、 $P-I$ を群間分散 Σ_B に置き換えるとき、13.5 節の正準分析に沿った考え方であることがわかる。

さて、式 (13.202) の μ^2 を最大ならしめるには

$$\frac{\partial \mu^2}{2\partial w} = \frac{(P-\Psi)w - \mu^2 H^2 w}{w'H^2w} = 0 \quad (13.203)$$

を解けばよく、これは分子部分の

$$[(P-\Psi) - \mu^2 H^2]w = 0 \quad (13.204)$$

に帰せられる。

この式は、また次のようにも変形できる。

$$[H^{-1}(P-\Psi)H^{-1} - \mu^2 I]\delta = 0 \quad (13.205)$$

$$\text{ここに } \delta = Hw$$

上の式は、一般に p 個の固有値と固有ベクトルをもつが、すでに前節までに述べたように、 $\mu_1^2 \geq \mu_2^2 \geq \dots \geq \mu_q^2$ とするとき、これらに対応する固有ベクトル

は $H^{-1}(P-\Psi)H^{-1}$ を逐次最大限に説明する因子表現になっている。ここに、式 (13.205) はちょうど前節の正準因子分析法の式 (13.193) に対応する式である。

このようにして、式 (13.205) の q 個の固有値を大きさの順に対角行列 M^2 とし、また同じ順で対応する q 個の単位長の固有ベクトルを列に並べて $p \times q$ 行列 A を定義すると、因子負荷行列 A は

$$A = H\Delta M \quad (13.206)$$

で示される。この A で表現される互いに独立した因子をアルファ因子 (alpha factor) とよんでいる。

さらに、式 (13.205) における $H^{-1}(P-\Psi)H^{-1}$ は、式 (13.164) により $H^{-1}(P-I)H^{-1}+I$ とも書け、観測特性の母集団 (universe) から特定の選択による近似として、観測特性の共通部分の相関行列を示していると考えられる。この相関行列の主軸因子行列 (principal axes factor matrix) K を求めると

$$K = \Delta M \quad (13.207)$$

となり、式 (13.206) の A の各行を規準化した形になっている。また、式 (13.206) から容易に

$$A'H^{-2}A = M^2 \quad (13.208)$$

と対角行列になっていることも知れる。

また、式 (13.205) の第 s 番めの固有値 μ_s^2 と式 (13.201) による Kuder-Richardson 信頼係数 α_s との関係は

$$\alpha_s = \left(\frac{p}{p-1} \right) \left(1 - \frac{1}{\mu_s^2} \right) \quad (13.209)$$

で示される。

さて、数値計算にあたって、観測データから実際にアルファ因子行列 (alpha factor loading matrix) A を推定するには、やはり前節と同様の反復収束の計算手順をとる。

まず、 P の推定量として標本相関行列 R を用い、共有性行列 H^2 の初期の推定量として $\hat{H}^2 = I - (\text{diag. } R^{-1})^{-1}$ を計算する。または、めんどうであれば単に $\hat{H}^2 = I$ とおいてもよい。

次いで、 R と \hat{H}^2 を用い、 $\hat{H}^{-1}(R-I)\hat{H}^{-1}+I$ をつくり、この $p \times p$ 行列の固有値と対応する固有ベクトルを固有値の大きいほうから q 個求める。 ($q \leq p$)

この計算は、式 (13.205) の μ^2 と対応する δ を p 個求めることである。

さて、得られた q 個の固有値を対角線に並べ $q \times q$ の対角行列 \hat{M}^2 をつくる。また同時に得られた固有ベクトルを列に並べ $p \times q$ 行列 \hat{A} をつくる。ここで $\hat{A}\hat{M}^2\hat{A}'$ の行列演算を行なう。

次いで、逐次収束のための第 2 回めの共有性行列 \hat{H}^2 を次式によって求める。

$$\hat{H}^2 = \hat{H}^2[\text{diag.}(\hat{A}\hat{M}^2\hat{A}')] \quad (13.210)$$

ここに得た \hat{H}^2 によってさきの \hat{H}^2 を更新し、 $\hat{H}^{-1}(\mathbf{R}-\mathbf{I})\hat{H}^{-1}+\mathbf{I}$ をつくる。この $p \times p$ 行列の q 個の固有値と固有ベクトルを固有値の大きいほうから求める。このようにして、逐次 \hat{H}^2 の推定量を反復更新して、十分に安定な \hat{H}^2 に収束したと判定されれば、次式で主軸因子行列の推定量 \hat{K} を計算する。

$$\hat{K} = \hat{A}\hat{M} \quad (13.211)$$

さらに、アルファ因子負荷行列の推定量 \hat{A} として

$$\hat{A} = \hat{H}\hat{K} \quad (13.212)$$

の演算を実施し、 \hat{A} の推定を終える。

ここで正準因子分析法とアルファ因子分析法の性格を解析結果の面から比べてみよう。もちろん、この相違は最初の定式化に基づいており、前者は最尤推定の立場をとり、後者は信頼性係数または一般化性の係数 α を最大にする立場に基づいている。したがって、一概にどちらの原則が実際の現象に適切であるかはいえない。ただ参考として、Kaiser らによれば、因子分析法で解明しようとする科学的な試みの一般的な問題に対して、また少なくとも心理学的推測を意図するような場合には、アルファ因子分析法が実際に即した性質をもっているようであると述べている。

次に、双方の分析法の因子抽出に至る本来の測度 (natural metrics) の立場から、性格的な違いを考えてみよう。正準因子分析法では特殊因子と誤差項に関する項 e を規準化し、一方、アルファ因子分析法では共通因子に関する項 C を規準化している。

このことは前者の固有方程式が

$$[\Psi^{-1/2}(\mathbf{P}-\Psi)\Psi^{-1/2}-\theta^2\mathbf{I}]\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (13.213)$$

により、また対応して後者については

$$[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{P}-\boldsymbol{\Psi})\mathbf{H}^{-1}-\mu^2\mathbf{I}]\boldsymbol{\delta}=\mathbf{0} \quad (13.214)$$

により示され、かつ主軸因子行列 \mathbf{K} による共通因子部分のすべての分散が 1 になっている。

この相違から、次の三つのことがうかがえる。第 1 に、アルファ因子分析法では因子分析で最も重要な共通因子部分によって因子抽出のための測度が選ばれ、一方、正準因子分析では特殊因子と誤差項の部分に注目して、因子抽出のための測度を設定している。第 2 に、アルファ因子行列で基礎になる行列 $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{P}-\boldsymbol{\Psi})\mathbf{H}^{-1}$ は相関行列であり、一方正準相関行列では $\boldsymbol{\Psi}^{-1/2}(\mathbf{P}-\boldsymbol{\Psi})\boldsymbol{\Psi}^{-1/2}$ に直接関係させて同様に解釈できるものはない。第 3 に、アルファ因子分析法の共通因子部分に注目した解法は、現在、広範に適用されている解析的な回転法と同様の考え方といえる。

さらに、各分析法における因子数の決め方について考えよう。

まず、正準因子分析法は 13.4.2 項におけるように、一連の統計的帰無仮説の検定によって共通因子空間の次元を決めることができる。

他方、アルファ因子分析法では、ある一つの共通因子の信頼性の値が正でなければその因子をすてる。このことは、式 (13.209) によって一つのアルファ因子に対応する式 (13.205) の固有値 μ^2 が 1 より小であるとき負の信頼性 α を示してしまう。また、母数のうえで μ^2 は式 (13.202) の後に示したように、全分散と群内分散の比に相当しているから、標本誤差を考慮から除くと、当然 1 より小さくあってはならない模型である。したがって、 α が負であればきわめて疑わしい状態になる。もし、信頼係数が正であれば何かがあるところと考えると、少なくとも一つのアルファ因子を考える根拠を与える。このことは、主成分分析法で固有値が 1 より大きいところで因子を定めるのと同様の根拠である。さらに、アルファ因子の数 q の定め方には、上で得られる固有値と固有ベクトルが一般に p 個ではあるが、さきの 13.6 節の主因子分析法と同様に 3.5 節の統計的検定の立場を適用したと同時に実質科学上の知識から適切に検討すればよい。

すなわち、正準因子分析では統計的に有意な因子だけを抽出し、アルファ因子分析では心理学的な信頼性を主要な基準として因子数を定める。もし、観測

特性の母集団 (universe) で共通因子の数がかなり大きいと仮定すると、正準因子分析での因子の数は標本数の関数であり、アルファ因子分析での因子の数は観測する特性の数 p の関数になっている。これに関しては、Thurstone も論じているように、標本数と共通因子の数の間に非常に重要な関連性を含んでいる。この観点から、アルファ因子分析の場合の観測特性の数には十分な配慮を必要とする。

次に、普通感冒に関する表 13.12 により、数値計算の手順とその結果を示そう。

計算は、まえの二つの節と同様に、初期の共有性行列 $\hat{H}^2 = I - (\text{diag. } R^{-1})^{-1}$ を求めることから始まる。この共有性行列の要素は、その後の反復計算の推移とともに表 13.26 に示されている。

表 13.26 アルファ因子分析法による共有性の収束

	初 期	1 回め	2 回め	3 回め	4 回め	9 回め
X_1	0.3098	0.3465	0.3424	0.3349	0.3296	0.3223
X_2	0.3254	0.4778	0.5646	0.6187	0.6549	0.7321
X_3	0.2769	0.3500	0.3845	0.4039	0.4163	0.4413
X_4	0.4700	0.6139	0.6632	0.6812	0.6885	0.6954
X_5	0.1482	0.1898	0.2006	0.2005	0.1971	0.1819
X_6	0.3967	0.4861	0.5030	0.5019	0.4976	0.4862

次いで、 \hat{H}^2 を用い、固有値と固有ベクトルの算出のために 6×6 対称行列を $\hat{H}^{-1}(R-I)\hat{H}^{-1}+I$ によって作成する。この行列の固有値と固有ベクトルを求め、固有値の大きな順に対角要素とし \hat{M} をつくり、また対応する固有ベクトルを順に列に並べ行列 \hat{A} をつくる。この 6 個の固有値は、その後の反復計算の経過とともに表 13.27 に示されている。

表 13.27 アルファ因子分析法における $\hat{H}^{-1}(R-I)\hat{H}^{-1}+I$ の固有値の収束

	初 期	1 回め	2 回め	3 回め	4 回め	9 回め	
固有値の 大きさ順	(1)	5.7858	4.7723	4.5438	4.4793	4.4602	4.4546
	(2)	1.8776	1.6678	1.6053	1.5792	1.5662	1.5478
	(3)	0.0224	0.1715	0.1918	0.1921	0.1903	0.1924
	(4)	-0.3053	-0.0272	0.0381	0.0566	0.0602	0.0458
	(5)	-0.5283	-0.2069	-0.1259	-0.0974	-0.0851	-0.0715
	(6)	-0.8522	-0.3776	-0.2531	-0.2099	-0.1919	-0.1692

また信頼性係数 α の観点から、1.0 より大きな 2 個の固有値に対する固有ベクトルを表 13.28 で示している。

表 13.28 アルファ因子分析における $\hat{H}^{-1}(R-I)\hat{H}^{-1}+I$ の二つの固有ベクトルの変化

		初 期		1 回 め		2 回 め		9 回 め	
固有値		5.7858	1.8776	4.7723	1.6678	4.5438	1.6053	4.4546	1.5478
固有ベクトル	X 1	0.4391	-0.0412	0.4542	-0.0484	0.4630	-0.0507	0.4728	-0.0484
	X 2	0.4231	-0.4800	0.4023	-0.4955	0.3893	-0.5035	0.3657	-0.5164
	X 3	0.2931	0.6392	0.3021	0.6304	0.3034	0.6276	0.2954	0.6306
	X 4	0.4533	0.2500	0.4540	0.2407	0.4543	0.2357	0.4539	0.2309
	X 5	0.3793	-0.4886	0.3697	-0.4925	0.3667	-0.4921	0.3788	-0.4794
	X 6	0.4392	0.2410	0.4448	0.2329	0.4485	0.2285	0.4546	0.2240

ここで、固有値と固有ベクトルによる行列 \hat{M}^2 および \hat{A} が得られるとき、さきに用いた共有性行列 \hat{H}^2 の代わりに $\hat{H}^2[\text{diag.}(\hat{A}\hat{M}^2\hat{A}')] \equiv \tilde{H}^2$ を用いて、再び固有値と固有ベクトルのための行列 $\tilde{H}^{-1}(R-I)\tilde{H}^{-1}+I$ を作成する。

このように、逐次 \hat{M}^2 , \hat{A} および \hat{H}^2 を反復して求め、十分な精度で安定するまで繰り返す。そして、十分な精度に至れば最終結果として、 $\hat{A}\hat{M}$ で主軸因

表 13.29 普通感冒例 (表 13.19) における主軸因子行列

	F 1	F 2	F 3	F 4	(F 5), (F 6)
X 1	0.9980	-0.0599	0.5741	0.9388	...
X 2	0.7704	-0.6427	-0.0249	0.5535	...
X 3	0.6224	0.7847	1.0000	0.8215	...
X 4	0.9580	0.2871	0.8215	1.0000	...
X 5	0.7995	-0.5952	0.0306	0.5951	...
X 6	0.9598	0.2786	0.8160	0.9995	...

表 13.30 普通感冒例 (表 13.12) におけるアルファ因子行列

	F 1	F 2
X 1	0.5664	-0.0340
X 2	0.6620	-0.5523
X 3	0.4143	0.5224
X 4	0.7989	0.2394
X 5	0.3396	-0.2528
X 6	0.6687	0.1941

子行列 \hat{K} を、また $\hat{H}\hat{K}$ でアルファ因子負荷行列 \hat{A} を算出する。

この最終的な結果として \hat{K} を表 13.29 に、また \hat{A} を表 13.30 に示している。

つぎに長方形に関する検証例について、本節の分析を行なってみよう。この場合、固有値は非常に明確な 2 因子の存在を示し、第 3 の固有値は 0.0003 となってしまふ。この 2 個の固有値に対応する固有ベクトルの収束状況を表 13.31 に示している。

表 13.31 長方形による検証例での固有値と固有ベクトルの収束経過

		初 期		1 回 め		5 回 め	
固有値		5.7672	2.2284	5.7696	2.2292	5.7703	2.2297
固 有 ベ ク ト ル	X 1	0.3608	-0.3324	0.3612	-0.3323	0.3614	-0.3323
	X 2	0.3613	-0.3328	0.3614	-0.3327	0.3613	-0.3326
	X 3	0.3677	-0.3141	0.3677	-0.3140	0.3677	-0.3139
	X 4	0.4162	0.0194	0.4162	0.0196	0.4161	0.0196
	X 5	0.0575	0.6633	0.0574	0.6633	0.0573	0.6633
	X 6	0.3661	0.3192	0.3660	0.3193	0.3659	0.3194
	X 7	0.3661	0.3192	0.3660	0.3193	0.3659	0.3193
	X 8	0.3993	0.1897	0.3993	0.1898	0.3992	0.1899

さらに、この際の主軸因子行列 \hat{K} およびアルファ因子行列 \hat{A} を表 13.32 に示している。

表 13.32 長方形による検証例での主軸因子行列とアルファ因子行列

	主 軸 因 子 行 列		アルファ 因 子 行 列	
	F 1	F 2	F 1	F 2
X 1	0.8682	-0.4962	0.8680	-0.4961
X 2	0.8680	-0.4966	0.8679	-0.4966
X 3	0.8833	-0.4688	0.8833	-0.4687
X 4	0.9996	0.0293	0.9995	0.0293
X 5	0.1378	0.9905	0.1378	0.9902
X 6	0.8790	0.4769	0.8787	0.4768
X 7	0.8790	0.4768	0.8790	0.4769
X 8	0.9590	0.2835	0.9589	0.2835

ここで、 \hat{K} および \hat{A} が酷似していること、および表 13.32 が主因子分析法の結果とよく似ていることは、この長方形に関する検証例で \hat{H}^2 が I に非常に近く、観測誤差と特殊因子の部分がきわめて小さい理想的な場合であるから

表 13.33 諸因子分析法

	観測特性群 (特性数)	構造模型での 個別な因子の 割り付け	因子数の前提, 観測特性の群 分け	共通因子の種類と数
単一因子解法	1, (p)	あり	あり	異なった部分因子 q 個のみ
二因子解法	1, (p)	あり	あり (そのまま 1群)	一つの全般因子のみ
双因子解法	1, (p)	あり	あり	一つの全般因子と q 個の部分因子
多群解法	1, (p)	あり	あり	部分因子のみ q 個
成因分析法またはセントロイド法	1, (p)	なし	なし	全般因子 q 個
多因子解法	1, (p)	なし*	なし	全般因子 q 個, ただし回転により部分因子 q 個
正準相関分析法	2 (p_1, p_2)	なし	なし	全般因子 q 個
正準分析法	1, (p)	なし	なし	全般因子 q 個
主因子分析法	1, (p)	なし	なし	全般因子 q 個
正準因子分析法	1, (p)	なし	なし	全般因子 q 個
アルファ因子分析法 アルファ・マックス 因子分析法	1, (p)	なし	なし	全般因子 q 個

* 条件づきの場合 (restricted case, p. 67) は部分的にわりつけられる。

である。唯一性 (uniqueness) が大きくなれば、両分析法の差異も、本分析法の \hat{K} と \hat{A} の違いも僅少になるのは定式化のうえで当然である。

本書では因子分析の方法として種々のものを列記したが、これらの解法の特徴を相互に比較できる簡単な一覧表を表 13.33 に示している。

13.9 アルファ・マックス因子分析法

これまですでに、Rao の正準因子分析法は、個々の人について観察したデータからそれら一群の人々の母集団 (population) に関する性格特徴を推測する統計学的方法に近く、また一方、Kaiser と Caffrey のアルファ因子分析法は観測特性に関心をもって集めたデータから観測特性の母集団 (universe)

の簡略な特徴表

各観測特性の複雑度	因子軸間の角度	共有性の推定	本書の章, 節	その他の備考
1	直交または斜交	いらない	9章	
1	ただ1本だけ	いらない	10章	
2	直交	いらない	11章	
通常1	直交または斜交	あり	12章	部分因子のみであり, 多くの場合斜交因子である
q ($q \leq p$)	直交	あり	2章	すべて全般因子のみである. 第1因子以後は両極因子を意味する
$\leq q$	直交または斜交 (回転による)	あり	3章	直交回転法, 斜交回転法があり, 回転して部分因子のみが得られる
q ($q \leq p_1 \leq p_2$)	その群内で直交, 群間では直交と斜交	直接にはいらない	13.1~13.4節	
q	直交	直接にはいらない	13.5節	
q	直交	あり	13.6節	観測値の分散を最大限に説明するような因子抽出
q	直交	あり	13.7節	観測特性の線形式と共通因子部分の線形式の相関を最大に説明するような因子抽出
q	直交	あり	13.8節 13.9節	心理学的信頼係数を最大にする

というものの性格特徴を推測する心理学的立場に適した方法といわれてきた。

そして, 本節で記述する Bentler (1968) によるアルファ・マックス因子分析法 (ALPHAMAX 法, alpha-maximized factor analysis) は, よりいっそう心理学のような実質科学での問題に接近する方法として提唱され, この意味でアルファ因子分析法に匹敵し競合するものである。

いま, 先節からの記号と同様に, 式 (3.1), (3.6) のもとで, \mathbf{P} を p 次相関行列とし,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{bb}' &= \mathbf{B}^2, & \mathbf{cc}' &= \mathbf{C}^2, \\
 \boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2, & \mathbf{H}^2 &= \mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I} - \mathbf{B}^2 - \mathbf{C}^2
 \end{aligned} \quad (13.215)$$

とおく。ここに, \mathbf{B}^2 , \mathbf{C}^2 , $\boldsymbol{\Psi}$ および \mathbf{H}^2 は p 次対角線行列になっている。

このとき観測特性ベクトルの分散共分散行列に対して、その中の共通因子と特殊因子部分による分散共分散行列を次のような比として、信頼性の係数 r_{xx} (reliability coefficient) を

$$r_{xx} = \frac{\mathbf{1}'(\mathbf{P}-\mathbf{C}^2)\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{P}\mathbf{1}} \quad (13.216)$$

で定義する。ここに $\mathbf{1}$ は p 個の 1 からなる列単位ベクトルで、 \mathbf{C}^2 は繰り返し試験法 (test-retest) や内的整合性 (internal consistency) の過程で得られるものである。このことは 1940 年代に Thomson や Peel らが一つの複合変量の信頼性を最大にするような各観測特性に対する重みづけを問題としたことに起因するが、本節ではまず \mathbf{C}^2 を用いアルファ係数の最大化を発想の手がかりにして、アルファ・マックス因子分析法へ展開していく。

さて、上に定義した信頼性を最大化する重みづけを考えるために、単位ベクトル $\mathbf{1}$ の代わりに重みづけの係数ベクトル \mathbf{w} を用いて、次の関数

$$r_M = \frac{\mathbf{w}'(\mathbf{P}-\mathbf{C}^2)\mathbf{w}}{\mathbf{w}'\mathbf{P}\mathbf{w}} \quad (13.217)$$

を定義する。この r_M を最大にする \mathbf{w} を求めるには、常法により式 (13.217) を \mathbf{w} で偏微分し、ゼロとおいて整頓して

$$[(\mathbf{P}-\mathbf{C}^2)-r_M\mathbf{P}]\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (13.218)$$

を得る。この式は書き換えて

$$[(\mathbf{P}-\mathbf{C}^2)-\beta^2\mathbf{C}^2]\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (13.219)$$

としても同等である。ここに

$$\beta^2 = r_M/(1-r_M) \quad (13.220)$$

とおいている。この β^2 は Cronbach と Gleser のいわゆる“信号・雑音”比の拡張になっている。この数値計算には、固有値と固有ベクトルを算出する基本形式に整えた

$$[\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{P}-\mathbf{C}^2)\mathbf{C}^{-1}-\beta^2\mathbf{I}]\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (13.221)$$

によるのが便利である。ここに固有ベクトル \mathbf{v} は $\mathbf{v} \equiv \mathbf{C}\mathbf{w}$ である。

したがって、上に得た重みづけ係数ベクトル \mathbf{w} は一つの複合変量の信頼性を最大にするものであり、これはまた 1950 年に Green が提唱した信頼性を最

大化する解にもなっている。さらに、尺度に拘束されない因子分析 (scale-free factor analysis) も、式 (13.221) によって行なうことができる。

通常の因子分析では、誤差を除いたすべての信頼できる分散として $\mathbf{H}^2 + \mathbf{B}^2$ を明確に分析しようとするものではなく、伝統的な内的整合性の考え方により単に共有性の行列 \mathbf{H}^2 を分析することを意図している。すなわち、因子分析を試みたい人の人は、行列 $\mathbf{P} - \mathbf{C}^2$ でなく、行列 $\mathbf{P} - \boldsymbol{\Psi}$ を対象に考えているわけである。

$\mathbf{P} - \boldsymbol{\Psi}$ の解析にはいるまえに、まず、観測特性の内的整合性に基づき、式 (13.216) の信頼性の係数がよく知られたアルファ係数と同等であること、すなわち、式 (13.216) の r_{xx} は \mathbf{C}^2 が内的整合性の過程で推定されたときに限って、Cronbach のアルファ係数または Kuder-Richardson 信頼係数と同じことになる。ここで内的整合性 (internal consistency) とは、 \bar{r} を諸観測特性間の平均相関係数とすると、次の関係式

$$\mathbf{1}'\mathbf{C}^2\mathbf{1} = p(1 - \bar{r}) \quad (13.222)$$

が成立することである。すなわち、 $\mathbf{1}'\mathbf{C}^2\mathbf{1}$ は諸観測特性の分散 1 と共分散平均 \bar{r} の差を p 倍した値に等しいということである。

このとき、式 (13.216) の r_{xx} は次のように書ける。

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \frac{\mathbf{1}'\mathbf{P}\mathbf{1} - p(1 - \bar{r})}{\mathbf{1}'\mathbf{P}\mathbf{1}} = \frac{p}{p-1} \frac{\mathbf{1}'\mathbf{P}\mathbf{1} - p}{\mathbf{1}'\mathbf{P}\mathbf{1}} \\ &= \frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{\mathbf{1}'\mathbf{I}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{P}\mathbf{1}} \right) = \alpha \end{aligned} \quad (13.223)$$

一般に、内的整合性を仮定しなければ、アルファ係数は信頼性の係数に対する下限の推定量になっており、とくに上式のように等号が成立するのは、内的整合性の仮定がなりたつときだけである。

さて、観測特性が特殊因子を含むときには、内的整合性の定義は \mathbf{H}^2 部分だけに關係して、

$$\mathbf{P} - \boldsymbol{\Psi} = (\mathbf{P} - \mathbf{C}^2) - \mathbf{B}^2 \quad (13.224)$$

であるから全分散に対する共通因子部分の分散の比を示す次の関数を一つの係数として定義する。

$$\alpha_{-0} \equiv \frac{1'(P-C^2-B^2)1}{1'P1} = \frac{1'(P-\Psi)1}{1'P1} \quad (13.225)$$

これをアルファ・オ (alpha-o, α_{-0}) 係数とよび、観測される特性による一つの複合変量の内的整合性を示す。もちろん、この内的整合性の係数の式 (13.225) は $\Psi=C^2$ すなわち $B^2=0$ のとき、信頼性の係数の式 (13.216) と等しくなり、それ以外の通常ときには $\Psi > C^2$ であるから、式 (13.225) は (13.216) よりも小さい。したがって、 α_{-0} 係数は信頼性の係数の下限を示すことが知れる。

いま、この内的整合性を最大にするような観測特性の重みづけ係数 w を求め、これにより複合変量を考えるならば、その中の共有性は最大になることになる。

このために、次の α_0

$$\alpha_0 = \frac{w'(P-\Psi)w}{w'Pw} \quad (13.226)$$

を最大にする w を求める。この方法は、上記の信頼性の係数を最大にしたのと全く同様の手順によって

$$[\Psi^{-1/2}(P-\Psi)\Psi^{-1/2}-\mu^2I]v=0 \quad (13.227)$$

を得る。ここに

$$v = \Psi^{1/2}w \quad \text{かつ} \quad \mu^2 = \alpha_0/(1-\alpha_0) \quad (13.228)$$

となっている。式 (13.227) の数値計算の方法も、式 (13.221) のときと同様である。そして、 p 個の固有値 μ_i^2 は内的整合性の拡張となっていて

$$\alpha_{0i} = \mu_i^2/(1+\mu_i^2), \quad i=1, 2, \dots, p \quad (13.229)$$

である。ここに当然 $\mu_i^2 \geq 0$ であるから、 $0 \leq \alpha_{0i} \leq 1$ となる。

このように各複合変量の作成により因子抽出を行ない、それぞれを共通因子として解釈する方法をアルファ・マックス因子分析法という。

さて、このようにアルファ・マックス法も形式的には一種の正準分析となるが、この方法は内的整合性の係数を最大にすることにより次のような利点もっている。まず第1に、式 (13.227) で得られる μ^2 はいくら大きくても式 (13.229) により α_0 値は 1 を示すことはない。アルファ・マックス法を最大の信頼性が得られる決定的な定式化とみなしても、現実の諸観測特性値が完全に

信頼できるわけではなく、複合変量で精密に因子を規定できるのでもない。この意味で観測された変量が完全に内的整合性を示すことはなく、経験的につつまがあう。第2に、信頼性の係数から期待されるように、 α_0 は観測特性の数 p が無限大になるときに限り1になることである。これは式 (13.229) で μ_i^2 が無限大のときのみ $\alpha_{0i}=1$ となる。もちろん、固有値 μ_i^2 の大きさは、観測特性の数に関連して式 (13.227) の $\Psi^{-1/2}(\mathbf{P}-\Psi)\Psi^{-1/2}$ のランク q に依存し、 p 対 q の比が大きくなれば固有値も大きくなる。このように、この比が十分好ましいほど大きくなればなるほど、因子がいっそう良い精度で測定されてくるわけである。第3に、因子抽出を打ち切る時期に関し、アルファ・マックス法は非常に明確な基準が示されることである。すなわち、 α_{0i} がゼロ値に転落したとき、それまでの $i-1$ 個で因子抽出を終了する。また一般に内的整合性の低い値を示す観測特性は相対的に有用でないということも、実際的な立場からは妥当と考えられる。そして、いずれも、式 (13.225) で示される伝統的なアルファ係数を最大にするのではなく、式 (13.226) の α_0 を最大化して得られることが特徴となる。

