新版

統計学の認識

基盤と方法

北川敏男著

白揚社

新版への序

『統計学の認識』が刊行されてから20年，このながい年月の間，幸いにも多数の読者をもつことができ，またはからずも多くの統計学書に引用されてきたのは，著者としてまことに有難いことである。しかし幾度か版を重ね，年月も経つうちには，紙型も疲れてきたし，4分の1世紀近くも年月が経つうちには，国語の変化も大きい。いま読み返してみると漢字が多く，漢文調も目立って，現代の国語との間には，ある距離さえ感ぜられないでもない。そんなことが，この著述を読んでいただくとき，読みづらいとか，違和感を与えるとか，ということになってはつまらないことで，著者としても申しわけがない。そこで，このたび新版を刊行するにあたって，こうした点を配慮し，漢字を減らし，表現を和らげ，できるだけ読みやすいものとするよう改訂した次第である。

『統計学の認識』は，わたくしとしては，はじめての著述であった。それは，1939年以来の約8年にわたる独学の研鑽をとりまとめたものであったが，一度できて見るとそののちのわたくしの研究の出発基地を用意するものともなった。1950年のはじめから，1963年ごろまでにおよんでわたくしの展開した推測過程論とか制御過程論とかがそれである。ではそうした思想が，この著述のどこかに，あらわに看取されるかといえば，おそらくそうはいえないであろう。けれども，この著述でなされているような，いわば基本的な省察が，もたらすであろうところの発酵作用がなかったなら，著者じしんにとっては，こうした思想の展開が生まれてこなかったことも，たしかであると思われる。いま読み返してみると，何ものかを探求して遍歴し，課題に直面して難渋している，若い時代の自分の姿が，まざまざと思い出される。この探求の姿勢こそ，本書の特徴ではあるまいか。それならば，むしろそのままの姿に保ち，現在の自分と

も，あるいは 20 年のその後の歩みともはっきり区別しておいた方がよろしかろう。この新版では，上述のような配慮は加えたが，しかし，あくまで忠実に原文の意味を保つようにしたのは，このためである。ただし術語に関しては，現代広く用いられるものに従うことにしたため，2，3の改訂がなされている。

海外の読者のため，英訳の相談も幾度かもちこまれたが，まだ実現していない。中国語訳の方は，2年まえから話しがもちこまれ，台湾清華大学出身の淡江文理学院講師葉能哲君の手によってそれがおどろくべき短期間のうちに完成され，本年4月刊行されたということである。本書のような著述は，海外でもあまり例がないためか，海外出張のおりにも，外国の統計学者に本書の概要の紹介を求められたことも度々あった。とくに忘れられない思い出は，近代統計学の父 R. A. Fisher の示された関心である。もう12年余もむかしのことであるが，1955年6月，国際統計協会の総会のおりにブラジル国リオ・デ・ジャネイロ市の郊外，有名なキタンジニヤ・ホテルのロビーで，柔らかな冬の日差しのもとで，この本を素材にして，統計学300年の歴史について話し合い，Gauss の業績を重視するという先生の見解をうかがうことができたのは，本書につきまとう終生の思い出である。

本書の読者は，著者がそののちどのような研究遍歴をたどって今日に至ったか，多少の関心をあるいは，おもちになられるかもしれない。これにお答えして，著者の歩みを紹介するのが，読者に対しての責任ともいうものかもしれない。わたくしも，いつの日にか本書の続編を，なんらかの機会に，とりまとめたいと念願しないでもない。しかしそれがいつ実現できるかは定めがたい。ただ，いまわたくしの言い得ることは，わたくしの歩みは，たしかに本書を出発点にして，ささやかで細いが，1つの連続した道である。それは，今にして思えば，可能ないくつかの道の1つでしかなかった。同じ出発点から，他の進路もありえたようにも思う。こんな気持ちもあって，『統計学の認識』という出発点は，原形のままで残しておきたいと著者は念願した次第である。

本書の旧版を通読5回，綿密な正誤表をつくられて友人井崎守氏を通じて，

これを著者におくられた方があった。井崎氏はすでに故人となられ，その方の御氏名すらいまは明らかでないが，改訂にあたって正誤表は利用させていただいた。また白揚社編集部新藤八郎氏は，正確な文献検索，ならびに綿密な校訂にあたられた。この機会にこれらの方々に厚く感謝の意を表したいと思う。

1968年4月24日

北川敏男

序　文

統計学の認識理論ともいうべきものを明らかにすること，本書の目標とするところは本来はそこにあった。従来，この種の問題に関する研究なり解説は，けっして乏しかったわけではない。そこには多くの先人のすぐれた労作がある。それにもかかわらず，私のみるところでは，なお少なくとも次の5つの点のいずれかにおいて不充分であることをまぬがれていなかった。第1に，近代統計学，なかんずくR. A. Fisher以来のいわゆる推測統計学までを含めて考えた上での認識理論を提供していないこと。第2に，統計学を先験的に規定してかかったり，あるいは史的発展を追いながらも，ある段階をもって統計学の定型であると見なして固定的に考え，生々発展の相に即して統計学を理解していないこと。第3に，統計学における数学的方法の機能と立場とを明確にしていないこと。第4に，統計学の発達を，その基盤との関連において把握しようとする点において，多くはなお徹底的でなかったこと。第5に，社会科学と自然科学との間に截然たる境界を設け，両者がそれぞれ独立無関係に統計的方法の発達をもたらしたかのような記述におちいり，相互依存的な関係を明らかにしていないこと。以上5つの欠点のいずれかを見事に克服しえたものも，もちろんないわけではない。しかしそのことごとくを克服することによって，統計的な認識というべきものの，認識論的な特色をよくとらえ，認識論一般において占めるべき位置を明らかにするということは，なお残された問題として，私には年来の課題であったのである。

統計学の認識理論の確立ということも，研究の目的をどこにおくかによって多くのバラエティーを生じ得るのであろう。統計学の解釈ももとより重大なことである。しかし単に解釈にとどまることが問題なのではない。統計学の将来

の進歩の指向線を求めること，統計学の変革こそ私たちの何よりの関心事であり，研究の目的はそこにあるべきものと考えたのである。今世紀にはいってからの統計学の進歩というものを凝視し，この学問の負担すべき歴史的使命ともいうべきものに思いをいたすならば，それは当然のことではなかろうか。

以上のような課題に当面して，私の第1に思いあまった問題は，このための研究方針の確立ということであった。久しきにわたる低迷と迂回との後において，私のたどり得たところの見地は，統計学をその発展的経過において，またこれを通じてとらえようとする見方であり，本書は，基本的にはこの見方に従っている。統計学発展の基盤を指摘し，統計学諸段階間の転化運動を系統づけることは，この基本的な立場から当然要求されることであるといわなければならない。

本書の本来意図するところは，このようではあったが，副次的にさらに2，3の意図が加わったという結果になっている。第1には，推測統計学の紹介ということである。推測統計学に関する理解が今日なお徹底していないわが国としては，それの認識構造を論じる前に，推測統計学自体の内容紹介に多くのページを当てなければならなかった。それゆえ，その他の部分もそうであるように，本書のそれに関する部分の叙述はとくに解説的である。ただ本書の主眼とするところが上述のようである関係上，多くの先人の業績からおびただしい引用があるにもかかわらず，私は私なりの考えがそこに一貫していることを，みずからも認めざるを得ない。第2には，統計学の理論的構成用具としての数学に関して多くのページを割いたことである。わが国における大多数の先輩統計学者と異なり，数学畑に育った私としては，近代統計学理解のために不可欠と思われる統計数学の解説に関して，第1と同様な理由から，紹介の労をおしむべきではないと思った。しかし数学の内部に立ち入っての解説は技術的になかなか困難であって，いきおい紹介というよりはむしろ外部からみた性能批判のような叙述になったように思われる。第3には，本書の意図からさらにそれて，個人の業績等に筆が運びすぎたようなところが2，3あることである。そ

の場合にも，私の目的とするところは，これによって，それぞれの時代を典型的・具象的に表現しようとすることではあった。けれども方法論的には何といっても脇道にはいったところもあった。ここにも，実をいえばわが国におけるこの方面の紹介不足を埋め補いたいという希望が副次的に作用していることは否みがたい。しかし，さらにあわせて付言するならば，歴史的・社会的諸条件の規定する制約のもとにおいて，なおよく統計学進歩の主体性をになった先人の生涯と業績とに，われわれはひとときの炉辺物語を見いだしてもよくはなかろうかとも思われる。

以上の3点への考慮が，主目標へ向かう歩みを，最短距離的（geodesic）なみちからかたよらしたことは否みがたい。これらのことは主目標の追究という研究自体からみれば，たしかに一種の負担ではあった。論ずるところ十数章にわたり，すでに本書は相当の紙数を費やしているにもかかわらず，そこにはなお多くの論点を，将来の研究のために残している。私の仕事はいかなる意味においても未完成である。第1に資料の整備により史的考証を厳密にすること。史的発展の実証的究明を緊密な脈絡においてとらえるという仕事に関しては，わが国の研究者が一般にこうむっている多大の不便に加えて，執筆当時の不如意から，私は特殊な文献は何1つ利用できなかったのである。第2には，統計学の進展を規定した基盤の摘出に関して，私は本文で述べてあるように，中間項としての役割を演じたものを重視し，その解明につとめた。自然科学および生産技術の進歩との関連において統計学の進展を説くことになったのは，いわばその結果である。ただこのことは，これをになった社会的・経済的諸条件の分析に関して論究が不足するように思われる場合をも生ぜしめる。このことは第3に，社会統計，経済統計の面について関説するところ不充分なことに関連し，その面からみた場合，中間項の指摘ではことたりぬことが示されるであろう。例をあげるならばA. Queteletの後に，いわばその批判ともみられるべきいわゆる歴史経済学派の立場に関連するものが不足である。第4に推測統計学に関する解説が体系的ではない。抽出調査論にしても実験計画法にしてもただ

一班を示したにすぎない。これら4つの不備のうち，第1に関しては近い将来においてそうした研究の機会に恵まれるとも思われない。第2および第3に関しては，本書の理論的続編として，私はさらに進んで歴史的・社会的存在の構造分析と統計的方法との関連を論じたいと考えている。第4に関しては，適当の機会にその責めをはたしたいというのが，いまなお何日のことかわからぬ状態ではあるけれども，私の年来の念願ではある。

相当の紙数を費やして私のたどり得た地点は，ようやくにしてこのようなものでしかなかった。かえりみれば，そこには周辺をめぐって核心に迫り得ない不徹底があり，自明なことを一々当たってみる愚鈍があり，しかも他方において論証を欠く立言がある。本書のもつこうした点に対する不満は，著者自身よく自覚するところではあるけれども，ともかく1つの一里塚としてこれを公刊に付することにしたのである。