さらに、 α_0 を最大にするために式 (13.227) を解くことは因子分析の一つのシステムと考えるが、対照的に式 (13.223) の α を最大にすることは、因子分析というよりむしろ成因分析に近い。すなわち、 \mathbf{w} を重みづけベクトルとして

$$\alpha = \frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{\mathbf{w}'\mathbf{I}\mathbf{w}}{\mathbf{w}'\mathbf{P}\mathbf{w}} \right) \quad (13.230)$$

を最大にすることは、新しい基準として

$$\gamma^2 = \mathbf{w}'\mathbf{P}\mathbf{w}/\mathbf{w}'\mathbf{I}\mathbf{w} \quad (13.231)$$

を最大にするのと同様である。このためには $\partial\gamma^2/\partial\mathbf{w}=\mathbf{0}$ により

$$(\mathbf{P}-\gamma^2\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{0}$$

を解くことになる。したがって、式 (13.227) との大きな差異は、 $\mathbf{P}-\Psi$ に関してでなく、 \mathbf{P} に関して解を得ていることにある。しかも、この場合

$$\alpha_i = \frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \quad (13.232)$$

で $\alpha_i > 0$ を必要とするから、因子抽出の停止規則として役だてられる $\gamma^2 > 1$

に根拠を与えている。

次に、Kaiser と Caffrey の提唱したアルファ因子分析との差異にふれておこう。この基準は、式 (13.148) で示したように

$$\alpha = \frac{p}{p-1} \left(1 - \frac{w' H^2 w}{w' (P - \Psi) w} \right) \quad (13.233)$$

であり、共通因子部分に関する全般的な内的整合性を表現している。一方、式 (13.223) で示した重み係数ベクトルを $\mathbf{1}$ とする Kuder-Richardson の式は、観測されるデータの全般的な内的整合性を示し、また本節のアルファ・マックス法も観測されるデータについてはあるが重み係数 w を考えていることになる。

アルファ因子分析とアルファ・マックス因子分析の解析手順の差異は、前者の式 (13.150) と後者の式 (13.227) で示される固有方程式にある。そして、一般に、双方の重みづけ係数の列ベクトルは同じでなく、基本的に前者は

$$\mu^2 = w' (P - \Psi) w / w' H^2 w \quad (13.234)$$

を、後者は

$$\mu^2 = w' (P - \Psi) w / w' \Psi w \quad (13.235)$$

を最大にする w を求めることになっている。このために $\Psi = H^2$ でなければ、それなりに根拠をもつ両者の解は一致しない。

したがって、ここでは双方の性格を比較し、実際に適用する際の優劣を要約しておこう。もちろん、このことは心理学的な調査研究における共通因子部分の妥当性を評価することになる。もし、因子分析でのねらいが単純にデータに基づいた最大の賦課性を示すような各観測特性に対する重み係数を得ることであるならアルファ・マックス因子分析法の立場が好適であり、そうでなく、むしろ観測特性群の母集団についての代表性とか相似性をねらいとするのであればアルファ因子分析法のほうが論理的に適した技法といえよう。しかし、その後には簡素化構造のための因子軸の回転を行なうのであれば、アルファ因子分析で得た母集団に関する代表性とか相似性は完全に減じられてしまう。一方、アルファ・マックス因子分析では回転によっていくつかの複合変量の内的整合性は減じても、その他の複合変量の整合性は増大するのである。

このように考えると代表性と賦課性とは別のものであるが、因子分析を適用

する多くの調査研究では双方とも基本的に重要なことになる。すなわち、観測特性群の母集団の諸因子を得ることは望ましいのであるが、抽出された因子が実際的には低い信頼性しか賦課しないとすると奇妙である。また逆に、高度の信頼性をもつ因子が望ましいのであるが、それらが観測特性の母集団因子にほとんど対応しないときには好ましくない。おそらく、この二つの性質を混和したものが最も望ましく、それはおのずと $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{H}^2$ に近い立場となり、また双方の長所を組み合わせる尺度変換の適用が実際上最も適切な解を与えることになる。

13.10 計算プログラム

13.10.1 2個の部分ベクトルに関する正準相関分析

正準相関分析を行なうプログラムである。すなわち、 p_1 次元と p_2 次元の観測特性ベクトルを $p_1 + p_2 = p$ として、 p 次元観測特性ベクトルの観測資料を得た際に、 p_1 要素の線形式と p_2 要素の線形式の間の相関性を最大ならしめるような双方の線形式を確定する。この双方の線形式を正準変量とよんでいる。ここで一般性を失わず $p_1 \leq p_2$ とおいて、以下逐次、このような正準変量の対として、互いに独立な p_1 個の線形式の対を求めていく。このような演算操作の実質科学的な考察は正準相関のうえで探索的に種々の解釈を試みるが、たとえば第1部分ベクトルと第2部分ベクトルに対応する共通な因子を抽出し、解釈することができる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
NN	観測特性の数	R(I, J)	分散-共分散行列
NC	第1ベクトルの次数 p_1	G(I, J)	正準相関と正準変量を算出するための行列
MI	収束のための反復回数の限度	KK	変量の番号
VC	収束判定定数	RAM	正準相関係数
IC	分散-共分散行列から計算するの か原始資料から出発するのかの制御	C(I)	正準変量の係数
ND	標本の大きさ(数)	B(I)	
R(I, J)	分散-共分散行列		
B(I)	観測値ベクトル		

```

C      CANONICAL CORRELATION AND CANONICAL VARIATES
C
C
C      R --- VARIANCE-COVARIANCE MATRIX
C      NN --- DIMENSION OF R.
C      NC --- NO. OF COMPONENTS IN THE FIRST RANDOM VECTOR
C      MI --- MAXIMUM ITERATION NO.
C      VC --- CONVERGE CRITERION
C      IC --- 0, TO USE A COVARIANCE MATRIX WE HAVE ALREADY
C
C      --- 1, TO MAKE A COVARIANCE MATRIX FROM ORIGINAL OBSERVA-
C      TIONS
C      ND --- NO. OF SAMPLES
C
C      SUBROUTINE MATINV IS REQUIRED
C
C      DIMENSION R(30,30),R11(10,10),RR(11,12),G(10,10),B(30),C(10),D(10)
C      COMMON RR,R,R11,G,B,C,D
1  READ (40,100) NN,NC,MI,VC,IC,ND

  WRITE (50,200)
  IF(IC=1) 2,4,4
2  DO 3 I=1,NN
3  READ (40,101) (P(I,J),J=1,NN)
  GO TO 10
4  DO 5 I=1,NN
  C(I)=0.0
  DO 5 J=1,NN
5  R(I,J)=0.0
  NM=0

6  READ (40,102) (R(I),I=1,NN)
  DO 7 I=1,NN
  C(I)=C(I)+R(I)
  DO 7 J=1,NN
7  R(I,J)=R(I,J)+B(I)*B(J)
  NM=NM+1
  IF(NM=ND) 6,8,8
8  ANM=NM
  DO 9 I=1,NN
  DO 9 J=1,NN

  R(I,J)=(R(I,J)-C(I)*C(J)/ANM)/ANM
9  R(J,I)=R(I,J)
10 DO 11 I=1,NC
11 WRITE (50,201) (R(I,J),J=1,NN)
  NC1=NC+1
  WRITE (50,202)
  DO 12 I=NC1,NN
12 WRITE (50,201) (R(I,J),J=1,NN)
  NC1=NC+1
  NC2=NN-NC

  DO 13 I=1,NC
  DO 13 J=1,NC
13 RR(I,J)=R(I,J)
  CALL MATINV (NC)
  DO 14 I=1,NC
  DO 14 J=1,NC
14 R11(I,J)=RR(I,J)
  DO 15 I=1,NC2
  K=NC+I
  DO 15 J=1,NC2

```

```

L=NC+J
15 RR(I,J)=R(K,L)
CALL MATINV (NC2)
DO 16 I=1,NC
DO 16 J=1,NC
G(I,J)=0.0
DO 16 K=1,NC
DO 16 L=1,NC2
L1=NC+L
DO 16 M=1,NC2

M1=M+NC
16 G(I,J)=G(I,J)+R11(I,K)*R(K,L1)*RR(L,M)*R(M1,J)
WRITE (50,203)
DO 17 I=1,NC
17 WRITE (50,204) I,(G(I,J),J=1,NC)
KK=1
18 II=1
DO 19 I=1,NC
B(I)=0.0
DO 19 J=1,NC

19 B(I)=B(I)+G(I,J)
20 RAM=0.0
DO 22 I=1,NC
C(I)=0.0
DO 21 J=1,NC
21 C(I)=C(I)+B(J)*R(J,I)
22 RAM=RAM+B(I)*C(I)
RAM=RAM**0.5
DO 23 I=1,NC
23 C(I)=B(I)/RAM

DO 24 I=1,NC
D(I)=0.0
DO 24 J=1,NC
24 D(I)=D(I)+G(I,J)*C(J)
IF (II-M1) 25,29,29
25 DO 26 I=1,NC
E=ABS(C(I)-D(I))-VC
IF (E) 26,27,27
26 CONTINUE
GO TO 29

27 II=II+1
DO 28 I=1,NC
28 B(I)=D(I)
GO TO 20
29 RAM=RAM**0.5
WRITE (50,205) KK,RAM
DO 30 I=1,NC2
I1=I+NC
DO 30 J=1,NC2
J1=J+NC

30 RR(I,J)=R(I1,J1)
CALL MATINV (NC2)
DO 32 I=1,NC2
B(I)=0.0
DO 31 J=1,NC2
J1=NC+J
DO 31 K=1,NC
31 B(I)=B(I)+RR(I,J)*R(J1,K)*C(K)
32 B(I)=B(I)/RAM
DO 33 I=1,NC

```



```

33 WRITE (50,206) C(I),B(I)
   IF(NC2=NC) 36,36,34
34 DO 35 I=1,NC2
35 WRITE (50,207) B(I)
36 DO 37 I=1,NC
   B(I)=0.0
   DO 37 J=1,NC
37 B(I)=B(I)+C(J)*R(J,I)
   DO 38 I=1,NC
   DO 38 J=1,NC

38 G(I,J)=G(I,J)-RAM*RAM*C(I)*B(J)
   IF(KK=NC) 39,40,40
39 KK=KK+1
   GO TO 18
40 WRITE (50,208)
   GO TO 1

100 FORMAT (3I2,F12,10,I2,I3)
101 FORMAT (6E12.5)
102 FORMAT (8F10.2)
200 FORMAT (/32H CANONICAL CORRELATION ANALYSIS //36H INPUT VARIANCE
          1= COVARIANCE MATRIX /)
201 FORMAT (5F16.4)
202 FORMAT (12H ----- )
203 FORMAT (/49H MATRIX FOR CALCULATING CORRELATIONS AND VARIATES)
204 FORMAT (/15,3X,5(2X,F7.4)/8X,(5(2X,F7.4)))
205 FORMAT (/120H CANONICAL VARIATE,15,//29H CANONICAL CORRE
          1LATION,F11.6//29H CANONICAL COEFFICIENT,//12X,26HFOR GROUP
          21 FOR GROUP 2/)
206 FORMAT (13X,F10.6,5X,F10.6)
207 FORMAT (28X,F10.6)
208 FORMAT (6H END )
STOP
END

```

- 1

[付] サブルーティン(逆行列の算出)

```

C      SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C      - CROUT METHOD -
C
SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(11,12),B(10),C(10)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
  A(I,I)=1.0
  DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
  DO 3 J=1,N
  DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
  DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
RETURN
END

```

13.10.2 正準相関の検定

前項の正準相関分析によって線形式の p_1 個の対が定式上求まるが、統計的に有意な線形式の対が何個であるかを各対に対応する相関係数の大きさによって検定するプログラムである。理論的には近似的な χ^2 検定を適用して相関係数の大きいほうから系統的に行なっていく。これによって p_1 対の線形式のうち、有意な若干個の対を選択できる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	標本の大きさ(数)	R(I)	正準相関係数ベクトル
N1	第1変量ベクトルの次数	CHI	計算した χ^2 の値
N2	第2変量ベクトルの次数	NN	自由度
R(I)	正準相関係数ベクトル		

```

C      TESTING THE SIGNIFICANCE OF CANONICAL CORRELATIONS
C
C
C      N --- NO. OF SAMPLES
C      N1 --- NO. OF ELEMENTS IN 1-ST VARIABLE VECTOR
C      N2 --- NO. OF ELEMENTS IN 2-ND VARIABLE VECTOR
C      R --- A VECTOR OF CANONICAL CORRELATION COEFFICIENTS
C
C
DIMENSION R(10)
1 READ (40,100) N,N1,N2
  READ (40,101) (R(I),I=1,N1)
  WRITE (50,200)
  WRITE (50,201) (R(I),I=1,N1)
  AN=N
  AN1=N1
  AN2=N2
  AA=0.0
  DO 2 I=1,N1
    R(I)=R(I)*R(I)
  2 AA=AA+ALOG(1.0-R(I))
    DO 3 K=1,N1
      CHI=- (AN-0.5*(AN1+AN2+1.0))*AA
      NN=(N1-K+1)*(N2-K+1)
      WRITE (50,202) K,CHI,NN
    3 AA=AA-ALOG(1.0-R(K))
    GO TO 1
100 FORMAT (3I3)
101 FORMAT (6F5,4)

200 FORMAT (53H TESTING THE SIGNIFICANCE OF CANONICAL CORRELATIONS )
201 FORMAT (/4X,47H A VECTOR OF CANONICAL CORRELATION COEFFICIENTS//10
  1X,(6(F8,5,2X)))
202 FORMAT (//,9H      H , R,12,6H = 0,/,12H      CHI = ,E12,5,/,13H
  1      D,F. = ,13)
STOP
END

```

13.10.3 正準変量と残差正準変量間の相関行列の検算

13.10.1項で行なわれた正準相関分析による正準変量と正準相関係数を、実際に与えられた分散共分散行列にあてはめて、結果の精度を全般的に視察し検討するプログラムである。すなわち、前項では近似的な χ^2 統計量で正準相関係数の検定を行なうが、ここでは正準変量の対および $p_2 - p_1$ 個の正準変量以外の変量との相互の相関性を、 $p \times p$ の相関行列全体として理論どおりに表示されているか否かを考察する。インプットは、標本分散共分散行列、正準相関係数ベクトルおよび正準変量の係数ベクトルである。

入 力 (input)		出 力 (output)	
NN	全観測特性の数	R2(I, J)	正準変量相関行列 係数行列
NP	第1ベクトルの次数	V(I, J)	
R(I, J)	分散-共分散行列		
RAM(I)	正準相関係数ベクトル		
A(J, I)	第1正準変量の係数行列		
V(J, I)	第2正準変量の係数行列		

```

C      TEST OF CANONICAL COEFFICIENTS
C      AND THE REMAINDER CANONICAL COEFFICIENTS
C
C
C      NN --- RANK OF MATRIX R (NN=NP+N0)
C      NP --- NO. OF ELEMENTS IN 1-ST VARIABLE VECTOR
C      R --- A COVARIANCE MATRIX (NN*NN)
C      A --- A COEFFICIENTS MATRIX OF 1-ST CANONICAL VARIABLES (NP*NP)
C      V --- A COEFFICIENTS MATRIX OF 2-ND CANONICAL VARIABLES (N0*NP)
C
C      RAM --- A VECTOR OF CANONICAL CORRELATION COEFFICIENTS (NP)
C
C      SUBROUTINE MATINV IS REQUIRED
C
C      DIMENSION R(30,30),A(10,10),V(20,20),D(20,21),RAM(10),X(20),Y(20)
C      DIMENSION R1(30,30),R2(30,30)
C      COMMON D,R,A,V,R1,R2
C      1 READ (40,100) NN,NP
C      DO 2 I=1,NN
C
C      2 READ (40,101) (R(I,J),J=1,NN)
C      N0=NN-NP
C      READ (40,101) (RAM(I),I=1,NP)
C      DO 3 I=1,NP
C      3 READ (40,101) (A(J,I),J=1,NP)
C      DO 4 I=1,NP
C      4 READ (40,101) (V(J,I),J=1,N0)
C      IF (NP-N0) 5,14,5
C      5 NR=N0-NP
C      DO 13 I=1,NR

```

```

NS=NP+I-1
NT=NN-NS
NS1=NS+1
DO 6 J=1,N0
NPJ=NP+J
DO 6 K=1,NS
D(J,K)=0.0
DO 6 L=1,N0
NPL=NP+L
6 D(J,K)=D(J,K)+R(NPJ,NPL)*V(L,K)

DO 7 J=NS1,N0
X(J)=0.0
DO 7 K=1,NS
7 X(J)=X(J)+D(J,K)
DO 8 J=1,NS
Y(J)=0.0
DO 8 K=NS1,N0
8 Y(J)=Y(J)-X(K)*D(K,J)
CALL MATINV (NS)
DO 9 J=1,NS

X(J)=0.0
DO 9 K=1,NS
9 X(J)=X(J)+Y(K)*D(K,J)
AA=0.0
DO 10 J=1,N0
NPJ=NP+J
DO 10 K=1,N0
NPK=NP+K
10 AA=AA+X(J)*R(NPJ,NPK)*X(K)
AA=AA**0.5

DO 11 J=1,N0
11 X(J)=X(J)/AA
DO 12 J=1,N0
12 V(J,NS1)=X(J)
13 CONTINUE
14 DO 15 I=1,NN
DO 15 J=1,NN
15 R1(I,J)=0.0
DO 16 I=1,NP
DO 16 J=1,NP

16 R1(I,J)=A(I,J)
DO 17 I=1,N0
INP=I+NP
DO 17 J=1,N0
JNP=J+NP
17 R1(INP,JNP)=V(I,J)
DO 18 I=1,NN
DO 18 J=1,NN
R2(I,J)=0.0
DO 18 K=1,NN

DO 18 L=1,NN
18 R2(I,J)=R2(I,J)+R1(K,I)*R(K,L)*R1(L,J)
WRITE (50,200)
DO 19 I=1,NN
19 WRITE (50,201) I,(R2(I,J),J=1,NN)
DO 20 I=1,N0
20 WRITE (50,201) I,(V(I,J),J=1,N0)
GO TO 1
100 FORMAT (2I3)
101 FORMAT (6E12.5)

```

```

200 FORMAT (///45H CANONICAL VARIATE CORRELATION MATRIX ,/)
201 FORMAT (//13.8(F8.4,1X)/3X,(8(F8.4,1X)))
STOP
END

```

[付] サブルーティン(逆行列の算出)

```

C      SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C      - CROUT METHOD -
C
SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(31,31),B(10),C(10)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
A(I,I)=1.0
DO 2 J=1,N
C(J)=A(I,J)/B(I)
DO 3 J=1,N
DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
RETURN

END

```

13.10.4 m 個の部分ベクトルに関する正準相関分析

p 次観測特性ベクトルが、 m 個の部分ベクトル ($p=p_1+p_2+\dots+p_m$) に分けて考えられるとき、この部分ベクトルに含まれる観測特性群間の正準相関分析を行なう。このことは 13.10.1 項の一般化に相当する。このプログラムも、コントロール・カードによって、インプットおよびアウトプットを多様化しているが、 $\min(p_1, p_2, \dots, p_m)$ 種の m 組からなる正準変量に関する係数行列を示し、また 13.10.3 項と同様に、各正準変量間の総括的な相関行列をも同時に得ることができる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
M	部分ベクトルの数	R(I,J)	ID=0 のとき相関行列で, 1 のときは分散共分散行列
N(I)	各部分ベクトルの次数	ICYCL	反復回数
NS	標本の大きさ(数)	X(I)	固有ベクトル
IC	ゼロのときインプット行列を算出し, 1 のときは算出しない	RAM(I)	固有値
ID	ゼロのとき相関行列を, 1 のとき分散共分散行列をインプットする	XB(J)	正準係数
IMAX	収束のための反復回数の限度	RW(I,J)	正準相関行列
CONV	収束判定定数		
X(I)	観測値ベクトル		
R(I, J)	ID=0 のとき相関行列で, 1 のときは分散共分散行列		

```

C      CANONICAL CORRELATION ANALYSIS FOR MULTI-SETS OF VARIABLES
C
C
C      M --- NO. OF SUB-SETS
C      N --- ORDER OF EACH SUB-SET
C      NS --- SAMPLE SIZE
C      IC --- 0. TO MAKE AN INPUT MATRIX
C      ID --- 1. TO USE AN INPUT MATRIX WE HAVE ALREADY
C      ID --- 0. TO INPUT CORRELATION MATRIX
C
C      --- 1. TO INPUT VARIANCE-COVARIANCE MATRIX
C      IMAX --- MAX. NO. OF ITERATIVE CYCLES
C      CONV --- DIFFERENCE OF CRITERION TO SEE CONVERGENCE
C      X --- OBSERVATION VECTOR
C      R --- SAMPLE CORRELATION MATRIX OR VARIANCE-COVARIANCE
C           MATRIX
C
C      SUBROUTINE MATINV IS REQUIRED
C
C

```

```

DIMENSION RY(50,50),RW(10,10),DB(50,10),R(50,50),X(50),XB(50)
DIMENSION RWW(10,10,5),RAM(5),N(5),NIS(5)
COMMON RW
1 READ (40,100) M,(N(I),I=1,M)
  READ (40,101) NS,IC,ID,IMAX,CONV
  WRITE (50,200)
  WRITE (50,201) M,(I,N(I),I=1,M)
  NT=0
  MINNI=999
  DO 3 I=1,M
    NIS(I)=NT
    NT=NT+N(I)
    IF(N(I)-MINNI) 2,2,3
2  MINNI=N(I)
3  CONTINUE
  IF(IC) 14,4,14
4  DO 5 I=1,NT
    XB(I)=0.0
  DO 5 J=1,NT
5  R(I,J)=0.0

```

```

DO 6 L=1,NS
READ (40,102) (X(I),I=1,NT)
DO 6 I=1,NT
XB(I)=XB(I)+X(I)
DO 6 J=1,NT
6 R(I,J)=R(I,J)+X(I)*X(J)
XN=NS
IF(ID) 12,7,12
DO 9 I=1,NT
DO 8 J=1,NT

8 R(I,J)=(R(I,J)-XB(I)*XB(J)/XN)
9 X(I)=R(I,I)
DO 11 I=1,NT
DO 10 J=1,NT
R(I,J)=R(I,J)/SQRT(X(I)*X(J))
10 R(J,I)=R(I,J)
11 R(I,I)=1.0
GO TO 16
12 DO 13 I=1,NT
DO 13 J=1,NT

R(I,J)=(R(I,J)-XB(I)*XB(J)/XN)/(XN-1.0)
13 R(J,I)=R(I,J)
GO TO 16
14 DO 15 I=1,NT
15 READ (40,103) (R(I,J),J=1,NT)
16 IF(ID) 18,17,18
17 WRITE (50,202)
GO TO 19
18 WRITE (50,203)
DO 20 I1=1,M

IS=NIS(I1)+1
IL=N(I1)+NIS(I1)
DO 20 J1=1,M
WRITE (50,212) I1,J1
JS=NIS(J1)+1
JL=N(J1)+NIS(J1)
I1=0
DO 20 I2=IS,IL
I1=I1+1
20 WRITE (50,204) I1,(R(I2,J2),J2=JS,JL)

IAD=0
DO 29 I1=1,M
N1=N(I1)
DO 21 J=1,N1
MK1=IAD+J
DO 21 K=1,N1
MK2=IAD+K
21 RW(J,K)=R(MK1,MK2)
IAD=IAD+N1
RW(1,1)=RW(1,1)/ABS(RW(1,1))*SQRT(ABS(RW(1,1)))

DO 22 I=2,N1
RW(1,I)=RW(1,I)/RW(1,1)
NM1=N1-1
DO 26 I=2,N1
S=0.0
IM1=I-1
DO 23 L=1,IM1
23 S=S+RW(L,I)**2
F=RW(I,1)/ABS(RW(I,1))
RW(I,I)=F*SQRT(RW(I,I)*S)

```

```

DO 26 J=1,NI
IF(I-J) 24,26,24
24 S=0.0
DO 25 L=1,IH1
25 S=S+RW(L,I)*RW(L,J)
KW(I,J)=(RW(I,J)-S)/RW(I,I)
26 CONTINUE
DO 27 I=1,NI
DO 27 J=1,NI
27 RW(J,I)=RW(I,J)

DO 28 I=1,NM1
IP1=I+1
DO 28 J=IP1,NI
28 RW(I,J)=0.0
CALL MATINV(NI)
DO 29 J=1,NI
DO 29 K=1,NI
29 RWW(J,K,I)=RW(J,K)
DO 31 I=1,M
NI=N(I)

DO 31 J=1,M
NJ=N(J)
DO 30 K=1,NI
DO 30 L=1,NJ
RW(K,L)=0.0
DO 30 IS=1,NI
MD=IS+NIS(I)
DO 30 NB=1,NJ
ND=NB+NIS(J)
30 RW(K,L)=RW(K,L)+RWW(K,IS,I)*R(MD,ND)*RWW(L,NB,J)

DO 31 K=1,NI
MD=K+NIS(I)
DO 31 L=1,NJ
ND=L+NIS(J)
31 R(MD,ND)=RW(K,L)
DO 33 I=1,NT
DO 32 J=1,NT
32 RY(I,J)=R(I,J)
33 R(I,I)=R(I,I)-1.0
DO 50 IH=1,MINNI

ICYCL=0
DO 34 I=1,NT
34 X(I)=1.0
35 DO 36 I=1,NT
XB(I)=0.0
DO 36 K=1,NT
36 XB(I)=XB(I)+R(I,K)*X(K)
ICYCL=ICYCL+1
IAD=1
DO 37 I=1,M

NI=N(I)
RAM(I)=0.0
DO 37 J=1,NI
RAM(I)=RAM(I)+XB(IAD)*XB(IAD)
37 IAD=IAD+1
S=0.0
IAD=1
DO 38 I=1,M
RAM(I)=SQRT(RAM(I))
W=1.0/RAM(I)

```



```

NI=N(I)
DO 38 J=1,NI
Y=XB(IAD)*W
S=S+(X(IAD)-Y)*(X(IAD)-Y)
X(IAD)=Y
38 IAD=IAD+1
S=SQR(S/FLOAT(NIS(M)+N(M)))
IF(S=CONV) 40,39,39
39 IF(ICYCL=IMAX) 35,40,40
40 WRITE (50,205) IH,ICYCL

IAD=0
DO 42 I=1,M
NI=N(I)
IAD=IAD+1
WRITE (50,206) IAD,X(IAD),RAM(I)
DO 41 J=2,NI
IAD=IAD+1
41 WRITE (50,206) IAD,X(IAD)
42 WRITE (50,207)
IAD=0

DO 47 I=1,M
NI=N(I)
DO 47 J=1,M
NJ=N(J)
DO 46 IS=1,NI
ISB=IS+NIS(I)
DO 46 JV=1,NJ
JVB=JV+NIS(J)
RW(IS,JV)=0.0
DO 46 JU=1,NJ

JUD=JU+NIS(J)
DO 46 IT=1,NI
ITD=IT+NIS(I)
U1=-X(ISB)*X(ITD)
U2=-X(JUD)*X(JVB)
IF (ISB-ITD) 44,43,44
43 U1=U1+1.0
44 IF (JUD-JVB) 46,45,46
45 U2=U2+1.0
46 RW(IS,JV)=RW(IS,JV)+U1*R(ITD,JUD)+U2

DO 47 IS=1,NI
DO 47 JV=1,NJ
ISB=IS+NIS(I)
JVB=JV+NIS(J)
47 R(IS,JVB)=RW(IS,JV)
DO 48 I=1,NT
48 DB(I,IH)=X(I)
WRITE (50,208)
DO 50 I=1,M
NI=N(I)

DO 49 J=1,NI
IAD=NIS(I)+J
XB(IAD)=0.0
DO 49 K=1,NI
IA2=NIS(I)+K
49 XB(IAD)=XB(IAD)+RWW(K,J,I)*X(IA2)
IS=NIS(I)+1
JL=N(I)+NIS(I)
50 WRITE (50,209) IH,I,(XB(J),J=IS,JL)
WRITE (50,210)