本書は，昭和21年夏ころから起稿し，約1か年間を執筆に費やしたが，その前半は疎開地であった福岡県浮羽郡吉井町においてであった。私たちの研究室を戦災から守ってくれたこの町の人たち，なかんずく橋詰，矢野，弥永三家の厚意と研究室関係の十数名の若き人びとの熱意とを，私は感謝の念をもって想起せずにはおれない。後半は，この地を去って九州大学理学部久留米支部の研究室内に一家と共に寓してからの執筆であり，修理工場であった仮寓に，1本のロウソクの灯に顔よせて眼力の疲れを気にしながら，ようやく筆を運んだものである。

本書の校正については，統計数理研究所の内田良男，小野山卓爾両君をわずらわした。記して感謝の意を表したいと思う。

昭和23年7月

著 者

目　次

第 3 編　実験統計学の基盤

第 4 編　近代統計学の構造

第5編 統計学の過去・現在・未来

第1編　統計学における法則定立

第1章　統計学のあけぼの

1.　ドイツ国勢学派

現代，われわれは数字の大海のなかに住んでいる。統計といえば人口，出生数，死亡率，生産高，物価指数等々，すぐに連想されるものは，数字の羅列である。数字を離れての統計などは，考えられないのが一般の通念であろう。だが，統計学の起源の1つとなったドイツ大学派のいわゆる統計学では，現代の通念に反して，久しく数量的考察を欠いた。そればかりではない。その発達ののち，ようやく数量的表現を導入する学者がこの学派のなかに現われたとき，これを表奴といって軽蔑し，統計学の本領をここに認めなかったのが，むしろこの学派の主流をなしたのである。この事実は，統計学の歩んできた道をふり返ってみるとき，ある人たちにとっては，いたずらにドイツ大学派主流に対する嘲笑を意味するのみであろう。

しかし，われわれは，ドイツ学派が，このような見解に立つにいたったことの必然性を突き止めなければならない。これにより，ドイツ学派が突き破れなかった限界ないしは制約が何に由来するのか，何を反映するのかを知るとともに，統計学の宿命的課題である数量化の問題に対する認識を深めることができるであろう。

数学の適用は，その古典的な例が天体力学においてみられるように，ときには見事な成功を収めることがある。

だが，われわれの取り扱う対象がいかなるものであるか，いかなる測定が必要であるかを確立することが，数学の適用のための前提としてなければならない。壮麗な天体力学にしても，天空の星の種別，位置，距離を次第に明らかに

して最初の暦ができるまでには，幾万年の人類の苦闘があったであろうし，暦ができてから，いよいよ天体力学ができあがるまでには，3,000年の年月を要したのである。これに反し，対象に対する質的な認識をおろそかにして，数学をもてあそぶならば，それは，もっとも重大な過誤の原因となる。

たとえば，農業統計において農業経営体をその占める土地面積または耕作面積の大小によって分類し，農業の発達の傾向を論ずるための指標とするのは，1つの数量化であるが，われわれは，これだけでは不充分であるとしなければならない。まず自家労働であるか雇傭労働であるかがわからない。つぎに1単位面積に投下される資本の大小ということがわからない。Kaufmann がいうように，統計調査には5つのWがある。Wer, Wass, Wann, Wo, Wie, すなわち主体，客体，時期，地域，方法である。この制約を切り離しての数字の運用は，統計学ではない。統計学がわれわれに与える数字は，ただわれわれがこれを一定の質と関連させるがゆえにのみ，われわれにとって意義をもつ。失業統計，生計費指数，賃金指数の作成および利用に関して，統計の階級性が指摘されるという事実を知らなければならない。一部の論者の間に次のような論説が聞かれる。

「統計数学者の研究の唯一の素材をなすものは形式論理的要素である。物質的大量，すなわち現実的に存在する単位の現実的諸集団は，このような現実的なものとして存在することをやめ，抽象的な数学的な多数と交替する。物質的集団の範囲内においては，個々の単位相互間の質的相違は，その集団の構成を決定し，その集団の限界を区画する助けをなす。ところが数学的多数の観念からいえば，これらの質的相違は非実在的であり，偶然的変動を行なう。理論統計学は数理統計学となった。このようにして純粋に形式的な統計学，数学の一部分としての数理統計学の時代が始まった。こうして物質の忘失が始まった。」これに対する再批判こそ，本書において解こうとする重要課題である。

かぞえること，測ることの前に，何をかぞえ何を測るかが，問題であり，かぞえられ，測られるための条件が満足されなければならないのである。その後

に，質的相違を量的相違に還元すること，ここに統計学の第一歩がある。

ドイツにおいて誕生した統計学は，主として大学の講座において発達したから，ドイツ大学派ともいわれるが，また彼らの対象としたものは，国家であり，「国家の顕著事項の記載」が彼らの統計学の目標であった。そのために，ドイツ国勢学派ともいわれる。“顕著事項の記載”は，統計学における数量化の理論的前提である。しかも，顕著事項の記載にとどまって，その域を越えることはできなかった。これにあわせて注意すべきことは，“国家（にとって）の”という制約は，統計を生産し利用するものの主体性を示すものである。国家というところに，社会，団体，経営団体等が代入されるにしても，統計はいつも一般に，Xにとっての，という主体性を離れることはできない。とするならば，国家の顕著事項の記載に1つの科学としての地位がいかにして与えられたか。そもそも，行政的目的のための国家状態に関する資料収集等の意味ならば，このような記載は国家の生成とともにあったとみるべきであり，とくに近代政治の確立とともにこうした知識への要求は切実になっていた。イタリア人やオランダ人のあとをついで，国家の記載を一種の組織的科学にしたところにこそ，ドイツ学派の功績がある。だがその始祖というべき Hermann Conring（1606—81年）の場合においては，資料因，形式因，動力因，目的因という原因の分類に統一の見地をおいた。すなわち，国家の資料を土地と人民に，形式を法制と行政に，動力を財政と陸海軍力に，目的を国家目的において，具現したとみたのである。

しかも事実において，それは「地理や最近の歴史や国家法規の中から国家の政治的機構や立場に特に重要と思はれる要素を取り出し，それをある統一的思想に基いて，国家と目的関係に置くことによつて整理しよう」（ワーグナー著，大内兵衛訳『統計学』42ページ）という試みであった。これを大成した Gottfried Achenwall）（1719—72年）にあっては，この国勢学派に対して，統計学なる名称をあたえた。ここに統計学の名のもとに一国または数か国の国家基本制度（Staatsverfassung，すなわち現実の国家顕著事項の概念）と解したのはいう

までもない。ところがここでは，現実的個別的な国家観察が問題である。国家の安寧福祉をいちじるしく左右するものが顕著的というのである。しかし，国家顕著事項の概念の内容は，国家の認識の進歩と，国家そのものの情勢により，変革の起こるのをまぬがれない。その学問のスコラ哲学的な性格は，30年戦争（1618—48年）を行ないつつあった当時のドイツの政治，経済の環境を考慮にいれて理解する必要があるであろう。

顕著事項の記載が，ただ自国の現在の国勢状態に関してのみならず，広く古今東西にわたって集めることが必要となり，かつ可能となるならば，空間的には地誌学における記載となり，時間的には歴史における記載の様相をとらざるを得ない。国勢学派の発達の歴史は，この事を事実において示すのであって，前者の傾向は，地理学者 Anton Friedrich Büsching（1724—93年）の著『新地理学』（1754年）にいちじるしく，後者は，August Ludwig von Schlözer（1735—1809年）の言にその表現がみられる。いわく「統計学（Statistik）は静止せる国史であり，国史は経過しつつある統計（国家記録）である」と。いいかえれば，統計は，歴史という過程の刻々の断面であり，逆にこのような断面を結びつけて，歴史は構成されるというのであろう。しかしながら Schlözer のこのことばは，一面の真実を伝えるにしても，歴史という概念に対する理解の浅薄を示すとともに，後世発達した統計学の本質的な進路を示したものともいえないのである。

事実，ドイツ国勢学派の統計学としての本流は，このような記録の集成において起こるべき問題，すなわちこれらの記録からいかなる知識をくみとるかという問題を指向して進んだ方向に認めるべきであろう。それは比較ということである。

比較による研究の本質は，一致する現象を収集すること，および一致しない現象をその差異の程度にしたがって配列することであり，これにより普遍的な結果をもとめようとするのである。自然科学では，比較法は主要な役目を記述的方面ではたしており，現象の説明には，現象の随意に変更することをその1

つの特質とする実験法を主要な研究法とする。しかし，自然科学の世界を一歩でも出るならば，心理学において，歴史学において，あるいは社会科学において，比較法が研究方法として占める役目はいちじるしく重要性を加える。統計的研究は比較法一般の精密な適用の一種なのである。後述の精密標本論にもこの思想はいちじるしくあらわれることをここに指摘しておきたい。「比較を容易にするためには，諸国より集めた事実を縦欄に配列し，1国を1欄に割当て，また事項ごとに横線をほどこして仕切るようにすればよい。」このことを実際に行なったのは，デンマークの歴史家，言語学者 Johann Peter Ancherson (1700—65年) の著『文明国一覧表（ヨーロッパ14国の比較)』(1741年) が初めであるといわれるが，表はドイツの地理学者 Büsching の前述の著書においては，さらに顕著に利用されている。こうした一派は表式統計学 (Tabellenstatistik) と呼ばれた。しかし，ここに注意すべきことは，現在われわれのいわゆる表とは違って，欄内にはかならずしも数字がはいっていたわけではなかった。いいかえれば，事項がかならずしも数量化されていない。だが，ともかくこのような傾向は，簡単にはあまりうまく比較できないような形式的な事項，政治的な要素に代わって，物質的な，数量的表現のできる要素，すなわち経済的要素が次第に国家顕著事項をなすにいたった事実を反映するものである。

このことは，統計学としての一歩前進である。数字的資料の増加とともに，表式統計学の一派は隆盛となり，ドイツの Crome (1753—1833年) にいたっては，Ancherson の影響のもとに諸国の人口数，土地面積，陸海軍力，歳入歳出を表で表わすとともに，統計の図的表現をみるのである。しかしこの表式統計学派を批判して，表式統計学派は卑俗な統計学である，表奴である，といってあざわらったのが，Achenwall, Schlözer の流れをくみ，ドイツ大学派の主流をなしたいわゆるゲッチンゲン大学派である。