```

```

DO 51 I1=1,M
IS=NIS(I1)+1
IL=N(I1)+NIS(I1)
DO 51 J1=1,M
WRITE (50,212) I1,J1
JS=NIS(J1)+1
JL=N(J1)+NIS(J1)
I1=0
DO 51 I2=IS,IL
I1=I1+1

51 WRITE (50,204) I1,(RY(I2,J2),J2=JS,JL)
WRITE (50,211)
DO 53 I=1,M
NI=N(I)
DO 53 J=1,M
NJ=N(J)
DO 52 IS=1,MINNI
DO 52 JV=1,MINNI
RW(IS,JV)=0.0
DO 52 IT=1,NI

ITD=NIS(I)+IT
DO 52 JU=1,NJ
JUD=NIS(J)+JU
52 RW(IS,JV)=RW(IS,JV)+DB(ITD,IS)*RY(ITD,JUD)*DB(JUD,JV)
WRITE (50,212) I,J
DO 53 IS=1,MINNI
53 WRITE (50,204) IS,(RW(IS,JV),JV=1,MINNI)
GO TO 1

100 FORMAT (6I5)
101 FORMAT (4I5,E12.5)

102 FORMAT (12F1.0)
103 FORMAT (8F10.5)
200 FORMAT (/5X,58HCANONICAL CORRELATION ANALYSIS FOR MULTI-SETS OF VA
RIABLES/)
201 FORMAT (5X,11HNO. OF SETS,15,3X,5(I2,1H(,I2,1H),2X))
202 FORMAT (/5X,18HCORRELATION MATRIX/)
203 FORMAT (/5X,26HVARIANCE-COVARIANCE MATRIX/)
204 FORMAT (15,6F12.5/(5X,6F12.5))
205 FORMAT (///5X,3HNO.,13,2X,21HCANONICAL VARIATE SET,10X,5HCYCLE,15/
1/15X,12HEIGEN VECTOR,8X,11HEIGEN VALUE/)

206 FORMAT (5X,15,6X,F9.5,9X,F11.5)
207 FORMAT (1X)
208 FORMAT (/15X,22HCANONICAL COEFFICIENTS/)
209 FORMAT (10X,1H(,I2,1H,,I2,2H ),6F10.5/(18X,6F10.5))
210 FORMAT (///5X,51HINITIAL WITHIN-ORTHONORMALIZED CROSS PRODUCT MATR
11X/)
211 FORMAT (///5X,28HCANONICAL CORRELATION MATRIX/)
212 FORMAT (/8X,1H(,I2,1H,,I2,2H )/)
STOP
END

```

[付] サブルーティン(逆行列の算出)

```

C      SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C      - CROUT METHOD -
C
C
C      SUBROUTINE MATINV (N)
      DIMENSION A(10,10),B(10),C(10)
      COMMON A
      DO 4 I=1,N
      DO 1 J=1,N
      B(J)=A(J,I)

1      A(J,I)=0.0
      A(I,I)=1.0
      DO 2 J=1,N
      IF(B(I)) 2,5,2
2      C(J)=A(I,J)/B(I)
      DO 3 J=1,N
      DO 3 K=1,N
3      A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
      DO 4 J=1,N
4      A(I,J)=C(J)

      GO TO 6
5      WRITE (50,200)
      STOP
6      RETURN
200  FORMAT (5X,15HDETERMINANT = 0)
      END

```

13.10.5 正準相関分析後の正準評点の算出

p 次観測特性ベクトルを m 個の部分ベクトルに分け正準相関分析して係数行列を得たとき、 k 種の正準変量ごとに、 m 次評点ベクトルを算出する。インプットは、前項で得られる正準変量のための係数行列と p 次観測値ベクトルである。

入 力 (input)		出 力 (output)	
IC	ゼロのとき相関行列から、1のときは分散共分散行列から出発する	DB(I, J)	正準相関行列
NS	正準評点を算出する標本数	FS(I, J)	正準評点
M	部分ベクトルの数		
N(I)	各部分ベクトルの次数		
DB(I, J)	正準係数行列		
XM(I)	標本平均ベクトル		
SD(I)	標本標準偏差ベクトル		
IP	観測値ベクトルの番号		
X(I)	観測値ベクトル		

```

C      CANONICAL SCORES FROM MULTI-SETS CANONICAL COEFFICIENT MATRIX
C
C      IC --- 0, TO START CORRELATION MATRIX
C      --- 1, TO START VARIANCE-COVARIANCE MATRIX
C      NS --- SAMPLE SIZE
C      M --- NO. OF SUB-SETS
C      N --- ORDER OF EACH SUB-SET
C      DB --- CANONICAL COEFFICIENT MAIRIX
C
C      XM --- SAMPLE MEAN VECTOR
C      SD --- SAMPLE SIANDARD DEVIATION VECTOR
C      IP --- INDEX OF EACH OBSERVATION VECTOR
C      X --- OBSERVATION VECTOR
C
      DIMENSION DB(50,10),XM(50),SD(50),FS(5,10),X(50),N(5),NIS(5)
1  READ (40,100) IC,NS,M,(N(I),I=1,M)
   WRITE (50,200)
   WRITE (50,201) M,(I,N(I),I=1,M)

   IF(IC) 3,2,3
2  WRITE (50,202)
   GO TO 4
3  WRITE (50,203)
4  MINNI=999
   NT=0
   DO 6 I=1,M
     NIS(I)=NT
     NT=NT+N(I)
   IF(N(I)-MINNI) 5,5,6

5  MINNI=N(I)
6  CONTINUE
   K=MINNI
   DO 7 I=1,K
7  READ (40,101) (DB(J,I),J=1,NT)
   DO 9 I1=1,M
     WRITE (50,204) (I,I1,I=1,K)
     IS=NIS(I1)+1
     IL=NIS(I1)+N(I1)
     DO 8 I2=IS,IL

8  WRITE (50,205) (DB(I2,J1),J1=1,K)
9  WRITE (50,206)
   WRITE (50,207)
   IF(IC) 12,10,12
10 DO 11 I=1,NT
11 READ (40,102) XM(I),SD(I)
12 DO 17 L=1,NS
   READ (40,103) IP,(X(I),I=1,NT)
   IF(IC) 15,13,15
13 DO 14 I=1,NT

14 X(I)=(X(I)-XM(I))/SD(I)
15 DO 16 I=1,K
   DO 16 J=1,M
     NJ=N(J)
     FS(J,I)=0.0
     DO 16 I1=1,NJ
       IAD=NIS(J)+I1
16 FS(J,I)=FS(J,I)+DB(IAD,I)*X(IAD)
   WRITE (50,208) IP
   DO 17 I=1,M

```

```

17 WRITE (50,209) 1,(FS(I,J),J=1,K)
   GO TO 1
100 FORMAT (10I5)
101 FORMAT (10F8.5)
102 FORMAT (2F15.5)
103 FORMAT (15,12F1.0)
200 FORMAT (/5X,61HCANONICAL SCORES FROM MULTI-SETS CANONICAL COEFFICI
   ENT MATRIX/)
201 FORMAT (5X,11HNO. OF SETS,15,3X,5(12,1H(,12,1H),2X))
202 FORMAT (/10X,46HCANONICAL COEFFICIENTS FROM CORRELATION MATRIX/)

203 FORMAT (/10X,54HCANONICAL COEFFICIENTS FROM VARIANCE-COVARIANCE MA
   TRIX/)
204 FORMAT (18X,6(3X,1H(,12,1H,,12,1H)))
205 FORMAT (18X,6F10.5)
206 FORMAT (1X)
207 FORMAT (/10X,15HCANONICAL SCORE)
208 FORMAT (/75X,3HNO.,15/)
209 FORMAT (10X,15,6F10.5/(15X,6F10.5))
   STOP
   END.

```

13.10.6 正準分析法

p 次元観測特性ベクトルで観測された k 個のカテゴリーについて、このカテゴリーの性格的な違いを特徴づける $k-1$ 個の因子を探索する、いわゆる正準分析法を行なう。この分析は、観測値ベクトルの全分散共分散行列をカテゴリー間の分散共分散行列で最大限に表現するような新変量を求める発想による。解法としては、カテゴリー間分散共分散行列の逆行列とカテゴリー内分散共分散行列の積行列の固有値と固有ベクトルを求めるのが主要な計算になっている。

入力 (input)		出力 (output)	
N	観測特性の数	NPN(K)	指定された母集団の標本の大きさ (数)
NP	母集団の数	Y(I)	平均ベクトル
NT	標本の大きさ (数)	R3(I, J)	分散共分散行列、のちに群内分散共分散行列
MI	収束のための反復回数の限度	R1(I, J)	群間分散共分散行列
VC	収束判定定数	RAM	固有値
NPN(I)	おのおのの母集団の標本の大きさ (数)	Y(I)	固有ベクトル
S(J)	観測値ベクトル		

CANONICAL ANALYSIS

N --- NO. OF ELEMENTS IN AN OBSERVED VECTOR
 NP --- NO. OF POPULATIONS
 NT --- NO. OF TOTAL SAMPLES
 MI --- MAX. NO. OF ITERATIONS
 VC --- CONVERGE CRITERION
 NPN --- NO. OF SAMPLES OBTAINED FROM EACH POPULATION

 S --- ORIGINAL OBSERVATION VECTOR

 SUBROUTINE MATINV IS REQUIRED

```

DIMENSION R1(30,30),R2(31,31),R3(30,30),X(30),Y(30),S(30),NPN(10)
COMMON R2,R1,R3,X,Y,S
1 READ (40,100) N,NP,NT,MI,VC,(NPN(I),I=1,NP)
WRITE (50,200)
DO 2 I=1,N

  X(I)=0.0
  DO 2 J=1,N
    R1(I,J)=0.0
  2 R2(I,J)=0.0
  NT=0
  DO 10 K=1,NP
    NN=NPN(K)
    DO 3 I=1,NI
      Y(I)=0.0
      DO 3 J=1,NI

    3 R3(I,J)=0.0
    NPH(K)=0
  4 READ (40,101) (S(J),J=1,N)
    NPN(K)=NPN(K)+1
    DO 5 J=1,N
      X(J)=X(J)+S(J)
      Y(J)=Y(J)+S(J)
      DO 5 L=J,N
        R1(J,L)=R1(J,L)+S(J)*S(L)
        R3(J,L)=R3(J,L)+S(J)*S(L)

      R1(L,J)=R1(J,L)
    5 R3(L,J)=R3(J,L)
    IF (NN=NPN(K)) 99,6,4
  6 AN=NPN(K)
  NT=NT+NPN(K)
  DO 7 I=1,N
    DO 7 J=1,N
      R2(I,J)=R2(I,J)+R3(I,J)-Y(I)*Y(J)/AN
  7 R3(I,J)=(R3(I,J)-Y(I)*Y(J)/AN)/(AN-1.0)
  DO 8 I=1,N

  8 Y(I)=Y(I)/AN
  WRITE (50,201) K,NPH(K)
  WRITE (50,202) (Y(I),I=1,N)
  WRITE (50,203)
  DO 9 I=1,N
  9 WRITE (50,204) (R3(I,J),J=1,N)
10 CONTINUE
  AN=NT
  AN=NP-1
  WRITE (50,205)

```

```

DO 12 I=1,N
DO 11 J=1,N
R3(I,J)=(R1(I,J)-X(I)*X(J)/ANN)/(ANN-1.0)
11 R1(I,J)=(R1(I,J)-X(I)*X(J)/ANN-R2(I,J))/ANN
12 WRITE (50,204) (R3(I,J),J=1,N)
WRITE (50,206)
ANN=NT-NP
DO 14 I=1,N
DO 13 J=1,N
13 R3(I,J)=R2(I,J)/ANN

14 WRITE (50,204) (R3(I,J),J=1,N)
WRITE (50,207)
ANN=NT-NP
DO 15 I=1,N
WRITE (50,204) (R1(I,J),J=1,N)
DO 15 J=1,N
R2(I,J)=R2(I,J)/ANN
15 R3(I,J)=R2(I,J)
CALL MATINV (N)
DO 17 K=1,N

DO 16 I=1,N
S(I)=0.0
DO 16 J=1,N
16 S(I)=S(I)+R2(K,J)*P1(J,I)
DO 17 I=1,N
17 R2(K,I)=S(I)
WRITE (50,208)
DO 18 I=1,N
18 WRITE (50,209) I,(R2(I,J),J=1,N)
WRITE (50,210)

KK=1
19 II=1
DO 20 I=1,N
X(I)=0.0
DO 20 J=1,N
20 X(I)=X(I)+R2(I,J)
21 RAM=0.0
DO 21 I=1,N
S(I)=0.0
DO 22 J=1,N

22 S(I)=S(I)+X(J)*R3(J,I)
23 RAM=RAM+S(I)*X(I)
RAM=RAM**0.5
DO 24 I=1,N
24 Y(I)=X(I)/RAM
DO 25 I=1,N
X(I)=0.0
DO 25 J=1,N
25 X(I)=X(I)+R2(I,J)*Y(J)
IF (II-MI) 26,28,28

26 DO 27 I=1,N
S(I)=ABS(X(I)-Y(I))-VC
IF (S(I)) 27,32,32
27 CONTINUE
28 WRITE (50,211)
WRITE (50,204) RAM
WRITE (50,209) KK,(Y(I),I=1,N)
DO 29 I=1,N
X(I)=0.0
DO 29 J=1,N

```

```

29 X(I)=X(I)+Y(J)*R3(J,I)
   DO 30 I=1,N
   DO 30 J=1,N
30 R2(I,J)=R2(I,J)-RAN*Y(I)*X(J)
   LL=MIN0(N,MP-1)
   IF(KK-LL) 31,1,1
31 KK=KK+1
   GO TO J9
32 II=II+1
   GO TO 21

100 FORMAT (4I5,F10.8,10I5)
101 FORMAT (8F10.2)
200 FORMAT (//15X,18HCANONICAL ANALYSIS)
201 FORMAT (//5X,15H POPULATION NO.,2X,15,5X,14H SAMPLE SIZE ,15)
202 FORMAT (//5H MEAN,/(5X,5(2X,E12.5)))
203 FORMAT (//31H VARIANCE AND COVARIANCE MATRIX/)
204 FORMAT (5X,5(2X,E12.5)/(5X,5(2X,E12.5)))
205 FORMAT (//25H TOTAL COVARIANCE MATRIX /)
206 FORMAT (//31H WITHIN COVARIANCE MATRIX ( W )/)
207 FORMAT (//32H BETWEEN COVARIANCE MATRIX ( B )/)

208 FORMAT (//24H MATRIX OF (INV. OF W)*H/)
209 FORMAT (15,5(2X,E12.5)/(5X,5(2X,E12.5)))
210 FORMAT (//23H EIGEN VALUE AND VECTOR/)
211 FORMAT (//)
99 STOP
   END

```

[付] サブルーティン(逆行列の算出)

```

C   SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C   - CROUT METHOD -
C
SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(31,31),B(30),C(30)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
  A(I,I)=1.0
  DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
  DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
  DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
  RETURN

END

```


13.10.7 主因子分析法

正準相関分析の考え方を適用して、 p 次元観測特性を因子変量で最大限に説明できるような共通因子に関する主因子負荷行列を逐次的に算出する。この主因子分析が成因分析と異なる主要な点は、後者が相関行列から出発するのに対し、主因子分析法は対角線要素を共有性にもつ相関行列を用いる。このプログラムでは、相関行列を入れれば、共有性をプログラム中で反復計算で次第に改良しながら、主因子負荷行列が得られる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	R(I, J)	標本相関行列
IC	収束のための反復回数の限度	H(I, I)	共有性、のちに固有値
CV	収束判定定数	G(J, I)	固有ベクトル
R(I, J)	標本相関行列	A(I, J)	主因子負荷行列

```
C PRINCIPAL FACTOR ANALYSIS
```

```
C
C
C
C
C
C
C
C
C
```

```

N --- NO. OF VARIABLES
IC --- MAX. NO. FOR ITERATION CYCLES
R --- A CORRELATION MATRIX

SUBROUTINE MATINV,EIGEN AND ORDER ARE REQUIRED
```

```
C
```

```

DIMENSION R(31,31),H(30,30),G(30,30),A(30,30),B(30)
COMMON R,H,G,A
1 READ (40,100) N,IC,CV
WRITE (50,200)
DO 2 I=1,N
READ (40,101) (R(I,J),J=1,N)
WRITE (50,201) I,(R(I,J),J=1,N)
DO 2 J=1,N
2 A(I,J)=R(I,J)

CALL MATINV (N)
DO 4 I=1,N
B(I)=0.0
DO 3 J=1,N
3 H(I,J)=0.0
H(I,I)=1.0-1.0/R(I,I)
DO 4 J=1,N
4 R(I,J)=A(I,J)
KK=0
5 DO 7 I=1,N
```

```

TH=H(I,I)
DO 6 J=1,N
6 H(I,J)=R(I,J)
7 H(I,I)=H(I,I)-1.0+TH
KK=KK+1
WRITE (50,202) KK
WRITE (50,203)
DO 8 I=1,N
8 WRITE (50,205) H(I,I)
CALL EIGEN (N)

M=N-1
K=1
CALL ORDER (N,M,K)
NR=0
WRITE (50,204)
DO 10 I=1,N
WRITE (50,201) I,H(I,I)
WRITE (50,205) (G(J,I),J=1,N)
IF(H(I,I)) 10,9,9
9 NR=NR+1

10 CONTINUE
DO 12 I=1,N
TH=H(I,I)
DO 11 J=1,N
11 H(I,J)=0.0
12 H(I,I)=TH
DO 13 I=1,N
DO 13 J=1,N
A(I,J)=0.0
DO 13 K=1,NR
DO 13 L=1,NR
13 A(I,J)=A(I,J)+G(I,K)*H(K,L)*G(J,L)
IF(KK-IC) 14,14,18
14 DO 15 I=1,N
AA=ABS(B(I)-H(I,I))
IF(AA-CV) 15,15,16
15 CONTINUE
GO TO 18
16 DO 17 I=1,N
B(I)=H(I,I)

17 H(I,I)=A(I,I)
GO TO 5
18 WRITE (50,206)
DO 20 I=1,N
DO 19 J=1,NR
A(I,J)=0.0
DO 19 K=1,NR
19 A(I,J)=A(I,J)+G(I,K)*SORT(H(K,J))
20 WRITE (50,201) I,(A(I,J),J=1,NR)
GO TO 1

100 FORMAT (2I3,F7.6)
101 FORMAT (16F5.4)
200 FORMAT (//26H PRINCIPAL FACTOR ANALYSIS//27H INPUT CORRELATION MAT
18IX R/)
201 FORMAT (15,5F12.5,(/5X,5F12.5))
202 FORMAT (//15H CYCLE NO. = ,I2)
203 FORMAT (//14H COMMUNARITIFS/)
204 FORMAT (//16H EIGEN VALUE AND/17H THE EIGEN VECTOR/)
205 FORMAT (5X,5F12.5)
206 FORMAT (///28H PRINCIPAL - FACTOR ANALYSIS//)

STOP
END

```

[付] サブルーティン 1 (逆行列の算出)

```

C      SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C      - CROUT METHOD -
C
SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(31,31),B(30),C(30)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
A(I,I)=1.0
DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
DO 3 J=1,N
DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
RETURN
END

```

[付] サブルーティン 2 (実対称行列の固有値・固有ベクトルの算出)

```

C      EIGEN VALUE AND EIGEN VECTOR OF REAL SYMMETRIC MATRIX
C
SUBROUTINE EIGEN (N)
DIMENSION H(30,30),EV(30,30),T(2),B(31,31)
COMMON B,H,EV
T(1)=0.0001
T(2)=0.00000001
DO 2 I=1,N
DO 1 J=1,N

1 EV(I,J)=0.0
2 EV(I,I)=1.0
LEVEL=1
NN=N-1
3 LSTEP=0
DO 13 I=1,NN
K=I+1
DO 13 J=K,N
IF(T(LEVEL)-ABS(H(I,J))) 4,13,13
4 AK=(H(I,I)-H(J,J))*2.0

CN=0.7071068
SN=CN
IF(AK) 6,5,6
5 IF(H(I,J)) 9,10,10
6 AK=H(I,J)/AK
IF(ABS(AK)-0.4142136) 8,8,7
7 IF(AK) 9,10,10
8 TEMP=1.0+AK*AK
SN=2.0*AK/TEMP
CN=(-TEMP+2.0)/TEMP

```

```

      GO TO 10
9  SN=-SN
10 DO 11 L=1,N
    TEMP=-SN*EV(I,I)
    EV(L,I)=CN*EV(L,I)+EV(L,J)*SN
    EV(L,J)=TEMP+EV(L,J)*CN
    TEMP=-SN*H(L,I)
    H(L,I)=CN*H(L,I)+H(L,J)*SN
11  H(L,J)=TEMP+H(L,J)*CN
    DO 12 L=1,N

      TEMP=-SN*H(I,L)
      H(I,L)=CN*H(I,L)+H(J,L)*SN
12  H(J,L)=TEMP+H(J,L)*CN
    LSTEP=1
13  CONTINUE
    IF(LSTEP) 3,14,3
14  IF(LEVEL-2) 15,16,15
15  LEVEL=LEVEL+1
    GO TO 3
16  RETURN
    END

```

[付] サブルーティン 3

```

C      SUBROUTINE ORDER
C
C      K --- 1, TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VFCTORS FROM THE LARGEST
C             VALUE IN ORDER
C      --- 2, TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VFCTORS FROM THE SMALLEST
C             VALUE IN ORDER
C

```

```

SUBROUTINE ORDER (N,M,K)
DIMENSION H(31,31),EV(30,30),EV2(30),P(30)
COMMON H,EV
DO 1 I=1,N
1  P(I)=H(I,I)
DO 10 I=1,M
  I1=I+1
  DO 5 J=1,I
  IF(K.EQ.2) GO TO 2
  IF(P(J)-P(I1)) 3,5,5

2  IF(P(J)-P(I1)) 5,5,3
3  AB=P(I1)
  DO 4 L=1,N
4  EV2(L)=EV(L,I1)
  HH=H(I1,I1)
  GO TO 6
5  CONTINUE
  GO TO 10
6  DO 8 L=J,I
  LL=J+I-L

```

```

LLL=LL+1
P(LL)=P(LL)
DO 7 KK=1,N
7 EV(KK,LLL)=EV(KK,LL)
8 H(LL,LLL)=H(LL,LL)
P(J)=AB
DO 9 KK=1,N
9 EV(KK,J)=EV2(KK)
H(J,J)=HH
10 CONTINUE

RETURN
END
    
```

13.10.8 正準因子分析法

Rao による正準因子分析法を行なう。前項の主因子分析と異なる点は、 p 次元観測特性の任意の線形式を因子変量で最大限に説明づけるような共通因子を追求することで正準因子負荷行列が得られる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	R(I, J)	標本相関行列, のちに正準因子負荷行列
IC	収束のための反復回数の限度	TH(I, I)	唯一性
R(I, J)	標本相関行列	EV	固有値
		Q(J, I)	固有ベクトル

```

C      CANONICAL FACTOR ANALYSIS
C
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      IC --- MAX. NO. OF ITERATIONS
C      R --- COR. MATRIX
C
C      SUBROUTINE MATINV,EIGEN AND ORDER ARE REQUIRED
C
C
C      DIMENSION R(31,31),Q(30,30),H(30,30),TH(30,30),RAM(30)
COMMON R,Q,H,TH
1 READ (40,100) N,IC
KK=0
DO 2 I=1,N
READ (40,101) (R(I,J),J=1,N)
RAM(I)=0.0
DO 2 J=1,N
Q(I,J)=0.0
    
```

```

TH(I,J)=0.0
2 H(I,J)=R(I,J)
WRITE (50,200)
WRITE (50,201)
DO 3 I=1,N
3 WRITE (50,202) I,(R(I,J),J=1,N)
CALL MATINV (N)
DO 4 I=1,N
4 TH(I,I)=1.0/R(I,I)
5 KK=KK+1

WRITE (50,203) KK
WRITE (50,204)
DO 6 I=1,N
WRITE (50,205) TH(I,I)
DO 6 J=1,N
6 R(I,J)=H(I,J)
DO 7 I=1,N
DO 7 J=1,N
7 R(I,J)=1.0/TH(I,I)**0.5*R(I,J)*1.0/TH(J,J)**0.5
CALL EIGEN (N)

NN=N-1
K=1
CALL ORDER (N,NN,K)
NR=0
WRITE (50,206)
DO 9 I=1,N
EV=R(I,I)-1.0
WRITE (50,207) I,EV
WRITE (50,208) (R(J,I),J=1,N)
IF (R(I,I)-1.0) 9,9,8

8 NR=NR+1
9 CONTINUE
DO 10 I=1,N
IF (ABS(RAM(I)-R(I,I))-0.001) 10,12,12
10 CONTINUE
DO 11 I=1,N
11 RAM(I)=R(I,I)
GO TO 17
12 DO 13 I=1,N
13 RAM(I)=R(I,I)

DO 14 I=1,N
DO 14 J=1,NR
14 R(I,J)=TH(I,I)**0.5*(I,J)*(RAM(J)-1.0)**0.5
DO 16 I=1,N
TH(I,I)=0.0
DO 15 J=1,NR
15 TH(I,I)=TH(I,I)+R(I,J)*R(I,J)
16 TH(I,I)=1.0-TH(I,I)
IF (IC=KK) 17,5,5
17 DO 18 I=1,N

DO 18 J=1,NR
18 R(I,J)=TH(I,I)**0.5*(I,J)*(RAM(J)-1.0)**0.5
WRITE (50,208)
NR1=NR/5+1
DO 22 I=1,NR1
NR2=1+5*(I-1)
IF (I-NR1) 19,20,19
19 NR3=5*I
GO TO 21
20 NR3=NR

```

414 — 13 章 正準相関分析法

```

21 WRITE (50,209) (J,J=NR2,NR3)
   DO 22 J=1,N
22 WRITE (50,207) J,(R(J,K),K=NR2,NR3)
   GO TO 1
100 FORMAT (2I2)
101 FORMAT (10F5.4)
200 FORMAT (/ /26H CANONICAL FACTOR ANALYSIS//)
201 FORMAT (/ /25H INPUT CORRELATION MATRIX//)
202 FORMAT (15,5F12.5,(/ /5X,5F12.5))
203 FORMAT (/ /12H CYCLE NO. =,I3//)

204 FORMAT (11H UNIQUENESS/)
205 FORMAT (5X,5F12.5)
206 FORMAT (/ /12H EIGEN VALUE/6X,12HEIGEN VECTOR/)
207 FORMAT (/ /15,F12.5)
208 FORMAT (/ /34H CANONICAL FACTOR LOADING )
209 FORMAT (/ /5X,5(I8,4X))
   STOP
   END

```

[付] サブルーティン 1 (逆行列の算出)

```

C
C
C
C
SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
- CROUT METHOD -

SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(31,31),B(30),C(30)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
  A(I,I)=1.0
  DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
  DO 3 J=1,N
  DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
  DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
  RETURN
END

```

[付] サブルーティン 2 (実対称行列の固有値・固有ベクトルの算出)

```

C
C
C
C
EIGEN VALUE AND EIGEN VECTOR OF REAL SYMMETRIC MATRIX

SUBROUTINE EIGEN (N)
DIMENSION H(30,30),EV(30,30),T(2),B(31,31)
COMMON B,H,EV
T(1)=0.0001
T(2)=0.00000001
DO 2 I=1,N
DO 1 J=1,N