諸国民の真の価値は，精神能力，文化，習俗，道徳性についてみるべきである。しかもこれらを測定する道具がないではないか——これが Crome らに与

えられたあざけりであった。ドイツ国勢学派の内部はこのように分裂し，いたずらに論争に精力をとられ，おそらくは，みずからの力では打開の道もなかった。統計学の発達は，社会の物質的生活を数字で表現することが必要であり可能であるところ，すなわち資本主義の母国イギリスにまたなければならなかった。社会経済過程の測定の規準を発見し，質的変化を量的変化に転化還元すること，それが統計学の第一歩である。けれどもそれには，転化可能なための条件が満たされなければならないのである。

ドイツの当時の専制政治は，商業，人口に関する資料の入手をいちじるしく困難にしたであろうし，政府の保管する書庫も，大学教授には近づきがたいものであったであろう。18世紀末葉まで，ドイツは経済的にはなお分散せる国であり，ブルジョアジーは，封建主義との闘争において指導階級になっていなかった。ドイツ国勢学派の歩んだ道は，記録，比較，表示という段階であった。これは当然数量化の問題へ接続すべきであったが，ここでわれわれはドイツからイギリスへ渡らなければならない。実にドイツは，1850年代にいたって，ようやく産業革命を開始したのである。

2. 政治算術学派

学問の世界は，何よりもまずロゴス（λογος）の世界である。すなわち第一にことばの世界であり，第二に比（ratio）の世界である。しかしながら，学問の世界でもあらゆる事項が数量化されるというわけではない。与えられた対象を描写反映する数学を創造することが問題なのである。

数学利用の秘密はすでに比較ということに潜在している，というべきであろう。「我々は知覚の上で赤いとか青いとかの色を識別することができるけれども，同じく赤といふ語で云ひあらはしてゐる場合の感覚内容がどんなものであるかを多くの人々の間で互ひに比較して見ることは普通には不可能である。……即ち赤とか青とかの感覚内容を直接に人々の間で対比することはできないけれども，併し之に反して赤及び青として云ひあらはしてゐる二様の光が互ひに

感覚的に異なつてゐるといふことだけは，容易に人々の間で一致し得るのである。ここに我々がかやうな主観的感覚のなかから客観的要素を取り出し得る一種の巧妙な秘訣が存することに注目しなくてはならない。」（石原純著『物理学概論』22ページ）。しかしただ客観的要素だけでなく，それの数量化の秘訣もまたここにあるのである。ある場合には相違とともに，濃淡に関してもある程度の一致を人びとの間において求めることができる，こうして，

(1)　$a=b,\ a\neq b$

から進んで

(2)　$a>b,\ a=b,\ a<b$

というような順序の考えが導入されてくるのである。順序の概念をもとにして理論を展開していく，最近の数学界の論題である束論の哲学的意義を思い起こす必要がある。色それ自身を，色以外の世界からことばであらわすことはできないとしても，色どうしを比較して相互の間で語らせることはある程度できてくる。ある物の長さは，同じ世界の基準に対してである。ここに比の思想がある。比とは，ある集団におけることばである。ゆえに集団の構成がまず問題である。数学利用の秘密は，したがって，適当な集団内部において質的差別を捨象する指標の発見，ならびに実在と指標との対応である。われわれが対象のうちに量的規定を見いだすためにはさまざまの対象の質的差別を捨象して，それを等質な集団の一員としてみるところまで還元しなければならない。しかもそれはある集団の内部においての話であることを忘れてはならない。数量は等質なことを前提とする。このことは，数量が質的差別の捨象であること，したがってそれだけではもちろん全面的な認識でないことを示す。しかし，一度数量化されるならば，局面は一変する。数は物から離れてひとり歩きをしだす。数は加減乗除の四則を許す。たとえば2つの地方の人口の和，差から人口の増減が論じられる。割算ができるから，出生数を総人口で割って，出生率というものが考えられる。掛算ができるから，死亡率を知って死亡数を知り得る等々。千差万別の人間を――ある哲学の表現をかりれば，おのおの絶対的個というべ

きひとりひとりの人間を――数の世界へ抽象化したから，加減乗除ができるのであって，人間自体が，四則によって，切ったり合わせられたりするわけではない。

これを思えば，対象を数量化することから進んで，数量相互間の運算である算術を人間社会に応用することに対して先鞭をつけることは，軽くは見られない1つの重大な認識の進展である。しかもこのような認識の進展は，これを可能にする社会を基盤にもたなければならない。この進展に寄与した功績は，統計学では，イギリスの政治算術学派に負うのである。とくにその創建者としてイギリスの商人 John Graunt (1620—74年)，医者で政治家であった William Petty (1623—87年) があげられる。

Graunt は人口動態の数量的観察において，Petty は経済現象の数量的把握において，統計学の礎石をすえた。ドイツ国勢学派を越えるこの業績がいかなる背景と準備のもとに生まれてきたかを，われわれはまずみておかなければならないであろう。

その1つは，彼らが対象とした社会自体が数量的表現を可能にするような状態になっていたことである。封建的な諸関係の崩壊解消とともに，商品生産，貨幣による売買の全面的支配によって，貨幣的表現が富の大部分について可能となったことである。

つぎに指摘されるべきことは，1662年「王立理学協会」(Royal Society) くわしくいえば「実験による自然的知識の改善のための王立理学協会(The Royal Society for the improvement of natural knowledge by experiment)」の出現に具体化されるところの，当時の自然科学的ふんい気である。なおここに，Francis Bacon (1561—1626年) の哲学『新機関』(Novum Organum 1620年) の影響が指摘されなければならないであろう。Bacon は，従来の学問研究が信頼するにたらないことを指摘し，アリストテレス流の三段論法を，知識獲得上，価値なきものとして，偶像の打破を叫び，事実の収集とその解釈により，経験的に因果の関係を発見しようとする帰納法こそ，科学的知識の達成に

必要な研究方法であることを唱導したのは，周知のとおりである。もちろん王立協会を生み育てたその基盤として，マニュファクチュアによる産業資本の発達が指摘される。事実この王立協会も，初めから専門家の団体ではない。新興市民階級が勢力を占めており，「真理の探究のための協働」の下に結合したのである。経験学派 Bacon の影響は王立理学協会の出現にみられるが，Petty, Graunt もこの協会員である。政治算術は，このような学問的環境において誕生した。それにもかかわらず，Bacon は政治算術学派の統計学では特筆されないようである。それは Bacon 自身が原理を唱導するのみで，実践がともなわなかったことによるのであるとみられよう。帰納法を主張するベーコン主義によって，研究を行なった人としては，むしろ Charles Darwin があげられるべきであり，後述の Pearson の記述統計学にこれをみるべきであろう。Bacon の思想についていえば，いっさいの可見的現象の底に横たわるところの恒久原因としての形相が考えられ，現象はこの形相の顕現とみたが，過程あるいは発展としての自然観からは遠いとみられる。統計学という学問的研究の体系は，帰納の論理に関するものである。しかもその発達は，抽象的な思弁とか原理の自覚のみによって生成されたものではない。統計的研究法の論理の発展は，統計的研究自身から帰納され，洗練されたものである。このことは歴史のくり返しくり返し教えるところである。——海へ行け，きっと獲物があるぞ，という先輩が Bacon であった。漁獲法一般の講義をする先生が，たとえば後世の J. S. Mill の帰納論理学に相当するのである。統計学をつくった漁師たちは，Mill 先生の帰納法の論理学の講義などは，上の空で聞いた。そして各自の漁獲法をみずからの浜でおぼえたのである。

まず John Graunt についてみよう。彼の著『死亡表に関する自然的及政治的考察』(Natural and Political Observations mentioned in following index and made upon the Bills of Mortality, 1662年）によって，一商人たる彼はイギリス王の推挙により，王立協会員の栄誉をかち得たほどであって，当時いかに高く評価されたかを知ることができよう。だがその観察内容た

るや，今日としては常識の程度を出ない。たとえば，

(1°)　数種の死因のうち，あるもの（慢性病，事故，自殺等）は全死亡数に対して，常に一定の比率を保つ。伝染性のもの，疫病のようなもの，激性のものは，一定の比率をもたない。

(2°)　すべての受胎児の約36%は約6歳未満で死亡する。

(3°)　洗礼数を修正して男女比率は，男14に対して女13，あるいは男16に対して女15である。

(4°)　都市の死亡率は，地方の死亡率より高い。

(5°)　つぎのような人口推算の方式をあたえた。（記号は便宜上著者が導入したものである。）

(a)　N＝出生登録が正確に行なわれた年の正常洗礼数；F＝懐妊力のある婦人数；H＝総世帯数；n＝1世帯あたりの家族数として，つぎの関係を仮定する。

$$F=2N,\ H=2F,\ n=8$$

一方，観察により　N＝12,000人と概算して

総人口＝$nH=8\times2\times2\times N=384{,}000$ 人

(b)　p＝1世帯あたりの死亡数（死亡数/世帯数）；D＝死亡数とする。

したがって $H=D/p$ である。

他方，いくつかの教区の世帯調査から，$p=3/11$であり，また D＝13,000人である。したがって H＝47,667戸。

(c)　ロンドン城内の地図から，その世帯数を12,000戸と推定する。さて，城外における死亡数は城内の3倍である。ここに世帯数と死亡数とは正比例するものと仮定する。すると，城外における世帯数は，城内の世帯数の3倍であると推算される。したがって城内外の総世帯数は48,000戸である。

このようにGraunt は，(a)，(b)，(c) 3通りの推算をあたえた。この推算は，統計量相互間の関数関係を想定し，そのうちのいくつかを観察によって実際にもとめて，その関数関係に代入し，いくらかの運算ののち，所要の統計量を求

めようとするものである。しかし，関数関係，この場合でいえば実は比例関係であるが，そのものの正確性がまず問題になるのである。それはもちろん近似関係であるけれども，その誤差が調べられなければならない。上式は，そのような今日の常識にすらたえうるものではないけれども，人間社会の現象に，数量観察と推算とを導入したコロンブスの卵は，尊重されなければならないであろう。

死亡数についてこのいわゆる諸観察は，そのあるものは商業および政治に，あるものは自然に，それぞれ関するもので，Graunt のいわゆる博物学である。彼の著書は106項目からなり，人民の数，男女の数，既婚者および独身者の数，可妊婦人の数，7年ずつまたは10年ずつにした各年齢階級の人口，戦闘適齢者の数，ロンドンはどれだけ，またどれほどの速度で増加したか，黒死病後何年間に住居はふたたび満たされたか，普通および特殊の死因の1つ1つによってどれだけの者が死ぬか，どの年に出生または死亡が多かったか等々である。Graunt はこれの観察を「正直で無害な政策の基礎」であるとした。