```

```

1 EV(I,J)=0.0
2 EV(I,I)=1.0
  LEVEL=1
  NN=N-1
3 LSTEP=0
  DO 13 I=1,NN
    K=I+1
    DO 13 J=K,N
      IF(T(LEVEL)-ABS(H(I,J))) 4,13,13
4 AK=(H(I,I)-H(J,J))*2.0

      CN=0.7071068
      SN=CN
      IF(AK) 6,5,6
5 IF(H(I,J)) 9,10,10
6 AK=H(I,J)/AK
  IF(ABS(AK)-0.4142136) 8,8,7
7 IF(AK) 9,10,10
8 TEMP=1.0+AK*AK
  SN=2.0*AK/TEMP
  CN=(-TEMP+2.0)/TEMP

  GO TO 10
9 SN=-SN
10 DO 11 L=1,N
  TEMP=-SN*EV(I,I)
  EV(L,I)=CN*EV(L,I)+EV(L,J)*SN
  EV(L,J)=TEMP+EV(L,J)*CN
  TEMP=-SN*H(L,I)
  H(L,I)=CN*H(L,I)+H(L,J)*SN
11 H(L,J)=TEMP+H(L,J)*CN
  DO 12 L=1,N

  TEMP=-SN*H(I,L)
  H(I,L)=CN*H(I,L)+H(J,L)*SN
12 H(J,L)=TEMP+H(J,L)*CN
  LSTEP=1
13 CONTINUE
  IF(LSTEP) 3,14,3
14 IF(LEVEL-2) 15,16,15
15 LEVEL=LEVEL+1
  GO TO 3
16 RETURN
  END

```

[付] サブルーティン 3 (固有値の大きさ順に固有ベクトルを配列する)

```

C      SUBROUTINE ORDER
C
C
C      K --- 1. TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VFCTORS FROM THE LARGEST
C              VALUE IN ORDER
C      --- 2. TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VFCTORS FROM THE SMALLEST
C              VALUE IN ORDFR
C
C

```



```

SUBROUTINE ORDER (N,M,K)
DIMENSION R(31,31),H(30,30),EV(30,30),EV2(30),P(30)
COMMON R,H,EV
DO 1 I=1,N
1 P(I)=H(I,I)
DO 10 I=1,M
  I1=I+1
  DO 5 J=1,I
  IF(K.E0.2) GO TO 2
  IF(P(J)-P(I1)) 3,5,5

2 IF(P(J)-P(I1)) 5,5,3
3 AB=P(I1)
DO 4 L=1,N
4 EV2(L)=EV(L,I1)
  HH=H(I1,I1)
  GO TO 6
5 CONTINUE
  GO TO 10
6 DO 8 L=J,I
  LL=J+I-L

  LLL=LL+1
  P(LLL)=P(LL)
  DO 7 KK=1,N
7 EV(KK,LLL)=EV(KK,LL)
8 H(LLL,LLL)=H(LL,LL)
  P(J)=AB
  DO 9 KK=1,N
9 EV(KK,J)=EV2(KK)
  H(J,J)=HH
10 CONTINUE

RETURN
END

```

13.10.9 アルファ因子分析法

Kaiser によるアルファ因子分析法を行なう。この方法は、観測特性の母集団と観測対象の母集団を考え、両者の有限なサンプルに基づく各因子評点の相関性を最大ならしめるような因子負荷行列および主軸因子行列を求める。また、この相関性の最大化は、クロンバッハの信頼係数アルファまたは一般化の係数を最大化することとも同等である。インプットの相関行列によって毎回共有性を改良しながら、共有性を対角線要素とする相関行列を得、この両側から共有性の平方根からなる対角線行列の逆行列を乗じてできる行列の固有値と固有ベクトルを求めることになる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	R(I, J)	標本相関行列
IC	収束のための反復回数の限度	A	共有性
R(I, J)	標本相関行列	FM(I, I)	固有値
		E(J, I)	固有ベクトル
		NR	共通因子の数
		D(I, J)	主軸因子負荷行列
		MF(I, J)	アルファ因子負荷行列

C ALPHA FACTOR ANALYSIS

C
C
C
C
C
C
C
C

N --- NO. OF VARIABLES
IC --- MAX. NO. FOR ITERATION CYCLES
R --- A CORRELATION MATRIX

SUBROUTINE MATINV,EIGEN AND ORDER ARE REQUIRED

C

```

DIMENSION R(31,31),H(30,30),E(30,30),FM(30,30),D(30,30),B(30)
COMMON R,FM,E,D,B,H
1 READ (40,100) N,IC
KK=0
DO 2 I=1,N
2 READ (40,101) (R(I,J),J=1,N)
WRITE (50,200)
DO 3 I=1,N
3 WRITE (50,201) I,(R(I,J),J=1,N)
DO 4 I=1,N
B(I)=0.0
DO 4 J=1,N
4 D(I,J)=R(I,J)
CALL MATINV (N)
DO 6 I=1,N
A=R(I,I)
DO 5 J=1,N
H(I,J)=0.0
5 R(I,J)=0.0
R(I,I)=1.0/A
6 H(I,I)=SQRT(1.0-R(I,I)**2)
DO 7 I=1,N
DO 7 J=1,N
7 R(I,J)=D(I,J)
8 KK=KK+1
WRITE (50,202) KK
WRITE (50,203)
DO 9 I=1,N
A=H(I,I)**2
9 WRITE (50,201) I,A
DO 10 I=1,N
H(I,I)=1.0/H(I,I)
10 R(I,I)=R(I,I)-1.0
DO 12 I=1,N
DO 11 J=1,N
FM(I,J)=0.0
DO 11 K=1,N
DO 11 L=1,N
11 FM(I,J)=FM(I,J)+H(I,K)*R(K,L)*H(L,J)

```

```

12 FM(I,I)=FM(I,I)+1.0
   CALL EIGEN (N)
   M=N-1
   K=1
   CALL ORDER (N,M,K)
   DO 14 I=1,N
     R(I,I)=R(I,I)+1.0
     A=FM(I,I)
     DO 13 J=1,N
13 FM(I,J)=0.0

14 FM(I,I)=A
   WRITE (50,204)
   DO 15 I=1,N
     WRITE (50,201) I,FM(I,I)
15 WRITE (50,205) (E(J,I),J=1,N)
   NR=0
   DO 17 I=1,N
     IF(FM(I,I)-1.0) 17,17,16
16 NR=NR+1
17 CONTINUE

   AA=0.0
   DO 18 I=1,NR
18 AA=AA+FM(I,I)
   NR1=NR+1
   DO 19 I=NR1,N
19 AA=AA+FM(I,I)**2
   DO 20 I=1,N
     DO 20 J=1,N
       D(I,J)=0.0
       DO 20 K=1,NR
         DO 20 L=1,NR
20 D(I,J)=D(I,J)+E(I,K)*FM(K,L)*E(J,L)
       DO 21 I=1,N
21 H(I,I)=SQRT(D(I,I)*(1./H(I,I))**2)
       IF(KK-IC) 22,22,25
22 DO 24 I=1,N
       A=0.0
       DO 23 J=1,NR
         DO 23 K=1,NR
23 A=A+(E(I,J)*FM(K,J)**0.5)**2

       AA=ABS(1.0-A)
       IF(AA-0.00001)24,24,8
24 CONTINUE
       GO TO 25
25 WRITE (50,206) NR
       DO 26 I=1,NR
26 FM(I,I)=SQRT(FM(I,I))
       DO 27 I=1,N
         DO 27 J=1,NR
           D(I,J)=0.0

           DO 27 K=1,NR
27 D(I,J)=D(I,J)+E(I,K)*FM(K,J)
       WRITE (50,207)
       DO 28 I=1,N
28 WRITE (50,201) I,(D(I,J),J=1,NR)
       DO 29 I=1,N
         DO 29 J=1,NR
           FM(I,J)=0.0
           DO 29 K=1,N
29 FM(I,J)=FM(I,J)+H(I,K)*D(K,J)

```

```

WRITE (50,208)
DO 30 I=1,N
30 WRITE (50,201) I,(FM(I,J),J=1,NR)
GO TO 1
100 FORMAT (2I2)
101 FORMAT (16F5.4)
200 FORMAT (//21HALPHA FACTOR ANALYSIS//24HINPUT CORRELATION MATRIX/)
201 FORMAT (15,5F12.5,(/5X,5F12.5))
202 FORMAT (//14HCYCLE NO. = ,I2\
203 FORMAT (//13HCOMMUNALITIES/)

204 FORMAT (//11HEIGEN VALUE/6X,12HEIGEN VECTOR/)
205 FORMAT (5X,5F12.5)
206 FORMAT (//16HTHE FINAL RESULT/4X,17HNO. OF FACTORS ,I2)
207 FORMAT (//36HPRINCIPAL AXFS FACTOR LOADING MATRIX/)
208 FORMAT (//27HALPHA FACTOR LOADING MATRIX/)
STOP
END

```

[付] サブルーティン 1 (逆行列の算出)

```

C
C SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C - CROUT METHOD -
C

SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(31,31),B(30),C(30)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
A(I,I)=1.0
DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
DO 3 J=1,N
DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
RETURN
END

```

[付] サブルーティン 2 (固有値と固有ベクトルの算出)

```

C
C EIGEN VALUE AND EIGEN VECTOR OF REAL SYMMETRIC MATRIX
C

SUBROUTINE EIGEN (N)
DIMENSION H(30,30),FV(30,30),T(2),B(31,31)
COMMON B,H,EV
T(1)=0.0001
T(2)=0.00000001
DO 2 I=1,N
DO 1 J=1,N

```

```

1 EV(I,J)=0.0
2 EV(I,I)=1.0
  LEVEL=1
  NN=N-1
3 LSTEP=0
  DO 13 I=1,NN
  K=I+1
  DO 13 J=K,N
  IF(T(LEVEL)-ABS(H(I,J))) 4,13,13
4 AK=(H(I,I)-H(J,J))*2.0

  CN=0.7071068
  SN=CN
  IF(AK) 6,5,6
5 IF(H(I,J)) 9,10,10
6 AK=H(I,J)/AK
  IF(ABS(AK)=0.4142136) 8,8,7
7 IF(AK) 9,10,10
8 TEMP=1.0+AK*AK
  SN=2.0*AK/TEMP
  CN=(-TEMP+2.0)/TEMP

  GO TO 10
9 SN=-SN
10 DO 11 L=1,N
  TEMP=-SN*EV(L,I)
  EV(L,I)=CN*FV(L,I)+EV(L,J)*SN
  EV(L,J)=TEMP+EV(L,J)*CN
  TEMP=-SN*H(L,I)
  H(L,I)=CN*H(L,I)+H(L,J)*SN
11 H(L,J)=TEMP+H(L,J)*CN
  DO 12 L=1,N

  TEMP=-SN*H(I,L)
  H(I,L)=CN*H(I,L)+H(J,L)*SN
12 H(J,L)=TEMP+H(J,L)*CN
  LSTEP=1
13 CONTINUE
  IF(LSTEP) 3,14,3
14 IF(LEVEL=2) 15,16,15
15 LEVEL=LEVEL+1
  GO TO 3
16 RETURN

  END

```

[付] サブルーティン 3 (固有値の大きさ順に固有ベクトルを配列する)

```

C      SUBROUTINE ORDER
C
C
C      K --- 1, TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VECTORS FROM THE LARGEST
C              VALUE IN ORDER
C      --- 2, TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VECTORS FROM THE SMALLEST
C              VALUE IN ORDER
C
C

```

```

SUBROUTINE ORDER (N,M,K)
DIMENSION R(31,31),H(30,30),EV(30,30),EV2(30),P(30)
COMMON R,H,EV
DO 1 I=1,N
1 P(I)=H(I,I)
DO 10 I=1,M
  I1=I+1
  DO 5 J=1,I
  IF(K.EQ.2) GO TO 2
  IF(P(J)-P(I1)) 3,5,5

  2 IF(P(J)-P(I1)) 5,5,3
  3 AB=P(I1)
  DO 4 L=1,N
  4 EV2(L)=EV(L,I1)
  HH=H(I1,I1)
  GO TO 6
  5 CONTINUE
  GO TO 10
  6 DO 8 L=J,I
  LL=J+I-L

  LLL=LL+1
  P(LLL)=P(LL)
  DO 7 KK=1,N
  7 EV(KK,LLL)=EV(KK,LL)
  8 H(LLL,LLL)=H(LL,LL)
  P(J)=AB
  DO 9 KK=1,N
  9 EV(KK,J)=EV2(KK)
  H(J,J)=HH
10 CONTINUE

RETURN
END

```

13.10.10 アルファ・マックス因子分析法

1968年 Bentler により提唱された因子分析を実施する。この方法は、得られた資料に基づき、 p 種の観測特性自体も無作為標本のように考え観測特性の母集団 (universe) の立場から因子的推測を行なう。この意味でアルファ因子分析法と同様の指向性があり、普通の統計的分析よりもっと実質科学的な観点にたち、アルファ因子分析法よりさらに強い性格の解を示すとされている。この定式化の特徴は、信頼係数の下限を与える内的整合係数を p 種の観測特性のうえで一般的な重みづけを行なう拡張により α_0 係数を考え、これを最大化する重み係数ベクトルを求めていく。最終的な演算式は固有値と固有ベクトルの計算になるが、アルファ因子分析法での共有性行列が唯一性行列に置き換わった式をとくことになる。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	U(I)	唯一性
IC	繰り返しの最大回数	H(I, J)	固有ベクトル
M	0...結果のみを出す 1...各回ごとの結果と最終結果の 双方を出す	KK	繰り返しの実際回数
C	因子数を決める α_0 -係数の基準値 ($0 \leq \alpha_0 \leq 1$)	C	因子数を決める α_0 -係数の基準値 ($0 \leq \alpha_0 \leq 1$)
R(I, J)	相関行列	FM(I, J)	固有値と固有ベクトルを求める直 前の行列, のちに固有値
		T	固有値行列のトレース
		S	固有値の和
		NR	有効因子数
		A(I, J)	因子負荷行列

```

C      ALPHA-MAXIMIZED FACTOR ANALYSIS
C
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      IC --- MAX. NO. OF ITERATION CYCLES
C      M --- 0, ONLY TO OUTPUT THE FINAL RESULT
C      --- 1, TO OUTPUT BOTH INTERMEDIATE AND FINAL RESULTS
C      C --- CRITERION FOR ALPHA=0 TO EXTRACT FACTORS
C              ( 0.000 TO 1.000 )
C
C      R --- CORRELATION MATRIX
C
C      SUBROUTINE MATINV,EIGEN AND ORDER ARE REQUIRED
C
C      DIMENSION R(30,30),A(30,30),FM(30,30),H(30,30),U(30),B(30)
C      COMMON R,FM,H
1  READ (40,100) N,IC,M,C
   WRITE (50,200)
   DO 2 I=1,N

   READ (40,101) (R(I,J),J=1,N)
   WRITE (50,201) I,(R(I,J),J=1,N)
   DO 2 J=1,N
2  A(I,J)=R(I,J)
   CALL MATINV (N)
   DO 3 I=1,N
   B(I)=0.0
   U(I)=1.0/R(I,I)
   DO 3 J=1,N
3  R(I,J)=A(I,J)

   KK=0
4  KK=KK+1
   T=0.0
   MM=0
   DO 6 I=1,N
   R(I,I)=R(I,I)-U(I)
   DO 5 J=1,N
5  FM(I,J)=R(I,J)/(U(I)*U(J))**0.5
   R(I,I)=R(I,I)+U(I)
6  T=T+FM(I,I)

```

```

DO 7 I=1,N
IF(ABS(B(I)-U(I))-0.001) 8,8.7
7 B(I)=U(I)
IF(KK=IC) 11,8.8
8 MM=1
WRITE (50,202) N,IC,KK,C
WRITE (50,203)
DO 9 I=1,N
9 WRITE (50,208) I,U(I)
WRITE (50,205)

DO 10 I=1,N
10 WRITE (50,201) I,(FM(I,J),J=1,N)
11 CALL EIGEN (N)
K=1
CALL ORDER (N,K)
NR=0
DO 13 I=1,N
D=FM(I,I)/(1.0+FM(I,I))
IF(D=C) 13,13,12
IF(FM(I,I)-C) 13,13,12

12 NR=NR+1
13 CONTINUE
S=0.0
DO 14 I=1,N
S=S+FM(I,I)
DO 14 J=1,NR
14 A(I,J)=H(I,J)*(U(I)*FM(J,J))**0.5
IF(MM) 15,15,22
15 IF(M) 19,19,16
16 WRITE (50,206) KK

WRITE (50,203)
DO 17 I=1,N
17 WRITE (50,208) I,U(I)
WRITE (50,207)
DO 18 I=1,N
WRITE (50,208) I,FM(I,I)
18 WRITE (50,204) (H(J,I),J=1,N)
19 DO 21 I=1,N
FM(I,I)=0.0
DO 20 J=1,NR

20 FM(I,I)=FM(I,I)+A(I,J)**2
21 U(I)=1.0-FM(I,I)
GO TO 4
22 WRITE (50,209) T,S
WRITE (50,207)
DO 23 I=1,N
WRITE (50,208) I,FM(I,I)
FM(I,I)=FM(I,I)/(1.0+FM(I,I))
23 WRITE (50,204) (H(J,I),J=1,N)
WRITE (50,210) NR

WRITE (50,211)
DO 24 I=1,NR
24 WRITE (50,208) I,FM(I,I)
WRITE (50,212)
WRITE (50,213) (I,I=1,NR)
DO 25 I=1,N
25 WRITE (50,201) I,(A(I,J),J=1,NR)
GO TO 1
100 FORMAT (3I5,F10.5)
101 FORMAT (8F10.7)

```



```

200 FORMAT (1H1,32H ALPHA-MAXIMIZED FACTOR ANALYSIS///26H INPUT CORRE
LATION MATRIX)
201 FORMAT (/,4X,12,5X,5F12.4,/, (11X,5F12.4))
202 FORMAT (1H1,/,18H THE FINAL RESULTS,/,10X,16HNO. OF VARIABLES,14X
1,15,/,10X,24HMAXIMUM ITERATION CYCLES,6X,15,/,10X,23HACTUAL ITERAT
210N CYCLES,7X,15,/,10X,40HCRTERION FOR ALPHA=0 TO EXTRACT FACTORS
3,F6,3)
203 FORMAT (/,4X,10HUNIQUENESS)
204 FORMAT (11X,5F12.4)
205 FORMAT (/,4X,46HSQUARE MATRIX FOR EIGEN-VALUES AND THE VECTORS)

206 FORMAT (1H1,13H CYCLE NO. = ,I2)
207 FORMAT (/,4X,30HEIGEN-VALUES AND EIGEN-VECTORS)
208 FORMAT (/,4X,12,F17.4)
209 FORMAT (/,10X,25HTRACE OF THE ABOVE MATRIX,F15,4/10X,19HSUM OF EI
1GEN-VALUES,6X,F15,4)
210 FORMAT (/,4X,17HNUMBER OF FACTORS,15,/)
211 FORMAT (/,4X,20HALPHA=0 COEFFICIENTS,/)
212 FORMAT (/,4X,37HALPHA-MAXIMIZED FACTOR LOADING MATRIX)
213 FORMAT (/, (18X,1HF,12,9X,1HF,12,9X,1HF,12,9X,1HF,12,9X,1HF,12,9X,1HF,12))
STOP

END

```

[付] サブルーティン 1 (逆行列の算出)

```

C
C SUBROUTINE OF MATRIX INVERTION
C - CROUT METHOD -
C
SUBROUTINE MATINV (N)
DIMENSION A(31,31),B(30),C(30)
COMMON A
DO 4 I=1,N
DO 1 J=1,N
B(J)=A(J,I)

1 A(J,I)=0.0
A(I,I)=1.0
DO 2 J=1,N
2 C(J)=A(I,J)/B(I)
DO 3 J=1,N
DO 3 K=1,N
3 A(J,K)=A(J,K)-C(K)*B(J)
DO 4 J=1,N
4 A(I,J)=C(J)
RETURN

END

```

[付] サブルーティン 2 (固有値と固有ベクトルの算出)

```

C
C SUBROUTINE OF EIGEN-VALUES AND EIGEN-VECTORS
C
C
SUBROUTINE EIGEN (N)
DIMENSION R(30,30),H(30,30),U(30,30),T(2)
COMMON R,H,U
T(1)=0.00001
T(2)=0.0000001
DO 3 I=1,N

```

```

DO 3 J=1,N
  IF(I-J) 1,2,1
1  U(I,J)=0.0
  GO TO 3
2  U(I,J)=1.0
3  CONTINUE
  LEVEL=1
  NN=N-1
4  LSTEP=0
  DO 20 I=1,NN

    K=I+1
    DO 20 J=K,N
      SS=T(LEVEL)-ABS(H(I,J))
      IF(ABS(SS)-0.5E-6) 20,5,5
5     IF(T(LEVEL)-ABS(H(I,J))) 6,20,20
6     AK=(H(I,I)-H(J,J))*2.0
      IF(ABS(AK)-0.5E-6) 15,7,7
7     IF(AK) 8,15,8
8     AK=H(I,J)/AK
      TT=ABS(AK)-0.4142136

      IF(ABS(TT)-0.5E-6) 10,9,9
9     IF(ABS(AK)-0.4142136) 10,10,11
10    TEMP=1.0+AK**2
      SN=2.0*AK/TEMP
      CN=(-TEMP+2.0)/TEMP
      GO TO 16
11   IF(AK) 12,14,14
12   SN=-0.7071068
13   CN=0.7071068
      GO TO 16

14   SN=0.7071068
      GO TO 13
15   IF(H(I,J)) 12,14,14
16   DO 17 L=1,N
      TEMP=-SN*U(L,I)
      U(L,I)=CN*U(L,I)+U(L,J)*SN
17   U(L,J)=TEMP+U(L,J)*CN
      DO 18 L=1,N
      TEMP=-SN*H(L,I)
      H(L,I)=CN*H(L,I)+H(L,J)*SN

18   H(L,J)=TEMP+H(L,J)*CN
      DO 19 L=1,N
      TEMP=-SN*H(I,L)
      H(I,L)=CN*H(I,L)+H(J,L)*SN
19   H(J,L)=TEMP+H(J,L)*CN
      LSTEP=1
20   CONTINUE
      IF(LSTEP) 4,21,4
21   IF(LEVEL=2) 22,23,22
22   LEVEL=LEVEL+1

      GO TO 4
23   CONTINUE
      RETURN
      END

```

[付] サブルーティン 3

```

C      SUBROUTINE ORDER
C
C
C      K --- 1, TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VECTORS FROM THE LARGEST
C             VALUE IN ORDER
C      --- 2, TO OUTPUT EIGEN VALUES AND VECTORS FROM THE SMALLEST
C             VALUE IN ORDER
C
C
SUBROUTINE ORDER (N,K)
DIMENSION H(30,30),EV(30,30),EV2(30),P(30)
COMMON H,EV
M=N-1
DO 1 I=1,N
1  P(I)=H(I,I)
DO 10 I=1,M
  II=I+1
  DO 5 J=1,I
  IF(K.E0.2) GO TO 2

  IF(P(J)-P(II)) 3,5,5
2  IF(P(J)-P(II)) 5,5,3
3  AB=P(I)
  DO 4 L=1,N
4  EV2(L)=EV(L,II)
  HH=H(II,II)
  GO TO 6
5  CONTINUE
  GO TO 10
6  DO 8 L=J,I

  LL=J+I-L
  LLL=LL+1
  P(LLL)=P(LL)
  DO 7 KK=1,N
7  EV(KK,LLL)=EV(KK,LL)
8  H(LLL,LLL)=H(LL,LL)
  P(J)=AB
  DO 9 KK=1,N
9  EV(KK,J)=EV2(KK)
  H(J,J)=HH
10 CONTINUE
  RETURN
  END

```

付 録

広い分野の方々が本書を利用されるときのことを思い、次に便宜的に最小限のベクトル・行列の定義と2,3の平易な手計算用の演算法を付しておく。しかし、ベクトルや行列の次数が高くそして電子計算機を借用できるならば、本書のプログラムを利用するのがよい。もちろん、これらの行列論に関しては入門書や専門書が数多く出ているので、これらの単行本によって勉強されるのが望ましい。

A. 1 ベクトルと行列

mn 個の数 a_{ik} ($i=1, 2, \dots, m$, $k=1, 2, \dots, n$) を次のように方形に配列したものを (m, n) 行列 (matrix of order $m \times n$), または単に行列 (matrix または general rectangular matrix) という。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv [a_{ik}] \equiv \mathbf{A}$$

行列を構成する数 a_{ik} を行列 \mathbf{A} の要素 (element または component) といい、行列の横の並びを行 (row), 縦の並びを列 (column) という。上から数え第 i 行, 左から数えて第 j 列といい、その交点の要素を (i, j) 要素という。

行, または列の数が1である行列をベクトル (vector) といい、 $(1, n)$ 行列を n 次行ベクトル (row vector of order n), $(m, 1)$ 行列を m 次列ベクトル (column vector of order m) という。

ベクトルの要素がすべて1であるものを単位ベクトル (unit vector) という。また、ベクトルの要素がゼロと1からなるものを2値ベクトル (binary vector) とよび、とくに、一つの要素のみが1で残りの要素はすべてゼロであるベクトルを基底ベクトル (elementary vector) とよぶ。

さらに、ベクトルの要素がすべてゼロであるものをゼロベクトル (zero vector または null vector) という。

また、要素が一つからなるベクトル、すなわち1行1列からなる行列をスカラー量 (scalar quantity) といい、これは通常の数値を行列形式で表現しただけのことである。

(m, n) 行列において、とくに $m=n$ のとき n 次正方行列または単に正方行列 (square matrix) といい、 n を次数 (order) という。このとき、左上から右下への対角線にある要素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を対角線要素 (diagonal element) といい、対角線以外の要素を非対角線要素という。非対角線要素がすべてゼロである行列を対角線行列 (diagonal matrix) という。

また、対角線行列で対角線要素がすべて等しい行列をスカラー行列 (scalar matrix) という。

さらに、対角線要素がすべて1で他の要素がゼロである行列を n 次単位行列 (unit matrix of order n) または単に単位行列 (unit matrix または identity matrix) といい、 I_n または I で示す。また、対角線行列の要素が1と-1からなり他の要素がすべてゼロのとき、この行列を符号行列 (sign matrix) という。

また、一般の行列でその要素がすべてゼロと1である行列を2値行列 (binary matrix) という。

さらに、正方行列の各行と各列において、どのような行と列にもゼロでない要素がただ一つしかなく他はすべてゼロを要素としているとき、この行列を単項行列 (nominal matrix) という。また、単項行列でゼロでない要素がすべて1であるとき、この単項行列を置換行列 (permutation matrix) とよぶ。

行列の要素がすべてゼロでできている行列をゼロ行列 (zero matrix または null matrix) とよぶ。

A. 2 小行列, 直和行列, 転置行列, 対称行列, 三角行列およびエルミット行列

行列 A をいくつかの縦線および横線でくざると、さらに小さな方形の行列が配置されているとみなされ、この小さな各行列を A の小行列 (submatrix または partitioned matrix) という。そしてこのように考えたとき、 A を大行列 (supermatrix) という。なお、行列の要素がすべてスカラー量である行列

を単純行列 (simple matrix) とよび, 大行列と区別するのに役だてられる。

また, 正方行列 $A=[P_{ij}]$ で P_{ij} を A の小行列とし, P_{ii} は正方行列, P_{ij} ($i \neq j$) はゼロ行列であるとき, A を $P_{11}, P_{22}, \dots, P_{rr}$ の直和 (direct sum) といい, 直和行列 A は次式のように示される。

$$A = P_{11} + P_{22} + \dots + P_{rr}$$

ここで P_{ii} の次数を p_i とすれば, A の次数は $p_1 + p_2 + \dots + p_r$ である。ちなみに, 上で P_{ii} と P_{ij} の要素に関せず, P_{ii} を任意の次数 p_i の正方行列とするような A の分割を対称分割 (symmetric partitioning) という。

(m, n) 行列 A の行と列とを入れ替えてできる (n, m) 行列を A の転置行列 (transpose of matrix A , transposed matrix) といって A' で示す。すなわち, $A=[a_{ik}]$ のとき $A'=[a_{ki}]$ をいう。

また, $A'=A$ である行列を対称行列 (symmetric matrix) という。すなわち, すべての (i, k) 要素と (k, i) 要素とが等しい正方行列を対称行列という。

さらに, $A'=-A$ になりたつ行列を逆対称行列または交代行列 (skew-symmetric matrix または alternate matrix) という。したがって, 逆対称行列は, 対角線要素がすべてゼロで, 非対角線要素が対称の位置にある要素と絶対値のみ等しく符号の異なる行列といふことができる。

正方行列 $A=[a_{ik}]$ で, すべての i と k について, $i > k$ のとき $a_{ik}=0$, または $i < k$ のとき $a_{ik}=0$ であれば, この A を三角行列 (triangular matrix または canonical matrix) という。とくに, 対角線要素より上方がすべてゼロ要素であるとき下方三角行列 (lower triangular matrix), 対角線要素より下方がゼロ要素のとき上方三角行列 (upper triangular matrix) とよぶ。もし, A が正方行列でなく (m, n) 行列の場合には, $m < n$ かつ $i > k$ で $a_{ik}=0$ なら一部上方三角行列 (upper partial triangular matrix) といい, $m > n$ かつ $i < k$ で $a_{ik}=0$ なら一部下方三角行列 (lower partial triangular matrix) という。

また, n 次行列 $A=[a_{ik}]$ で要素が a_0, a_1, \dots, a_{n-1} の n 種だけからなり, しかも (i, k) 要素が n を法 (modul n) として $i-k$ のみを添字として表現される行列, すなわち

$$A = [a_{ik}] = [a_{i-k}]$$

ここに $i-k=0, 1, \dots, n-1 \pmod{n}$

を巡回行列 (cyclic matrix) という。

一般に、行列の要素がすべて実数であるものを実数行列 (real matrix), 複素数を含むとき複素行列 (complex matrix) という。さらに、 (m, n) 行列 A の要素が複素数であるとき、このすべての要素を共役複素数に置き換えてできる (m, n) 行列 \bar{A} を共役行列 (conjugate matrix) という。

さらに正方行列 A において、この共役行列を転置した行列 $(\bar{A})'$ を A^* で示し、 A の共役転置行列 (transposed conjugate matrix, adjoint matrix) とよぶ。この A^* がもとの A に等しいとき、すなわち $(\bar{A})' \equiv A^* = A$ のとき、この行列 A をエルミット行列 (Hermitian matrix) とよぶ。 n 次エルミット行列 A について、ゼロベクトルでない任意の n 次列ベクトル x により x^*Ax なる形をとるとき、この形をエルミット形式 (Hermitian form) といい、この値は実数値となるが、この値が正または非負のとき、それぞれ A を正値エルミット行列 (positive-definite Hermitian matrix) または非負エルミット行列 (non-negative または positive seme-definite Hermitian matrix) という。

A. 3 行列の演算

行列は数を方形に配列しただけのもので、もちろん一つの数値を示すものではない。しかし行列に対しても、ちょうど、数値(スカラー量)に対する算法と同様に、加法・減法・乗法が定義される。

A.3.1 行列の同等, 加法, 減法およびゼロ行列

二つの (m, n) 行列, $A=[a_{ik}]$ および $B=[b_{ik}]$ について

(i) あらゆる i と k に対応して $a_{ik}=b_{ik}$ なら, A と B は同等 (equivalent) で $A=B$ と示す。

(ii) あらゆる i と k に対応して, $[a_{ik}+b_{ik}]$ なる行列を A と B の和 (sum) といい, $A+B=[a_{ik}+b_{ik}]$ と示す。

(iii) あらゆる i と k に対応して, $[a_{ik}-b_{ik}]$ なる行列を A と B の差 (difference) といい, $A-B=[a_{ik}-b_{ik}]$ と示す。

(iv) $A=B$ のとき, $A-B$ なる行列はゼロ行列となり, 0 で示す。

A.3.2 行列の乗法, ノルム, トレース

(m, l) 行列 A と (l, n) 行列 B が与えられているとき, $c_{ik} = \sum_{j=1}^l a_{ij} b_{jk}$ を (i, k) 要素とする行列 C を A と B の積 (product) といい $AB=C$ で示す ($i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$). したがって, 積は A の列の数と B の行の数とが等しいときに限り定義される。

また, 一般に $AB=BA$ は必ずしも成立しないから, A から積 AB をつくることを A に右から B を掛ける (A is postmultiplied by B) といい, A から BA をつくることを A に左から B を掛ける (A is premultiplied by B) という。とくに, $AB=BA$ がなりたつとき, A と B は交換可能 (commutative) という。

一般に行列演算が可能である条件下で, 行列の積に対する交換律 (commutative law) を除き, その他の行列演算では結合律 (associative law), 分配律 (distributive law) および交換律 (commutative law) が成立する。

行列 A の元素 a_{ik} をすべて a 倍 (a は数) したものを要素とする行列を, a と A のスカラー積 (scalar product) といい, aA と書く。

一般に, (m, n) 行列 A と (p, q) 行列 $B \equiv [b_{ik}]$ とするとき, この二つの行列からつくった (mp, nq) 行列 $C \equiv [Ab_{ik}]$ を A と B の直積またはクロネッカー積 (direct product, Kronecker product) といい, $C=A \cdot \times B$ と示す。二つの n 次ベクトル x と y について, 積 $x' y$ をつくとスカラー量になるが, これをベクトルのマイナー積 (minor product) という。これに対し, 積 $x y'$ をつくと (n, n) 行列となり, これをメジャー積 (major product) とよぶ。また, 二つの n 次ベクトル x と y について, 積 $(y)' x$, すなわち y の共役転置ベクトル y^* と x の積 $y^* x$ をつくと, これを x と y の内積 (inner product) といい, $y^* x$ または (x, y) で示す。

さらに, $(x, y)=0$ ならば x と y は互いに直交 (orthogonal) するという。

また, (x, x) をベクトル x のノルム (norm) といって $\|x\|$ で示す。

また, 直交するベクトルを列とする (m, n) 行列 A のマイナー積 $A' A$ が, 単に n 次の対角線行列をなすとき, A を直交行列 (orthogonal matrix) といい, この対角行列が n 次単位行列になっているとき, A を正規直交行列 (orthonormal matrix) といっている。 A が正規直交行列であるとき, A のメジャ

一積 AA' は、もちろん単位行列ではなく、この積は対称冪等行列 (symmetric idempotent matrix) となる。また、冪等行列とは、 k を任意の正整数とすると、正方行列 A について $A^k = A$ を満たす行列 A をいい、ここに A^k は正方行列 A の k 個の積を示す。

さらに、 A と B を正規直交行列として、正方行列 C について A を対角線行列とし $C = AAB'$ と三つの行列の積で掛けるとき、 AAB' を C の基本構造 (basic structure of C)、 A と B をそれぞれ C の左側、右側基本正規直交行列 (left, right basic orthonormals of C)、そして A を C の基本対角線行列 (basic diagonal matrix) という。

n 次行列 $A = [a_{ik}]$ の対角線要素の和を A のトレース (trace) といい、 $\text{tr.}(A)$ と書く。すなわち、

$$\text{tr.}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

ここで A, B をともに n 次行列とすると、次式がなりたつ。

$$\text{tr.}(A+B) = \text{tr.}(A) + \text{tr.}(B), \quad \text{tr.}(AB) = \text{tr.}(BA)$$

A. 4 行列式, 正則行列, 逆行列

A.4.1 行 列 式

n 個の相異なる正の整数を 1 から n とし、 $(1, 2, \dots, n)$ と並べたとき、これらの整数の任意の一つの並び $(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv P$ から、二つずつの数字の交換 (互換, transposition) によって初めの並び $(1, 2, \dots, n)$ にもどる互換の回数を考える。この回数が偶数 (偶互換) であれば配列 P のもつ性質の符号としてプラス、すなわち $\text{sgn } P = +1$ とし、また回数が奇数 (奇互換) であれば配列 P の符号としてマイナス、すなわち $\text{sgn } P = -1$ と定義しておく。

このとき、 n 次正方行列 $A = [a_{ik}]$ の行列式 (determinant) を $|A|$ で示して次式で与える。

$$|A| = \sum_P \text{sgn } P \cdot a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

ここに、上式右辺の a_{ip_i} は A の (i, p_i) 要素で、第 i 行として行番号 1, 2, \dots, n を選んだとき、対応する第 p_i 列として p_1, p_2, \dots, p_n をそれぞれ異なる

った数字として列番号 $1, 2, \dots, n$ から選び, この列番号の並びを $(p_1, p_2, \dots, p_n) \equiv \mathbf{P}$ として上式右辺に示される要素の積に符号 $\text{sgn } \mathbf{P}$ をつけ, このようなあらゆる可能な \mathbf{P} の選び方について加え合わせることを意味している。また, 正方行列 \mathbf{A} の行列式 $|\mathbf{A}|$ を次のようにも示すことがある。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \det \mathbf{A}, \delta(\mathbf{A}), |a_{ik}|$$

さらに, n 次正方行列 \mathbf{A} の対角線要素を対角線にしている \mathbf{A} の小行列の行列式を主小行列式 (principal minor) といっている。

一般に, (m, n) 行列 \mathbf{A} から任意に r 個ずつの行と列を選び出してつくった r 次正方の小行列の行列式を \mathbf{A} の小行列式 (minor または subdeterminant of order r of \mathbf{A}) という。

また, このような行列 \mathbf{A} の m 行または n 列による横ベクトルまた縦ベクトルのうちで 1 次独立なベクトルの最大数を行列 \mathbf{A} の階数 (位数, ランク, rank) という。したがって, 残りのベクトルは階数に等しい個数のベクトルの 1 次従属な形で表現されることになる。このことはまた, \mathbf{A} の $(r+1)$ 次の小行列式がすべてゼロとなり, r 次の小行列式ではゼロでないものがあるとき, このような r を階数と定義して, $\text{rank } \mathbf{A}, r(\mathbf{A})$ などと示しても同じことである。このとき, m と n の小さいほうと階数の差を退化次数 (nullity) ということがある。また, 階数が減ずることを退化 (degeneration) という。

A. 4.2 正則行列, 逆行列

行列式の値がゼロでない行列, すなわち $|\mathbf{A}| \neq 0$ なる \mathbf{A} を正則行列 (regular matrix または non-singular matrix) とよぶ。さらに, n 次正則行列 \mathbf{A} に, ある一つの n 次正方行列 \mathbf{X} を乗じ, 積の結果が n 次単位行列になるとき, この \mathbf{X} を \mathbf{A} の逆行列 (inverse matrix) といい, ただ一つ存在して \mathbf{A}^{-1} で示す。

n 次正方行列 \mathbf{A} において, 任意の要素 a_{ik} に着目して, i 行と k 列を除いた小行列式は a_{ik} に関する \mathbf{A} の $(n-1)$ 次小行列式であり, これに $(-1)^{i+k}$ の符号をつけた値を a_{ik} の余因子 (cofactor) とよんで A_{ik} と示すことが多い。また, この余因子 A_{ik} を (k, i) の要素としてできる n 次正方行列を \mathbf{A} の余

因子行列 (adjugate matrix of \mathbf{A}) といひ、 $\text{adj } \mathbf{A}$ で示す。よく知られた公式に $\text{adj } \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1}$ がある。

いま、 n 次正方の実数行列 \mathbf{A} について、 $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ であれば、 \mathbf{A} を直交行列 (orthogonal matrix) といひ、 \mathbf{A} は正則で $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1}$ となっている。直交行列の行列式の絶対値は 1 であつて、+1 のものを正値直交行列または正格直交行列 (positive orthogonal matrix または proper orthogonal matrix)、-1 のものを負値直交行列または変格直交行列 (negative orthogonal matrix または improper orthogonal matrix) といふ。

この際、 \mathbf{A} の要素に複素数をもつていて、単に転置行列 \mathbf{A}' ではなく共役転置行列 ($\bar{\mathbf{A}}') \equiv \mathbf{A}^*$ を用いて、 $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ がなりたつ行列 \mathbf{A} をユニタリ行列 (unitary matrix) といひ、この行列式の絶対値も 1 となる。

\mathbf{A} が n 次複素行列のとき、 $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$ を満たす行列 \mathbf{A} を n 次正規行列 (normal matrix) といふ。このとき \mathbf{A} は、あるユニタリ行列 \mathbf{U} によつて $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*$ と対角化できる。ただし \mathbf{D} はある複素対角線行列である。

A. 5 固有値と固有ベクトル

n 次正方行列 \mathbf{A} について、行列式 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n|$ の値をゼロとするスカラー量 λ を \mathbf{A} の固有値 (固有根, 特性根, eigenvalue, characteristic root, latent root, proper value) といひ、 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n| = 0$ を \mathbf{A} の固有方程式 (特性方程式, characteristic equation, proper equation) とよぶ。また、この式の左辺 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n|$ を \mathbf{A} の固有多項式 (characteristic polynomial) といひ、固有方程式は λ の n 次代数式であるから、一般に λ として n 個の根をもつ。この各根 λ_i に対し、 \mathbf{x} をゼロ・ベクトルでないとして $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$ なるベクトル \mathbf{x} が存在するとき、この \mathbf{x} を λ_i に対応する \mathbf{A} の固有ベクトル (eigen vector, characteristic vector, latent vector) とよぶ。すなわち、 $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる \mathbf{x} を λ_i に対する \mathbf{A} の固有ベクトルといひ、各 λ_i に一つずつ対応して全部で n 個の固有ベクトルが \mathbf{A} に対して得られる。エルミット行列やこれに属する実数対称行列の固有値は実数となる。

A. 6 ガウス・ドゥリットル法

本文中で最も頻繁に出てくるやっかいな演算は、逆行列や行列式の値を算出することであろう。とくに、階級(ランク)の大きい行列について、これらを算出するにはたいへんな労力を要し、また計算結果の誤差もかなり大きくなりがちである。このような場合にはなるべく簡単で精度のよい数値計算の手順が必要となる。

これらの観点から、ここではガウス・ドゥリットル (Gauss-Doolittle) 法とよばれ、手計算にも楽な計算方法を紹介する。この方法は統計関係の本や論文にもよくみられるが、数値計算に熟達した人もしばしば利用している。数値解法としては、 p 個の未知数をもつ p 個の連立1次方程式から一つずつ未知数を消去し、各未知数に対する係数行列の逆行列と、この行列の行列式の値および未知数の値が同時に算出できる。

いま、簡単のため $p=4$ として、次の連立方程式に基づいて、 $\mathbf{Ax}=\mathbf{a}_0$ における計算手順の数理を示そう。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{40} \end{bmatrix}$$

まず、第1行の両辺を a_{11} で剰し、

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{10}}{a_{11}}$$

をつくり、この両辺に a_{i1} を乗じ、第 i 行から引く。

$$\text{ここで、} \quad \frac{a_{10}}{a_{11}} = a_{00}, \quad \frac{a_{1j}}{a_{11}} = a_{0j}, \quad a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1} = b_{ij}, \\ i = 2, 3, 4 \quad j = 0, 2, 3, 4$$

とおくと、上の連立方程式は

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ b_{20} \\ b_{30} \\ b_{40} \end{bmatrix}$$

に変形される。

次いで、上の行列の要素 b_{ij} に関する部分で、第2行を b_{22} で剰して

$$x_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}}x_3 + \frac{b_{24}}{b_{22}}x_4 = \frac{b_{20}}{b_{22}}$$

をつくり、さきと同様に第3行以降の第2列の要素をゼロにする。すなわち

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ 0 & 1 & b_{03} & b_{04} \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ b_{00} \\ c_{30} \\ c_{40} \end{bmatrix}$$

を得る。また同じ手順で、第3行の c_{33} を1にする変換を行ない、さらに $d_{00} = d_{40}/d_{44}$ とおくと

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ 0 & 1 & b_{03} & b_{04} \\ 0 & 0 & 1 & c_{04} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ b_{00} \\ c_{00} \\ d_{00} \end{bmatrix}$$

が最終的な形として求められる。ここに x_1, x_2, x_3, x_4 の解は、逆順に次のように代入しながら得られる。

$$x_4 = d_{00}$$

$$x_3 = c_{00} - c_{04}x_4$$

$$x_2 = b_{00} - b_{03}x_3 - b_{04}x_4$$

$$x_1 = a_{00} - a_{02}x_2 - a_{03}x_3 - a_{04}x_4$$

同時に、行列 A の行列式の値は、 A が上方三角行列に変換された過程において、対角線要素を1にするために各行を剰した $a_{11}, b_{22}, c_{33}, d_{44}$ の積によって与えられる。すなわち

$$|A| = a_{11}b_{22}c_{33}d_{44}$$

となる。

さらに逆行列を求めるには、上記の $Ax = a_0$ において、与えられた行列を A とみなし、また

$$a_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

とつぎつぎにおいて、各ベクトルに対応して得た解 \mathbf{x} を列ベクトルとして正
 方形行列を構成すればよい。これが逆行列となる。すなわち、 $\mathbf{AX}=\mathbf{I}$ なる正
 方形行列 \mathbf{X} を求めていることになる。

このようにガウス・ドゥリットル法では逆行列・行列式の値および根の解が
 同時に得られ、このために各段階の計算が系統的に楽に行なえるような計算手
 順表が考案されている(表 A. 1)。

次に、この計算手順表を用いて簡単な数値例を示そう。

小池・中尾ら*の年齢 18~22 歳を主とした女子学生 305 名の体形の調査によ
 ると表 A. 2 の成績を報告している。

この相関行列に基づいて x_1, x_2, x_3 を独立変量とし x_4 を従属変量とし、さき
 の 3 変量から標準胸囲(ドレス)を回帰直線によって推定する問題を考えよう。
 ここに各 x_i はすべて規準化されているとする。

まず、

$$x_4 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

で与えられる係数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ を推定する。

このときの正規方程式は表 A. 2 の相関係数によって、次の 3 元 1 次連立方程
 式で示されている。

$$\beta_1 + 0.48\beta_2 + 0.81\beta_3 = 0.67$$

$$0.48\beta_1 + \beta_2 + 0.40\beta_3 = 0.20$$

$$0.81\beta_1 + 0.40\beta_2 + \beta_3 = 0.75$$

これをガウス・ドゥリットル法で解いてみよう。この計算手順を表 A. 3 で示す。

したがって、この表の結果から

$$\beta_1 = 0.2807, \beta_2 = -0.1664, \beta_3 = 0.5791$$

$$\text{行列式の値} = 1.0 \times 0.7696 \times 0.3437 = 0.2645$$

$$\text{逆行列} = \begin{bmatrix} 3.1753 & -0.5897 & -2.3361 \\ -0.5897 & 1.2999 & -0.0423 \\ -2.3361 & -0.0423 & 2.9091 \end{bmatrix}$$

(係数行列の)

を得る。

ここで、上に得た解を現実の胸囲(ドレス)の値として推定するために、規準

* 小池, 藤田, 中尾: “被服構成のための若年女子の計測(1)”, 人間工学誌, Vol. 2 (1967), No. 4, 15~29.

表 A.2 相 関 行 列 表

(単位: kg, cm)

	体 重	身 長	腰 囲(ヒップ)	胸 囲(ドレス)	平 均 値	標 準 偏 差
体 重 x_1	1	0.48	0.81	0.67	49.7	5.7
身 長 x_2	0.48	1	0.40	0.20	153.4	5.3
腰 囲 x_3	0.81	0.40	1	0.74	86.4	4.9
胸 囲 x_4	0.67	0.20	0.74	1	78.8	4.3

表 A.3 計 算 表

	係 数 行 列			定 数 項	(逆行列のため)		
	1	2	3	4	5	6	7
01	1.00	0.48	0.81	0.67	1	0	0
02	0.48	1.00	0.40	0.20	0	1	0
03	0.81	0.40	1.00	0.74	0	0	1
10		0.48	0.81	0.67	1	0	0
22		0.7696	0.0112	-0.1215	-0.48	1	0
23		0.0112	0.3439	0.1973	-0.81	0	1
20		1	0.0145	-0.1580	-0.6236	1.2993	0
33			0.3437	0.1990	-0.8030	-0.0145	1
30			1	0.5791	-2.3361	-0.0423	2.9091
20'		1		-0.1664	-0.5897	1.2999	-0.0423
10'	1			0.2807	3.1753	-0.5897	-2.3361

化された x_i を実測値 z_i にもどすと

$$\begin{aligned}
 z_4 &= 78.8 + \frac{0.2807 \times 4.3}{5.7} (z_1 - 49.7) \\
 &\quad - \frac{0.1664 \times 4.3}{5.3} (z_2 - 153.4) \\
 &\quad + \frac{0.5791 \times 4.3}{4.9} (z_3 - 86.4) \\
 &= 45.08 + 0.2118z_1 - 0.1350z_2 + 0.5082z_3
 \end{aligned}$$

を得る。

すなわち、18歳から22歳までの女子学生を調査集団とした場合、平均的に次のように胸囲(ドレス)が推定できる(単位: cm, kg)。

$$\begin{aligned}
 \text{推定胸囲(ドレス)} &= 45.08 + 0.2118 \times (\text{体重}) - 0.135 \times (\text{身長}) \\
 &\quad + 0.5082 \times (\text{腰囲})
 \end{aligned}$$

【付】 計算プログラム

ガウス・ドゥリットル法による正則行列の逆行列や行列式の値を求める。基本的には連立1次方程式の解を消去法によって得ることである。インプットは係数行列と定数ベクトルで、アウトプットは係数行列式・根ベクトルおよび係数行列の逆行列である。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	A(I, J)	係数行列と計算経過
IC	ゼロならば入力データと計算経過を示す 1ならば結果のみを示す	D	行列式の値
A(I, J)	線形方程式の係数行列	A(IN, M)	方程式の解
		A(IN, J)	逆行列

```

C      GAUSS-DOOLITTLE SOLUTION
C      ( SUBSTITUTION METHOD )
C
C      N --- NO. OF VARIABLES
C      IC --- 0, TO LIST INPUT DATA AND COMPUTATIONAL PROCESS
C      --- 1, OTHERWISE
C      A --- COEFFICIENT MATRIX
C
C      DIMENSION A(59,61),AA(30)
C      COMMON A
1 READ (40,100) N,IC
  WRITE (50,200)
  M=N+1
  NN=M+N
  DO 2 I=1,N
2 READ (40,101) (A(I,J),J=1,M)
  DO 3 I=1,N
    M1=M+1
    DO 3 J=M1,NN
3 A(I,J)=0.0
    DO 4 I=1,N
      J=M+I
4 A(I,J)=1.0
      AA(1)=A(1,1)
      IF(IC-1) 5,7,5
5 WRITE (50,201)
  WRITE (50,202) (J,J=1,NN)
  DO 6 I=1,N
6 WRITE (50,203) (A(I,J),J=1,NN)
7 NL=N-1
  DO 12 L=1,NL
    LL=L+1
    A1=A(L,L)
    DO 8 I=1,NN
8 A(L,I)=A(L,I)/A1
    DO 9 J=LL,N
    A2=A(J,L)

```

```

DO 9 K=1,NN
9 A(J,K)=A(J,K)-A2*A(L,K)
AA(LL)=A(LL,LL)
IF(IC-1) 10,12,10
10 WRITE (50,204)
DO 11 I=L,N
11 WRITE (50,203) (A(I,J),J=1,NN)
12 CONTINUE
A1=A(H,N)
DO 13 I=1,NN

13 A(N,I)=A(N,I)/A1
IF(IC-1) 14,15,14
14 WRITE (50,204)
WRITE (50,203) (A(N,J),J=1,NN)
15 D=1.0
DO 16 I=1,N
16 D=D*AA(I)
IN=N-1
KK=N-1
WRITE (50,204)

DO 20 I=1,KK
MM=N+I
IJ=N+I
KN=N-I
DO 18 J=1,NN
AB=0.0
DO 17 K=1,I
II=IN+K
JN=M-K
17 AB=AB+A(II,J)*A(KN,JN)

18 A(MM,J)=A(KN,J)-AB
IF(IC-1) 19,20,19
19 WRITE (50,203) (A(MM,K),K=1,NN)
20 CONTINUE
WRITE (50,205) D
WRITE (50,206)
DO 21 I=1,N
IN=2*N-I
21 WRITE (50,207) I,A(IN,M)
WRITE (50,208)

WRITE (50,209) (J,J=1,N)
DO 22 I=1,N
IN=2*N-I
22 WRITE (50,210) I,(A(IN,J),J=M1,NN)
GO TO 1
100 FORMAT (2I3)
101 FORMAT (10F5,2)
200 FORMAT (1X,24HGAUSS-DOOLITTLE SOLUTION/10X,23H( SUBSTITUTION METHO
1D )///)
201 FORMAT (5X,36HINPUT DATA AND COMPUTATIONAL PROCESS./)

202 FORMAT (10(I6,2X))
203 FORMAT (10F8,4)
204 FORMAT (1H )
205 FORMAT (//5X,11HDETERMINANT,///,10X,F8,4,///)
206 FORMAT (5X,16HROOTS /)
207 FORMAT (10X,1HX,I2,2H =,F10,4)
208 FORMAT (//5X,14HINVERSE MATRIX./)
209 FORMAT (10X,8(16,2X))
210 FORMAT (3X,15,2X,8F8,4)
STOP
END

```

A. 7 平方根法

この平方根法とよばれる行列演算も統計解析の計算にしばしば適用できる。しかし、ガウス・ドゥリットル法を知っている人の間でも、この方法はあまり知られていないようである。この平方根法の利点は、計算が非常に簡潔でまた計算手順を通じ記入量も少なく、結果が見やすいことであろう。そして、この解法は係数が対称になっている線形方程式の解を非常に楽に与えるだけでなく、ある種の統計解析で必要になる形式の逆行列や解を求めるのに、とくに有利である。

いま、前記のガウス・ドゥリットル法におけると同じ p 元連立 1 次方程式

$$Ax = a_0$$

によって、計算手順を示そう。ただし A の要素について $a_{ij} = a_{ji}$ とする。まず、 A と a_0 を変換して新しい行列 B とベクトル b_0 を次のようにして求める。

(i) A および a_0 の第 1 行について

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad b_{1j} = a_{1j}/b_{11}, \quad j = 0, 2, 3, \dots, p$$

(ii) A および a_0 の第 i 行について

$$b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}^2}, \quad i = 2, 3, \dots, p$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{b_{ii}} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki} b_{kj}), & i = 2, 3, \dots, p-1 \\ & j = 0, i+1, i+2, \dots, p \\ 0, & i = 2, 3, \dots, p-1 \\ & i > j, j \neq 0 \end{cases}$$

(iii) この b_{ij} を要素として

$$B = (b_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \dots, p$$

とおくと、 $A = B'B$ を満たす上方三角行列 B が得られる。

(iv) A の行列式の値は $|A| = |B'| |B|$ であり、いま $|B| = b_{11} b_{22} \cdots b_{pp}$ となっているから、上の結果から直ちに次式で得られる。

$$|A| = (b_{11} b_{22} \cdots b_{pp})^2$$

(v) 解 x_1, x_2, \dots, x_p を得るには

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1p}x_p &= b_{10} \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \dots + b_{2p}x_p &= b_{20} \\ b_{33}x_3 + \dots + b_{3p}x_p &= b_{30} \\ \vdots & \\ b_{p-1,p-1}x_{p-1} + b_{p-1,p}x_p &= b_{p-1,0} \\ b_{pp}x_p &= b_{p0} \end{aligned}$$

の形式に算出され準備されているから、逆順に次のように求める。

$$\begin{aligned} x_p &= b_{p0}/b_{pp} \\ x_{p-1} &= (b_{p-1,0} - b_{p-1,p}x_p)/b_{p-1,p-1} \\ x_{p-2} &= (b_{p-2,0} - b_{p-2,p-1}x_{p-1} - b_{p-2,p}x_p)/b_{p-2,p-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

(vi) もし、 A が変量 z_1, z_2, \dots, z_p に関する $p \times p$ の相関行列で、 a_0 が特定の変量 z_0 に対する相関係数ベクトルであれば、 z_0 に対する z_1, z_2, \dots, z_p の重相関係数 $R_{0.12\dots p}$ は、

$$R_{0.12\dots p} = (a_{10}x_1 + a_{20}x_2 + \dots + a_{p0}x_p)^{1/2}$$

で与えられる。また、(vi) は相関行列を同等な行列の積と考えたときの行列を求めたことを意味している。

(vii) A の逆行列を求めるには、上の手順 (i) から (iv) において、定数項のベクトル a_0 を順次

$$a_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

とにおいて解を求める。ここで各 a_0 の解を p 次列ベクトルとして x_1, x_2, \dots, x_p とし、これを列とする $p \times p$ 行列を構成するとよい。

この平方根法の計算手順を表 A.4 に示している。

また、表 A.5 には前節で引用した小池・中尾らの例を用い、本節の数値計算を示している。もちろん、計算結果はドゥリットル法と合致し、計算表は他のどの方法によるよりも簡潔である。