Graunt のこれらの業績を評価するには，次のような注意が必要であろう。第1に，人口に関する当時の常識がどの程度であったかを知る必要がある。当時の俗見では，ロンドンの人口は約100万，月の運行は健康に影響がある，国王の統治いかんにより大疫があらわれる，男女数の性比は男1人に対して女3人の割である，等が真実と信じられていたのである。これに対して，ロンドン市がほとんど80年間にわたって供給したすべての死亡表の長い間のまじめな精査により，Graunt はこのように多くの意味深長な予想外の結論をひき出したのである。第2に，その方法的な正確さを功績としなければならない。第3に，このような観察を行なうに当たって，Graunt の方法はただ数量的記述だけにとどまらなかったことである。前ページの（5°）にあげたようなものは正に推算である。「黒死病による死亡数についての知識さえも，表に示されている検屍役の単なる報告から論じ得られるわけではなく，その他の推理および他の死因と黒死病の比較から得られるのである。」（Graunt 第2章101ページ）

ドイツ国勢学派の表式統計家が記述の手段としての数量的表現にとどまったのに対して，算術の利用による現実の解剖という点に，政治算術派が進んでいるところに大きな相違点がある。第4に，社会現象においてこのような規則性を指摘した功績は，Süssmilch のいうように，コロンブスのアメリカ発見に比べられるべきであったが，観察の方法がなにゆえに，このような規則性を指摘するかに関しては，自覚と省察とを欠いた。したがって第5に，推算の基礎にした諸規則性の信頼性の精度に関して何の反省もなかったことは，当然ながら，重大な欠陥であった。

しかしながら，Graunt の貢献は正にコロンブスのアメリカ発見であった。第1に，他の何人でも，この平凡なコースを行けば，大陸を発見したであろう。第2に，発見した土地を東インドと思った点においてである。Graunt について，その方法をいっそうの自覚のもとに経済方面に応用したのは，Sir William Petty である。彼は，その方法に政治算術 (political arithmetic) の名称をあたえた。彼はいう，「私の採る所の方法は尚ほ未だ広く行はれてをらぬ。蓋し単に比較級や最上級の言葉と主智的議論を利用する代りに，私は長く自分で心掛けてゐた政治算術の一つの試みとして，数学や度量衡をもつて云ひ現はす途を選ぶからである。たゞ明らかに，事物自然の中に知覚し得べき基礎を存する原因のみを観察し，個々人の変り易い気持や，意見，嗜好，感情などに依存する原因は之を他人に委ねる。」(政治算術)また「Francis Bacon 卿が，自然体と政治体とを区別しこの両者の健康と勢力とを保持する方法に於いては，多くの点に於いて並行が存在することを指摘したのは賢明である。即ちその一方に於いて解剖が最善の基礎であるならば，その他方に於いても亦さうだといはねばならぬ。そして政治体についてその均整的構造，比例について知ることなくして政治を行はんとするのは危険である。」(「アイルランドの政治的解剖」，大内兵衛氏，ペッテイの生涯と業績による)

Petty の問題は，いかにすれば，イギリス国王の光栄を増すかということにあったが，その研究方法は，つぎの特徴をもっている。すなわち第1に，観察

と比較の上に立つ実証性を保持すること，そして第2に，数量的考察に基礎をおいたことである。これらにおいて，自然科学の新しい方法に影響されている。しかし，われわれは進んで Petty においてつぎのことを認めなければならないであろう。

第1に Petty が労働価値説の端緒を開いた認識の方法である。そもそも科学の使命はただ単に諸現象の記述，分類，あるいは一連の経験的事実の表式化より進んで，本質の探究でなければならない。Petty は正確な観察を要求したが，同時に科学的演繹を広範に利用したことも事実としなければならない。Petty の価値論では，単に平均価格を確立するにとどまらず，平均価格が何によって決定されるかを探究している。労働時間による価値の決定がそれである。そしてその場合，個別的な労働者または個別的な労働および職業の個々の特徴からは出発せず，それらのものを平均した平均的労働者から出発している。かくして医師であり行政官であった Petty は，統計学のみならず，経済学において，不朽の地位をかちえている。後述のように経済統計学は，その後ひさしくそれほどの発達もみなかった。そして19世紀にはいってようやく軌道にのりかけたときにも，記述統計学の影響が強かった。あるいは，1つの段階としてそれを経なければならなかった。しかし，近代の経済学は，景気変動の統計学的予測には多くの失望をも味わったのである。したがって，実証的であり，しかも記述にとどまらなかった Petty こそ，常にかえりみるべき人であろう。

政治算術学派の統計学の歴史において，天文学者 Edmund Halley (1656—1742年) の功績を落とすことはできない。それは最初の，数学的に厳密な方法による死亡表の作成である。ロンドンおよびダブリンにおける死亡統計は，当時知られていたが，Halley はこれらに満足しなかった。総人口，死者の年齢が知られず，移住の出入の影響があるからである。これらのかたよりをまぬがれているブレスラウ市の1548年以来の出生，死亡の統計に注目したのは，さすがに眼識が高かった。Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716年) の王立