表 A.4 平方根法の計算手順表

	線形方程式の係数行列								定数項	逆行列のための単位行列								算 出 法
	1	2	3	4	...	7	8	9		10	11	12	13	...	16	17		
01	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}			a_{10}	1							与えられた係数行列と定数ベクトル および単位行列を記入する。		
02	a_{12}	a_{22}	a_{23}	a_{24}			a_{20}		1			0					
03	a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{34}			a_{30}			1							
04	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}			a_{40}				1						
05	⋮		(対称行列)					⋮										
07	⋮							⋮	0									
08	⋮						A	a_0										
11	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}			b_{10}	$b_{10}^{(1)}$	$b_{10}^{(2)}$	$b_{10}^{(3)}$	$b_{10}^{(4)}$				手順 (i), (ii) による。	
12		b_{22}	b_{23}	b_{24}			b_{20}	$b_{20}^{(1)}$	$b_{20}^{(2)}$	$b_{20}^{(3)}$	$b_{20}^{(4)}$					
13			b_{33}	b_{34}			b_{30}	$b_{30}^{(1)}$	$b_{30}^{(2)}$	$b_{30}^{(3)}$	$b_{30}^{(4)}$					
14				b_{44}			b_{40}	$b_{40}^{(1)}$	$b_{40}^{(2)}$	$b_{40}^{(3)}$	$b_{40}^{(4)}$					
15		0						⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
17								⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
18							B	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮					
															$(B')^{-1}$			
解	x_1	x_2	x_3	x_4				$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	$x_1^{(3)}$	$x_1^{(4)}$			手順 (iv) と手順 (vi) による。		
重 相 関 係 数									$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	$x_2^{(3)}$	$x_2^{(4)}$					
行 列 式									$x_3^{(1)}$	$x_3^{(2)}$	$x_3^{(3)}$	$x_3^{(4)}$					
									$x_4^{(1)}$	$x_4^{(2)}$	$x_4^{(3)}$	$x_4^{(4)}$					
									⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			A^{-1}		

表 A.5 計 算 表

	係 数 行 列			定数項	(逆行列のため)		
	1	2	3		4	5	6
01	1.0	0.48	0.81	0.67	1	0	0
02	0.48	1.0	0.40	0.20	0	1	0
03	0.81	0.40	1.0	0.74	0	0	1
11	1.0	0.48	0.81	0.67	1	0	0
12	0	0.877	0.012	-0.138	-0.547	1.139	0
13	0	0	0.586	0.339	-1.369	-0.024	1.705
解	0.281	-0.166	0.579	逆 行 列	3.175	-0.589	-2.336
$R_{0.123}$	0.764				-0.589	1.299	-0.042
行列式	$ R =0.264$				-2.336	-0.042	2.909

[付] 計算プログラム

対称行列に関する平方根法を行なう。すなわち、実数の場合の平方根に相当する演算を正方行列について実施するわけで、得られる行列は三角行列で、これを転置したものの逆行列も同時に得られる。この方法は、前項のガウス・ドゥリットル法と同様に、対称行列の場合の逆行列や行列式の値をも与え、またインプットが相関行列であれば重相関係数ベクトルと偏相関係数行列も得られる。この平方根法の統計的多変量解析での用法は広く、因子分析法では単一因子解法や多群解法などに利用される。

入 力 (input)		出 力 (output)	
N	観測特性の数	A(I, J)	係数行列、のちに逆行列
A(I, J)	線形方程式の係数行列(対称行列)	AB	行列式の値
		A(NN, I)	方程式の解
		C	重相関係数

SQUARE ROOT METHOD

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

N --- RANK OF MATRIX A
A --- (N*(N+1)) MATRIX CONSISTING OF
A SYMMETRIC COEFFICIENTS MATRIX (N*N)
AND A CONSTANTS VECTOR (N*1)

```

DIMENSION A(61,61),AA(30)
1 READ (40,100) N
  M=N-1
  NN=N+1
  N2=2*N+1
  MM=NN+1
  DO 2 I=1,N
2 READ (40,101) (A(I,J),J=1,NN)
  DO 4 I=1,N
  IN=NN+I

  DO 3 J=MM,N2
3 A(I,J)=0.0
4 A(I,IN)=1.0
  WRITE (50,200)
  WRITE (50,201) (J,J=1,NN)
  DO 5 I=1,N
5 WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,NN)
  DO 6 I=1,N
6 AA(I)=A(I,NN)
  A(1,1)=SQRT(A(1,1))

  DO 7 J=2,N2
7 A(1,J)=A(1,J)/A(1,1)
  DO 10 I=2,N
  II=I-1
  B=0.0
  DO 8 J=1,II
8 B=B+A(J,I)**2
  A(1,I)=SQRT(A(1,I)-B)
  IJ=I+1
  DO 10 J=IJ,N2

  BB=0.0
  DO 9 K=1,II
  BB=BB+A(K,I)*A(K,J)
9 A(I,K)=0.0
10 A(I,J)=1.0/A(I,I)*(A(I,J)-BB)
  AB=1.0
  DO 11 I=1,N
11 AB=AB*A(I,I)
  AB=AB**2
  A(NN,N)=A(N,NN)/A(N,N)

  DO 13 I=1,M
  NI=N-I
  ANI=A(NI,NN)
  DO 12 J=1,I
  NNJ=NN-J
12 ANI=ANI-A(NI,NNJ)*A(K,NNJ)
13 A(NN,NI)=ANI/A(NI,NI)
  C=0.0
  DO 14 I=1,N
14 C=C+A(NN,I)*AA(I)

  C=SQRT(C)
  DO 15 I=MM,N2
  DO 15 J=I,N2
  A(I,J)=0.0
  DO 15 K=1,N
15 A(I,J)=A(I,J)+A(K,I)*A(K,J)
  DO 16 I=MM,N2
  DO 16 J=MM,I
16 A(I,J)=A(J,I)
  WRITE (50,203)

```



```

WRITE (50,201) (J,J=1,N2)
DO 17 I=1,N
17 WRITE (50,202) I,(A(I,J),J=1,N2)
WRITE (50,204) AB
WRITE (50,205)
DO 18 I=1,N
18 WRITE (50,206) I,A(NN,I)
WRITE (50,207) C
WRITE (50,208)
NN2=2*N

NNJ=3*N
WRITE (50,201) (J,J=1,N)
K=0
DO 19 I=MM,N2
K=K+1
19 WRITE (50,202) K,(A(I,J),J=MM,N2)
GO TO 1
100 FORMAT (I2)
101 FORMAT (10F5,2)
200 FORMAT (//5X,20HSQUARE ROOT METHOD/13X,22HFOR SYMMETRIC MATRIX

1///16H INPUT MATRIX A/)
201 FORMAT (10(2X,I6))
202 FORMAT (I2,9F8,4)
203 FORMAT (//24H SQUARE ROOT SOLUTION B/15X,13HWHERE A=TB*B//2X,2HB
1=)
204 FORMAT (//12H DETERMINANT//10X,F10,4)
205 FORMAT (//17H ROOTS /)
206 FORMAT (5X,1HX,I2,2H =,F10,4)
207 FORMAT (//33H MULTIPLE CORRELATION COEFFICIENT//10X,F10,4)
208 FORMAT (//15H INVERSE MATRIX/)
STOP
END

```

A. 8 逆行列計算の便法

逆行列の計算法は種々考えられているが、一般にかなり労力的で、また計算誤差の累積の問題もある。ここでは、手計算の場合の比較的簡単なそして計算精度を配慮した二つの解法をあげておく。ここに、いずれも A を正則行列と前提する。

A.8.1 分割法

いま、 n 次正方行列 A の小行列 B, C, D および E を次のように考え、

$$A = \begin{bmatrix} B & D \\ E & C \end{bmatrix}$$

さらに、 B および C を正方行列と設定しておく。

ここで、もし B および $C - EB^{-1}D \equiv X$ が正則行列であれば、 $B^{-1}D \equiv Y$ および $EB^{-1} \equiv Z$ とおいて、 A^{-1} は次の形式で示すことができる。

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} + YX^{-1}Z & -YX^{-1} \\ -X^{-1}Z & X^{-1} \end{bmatrix}$$

すなわち、 n 次正方行列 A の逆行列は小行列 B の逆行列と C と同じ大きさの行列 X の逆行列の計算に分けて算出することができる。

次に、先節の小池・中尾の例を用いて、この数値計算の手順を示しておく。

まず

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & 1 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & 1 \end{bmatrix}$$

において、

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0.48 \\ 0.48 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1]$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.81 \\ 0.40 \end{bmatrix}, \quad E = [0.81 \quad 0.40]$$

と置く。このときは簡単に B^{-1} が得られ、

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2994 & -0.6237 \\ -0.6237 & 1.2994 \end{bmatrix}$$

となるから、

$$X = C - EB^{-1}D = [0.3437]$$

$$\therefore X^{-1} = [2.9091]$$

を得る。

さらに、 Y と Z について

$$Y = \begin{bmatrix} 0.8030 \\ 0.0146 \end{bmatrix}, \quad Z = EB^{-1} = [0.8030 \quad 0.0146]$$

となるから、これによって A^{-1} を作成する。この答は次のように得られ、当然前節の結果と一致する。

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3.1753 & -0.5897 & -2.3361 \\ -0.5897 & 1.2999 & -0.0423 \\ -2.3361 & -0.0423 & 2.9091 \end{bmatrix}$$

A.8.2 反復収束法

n 次正方行列 A について、なんらかの方法で A^{-1} に近似する行列 X_0 が得られているとする。このとき、 X_0 から出発してもっと精度のよい逆行列を求めるために、 A^{-1} に逐次収束させる方法の一つをあげておく。

この方法はきわめて簡単で、

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k(2\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\mathbf{X}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

によって逐次的に k を大きくとっていくと、終局的に $k \rightarrow \infty$ のとき $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{X}_k = \mathbf{A}^{-1}$ となる。

ただし、このためには

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}\mathbf{X}_0)^{2k} = \mathbf{0}$$

が必要十分条件となる。

A.8.3 フレーム法

この方法は n 次正方行列 \mathbf{A} の行列式の値 $|\mathbf{A}|$ 、逆行列 \mathbf{A}^{-1} 、余因子行列 $\text{adj } \mathbf{A}$ および固有多項式の係数を同時に与え、非常に便利なわかりやすい方法である。しかし、比較的小さな行列に対して手計算むきで、少し大型の行列になると急速に計算誤差が大きくなり、精度が非常にわるくなることもよく知られている。

いま \mathbf{A} の固有方程式を

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n| = (-1)^n (\lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - c_2 \lambda^{n-2} - \dots - c_n) = 0$$

とおく。このとき

$$\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}\mathbf{A}_{k-1} - c_k \mathbf{I}_n$$

$$c_k = \frac{1}{k} \text{tr.}(\mathbf{A}\mathbf{A}_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

として、上式によって k を n まで反復的に計算すると、

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{n-1} c_n$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{c_n} \mathbf{A}_{n-1}$$

$$\text{adj } \mathbf{A} = (-1)^{n-1} \mathbf{A}_{n-1}$$

$$\text{固有多項式の係数: } 1, c_1, c_2, \dots, c_n$$

が得られる。

さて、A.6 節からの例によって、この方法での $n=3$ の数値計算の手順を示そう。

まず、 $\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{I}_3$ とおいているから

$$c_1 = \text{tr.}(\mathbf{A}\mathbf{A}_0) = \text{tr.}(\mathbf{A}\mathbf{I}_3) = 3.0$$

である。この c_1 によって

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - c_1 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1-3.0 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & 1-3.0 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & 1-3.0 \end{bmatrix}$$

を得る。さらに、 $k=2$ として

$$\begin{aligned} \mathbf{AA}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & 1 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & -2 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1.1135 & -0.1560 & -0.6180 \\ -0.1560 & -1.6096 & -0.0112 \\ -0.6180 & -0.0112 & -1.1839 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を計算して、

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{AA}_1) = \frac{1}{2}(-1.1135 - 1.6096 - 1.1839) \\ &= -1.9535 \end{aligned}$$

を得る。したがって

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{AA}_1 - c_2 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.8400 & -0.1560 & -0.6180 \\ -0.1560 & 0.3439 & -0.0112 \\ -0.6180 & -0.0112 & 0.7696 \end{bmatrix}$$

が計算されて、また

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{AA}_2) = \frac{1}{3}(0.2645 + 0.2645 + 0.2645) \\ &= 0.2645 \end{aligned}$$

を得る。この数値例では $n=3$ であるから、これまでの計算で \mathbf{A} の行列式の値・逆行列・余因子行列および固有多項式の係数が得られている。すなわち、

$$|\mathbf{A}| = (-1)^2 c_3 = 0.2645$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{c_3} \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3.1753 & -0.5897 & -2.3361 \\ -0.5897 & 1.2999 & -0.0423 \\ -2.3361 & -0.0423 & 2.9092 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = (-1)^2 \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.8400 & -0.1560 & -0.6180 \\ -0.1560 & 0.3439 & -0.0112 \\ -0.6180 & -0.0112 & 0.7696 \end{bmatrix}$$

固有多項式

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (-1)^3(\lambda^3 - c_1\lambda^2 - c_2\lambda - c_3) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 1.9535\lambda + 0.2645 \end{aligned}$$

と示される。

A. 9 固有値と固有ベクトルの算法

固有値と固有ベクトルを算出する方法には、大別して直接法・反復法および回転法がある。このうちの直接法は、前節の Frame 法のように、 n 次正方行列 A について $|A - \lambda I| = 0$ なる λ に関する n 次固有多項式を導き、この代数方程式の根として n 個の固有値を求め、またこの各根に対して n 個の連立方程式として $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たすようなゼロベクトルでない \mathbf{x} を、その根に対応する固有ベクトルとして算出する方法である。しかし、この方法は n が大きいと計算誤差も大きく影響してあまり感心しない。

本節の中では、反復法としてパワー法 (power method) を、回転法としてヤコビ法 (Jacobi method) を代表として紹介しておく。

A.9.1 パワー法

この方法は対称行列にも非対称行列にも応ずることができ、しかも計算法は比較的容易である。そして固有値の絶対値の大きい順に数個算出するような際に最も適している。因子分析法や正準分析法では、このような立場から固有値と固有ベクトルを必要とするので頻繁に利用される。

いま、 n 次正方行列 A の n 個の固有値を $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ とし、各 λ_i に対応する固有ベクトルを \mathbf{x}_i とする。

このとき、第 1 番めの固有値 λ_1 に対応する固有ベクトルは、任意に与えられた初期の n 次ベクトル $\mathbf{x}_1^{(0)}$ を用いて

$$\mathbf{x}_1^{(k)} = A^k \mathbf{x}_1^{(0)}$$

を $k=1, 2, 3, \dots$ と繰り返し計算し、 $\mathbf{x}_1^{(k)}$ を規準化して得られる。このとき k が十分大きくなるにつれて $\mathbf{x}_1^{(k)}$ は \mathbf{x}_1 に収束する。

そして固有値 λ_1 は、ベクトルが十分に収束した k について、次の内積の比

$$\lambda_1 = \frac{(A\mathbf{x}_1^{(k-1)}, A\mathbf{x}_1^{(k-1)})}{(A\mathbf{x}_1^{(k-1)}, \mathbf{x}_1^{(k-1)})}$$

で得られる。ここに $Ax^{(k-1)}$ は $x^{(k)}$ の規準化するまえのベクトルを示している。このことは、 $x_1^{(k)} = Ax_1^{(k-1)}$ から $(A - \lambda I)x_1^{(k)} = 0$ となる λ を求めていることになる。また別に、固有ベクトルの各要素が十分に安定していれば、 $Ax^{(k-1)}$ と $x^{(k-1)}$ の任意の一つの対応する要素どうしの比でも得られる。

次いで、 $i=2, 3, \dots, n$ に関して、第 $i-1$ 番めの固有値 λ_{i-1} と固有ベクトル x_{i-1} を得たあとで、第 i 番めの固有値 λ_i と固有ベクトル x_i を求める手順にはいる。

この際には、第 i 番めの固有値 λ_i と固有ベクトル x_i のための A_i を用いて、さきと同様の式

$$x_i^{(k)} = A_i^k x_i^{(0)}, \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

によって反復計算を行なう。ただし A_i をつくるには、もとの行列 A が対称形でも非対称形でも、まず A と A' の第 $i-1$ 番めの固有ベクトルを必要とする。すなわち、 k を十分大きくしてそれぞれ M および N で得た A および A' の第 $i-1$ 番めの固有ベクトルを $x_{i-1}^{(M)}$ および $\tilde{x}_{i-1}^{(N)}$ とし $x_{i-1}^{(M)}/\tilde{x}_{i-1}^{(N)} = 1$ と規準化しておく、

$$A_i \equiv A - \lambda_{i-1} x_{i-1}^{(M)} \tilde{x}_{i-1}^{(N)'} /$$

で与えられる。したがって、もし A が対称行列なら、もちろん $x_{i-1}^{(M)}$ と $\tilde{x}_{i-1}^{(N)}$ は同じものであるから、 A_i のつくり方は $x_{i-1}^{(M)}/x_{i-1}^{(M)} = 1$ のもとで

$$A_i \equiv A - \lambda_{i-1} x_{i-1}^{(M)} x_{i-1}^{(M)'}$$

で示される。

さて、上の A_i による反復計算によって第 i 番めの固有ベクトル x_i が得られれば、この x_i によって第 i 番めの固有値は、さきと同様に内積に関する次式によって得られる。

$$\lambda_i = [x_i, x_i] / [x_i, x_{i-1}]$$

次に、パワー法の計算例として、A.6 節から使用してきている3次正方行列 A について手順を示そう。この行列は対称形であるから、 \tilde{x}_i を求める手間がはぶけるときの公式を利用することになる。

まず、第1番めの固有値と固有ベクトルを求めるために、初期のベクトル $x_1^{(0)}$ を

$$x_1^{(0)} = [1, 1, 1]'$$

とすると

$$\mathbf{x}_1^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & 1 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.29 \\ 1.88 \\ 2.21 \end{bmatrix}$$

を得る。これを規準化すると、 $\mathbf{x}_1^{(1)} = [0.6196 \quad 0.5087 \quad 0.5979]'$ となる。

次いで、 $k=2$ として計算を繰り返す。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(2)} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1^{(1)} = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_1^{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & 1 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6196 \\ 0.5087 \\ 0.5979 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3488 \\ 1.0453 \\ 1.3033 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これを規準化すると $\mathbf{x}_1^{(2)} = [0.6280 \quad 0.4869 \quad 0.6071]'$ を得る。

さらに、 $k=3$ では

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^{(3)} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & 1 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6280 \\ 0.4869 \\ 0.6071 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3535 \\ 1.0312 \\ 1.3105 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と計算されて、規準化すると $\mathbf{x}_1^{(3)} = [0.6302 \quad 0.4801 \quad 0.6102]'$ を得る。

同様の計算をさらに続け、規準化したベクトルのみをしるすと次のようになる。

$$\begin{aligned} k=4, \quad \mathbf{x}_1^{(4)} &= [0.6308 \quad 0.4780 \quad 0.6112]' \\ k=5, \quad \mathbf{x}_1^{(5)} &= [0.6310 \quad 0.4774 \quad 0.6115]' \\ k=6, \quad \mathbf{x}_1^{(6)} &= [0.6311 \quad 0.4771 \quad 0.6116]' \\ k=7, \quad \mathbf{x}_1^{(7)} &= [0.6311 \quad 0.4771 \quad 0.6116]' \end{aligned}$$

すなわち、7回の反復計算で第1の固有ベクトルは確定し、このときの固有値は $k=8$ で $\mathbf{A}\mathbf{x}_1^{(7)} = [1.3555 \quad 1.0247 \quad 1.3136]'$ となるから、これと $\mathbf{x}_1^{(7)}$ を用いて

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1.3555^2 + 1.0247^2 + 1.3136^2}{1.3555 \times 0.6311 + 1.0247 \times 0.4771 + 1.3136 \times 0.6116} \\ &= 2.1478 \end{aligned}$$

を得る。

次いで、第2番めの固有ベクトルと固有値を求めるために、 \mathbf{A} が対称行列の場合の公式

$$\begin{aligned}
 A_2 &= A - \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1' \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & 1 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & 1 \end{bmatrix} - 2.1478 \begin{bmatrix} 0.6311 \\ 0.4771 \\ 0.6116 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6311 & 0.4771 & 0.6116 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.1445 & -0.1667 & -0.0191 \\ -0.1667 & 0.5112 & -0.2267 \\ -0.0191 & -0.2267 & 0.1965 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

によって、初めの A を更新し $\mathbf{x}_2^{(0)} = [1, 1, 1]'$ から反復計算を行なう。

この推移は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 k=1, \quad \mathbf{x}_2^{(1)} &= [-0.3077 \quad 0.8778 \quad -0.3674]' \\
 k=2, \quad \mathbf{x}_2^{(2)} &= [-0.2757 \quad 0.8750 \quad -0.3980]' \\
 k=3, \quad \mathbf{x}_2^{(3)} &= [-0.2667 \quad 0.8739 \quad -0.4063]' \\
 k=4, \quad \mathbf{x}_2^{(4)} &= [-0.2643 \quad 0.8736 \quad -0.4087]' \\
 k=5, \quad \mathbf{x}_2^{(5)} &= [-0.2636 \quad 0.8735 \quad -0.4093]' \\
 k=6, \quad \mathbf{x}_2^{(6)} &= [-0.2634 \quad 0.8735 \quad -0.4094]' \\
 k=7, \quad \mathbf{x}_2^{(7)} &= [-0.2634 \quad 0.8735 \quad -0.4094]'
 \end{aligned}$$

したがって、この際も7回の反復計算により第2の固有ベクトルは確定し、このときの固有値は0.6677と得られる。

全く同様に、第3番めに固有ベクトルと固有値を求める。この際には

$$A_3 = A_2 - \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2' = \begin{bmatrix} 0.0982 & -0.0130 & -0.0911 \\ -0.0130 & 0.0017 & 0.0121 \\ -0.0911 & 0.0121 & 0.0846 \end{bmatrix}$$

となり、これを第1の固有ベクトルと固有値の計算式における A と考えて、 $\mathbf{x}_3^{(0)} = [1, 1, 1]'$ から出発して反復計算を行なう。

この第3の固有ベクトルの計算も7回めで収束し、次のように得られる。

$$\mathbf{x}_3^{(7)} = [0.7296 \quad -0.0974 \quad -0.6769]'$$

したがって対応する固有値は0.1844となる。

A.9.2 ヤコビ法

この算法は対称行列にだけ適用できて、手計算にはめんどうであるが、機械計算のプログラム面では適した有効な方法である。一般に、実対称行列の固有

$$\tan 2\phi = \frac{-2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}$$

と定める。

このような T_{k+1} によって、 $T_{k+1}A^{(k)}T_{k+1}'$ を実施した結果は、次のようになっている。

$$a_{jj}^{(k+1)} = a_{ii}^{(k)} \sin^2 \phi + a_{jj}^{(k)} \cos^2 \phi + a_{ij}^{(k)} \sin 2\phi$$

$$a_{ii}^{(k+1)} = a_{ii}^{(k)} + a_{jj}^{(k)} - a_{jj}^{(k+1)}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ji}^{(k+1)} = 0$$

また、上で指定された i または j と、その他の行または列の番号 l とに関する要素は

$$a_{il}^{(k+1)} = a_{il}^{(k)} \cos \phi - a_{jl}^{(k)} \sin \phi$$

$$a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(k)} \cos \phi + a_{il}^{(k)} \sin \phi$$

と変化する。

次に、回転によって新しくできた $T_{k+1}A^{(k)}T_{k+1}$ を $A^{(k+1)}$ として、この行列の非対角線要素の絶対値の最大のを捜し、上と同様の手順によって T_{k+2} を施すことになる ($k=1, 2, \dots$)。

さて、このような手順の反復によって、もとの行列は次第に対角線行列に近づき、非対角線要素がすべて十分にゼロに近いとみなせるときに、反復回転の計算をやめる。この収束を判定する具体的な方法は、この変換が直交回転またはエルミット変換であるから、行列の要素の2乗和は変わらないという性質を利用するのがよい。すなわち、与えられた行列を対角線行列化する過程で、対角線要素の2乗和は単調に増加するので、この和が初期の行列の全要素の2乗和に近づき、次第に収束してくる。したがって、両者の差を収束の判定のために用い、あらかじめ指定した必要精度の値と比較して小さければ反復計算を終了するようにすればよい。このようにしてでき上がった行列を上述の A と考えればよいから、その対角線要素に固有値が示され、その順に対応する固有ベクトルが、各階の回転行列をすべて乗じてできる一つの行列の列で示される。

次に、ヤコビ法の計算例として、前節と同じ3次正方行列 A について計算手順の概略を示そう。ここに

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.48 & 0.81 \\ 0.48 & 1 & 0.40 \\ 0.81 & 0.40 & 1 \end{bmatrix}$$

さて、反復計算にあたって、行列の非対角線要素の絶対値の大きな要素からゼロにしていくような直交回転をすでに述べたが、このような要素の選択の代わりに、非対角線要素 a_{ij} の (i, j) を $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n), (2, 1), \dots, (2, n), (3, 1), \dots, (n, n-1)$ のように、系統的に逐次すべての要素にわたり $n(n-1)/2$ 回の直交回転を反復計算の 1 巡回 (cycle) と考え、上記の反復計算の停止規則を適用してもよい。電子計算機のプログラミングには、このような系統的な選択のほうがプログラム技法のうえで楽である。

この数値例では次数が小さいので、ここですした系統的な方法によって数値計算を行なってみる。

まず、 a_{12} の要素 0.48 をゼロとする直交回転 T_1 を考える。このとき

$$\tan 2\phi = -2 \times 0.48 / (1 - 1) = -\infty$$

であるから、 $2\phi = -\pi/2$ 、すなわち $\phi = -\pi/4$ となる。したがって、 $\sin \phi = 1/\sqrt{2}$ と $\cos \phi = -1/\sqrt{2}$ を用いて

$$T_1 = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る。

ここで、 $A^{(0)} \equiv A$ として $T_1 A^{(0)} T_1' = A^{(1)}$ を計算すると、次を得る。

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.52 & 0 & -0.2899 \\ 0 & 1.48 & -0.8556 \\ -0.2899 & -0.8556 & 1 \end{bmatrix}$$

次いで、 a_{13} にあたる -0.2899 をゼロにするような直交回転 T_2 を考える。このとき、多少の丸めの計算誤差のために正確にゼロとならなくとも、かなり小さい値になって反復計算の過程で逐次非対角線要素をゼロに収束させていくから、それほど心配はいらない。この際の直交変換の要素として、 $\sin \phi = 0.5535$ と $\cos \phi = 0.8328$ を得る。これによる $A^{(2)}$ の計算結果として次のようになる。

$$\mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.2289 & 0.1026 & -0.1991 \\ 0.1026 & 0.1651 & -0.6928 \\ -0.1991 & -0.6928 & 1.1202 \end{bmatrix}$$

次いで、 a_{23} にあたる -0.6928 を選択する。これに関する \mathbf{T}_3 については、 $\sin \phi = 0.4183$ と $\cos \phi = 0.9083$ を得る。これによって $\mathbf{T}_3 \mathbf{A}^{(3)} \mathbf{T}_3' \equiv \mathbf{A}^{(4)}$ を得れば、上に与えられた \mathbf{A} に関する 1 巡回の反復計算を終えたことになる。

全く同様の計算を、 \mathbf{A} のすべての要素の 2 乗和が変換後の対角線要素の 2 乗和にほぼ等しくなるまで、反復するわけである。

この計算法を電子計算機によって行なうと、26 回の反復計算、すなわち第 9 巡回中の 2 回めにおいて、きわめて安定した次の結果を示している。

$$\mathbf{A}^{(26)} = \begin{bmatrix} 0.1845 & 0.4874 \times 10^{-10} & 0.2910 \times 10^{-10} \\ -0.2940 \times 10^{-6} & 0.6677 & -0.9095 \times 10^{-12} \\ 0.1639 \times 10^{-6} & -0.1553 \times 10^{-5} & 2.1478 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \cdots \mathbf{T}_{26}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.7296 & -0.2633 & -0.6311 \\ 0.0974 & 0.8735 & -0.4771 \\ 0.6769 & -0.4096 & -0.6116 \end{bmatrix}$$

したがって、固有値は $\mathbf{A}^{(26)}$ の対角線要素によって

$$\lambda_1 = 0.1845, \quad \lambda_2 = 0.6677, \quad \lambda_3 = 2.1478$$

と示され、それぞれに対応する固有ベクトルは、規準化した後に

$$\mathbf{x}_1 = [-0.3133 \quad 0.0418 \quad 0.2907]'$$

$$\mathbf{x}_2 = [-0.2151 \quad 0.7137 \quad -0.3346]'$$

$$\mathbf{x}_3 = [-0.9249 \quad -0.6991 \quad -0.8963]'$$

と得られる。

参 考 文 献*

1. Aitchison, J., and Silvey, S. D.: Maximum-likelihood estimation procedures and associated tests of significance. *J. Roy. Stat. Soc.*, **B**, 22 (1960), 154-171.
2. Adcock, C. J.: Higher-order factors. *Brit. J. Statist. Psychol.*, 17 (1964), 153-160.
3. Albert, A. A.: The minimum rank of a correlation matrix. *Proc. Nat. Acad. Sci.* (1944), 144-146.
4. Anderson, T. W. and Rubin, H.: Statistical inference in factor analysis, *Proc. Third Berkeley Symposium*, 5 (1956), 111-150.
5. Anderson, T. W.: *An introduction to Multivariate Statistical Analysis* (1958), John Wiley & Sons.
6. Anderson, T. W.: Some scaling models and estimation procedures in the latent class model, *Probability and Statistics*, ed. by Grenander, U. (1959), 9-38, Almqvist & Wiksell Co.
7. Anderson, T. W.: Asymptotic theory for principal component analysis, *Ann. Math. Stat.*, 34 (1963), 122-148.
8. Anderson, T. W.: The use of factor analysis in the statistical analysis of multiple time series. *Psychometrika*, 28 (1963), 1-25.
9. Bartlett, M. S.: The statistical conception of mental factors. *Brit. J. Psychol.*, 28 (1937), 97-104.
10. Bartlett, M. S.: The statistical significance of canonical correlations. *Biometrika*, 32 (1941), 29-38.
11. Bartlett, M. S.: Multivariate analysis, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B**, 9 (1947), 176-197.
12. Bartlett, M. S.: The general canonical correlation distribution. *Ann. Math. Stat.*, 18 (1947), 1-17.
13. Bartlett, M. S.: Internal and external factor analysis, *Brit. J. Psychol.* (Stat. Sect.), 1 (1948), 73-81.
14. Bartlett, M. S.: Tests of significance in factor analysis. *Brit. J. Psychol.* (Stat. Sect.), 3 (1950), 77-85.
15. Bartlett, M. S.: A further note on tests of significance in factor analysis.

* 1930年代までの文献は 268. Wolfe, D. に, その後 1952年までは 80. Fruchter, B. に詳しく, また 1950年代は 110. Harman, H. にも詳しい. ここに列挙した文献は歴史的なものと本書の内容に直接間接に関連する 1969年までの主要なものにとどめた.

- Brit. J. Psychol. (Stat. Sect.)*, 4 (1951), 1-2.
16. Bartlett, M. S.: The effect of standardization on a χ^2 approximation in factor analysis. *Biometrika*, 38 (1951), 337-344.
 17. Bartlett, M. S.: A note on the multiplying factor for various χ^2 approximations. *J. Roy. Stat. Soc., B*, 16 (1954), 296-298.
 18. Bechtoldt, H. P.: An empirical study of the factor analysis stability hypothesis. *Psychometrika*, 26 (1961), 405-432.
 19. Beck, A. T.: Reliability of psychiatric diagnoses: 1. A critique of systematic studies. *Amer. J. Psychiat.* (1961), 119 210-216.
 20. Bellman, R.: *Introduction to Matrix Analysis*. (1960), McGraw-Hill.
 21. Box, G.E.P.: A general distribution theory for a class of likelihood criteria. *Biometrika*, 36 (1949), 317-346.
 22. Browne, M. W.: On oblique Procrustes rotation. *Psychometrika*, 32 (1967), 125-132.
 23. Browne, M. W.: A note on lower bounds for the number of common factors. *Psychometrika*, 33 (1968), 233-236.
 24. Bentler, P. M.: Alpha-maximized factor analysis (ALPHAMAX): its relation to alpha and canonical factor analysis. *Psychometrika*, 33 (1968), 335-345.
 25. Bloxom, B.: Factorial rotation to simple structure and maximum similarity, *Psychometrika*, 33 (1968), 237-247.
 26. Browne, M. W.: A comparison of factor analytic techniques. *Psychometrika*, 33 (1968), 267-334.
 27. Burroughs, G.E.R., and Miller, H.W.L.: The rotation of principal components. *Brit. J. Stat. Psychol.*, 14 (1961), 35-49.
 28. Burt, C. L.: Group factor analysis. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sect.)*, 3 (1950), 40-75.
 29. Burt, C. L.: Factor analysis and canonical correlations. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sect.)*, 1 (1948), 95-105.
 30. Burt, C. L.: Alternative methods of factor analysis and their relations to Pearson's method of principal axes. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sect.)*, 2 (1949), 98-121.
 31. Burt, C. L.: Tests of significance in factor analysis. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sect.)*, 5 (1952), 102-133.
 32. Burt C. L.: Test reliability estimated by analysis of variance. *Brit. J. Stat. Psychol.*, 8 (1955), 103-118.

33. Burt, C. L.: The stability of factors. *Brit. J. Statist. Psychol.*, **17** (1964), 117-180.
34. Camp, B. H.: The converse of Spearman's two-factor theorem. *Biometrika*, **24** (1932), 418.
35. Carroll, J. B.: An analytical solution for approximating simple structure in factor analysis. *Psychometrika*, **18** (1953), 23-38.
36. Carroll, J. B.: Biquartimin criterion for rotation to oblique simple structure in factor analysis. *Science*, **126** (1957), 1114-1115.
37. Castellán, N. J. Jr.: On the estimation of the tetrachoric correlation coefficient. *Psychometrika*, **31** (1966), 67-73.
38. Cattell, R. B.: A note on factor invariance and the identification of factors. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sec.)*, **2** (1949), 134-139.
39. Cattell, R. B., and Luborsky, L. B.: P-technique demonstrated as a new clinical method for determining personality and symptom structure. *J. Gen. Psychol.*, **42** (1950), 3-24.
40. Cattell, R. B.: *Factor Analysis* (1952), New York, Harper & Brothers.
41. Cattell, R. B., and Cattell, A. K. S.: Factor rotation for proportional profiles: Analytical solution and an example. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **8** (1955), 83-91.
42. Cattell, R. B., and Dickman, K. W.: A dynamic model of physical influences demonstrating the necessity of oblique simple structure. *Psychol. Bull.*, **59** (1962), 389-400.
43. Cattell, R. B., and Scheier, I.: *Neuroticism and Anxiety* (1961), Ronald Press.
44. Cattell, R. B.: Factor analysis: I. The purpose and underlying models. *Biometrics*, **21** (1965), 190-215.
45. Cattell, R. B.: Factor analysis: An introduction to essentials II. The role of factor analysis in research. *Biometrics*, **21** (1965), 405-435.
46. Cliff, N.: Analytic rotation to a functional relationship. *Psychometrika*, **27** (1962), 283-295.
47. Cliff, N.: Orthogonal rotation to congruence. *Psychometrika*, **31** (1966), 33-42.
48. Cliff, N., and Pennel, R.: The influence of communalities, factor strength, and loading size on the sampling characteristics of factor loadings. *Psychometrika*, **32** (1967), 309-326.
49. Cooley, W. W., and Lohnes, P. R.: *Multivariate Procedures for the Behavioral Sciences* (1962), John Wiley & Sons.
50. Coombs, C. H.: A criterion for significant common factor variance. *Psycho-*

- metrika*, 6 (1941), 267-272.
51. Coombs, C. H.: The concepts of reliability and homogeneity. *Educ. Psychol. Meas.*, 10 (1950), 43-56.
 52. Cramer, H.: *Mathematical Methods of Statistics* (1945), Princeton University Press.
 53. Creasy, M. A.: Analysis of variance as an alternative to factor analysis. *J. Roy. Statist. Soc.*, 19 (1957), 313-325.
 54. Cronbach, L. J.: Test "reliability": its meaning and determination. *Psychometrika*, 12 (1947), 1-16.
 55. Cronbach, L. J.: Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16 (1951), 297-334.
 56. Cronbach, L. J., and Hartmann, W.: A note on negative reliabilities. *Educ. Psychol. Measmt.*, 14 (1954), 342-346.
 57. Cronbach, L. J., and Meehl, P. E.: Construct validity in psychological tests. *Psychol. Bull.*, LII (1955), 281-302.
 58. Cronbach, L. J., Rajaratnam, N., and Gleser, G. C.: Theory of generalizability: a liberalization of reliability theory. *Brit. J. Statist. Psychol.*, 16 (1963), 137-163.
 59. Cureton, E. E.: The definition and estimation of test reliability. *Educ. and Psychol. Meas.*, 18 (1958), 715-738.
 60. Das, R. S.: An application of factor and canonical analysis to multivariate data. *Brit. J. Math. Stat. Psychol.*, 18 (1965), 57-67.
 61. Davidson, W. M., and Carroll, J. B.: Speed and level components in time-limit scores: A factor analysis. *Educ. psychol. Measmt.*, 5 (1945), 411-427.
 62. Draper, N. R., and Smith, H.: *Applied Regression Analysis* (1966), John Wiley & Sons.
 63. Dwyer, P. S.: The evaluation of multiple and partial correlation coefficients from the factorial matrix. *Psychometrika*, 5 (1940), 211-232.
 64. Dwyer, P. S.: The square root method and its use in correlation and regression. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 40 (1945), 493-503.
 65. Ebel, R. L.: Estimation of the reliability of ratings. *Psychometrika*, 14 (1951), 407-424.
 66. Eckart, C., and Young, G.: The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1 (1936), 211-218.
 67. Edward, A. L.: *Techniques of Attitude Scale Construction* (1957), Appleton Century.

68. Elfving, G., Sitgraves, R., and Solomon, H.: Item selection procedures for item variables with a known factor structure, *Psychometrika*, **24** (1959), 189-205.
69. Emmett, W. G.: Sampling error and the two-factor theory. *Brit. J. Psychol.*, **26** (1936), 362-387.
70. Emmett, W. G.: Factor analysis by Lawley's method of maximum likelihood. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sec.)*, **2** (1949), 90-97.
71. Eysenck, H. J.: The logical basis of factor analysis. *Amer. Psychol.*, **8** (1953), 105-114.
72. Fisher, R. A.: The distribution of the partial correlation coefficient. *Metron*, **3** (1924), 329-332.
73. Fisher, R. A.: The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient. *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, **121** (1928), 654-673.
74. Fletcher, R., and Powell, M.J.D.: A rapidly convergent descent method for minimization. *Computer J.*, **2** (1963), 163-168.
75. Fuller E.L.Jr., and Hemmerle, W. J.: Robustness of the maximum likelihood estimation procedure in factor analysis. *Psychometrika*, **31** (1966), 255-266.
76. Ferguson G. A.: The factorial interpretation of test difficulty. *Psychometrika*, **6** (1941), 323-329.
77. Ferguson, G. A.: The concept of parsimony in factor analysis. *Psychometrika*, **19** (1954), 281-290.
78. Fruchter, B., and Novak, E.: A comparative study of three methods of rotation. *Psychometrika*, **23** (1958), 211-221.
79. Fuller, E.L.Jr., and Hemmerle, W. J.: Robustness of the maximum likelihood estimation procedure in factor analysis. *Psychometrika*, **31** (1966), 255-266.
80. Fruchter, B.: *Introduction to Factor Analysis* (1954), (1967), D. Van Nostrand Co.
81. Garrett, H. E., and Anastasi, A.: The tetrad-difference criterion and the measurement of mental traits. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **33** (1932), 235-282.
82. Gibson, W. A.: Orthogonal and oblique simple structure. *Psychometrika*, **17** (1952), 317-323.
83. Gibson, W. A.: An extension of Anderson's solution for the latent structure, *Psychometrika*, **20** (1955), 69-73.
84. Gibson, W. A.: An asymmetric approach to multiple-factor analysis. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **14** (1961), 97-107.
85. Glass, G. V.: Alpha factor analysis of infallible variables. *Psychometrika*,

- 31 (1966), 545-561.
86. Gleser, G. C., Cronbach, L. J., and Rajaratnam, N.: Generalizability of scores influenced by multiple sources of variance. *Psychometrika*, **30** (1965), 395-418.
 87. Gourlay, N.: Difficulty factors arising from the use of tetrachoric correlations in factor analysis. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sec.)*, **4** (1951), 65-76.
 88. Green, B. F.: The orthogonal approximation of an oblique structure in factor analysis. *Psychometrika*, **17** (1952), 429-40.
 89. Green, R. F., Gullford, J. P., Christensen, P. R., and Comrey, A. L.: A factor analytic study of reasoning abilities. *Psychometrika*, **18** (1953), 135-160.
 90. Graybill, F. A.: *An Introduction to Linear Statistical Models*. Volume I. (1961), McGraw-Hill.
 91. Greenstadt, J.: The determination of the characteristic roots of a matrix by the Jacobi method. In A. Ralston and H. S. Wilf (Eds.), *Mathematical Methods for Digital Computers*. (1960), John Wiley & Sons.
 92. Guertin, W. H.: A factor analysis of schizophrenic ratings on the hospital adjustment scale. *J. Clin. Psychol.*, **10** (1955), 70-73.
 93. Guertin, W. H., and Jenkins, R. L.: A transposed factor analysis of a group of schizophrenic patients. *J. Clin. Psychol.*, **12** (1956), 64-68.
 94. Guttman, L.: "Best possible" systematic estimates of communalities. *Psychometrika*, **21** (1956), 273-286.
 95. Guertin, W. H.: A transposed analysis of paranoid schizophrenics. *Psychol. Reports*, **4** (1958), 591-594.
 96. Guilford, J. P.: *Fundamental Statistics in Psychology and Education* (1950), McGraw Hill.
 97. Guilford, J. P.: *Psychometric Methods* (1954), McGraw-Hill. 秋重義治監訳: 精神測定法 (1959), 培風館.
 98. Guilford, J. P.: Preparation of item scores for the correlations between persons in a Q-factor analysis. *Educ. Psychol. Measmt.*, **23** (1963), 13-28.
 99. Gullikson, H., and Messick, P. (ed.): *Psychological Scaling: Theory and applications* (1960), John Wiley.
 100. Guttman, L.: General theory and method for matrix factoring. *Psychometrika*, **9** (1944), 1-16.
 101. Guttman, L.: Multiple group methods for common-factor analysis: Their basis, computation, and interpretation. *Psychometrika*, **17** (1952), 209-222.
 102. Guttman, L.: Some necessary conditions for common-factor analysis. *Psycho-*

- metrika*, **19** (1954), 149–161.
103. Guttman, L.: The determinacy of factor score matrices with implications for five other basic problems of common-factor theory. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **8** (1955), 65–81.
 104. Guttman, L.: Best possible systematic estimates of communalities. *Psychometrika*, **21** (1956), 273–285.
 105. Guttman, L.: Successive approximations for communalities, *Research Report*, **12** (1957), University of California.
 106. Guttman, L.: To what extent can communalities reduce rank? *Psychometrika*, **123** (1958), 297–308.
 107. Hamilton, M.: A rating scale for depression. *J. Neurol. Neurosurg. & Psychiat.*, **23** (1960), 56–62.
 108. Hamilton, M., and White, J. M.: Clinical syndromes in depressive states. *J. Ment. Sci.*, **105** (1959), 987–998.
 109. Harman, H. H.: The square root method and multiple group methods of factor analysis. *Psychometrika*, **19** (1954), 39–55.
 110. Harman, H. H.: *Modern Factor Analysis*. (1960), Univ. Chicago Press.
 111. Harman, H. H., and Fukuda, Y.: Resolution of the Heywood case in the minres solution. *Psychometrika*, **31** (1966), 563–571.
 112. Harman, H. H., and Jones, W. H.: Factor analysis by minimizing residuals (Minres). *Psychometrika*, **31** (1966), 351–368.
 113. Harris, C. W., and Knoell, D. M.: The oblique solution in factor analysis. *J. Educ. Psychol.*, **39** (1948), 385–403.
 114. Harris, C. W.: Direct rotation to primary structure. *J. Educ. Psychol.*, **39** (1948), 449–68.
 115. Harris, C. W.: Some Rao-Guttman relationships. *Psychometrika*, **27** (1962), 247–263.
 116. Harris, C. W., and Kaiser, H. F.: Oblique factor analytic solutions by orthogonal transformations. *Psychometrika*, **29** (1964), 347–362.
 117. Harris, C. W.: On factor and factor scores. *Psychometrika*, **32** (1967), 363–379.
 118. Hemmerle, W. J.: Obtaining maximum-likelihood estimates of factor loadings and communalities using an easily implemented iterative computer procedure. *Psychometrika*, **30** (1965), 291–302.
 119. Hendrickson, A. E., and White, P. O.: PROMAX: A quick method for rotation to oblique simple structure. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **17** (1964), 65–70.
 120. Henrysson, S.: The significance of factor loadings—Lawley's test examined by

- artificial samples. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sec.)*, **3** (1950), 159-165.
121. Henrysson, S.: *Applicability of Factor Analysis in the Behavioral Sciences*. (1957), Almqvist & Wilksell.
 122. Henrysson, S.: The relation between factor loadings and biserial correlations in item analysis. *Psychometrika*, **27** (1962), 419-24.
 123. Hoel, P. G.: A significance test for component analysis. *Ann. Math. Stat.*, **8** (1937), 149-158.
 124. Hoel, P. G.: A significance test for minimum rank in factor analysis. *Psychometrika*, **4** (1939), 245-253.
 125. Holzinger, K. J.: *Statistical Resume of the Spearman Two-factor Theory* (1930), Univ. of Chicago Press.
 126. Holzinger, K. J., and Swineford, F.: The bi-factor method. *Psychometrika*, **2** (1937), 41-54.
 127. Holzinger, K. J., and Harman H. H.: Comparison two factor analysis. *Psychometrika*, **3** (1938), 45-60.
 128. Holzinger, K. J., and Swineford, F.: A study in factor analysis; The stability of a bi-factor solution. *Suppl. Educ. Monog.*, No. 48 (1939), Univ. of Chicago.
 129. Holzinger, K. J., and Harman H. H.: *Factor Analysis* (1941), Univ. of Chicago Press.
 130. Horn, J. L.: A note on the estimation of factor scores. *Educ. Psychol. Meas.*, **24** (1964), 525-527.
 131. Horn, J. L.: A rationale and test for the number of factors in factor analysis. *Psychometrika*, **30** (1965), 179-185.
 132. Horn, J. L.: An empirical comparison of methods for estimating factor scores. *Educ. Psychol. Meas.*, **25** (1965), 313-322.
 133. Horst, P.: A non-graphical method for transforming an arbitrary factor matrix into simple structure factor matrix. *Psychometrika*, **6** (1941), 79-99.
 134. Horst, P.: A generalized expression for the reliability of measures. *Psychometrika*, **14** (1949), 21-31.
 135. Horst, P.: A simple method of rotating a centroid factor matrix to a simple structure hypothesis. *J. Exper. Educ.*, **24** (1956), 251-258.
 136. Horst, P.: Relations among m sets of measures. *Psychometrika*, **26** (1962), 129-149.
 137. Hotelling, H.: *Factor Analysis of Data Matrices* (1965); Holt, Rinehart and Winston.
 138. Hotelling, H.: Analysis of a complex of statistical variables into principal

- components. *J. Educ. Psychol.*, **24** (1933), 417-441, 498-520.
139. Hotelling, H.: Simplified calculation of principal components. *Psychometrika*, **1** (1936), 27-35.
140. Hotelling, H.: The relations of the newer multivariate statistical methods to factor analysis. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **10** (1957), 69-79.
141. Hoyt, C.: Test reliability estimated by analysis of variance. *Psychometrika*, **6** (1941), 153-160.
142. Hurley, J. L., and Cattell, R. C.: The Procrustes program, producing direct rotation to test a hypothesized factor structure. *Behavioral Science*, **7** (1962), 258-262.
143. Jennrich, R. I., and Sampson, P. F.: Rotation for simple loadings. *Psychometrika*, **31** (1966), 313-323.
144. Jennrich, R. I., and Robinson, S. M.: A Newton-Raphson algorithm for maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, **34** (1969), 111-123.
145. Johnson, M.: On a theorem stated by Eckart and Young. *Psychometrika*, **28** (1963), 259-263.
146. Jones, K. J.: *The Multivariate Statistical Analysis* (1964), Harvard Cooperative Society.
147. Jöreskog, K. G.: On the statistical treatment of residuals in factor analysis. *Psychometrika*, **27** (1962), 335-354.
148. Jöreskog, K. G.: *Statistical Estimation in Factor Analysis* (1963), Almqvist and Wiksell.
149. Jöreskog, K. G.: Testing a simple structure hypothesis in factor analysis. *Psychometrika*, **31** (1966), 165-178.
150. Jöreskog, K. G.: Some contributions to maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, **32** (1967), 443-482.
151. Jöreskog, K. G., and Lawley, D. N.: New methods in maximum likelihood factor analysis. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **21** (1968), 85-96.
152. Jowett, G. H.: Factor analysis. *Appl. Statistics*, **7** (1958), 114-125.
153. Kaiser, H. F.: The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, **23** (1958), 187-200.
154. Kaiser, H. F.: Varimax solution for primary mental abilities. *Psychometrika*, **25** (1960), 153-157.
155. Kaiser, H. F.: Formulas for component scores. *Psychometrika*, **27** (1962), 33-37.
156. Kaiser, H. F., and Caffrey, J.: Alpha factor analysis. *Psychometrika*, **30**

- (1965), 1-14.
157. Kashiwagi, S.: A new objective procedure for the orthogonal rotating in factor analysis. *Jap. Psychol. Res.*, **5** (1963), 86-90, 109-111.
 158. Kashiwagi, S.: A new oblique transformation method in multiple factor analysis. *Jap. Psychol. Res.*, **6** (1964), 125-128.
 159. Kashiwagi, S.: A new proposition on number of factors and communalities in multiple factor analysis. *Jap. Psychol. Res.*, **6** (1964), 173-175.
 160. Kashiwagi, S.: Geometric vector orthogonal rotation method in multiple factor analysis. *Psychometrika*, **4** (1965), 515-530.
 161. Keller, J. B.: Factorization of matrices by least squares. *Biometrika*, **49** (1962), 239-242.
 162. Kendall, M. G., and Smith, B. B.: Factor analysis. *J. Roy. Stat. Soc.*, **B**, **12** (1950), 60-94.
 163. Kendall, M. G.: Factor analysis as a statistical technique, *J. Roy. Stat. Soc.*, **B**, **12** (1950), 60-73.
 164. Kendall, M. G., and Lawley, D. N.: The principles of factor analysis. *J. Roy. Stat. Soc.*, **A**, **119** (1956), 83-84.
 165. Kendall, M. G.: *A Course in Multivariate Analysis* (1957), Charles Griffin and Co.
 166. Kendall, M. G., and Stuart, A.: *The Advanced Theory of Statistics*. vol. III (1966), Ch. Griffin.
 167. Krettman, N., Sainsbury, P., Morrissey, J., and Scrivner, J.: The reliability of psychiatric assessment: an analysis. *J. Ment. Sci.*, **107** (1961), 887-908.
 168. Kristof, W.: Orthogonal inter-battery factor analysis. *Psychometrika*, **32** (1967), 199-227.
 169. Kuder, G. F. and Richardson, M. W.: The theory of the estimation of test reliability. *Psychometrika*, **2** (1937), 151-160.
 170. Kullback, S.: *Information Theory and Statistics* (1959), John Wiley & Sons.
 171. Landahl, H. D.: Time scores and factor analysis. *Psychometrika*, **5** (1940), 67-74.
 172. Lawley, D. N.: The estimation of factor loadings by the method of maximum likelihood. *Proc. Roy. Soc. Edin.*, **A**, **40** (1940), 64-82.
 173. Lawley, D. N.: Further investigations in factor estimation. *Proc. Roy. Soc. Edin.*, **61** (1942), 176-185.
 174. Lawley, D. N.: The application of the maximum likelihood method for factor analysis. *Brit. J. Psychol.*, **33** (1943), 172-175.

175. Lawley, D. N.: Problems in factor analysis. *Proc. Roy. Soc. Edin.*, **62** (1949), 394-399.
176. Lawley, D. N.: A modified method of estimation in factor analysis and some large sample results. Uppsala Symposium on Psychological Factor Analysis, *Psychologi's on Monograph Series*, **3** (1953), 35-42.
177. Lawley, D. N., and Swanson, Z.: Tests of significance in a factor analysis of artificial data. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **7** (1954), 75-79.
178. Lawley, D. N.: A statistical examination of the centroid method. *Proc. Roy. Soc. Edin.*, **A, 65** (1955), 175-189.
179. Lawley, D. N.: Tests of significance for the latent roots of covariance and correlation matrices. *Biometrika*, **43** (1956), 128-136.
180. Lawley, D. N.: Estimation in factor analysis under various initial assumptions. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **11** (1958), 1-12.
181. Lawley, D. N.: Approximate methods in factor analysis. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **13** (1960), 11-17.
182. Lawley, D. N., and Maxwell, A. E.: *Factor Analysis as a Statistical Method* (1963), Butterworth. 丘本正監訳: 因子分析法 (1970), 日本科学技術連盟.
183. Lawley, D. N.: Factor transformation methods. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **17** (1964), 97-103.
184. Levin, J.: Three-mode factor analysis. *Psychol. Bull.*, **64** (1965), 442-452.
185. Levin, J.: Simultaneous factor analysis of several Gramian matrices. *Psychometrika*, **31** (1966), 413-419.
186. Leyden, T.: The identification and invariance of factors. *Brit. J. Stat. Psychol.*, **6** (1953), 119-120.
187. Linn, R. L.: A Monte Carlo approach to the number of factors problem. *Psychometrika*, **33** (1968), 37-71.
188. Lockhart, P. S.: Asymptotic sampling variances for factor analytic models identified by specified zero parameters. *Psychometrika*, **32** (1967), 265-277.
189. Lorr, M., and Fields, V.: A factorial study of body types. *J. Clin. Psychol.*, **10** (1954), 182-185.
190. Lorr, M.: Rating scales and check lists for the evaluation of psychopathology. *Psychol. Bull.*, **51** (1954), 119-127.
191. Lorr, M.: The Wittenborn psychiatric syndromes: an oblique rotation. *J. Consult. Psychol.*, **21** (1957), 439-444.
192. Lorr, M., Klett, C. J., and McNair, D. M.: *Syndromes of Psychosis* (1963), Pergamon Press (小川暢也および著者ら訳出中, 岩崎学術出版社).

193. Lorr, M., and McNair, D. M.: Interview relationship in therapy. *J. Nervous and Mental Diseases*, **139** (1964), 328-331.
194. Mattsson, A., Olsson, U., and Rosen, M.: The maximum likelihood method in factor analysis with special consideration to the problem of improper solutions. *Res. Report* (1966), Instit. of Statist., Univ. of Uppsala.
195. Maxwell, A. E.: Factor models. *J. Educ. Psychol.*, **47** (1956), 129-132.
196. Maxwell, A. E.: Statistical methods in factor analysis. *Psychol. Bull.*, **56** (1959), 228-235.
197. Maxwell, A. E.: Recent trends in factor analysis. *J. Roy. Stat. Soc., A*, **124** (1961), 49-59.
198. Maxwell, A. E.: Canonical variate analysis when the variables are dichotomous. *Educ. Psychol. Meas.*, **21** (1961), 259-271.
199. Maxwell, A. E.: Calculating maximum-likelihood factor loadings. *J. Roy. Stat. Soc., A*, **127** (1964), 238-241.
200. McDonald, R. P.: A general approach to nonlinear factor analysis. *Psychometrika*, **27** (1962), 397-415.
201. McDonald, R. P.: Numerical methods for polynomial models in nonlinear factor analysis. *Psychometrika*, **32** (1967), 77-112.
202. McDonald, R. P., and Burr, E. J.: A comparison of four methods of constructing factor scores. *Psychometrika*, **32** (1967), 381-401.
203. McNemar, Q.: On the sampling errors of factor loadings. *Psychometrika*, **6** (1941), 141-152.
204. McNemar, Q.: On the number of factors. *Psychometrika*, **7** (1942), 9-18.
205. McNemar, Q.: *Psychological Statistics* (1962), John Wiley & Sons.
206. Meredith, W.: Notes on factorial invariance. *Psychometrika*, **29** (1964), 177-186.
207. Meredith, W.: Rotation to achieve factorial invariance. *Psychometrika*, **29** (1964), 187-206.
208. Miller, C. R., Eyman, R. K., and Dingman, H. F.: Factor analysis, latent structure analysis and mental typology. *Brit. J. of Stat. Psychol.*, **14** (1961), 29-34.
209. Mood, A. M.: On the distribution of the characteristic roots of normal second-moment matrices. *Ann. Math. Stat.*, **22** (1951), 266-273.
210. Mood A. M., and Graybill, F. A.: *Introduction to the Theory of Statistics* (Second edition, 1963), McGraw-Hill.
211. Nanda, D. N.: Distribution of a root of a determinantal equation. *Ann.*

- Math. Stat.*, **19** (1948), 485-516.
212. Nanda, D. N.: Limiting distribution of a root of a determinantal equation. *Ann. Math. Stat.*, **19** (1948), 340-350.
213. Neuhaus, J. O., and Wrigley, C.: The Quartimax method: An analytical approach to orthogonal simple structure, *Statist. Psycho.*, **7** (1954), 81-91.
214. Neyman, J., and Pearson, E. S.: On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. *Biometrika*, **20 A**, (1928), 175-240, 263-294.
215. Olkin, I., and Pratt, J. W.: Unbiased estimation of certain correlation coefficients. *Ann. Math. Stat.*, **29** (1958), 201-211.
216. Quenouille, M. H.: *The Analysis of Multiple Time Series* (1957), Ch. Griffin & Hafner.
217. Overall, J. E., and Porterfield, J. L.: Powered vector method of factor analysis. *Psychometrika*, **28** (1963), 415-422.
218. Pennell, R.: The influence of communality and N on the sampling distributions of factor loadings. *Psychometrika*, **33** (1968), 423-439.
219. Petrinow, L., and Hardyck, C.: Behavioral changes in Parkinson patients following surgery—Factor analytic study. *J. Chronic Diseases*, **17** (1964), 225-233.
220. Pillai, K. C. S.: On the distribution of the largest or the smallest root of a matrix in multivariate analysis, *Biometrika*, **43** (1956), 122-127.
221. Porebski, O. R.: A semi-orthogonal dependent factor solution. *Psychometrika*, **33** (1968), 451-468.
222. Rao, C. R., and Slater, P.: Multivariate analyses applied to differences between neurotic groups. *Brit. J. Psychol. (Stat. Sect.)*, **2** (1949), 17-29.
223. Rao, C. R.: *Advanced Statistical Methods in Biometric Research* (1952), John Wiley & Sons.
224. Rao, C. R.: Estimation and tests of significance in factor analysis, *Psychometrika*, **20** (1955), 93-111.
225. Reiersøl, O.: On the identifiability of parameters in Thurstone's multiple factor analysis. *Psychometrika*, **15** (1950), 121-149.
226. Rippe, D. D.: Application of a large sampling criterion to some sampling problems in factor analysis. *Psychometrika*, **18** (1953), 191-205.
227. Saunders, D. R.: Factor analysis: Some effects of chance errors. *Psychometrika*, **13** (1948), 251-258.
228. Saunders, D. R.: The rationale for an "oblimax" method of transforma-

- tion in factor analysis. *Psychometrika*, **26** (1961), 317-324.
229. Scher, A. M., Yound A. C., and Meredith, W. M.: Factor analysis of the electrocardiogram. *Circulation Research*, **8** (1960), 519-526.
230. Schönemann, P. H.: A generalized solution of the orthogonal Procrustes problem. *Psychometrika*, **31** (1966), 1-10.
231. Schönemann, P. H.: VARISIM: A new machine method for orthogonal rotation. *Psychometrika*, **31** (1966), 253-248.
232. Scott, W., and Wertheimer, M.: *Introduction to Psychological Research* (1962), John Wiley and Sons.
233. Seal, H. L.: *Multivariate Statistical Analysis for Biologists* (1964), Methuen & Co. 塩谷 実訳: 多変量解析入門 (1970), 共立出版(株).
234. Shiba, S.: New estimates of factor scores. *Jap. Psychol. Res.*, **11** (1969), 129-133.
235. Siegel, A. I., and Pfeiffer, M. G.: Factor analysis of category and magnitude scales of a technical attribute. *J. Appl. Psychol.*, **50** (1966), 341-347.
236. Slater, P.: Factor analysis and some allied procedures (Chap. 6), Canonical analysis of discriminance (Chap. 7). *Experiments in Personality* (ed. Eysenck, H. J.), Vol. 2 (1960), 247-270.
237. Sokal, R. R., and Sneath, P. H.: *Principles of Numerical Taxonomy* (1963), Freeman.
238. Spearman, C.: General intelligence objectively determined and measured. *Amer. J. Psychol.*, **15** (1904), 201-293.
239. Spearman, C.: Correlation calculated from faulty data. *Brit. J. Psychol.*, **3** (1910), 271-295.
240. Spearman, C., and Holzinger, K. J.: The sampling error in the theory of two factors. *Brit. J. Psychol.*, **15** (1924), 17-19.
241. Spearman, C., and Holzinger, K. J.: Note on the sampling error of treated differences. *Brit. J. Psychol.*, **16** (1925), 86-89.
242. Srivastava, A. B. L., Webster, H.: An estimation of true scores in the case of items scored on a continuous scale. *Psychometrika*, **32** (1967), 327-338.
243. Stephenson, W.: Some observation on Q-technique. *Psychol. Bull.*, **49** (1952), 483-498.
244. Stephenson, W.: *The study of Behavior*. Q-technique and its methodology (1953), Univ. of Chicago Press.
245. Swineford, F.: Some comparisons of the multiple-factor and the bifactor methods of analysis. *Psychometrika*, **6** (1941), 375-382.
246. Thomson, G. H.: Hotelling's method modified to give Spearman's g. *J. Educ.*

- Psychol.*, **25** (1934), 366-374.
247. Thomson, G. H.: *The Factorial Analysis of Human Ability* (1950, Fourth Edition), University of London Press.
248. Thurstone, L. L.: A multiple group method of factoring the correlation matrix. *Psychometrika*, **10** (1945), 73-78.
249. Thurstone, L. L.: Factor analysis of body types. *Psychometrika*, **11** (1946), 15-21.
250. Thurstone, L. L.: *Multiple Factor Analysis* (1947), University of Chicago Press.
251. Thurstone, L. L.: An analytical method of simple structure. *Psychometrika*, **19** (1954), 173-182.
252. Torgerson, W. S.: *Theory and Methods of Scaling* (1958), John Wiley & Sons.
253. Tucker, L.: The role of correlated factors in factor analysis. *Psychometrika*, **5** (1940), 141-152.
254. Tucker, L. R.: A semi-analytical method of factorial rotation to simple structure. *Psychometrika*, **9** (1944), 43-68.
255. Tucker, L. R.: An objective determination of simple structure in factor analysis *Amer. Psychol.*, **8** (1953), 448.
256. Tucker, L. R.: An inter-battery method of factor analysis. *Psychometrika*, **23** (1958), 111-136.
257. Tucker, L. R.: Implications of factor analysis of three-way matrices for measurement of change, *Problems in Measuring Changes* (1962), Univ. of Wisconsin Press.
258. Tucker, L. R.: Some mathematical notes on three mode factor analysis. *Psychometrika*, **31** (1966), 279-311.
259. Webster, H.: A generalization of Kuder-Richardson reliability formula 21. *Educ. and Psychol. Meas.*, **20** (1960), 131-138.
260. Whittle, P.: On principal components and least squares method of factor analysis. *Skandinavisk Aktuaristidskrifts*, **35** (1953), 223-239.
261. White, P. A.: The computation of eigenvalues and eigenvectors of a matrix. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **6** (1958), 393-437.
262. Wilkinson, J. H.: Error analysis of eigenvalue techniques based on orthogonal transformations. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **10** (1962), 162-195.
263. Wilks, S. S.: Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika*, **24** (1932), 471-494.
264. Wilks, S. S.: The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing

- composite hypotheses. *Ann. Math. Stat.*, **9** (1938), 60–62.
265. Wilks, S. S.: On the independence of k sets of normally distributed statistical variables. *Econometrica*, **3** (1953), 309–326.
266. Wishart, J.: The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika*, **20** (1928), 38–40.
267. Wold, H.: Some artificial experiments in factor analysis. Uppsala Symposium on Psychological Factor Analysis. *Nordisk Psykologi's Monograph Series No. 3*. (1953), Almqvist & Wiksell.
268. Wolfe, D.: Factor analysis to 1940. *Psychom. Monogr.*, **3** (1940), (69 ps).
269. Wrigley, C., Saunders, D. R., and Neuhaus, J. O.: Application of the quartimax method of rotation to Thurstone's primary mental abilities study. *Psychometrika*, **23** (1958), 151–169.
270. Young, G.: Factor analysis and the index of clustering. *Psychometrika*, **4** (1939), 201–208.
271. Young, G., and Householder, A. S.: Factorial invariance and significance. *Psychometrika*, **5** (1940), 47–56.
272. Young, G.: Maximum likelihood estimation and factor analysis. *Psychometrika*, **6** (1941), 49–53.
273. Zimmerman, W. A.: A simple graphical method for orthogonal rotation of axes. *Psychometrika*, **11** (1946), 51–55.
274. 青山博次郎: 因子分析(現代教育心理学大系, 第9巻, 102–116), (1958), 中山書店.
275. 浅野長一郎: 因子分析法の基礎と応用, 標準化と品質管理, **19~20** 巻 (1966~7), 15 回連載, 日本規格協会.
276. 浅野長一郎: 因子分析の諸法とそれらの特性, 9巻, 4号 27–34, 数理科学(1971), ダイヤモンド社.
277. 池田 央: 因子抽出の統一原理, 心理学研究, **35** 巻, (1965).
278. 池田 央: 統計調査とコンピューター解析(8.2–8.3 節), (1971), 東洋経済新報社.
279. 岩原信九郎: 教育と心理のための推計学(第23章 因子分析法), (1952), 世界社.
280. 印東太郎: 因子分析法の目的と手法(中山伊知郎編, 統計学辞典, 1171–1174), (1962), 東洋経済新報社.
281. 北川・国沢・森口編: 因子分析, 日科技連数学シンポジウム報文シリーズ, No. 13 (1966), 日本科学技術連盟.
282. 塩谷 実・浅野長一郎: 多変量解析論, 情報科学講座(1966), 共立出版(株).
283. 芝 裕順: 行動科学のための相関分析法(1967), 東京大学出版会.
284. 芝 裕順: 因子分析法の最近の動向(上), 3号 86–89, (下)4号 56–63, 数理科学(1969), ダイヤモンド社.

285. 芝 裕順：因子分析法入門(1972, 近刊), 東京大学出版会.
286. 清水利信・斎藤耕二：因子分析法(1960), 日本文化科学社.
287. 白石一誠：因子分析(心理学辞典, 40-45), (1957), 平凡社.
288. 林知己夫：因子分析法(教育学辞典, 87-88), (1954), 平凡社.
289. 林知己夫・樋口伊佐夫・駒沢 勉：情報処理と統計数理, 108-118 (1970), 産業図書出版社.
290. 樋口信吾：教育評価(第3章 因子分析), 現代心理学体系 13, 45-65 (1961), 共立出版(株).
291. 肥田野・大川, 他：心理教育統計学(第9章 因子分析法), 275-285 (1961), 培風館.
292. 藤本 熙：統計数理の基礎と応用, 302-313 (1968), 日刊工業新聞社.
293. 高橋昉正編著：計量診断学, 38-45, 184-186 (1969), 東京大学出版会.
294. 田中靖政：記号行動論, 情報科学講座(1967), 共立出版(株).
295. 三好 稔編：心理学と因子分析(1962), 誠信書房.
296. 吉田正昭：学習理論・学習解析, 131-136, 情報科学講座(1968), 共立出版(株).

索引

A

アルファ因子	376
アルファ因子分析法	373, 388
アルファ因子行列	376
アルファ係数	375
アルファ・マックス因子分析法	383
アルファ・オ係数	386

B

バイクァーティマックス法	188
バイクァーティミン法	178, 184
バイクァーティミン基準	178, 179, 183
バリマックス法	93
バリマックス解	183
バリジム法	115
Bartlett の近似的 χ^2 検定	73, 74
B 係数	265
母集団	373
観測特性の——	373
対象の——	373
母集団平均ベクトル	49
部分因子	49, 80

D

ダブルット	282
第1次因子	16
第2次因子	16
第3次因子	16
電子計算機	17, 48
同時寄与	152

F

Finkel 法	72
Fletcher-Powell 法	67, 68, 72

FORTRAN	17
---------	----

G

ガウス・ドゥリットル法	435
原因系の探索	6
原始の観測資料	13
誤差ベクトル	49
誤差分散	50
群分け	145
グラフによる直交回転法	84
逆行列	433
——の計算	448

H

判別	358
平方根法	443
Hemmerle の方法	66
変換行列	147
非正則	25
Householder 法	66
HOW 法	66, 69
不変	56
負荷	159
不完全規定の模型	8
複合変量	145, 300
——による因子評点の近似的推定	231
複雑度	49, 144, 248, 285
不信頼因子ベクトル	49
不信頼性	50
不適当な解	65
標本群間分散共分散行列	350
標本群内分散共分散行列	350
標本正準変量	331
標本正準相関行列	331
標本数	12

I

意味構造論	4, 317
因子行列	158
因子負荷行列	48
——の最尤推定	56, 63, 64, 65
——の推定	51
因子評点	218
——に関する直接的な最小2乗推定	219
——の推定	219
因子評点ベクトル	49
因子間相関行列	235
因子間相関係数	148
因子係数の標準誤差	290
因子構造	83, 143, 148, 205
因子の不変性	118
因子の解釈	12, 204
因子パターン	83, 142, 150, 205
因子節約	80, 81
因子相関行列	302
因子数	26, 52
一般化性	375
——の係数	375
一般オブリミン基準	179

K

χ^2 分布	67, 73, 334, 335
χ^2 検定	72, 338
階級	299
階数	433
回転による不定性	53, 55, 79
カイザー・ディックマン法	117, 184
簡潔法	234
簡素化の原則	80
簡素構造	80
観測値の点表示	33
観測特性間の関係	33
観測特性項目の選択	11
観測特性の誤差に関する最小2乗推定	228

観測特性の群分け	265
完全規定の構造模型	8, 248
仮りの解釈	208
検証数値例	146
——普通感冒の状態像	335, 363, 371, 379
——形態学的体形	208
初老期痴呆の診断	101, 269, 273, 278, 287
長方形の大きさや形状	31, 64, 93, 97, 146, 150, 156, 160, 166, 172, 182, 222, 231, 237, 258, 260, 303, 308, 353, 366, 373, 381
——ウツ症状の評価	22
検証的な場合	67, 70
“規準”バリマックス法	95
基準変量	318, 328
規準一般オブリミン基準	179
規準コバリミン法	175
コバリマックス基準	120
コバリミン法	175
コバリミン解	183
コバリミン基準	174, 178, 179
根元	144
根元因子解	159
——による因子構造	159
——による因子パターン	159
根元因子パターン	222
根元因子軸	145
高次の因子	16
構造模型の修正	284
固有ベクトル	24, 61, 66, 68, 171, 175, 180, 352, 375, 434, 452
固有方程式	434
固有値	24, 26, 55, 57, 61, 66, 68, 171, 175, 180, 352, 375, 452
Kuder-Richardson 信頼係数	375
繰り返し試験法	384
狭義の因子分析	21
共変動図	14
共通因子	21, 48
共通因子数	11, 72, 74

共有性.....29, 34, 50, 51, 235
 急勾配下降法67

M

味覚検査.....4

N

内的整合性.....384, 385, 386
 Newton-Raphson 法.....67, 70
 二因子解法.....2, 8, 9, 252

O

オブリマックス法.....162
 オブリミン法.....174
 オブリミン解.....183
 O 技法.....14
 Ortega 法.....66
 オーソマックス法.....188

P

パワー法.....452
 P 技法.....15
 プログラム17
 プロクラステス問題.....113, 186
 プロマックス法.....186
 p 次元観測値ベクトルの標準化50
 p 次元正規分布51, 73, 325, 330, 359, 367

Q

Q 技法.....15, 209
 クァーティマックス法88
 クァーティミン解.....183
 クァーティミン回転法.....169
 クァーティミン基準.....178, 179

R

R 技法.....14
 理想的観測特性による因子評点の推定.....236
 両極因子.....251

S

最大に相似.....119
 再生された相関行列.....302
 最終的な残差相関行列.....277
 斉時バリマックス法.....104, 109
 斉時一般バリマックス法.....104, 112
 三角行列66, 429
 三価対.....254, 281
 三価対法.....258
 参考軸21
 —による因子構造.....159
 —による因子パターン.....159
 散布図33
 成因分析21
 成因分析法19
 正規直交行列.....431
 正則行列.....433
 正 準.....316
 正準分析法.....9, 349
 正準変量.....316, 318, 341, 358
 正準因子分析法.....367, 377
 正準相関.....318
 正準相関分析法.....8, 9, 316, 340
 正準相関係数.....333
 —の有意性の検定.....338
 正準軸.....349
 線形判別関数.....358
 セントロイド法(重心法)27
 標準的方法(対角線要素を1とする方法).....27
 共有性を反復計算する方法29
 対角線要素に共有性を用いる方法29
 S 技法14
 信頼性50, 374
 —の係数.....384
 心理学.....3
 “粗”バリマックス基準.....94
 漸及的.....265
 層 別.....358

双因子解法……………8, 9, 236
 双因子解の修正……………280
 層 化……………12
 総和法……………257
 Spearman の基本定理……………254
 スカラー量……………428
 数量的文体論……………4
 斜交因子……………50
 —の寄与……………152
 斜交解……………160, 205, 299
 斜交回転……………82
 斜交根元因子軸……………145
 斜交参考因子構造……………157
 斜交参考因子パターン……………157
 斜交参考解……………153
 初老期痴呆……………273
 —の診断……………101
 消去下降法……………67
 主因子分析法……………360, 370
 縮小因子パターン……………145
 縮小構造……………157
 縮小パターン……………157
 縮小相関行列……………34, 300
 主成分分析法……………21, 24
 主成因子……………24
 集 落……………12
 主軸因子行列……………376

T

多群解法……………297
 対外的因子分析法……………9, 315
 退 化……………433
 対角線行列……………428
 対角線要素……………428
 退化次数……………433
 体系因子解……………188
 体系因子パターン……………189
 対内的因子分析法……………9, 315
 多因子解法……………8, 9

対称行列……………429
 単独因子解法……………252
 単位ベクトル……………427
 単位行列……………428
 単一因子解……………249
 単一因子解法……………248, 252
 単極因子……………251
 探索的な場合……………67
 多次元正規分布……………54, 55, 59, 63
 テスト・メーカー……………19, 265
 テスト・ユーザー……………19, 265
 T 技法……………14
 逐次バリマックス法……………104
 逐次一般バリマックス法……………104, 111
 特殊因子……………29, 49, 51
 特殊性……………50
 トレース……………25, 432, 351
 統計的多変量解析……………2
 直交行列……………431, 434
 直交因子……………50
 直交解……………306
 直交回転……………82
 直交回転法……………88
 直交プロクラステス問題……………114
 直交単一因子解……………249
 直接寄与……………152

U

ウィンチャート分布……………59, 63
 ウツ症状の評価……………22

W

Wilkinson 法……………66

Y

ヤコビ法……………452, 455
 四価差……………253
 —の標本分布……………255
 予測変量……………318, 328

予測の相対効率.....329
 唯一性50

Z

残差行列.....300, 302
 残差相関行列.....290
 全分散共分散行列.....350
 全同時寄与.....153
 全因子空間34
 全般因子49, 65, 80

——の残差.....275
 全直接寄与.....153
 ゼロベクトル.....427
 ゼロ行列.....428
 事後仮説.....303
 自己相関.....300
 実数対称行列.....434
 重心法(→セントロイド法)
 重相関係数.....318, 330, 444
 従属係数.....265

— 著者紹介 —

あさの ちやういちろう
浅野 長一郎

昭和 27 年 九州大学理学部数学科卒業
専攻 統計数学, 生物統計, OR
現職 塩野義製菓(株)解析センター長・
神戸大学大学院医学研究科(非常勤)講師・京都大学医学部(非常勤)講師, 理学博士
主要著書 「多変量解析論」, 情報科学講座
(塩谷 実氏と共著), 共立出版

因子分析法通論

検印省略

定価 3000 円

NDC 417.7

© 1971

昭和 46 年 8 月 10 日 初版 1 刷発行
昭和 47 年 5 月 25 日 初版 2 刷発行

著者 浅野 長一郎

発行者 南 條 正 男
東京都文京区小日向 4 丁目 6 番 19 号

印刷者 小酒 井 益 三 郎
東京都新宿区神楽坂 1 丁目 2 番地

発行所 東京都文京区小日向 4 丁目 6 番 19 号
電話 東京 947 局 2511 番(代表)
郵便番号 112 振替東京 57035 番

共立出版株式会社

印刷・研究社 製本・文麗社 Printed in Japan

3041-119040-1371

社団法人
自然科学書協会
会員



21世紀の科学・技術のビジョンを求める若い
探求し、情報科学から情報素子および情報処

現代科学のパイオニア
情報科学講座

全73巻

(編集委員)

大泉充郎

勝木保次

北川敏男

喜安善市

栗原俊彦

桑原万寿太郎

坂井利之

高田昇平

次田 皓

南雲仁一

中村幸雄

和田 弘

A 共通基礎理論

A-1 情報科学総論

A-1-1 情報科学への道……………¥750

A-1-2 情報科学の動向Ⅰ……………¥800

A-1-3 情報科学の動向Ⅱ……………¥1100

A-1-4 情報科学の将来

A-2 情報論理学

A-2-1 論理数学Ⅰ

A-2-2 論理数学Ⅱ

A-2-3 論理数学Ⅲ

A-2-4 情報理論Ⅰ

A-2-5 情報理論Ⅱ……………¥800

A-2-6 情報理論Ⅲ

A-3 計画理論

A-3-1 計画理論概説

A-3-2 数値計画法Ⅰ……………¥1600

A-3-3 決定理論

A-3-4 組織論

A-4 制御理論

A-4-1 最適制御過程Ⅰ……………¥1200

A-4-2 最適制御過程Ⅱ……………¥850

A-4-3 制御原理

A-4-4 統計的制御過程

A-4-5 適応制御過程

A-5 統計理論

A-5-1 マルコフ過程……………¥1100

A-5-2 確率過程論……………¥700

A-5-3 多変量解析論……………¥1400

A-5-4 推測過程論

B 生体情報

B-6 感覚情報

B-6-1 感覚情報Ⅰ……………¥1000

B-6-2 感覚情報Ⅱ……………¥1000

共立出版

科学者・技術者のために、情報革命の姿を 理へつながらる道を明らかにする未来の書…

B・7 遺伝情報

- B・7-1 遺伝情報Ⅰ……………¥1000
- B・7-2 遺伝情報Ⅱ……………¥1300

B・8 中枢神経制御

- B・8-1 中枢神経系制御Ⅰ……………¥850
- B・8-2 中枢神経系制御Ⅱ……………¥700
- B・8-3 中枢神経系制御Ⅲ

B・9 生物工学（バイオニクス）

- B・9-1 バイオニクス……………¥600
- B・9-2 人間—機械系……………¥950
- B・9-3 生体計測制御機器……………¥550

C 言語および行動

C・10 言語理論および言語機械

- C・10-1 言語理論……………¥1100
- C・10-2 言語の機械処理
- C・10-3 計算機用言語

C・11 情報処理

- C・11-1 情報処理Ⅰ……………¥750
- C・11-2 情報処理Ⅱ
- C・11-3 情報処理Ⅲ

C・12 行動科学

- C・12-1 ゲーム理論と行動理論 …… ¥750
- C・12-2 情報の伝播
- C・12-3 記号行動論……………¥750
- C・12-4 グループダイナミクス

D 情報システム

D・13 情報素子

- D・13-1 入出力装置……………¥800
- D・13-2 論理素子……………¥800
- D・13-3 記憶装置Ⅰ……………¥1100
- D・13-4 記憶装置Ⅱ……………¥1100
- D・13-5 情報素子の小型実装法

D・13-6 新しい情報素子

- D・13-7 オプトエレクトロニクス

D・14 計算体系

- D・14-1 計算体系Ⅰ
- D・14-2 計算体系Ⅱ

D・15 計算機の応用

- D・15-1 科学技術計算
- D・15-2 経営情報システムの設計 ……¥850
- D・15-3 オンライン・システム
- D・15-4 実時間システム概論……………¥600
- D・15-5 実時間システム設計論
- D・15-6 実時間システム開発……………¥800
- D・15-7 データ通信

D・16 システムの科学

- D・16-1 システム数学
- D・16-2 生体システム
- D・16-3 社会システム
- D・16-4 システム工学
- D・16-5 創造システム

E 情報系モデル

E・17 学習理論および学習機械

- E・17-1 学習理論・学習解析……………¥1000
- E・17-2 プログラム学習
- E・17-3 学習実験……………¥700
- E・17-4 学習制御および学習制御機械…¥950

E・18 自己組織化モデル

- E・18-1 自己組織化モデルⅠ
- E・18-2 自己組織化モデルⅡ

E・19 認識理論および認識機械

- E・19-1 パターン認識の理論……………¥700
- E・19-2 文字・図形の認識機械……………¥1000
- E・19-3 音声の認識機械

【各巻】A5判 上製函入

- 情報の世界—コンピュータ— ……Scientific American 編/南雲仁—監訳/A 5・850円
- 情報科学の視座—新しい科学像の探求— ……北川敏男著/B 6・760円
- コンピュータ・クラブ ……A. B. Bolt 監修/赤 養也監訳/B 6・450円
- 電子計算機システム—そのしくみと働き— ……酒井重恭著/A 5・750円
- 科学技術計算—フォートランによる— ……D. McCracken 著/森口繁—他訳/B 5・2200円
- 計算機科学に職を求めよう ……J. M. Carroll 著/森口繁—監訳/B 6・380円
- アルゴリズムによる 初等関数 ……K. E. Iverson 著/和田 弘訳/A 5・1200円
- 電子計算機のための 数学 I ……S. L. Deleeuw 他著/岩田倫典訳/B 6・880円
- 電子計算機のための 数学 II ……R. W. Southworth 他著/岩田倫典訳/B 6・650円
- 電子計算機による 計算法入門 ……T. E. Hull, D. F. Day 著—一松 信訳/A 5・近 刊
- 電子計算機入門としての 論理代数と論理回路演習 ……小郷寛・沢栗利男著/A 5・450円
- 電子計算機—FORTRAN・ALGOLとその応用— ……刀根 薫・恒川純吉著/A 5・850円
- 電子計算機—プログラミング入門— ……門倉敏夫著/A 5・480円
- ベーシック入門 ……J. G. Kemeny, T. E. Kurtz 著/森口繁—監訳/A 5・1600円
- FÖRTRAN 入門 ……森口繁—小林光夫著/B 6・600円
- FORTRAN 数値計算とプログラミング ……国井利泰監修/A 5・850円
- 自習 FORTRAN テキスト ……伊藤忠電子計算サービス(株)編/B 5・1600円
- 電子計算機 フローチャート概論 ……宮内儀三郎著/A 5・800円
- 電子計算機の ハードウェア入門 ……森 宗正著/B 6・950円
- 電子計算機による 画像処理 ……A. Rosenfeld 著/石田晴久他訳/A 5・1200円
- タイムシェアリング・システム設計概論 I ……菊池豊彦他著/A 5・950円
- グラフ理論 ……F. Harary 著/池田貞雄訳/A 5・2500円
- 計算機のための グラフとアルゴリズム ……R. Bellman 他著/渡辺茂監訳/A 5・近 刊