協会への報告によってこれを知ったHalleyは，1687―91年の5年間の資料をもとにして有名な論文『ブレスラウ市の興味ある出生，死亡表より測定せる人類死亡率の推算』を書いたのである。彼は人口がほとんど静止状態にあるという仮説を立てて，蓋然人口の計算，年齢別人口分布表をつくった。それは国防人員の算出に役だった。出生，死亡の間に平衡関係があることを仮定して，0歳から1歳までの世代が順次死亡していく過程を示すことができた。

「全体，単に年齢別死亡数のみに拠りて死亡表を作るには1年間死亡の総数に当る人員が同年同月同日に生れたりとし，此の人員が，年々，年齢別死亡数の示すが如く死亡するものと仮定するものにして，一国一府の死亡に付き言ふときは，毎年出生の数は死亡の数に同じく又年齢別人口の数も，年々変らぬものと看做さざるべからず。昔 Halley 氏が此の方法に依り，死亡表を作らんが為め，特に独逸国 Breslau 府を選びし所以は当時此の府内に於て死亡の数殆んど出産の数に均しく，且来住，往住も甚だ微々たる土地にして，人口に甚しき増減なしと，鑑定したるが故なり，故に此の方法により死亡表を作るときは，大いに，実際と齟齬する結果を得ることもあるべく，誠に不完全なるものにして，年齢別死亡調のみありて，年齢別人口調なき場合に余儀なく採用する窮策なりと知るべし。」（藤沢利喜太郎，『生命保険論』藤沢博士文集・上巻32―33ページ）

わが国においても故藤沢博士は，日本帝国第7統計年鑑第58面に載せられた明治14年より明治18年の5年間の全国男女合計年齢別死亡数からわが国の死亡生残表を算出したのである。

3. 生命保険の成立

政治算術ということばは，単複利，年金，無尽，生命保険確率等の意味に用いられたことさえあった。Halley の生命表にしても，生命保険の年金計算に役だつことを1つの目的とした。しかし生命保険会社が Halley の表の恩恵をこうむったのは，実は数十年後のことで，1715年保険会社 The Equitable の

設置後のことである。それにもかかわらず，統計学のあけぼのにおいて生命保険の成立が演じた役割はきわめて重要である。

生命保険を発生させた動因としては，慈善的な共同扶助と投機的企業とがあげられる。前者はギルドの共助制度にこれをみることができる。それは封鎖的家族自給経済の段階より進んで個別的私経済の独立に対応し，その相互間の扶助の必要から生じた。これにはまだ合理的保険料率に相当するものがない。これに反し後者では，冒険貸借，海上保険の系列を追うところの発展である。すなわち利貸資本が賭博と結んで発達し，その後地中海，とくにゼノアを中心とする海上商業が盛んになるにつれて商業資本が前面に出て，海上保険を発生させた。この段階では経済的に責任を負うものは加入者全体ではなく，保険業者の資力であった。初期の保険が，ようするに1つの賭博であったことは，生命保険の起源がこれを示している。14 世紀から 15 世紀にかけて動き始めた金融の権力の基礎は，市場における商業金融だけによるのではない。個人の生命，子どもの出生等に関する賭博にもよった。賭博，生命保険，確率論，この3つの間には，その発生に切っても切れない因縁がある。この点を明確に指摘することは，統計学のあけぼのを知るのに不可欠であろう。

4. 政治算術学派の進出と Süssmilch

「若し吾々が家を一軒一軒数へて行くならば，或る家では娘だけに，また或る家では息子だけに，或ひはさうでなくとも，非常に不釣合な両者の配合にでくわすであらう。小さな社会や村落でも秩序的なものを認めることは，容易ではない。……かかる場合に，誰れが，能く規則と秩序とに想到し得るだらう。所で，教会の記録はこの秩序の確認のための大きな手段である。それは教会用及世俗用のために既に数世紀前からとられ，特に宗教改革後はかなり正確にとられて来た。だが誰れがそれを利用したか？　その発見はアメリカ発見と同様に可能であつたのだ。……それを Graunt がなしたのである。」

この引用文は Johann Peter Süssmilch (1707—1767年) が，その著『神の秩

序』——くわしくいえば『人間の出生・死亡及繁殖より証明せられたる，人間の変動中に存する神の秩序』(Die göttliche Ordnung in den Veränderungendes menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen 1741 年) において，Graunt の業績をたたえたところである。Süssmilch が Graunt よりも統計学史上，一歩前進を意味する点はどこにあるか。上の引用句の途中につづけて，「小さな社会や村落についても規則性は仲々認識しがたい。しかるに個々の場合を多数に集め且つ多くの年にわたり，しかも全国に観察すると，隠れたる秩序即ち規則性が光明に持来される。」(Süssmilch)

すなわち，大数観察法の自覚という点である。しかし身は僧侶界に属し，有数の神学者であった Süssmilch は著述の目的を，地上の現実の事実は天来の福音を確かめること，「出生や増加や，繁殖に於いてまた生命や死亡や死亡の原因に於いて，常住的，一般的，完全的にして且つ美はしき秩序が支配してゐる」ことを実証するにあった。すなわち「此論文に於て以下に釈明せられるやうに，(1)婚姻の生殖率並に(2)死亡が今尚ほ規律せられ，且其の間相互関係あること，(3)出生が死亡に超過し，(4)従て人間の繁殖及倍加の生ずること，(5)かくして，地球の各地至る所人間を以て漸次に満されざるを得ないこと，この結果と経験とは，実に創造主が地球及人間の形成の後，直ちに其の計画を言明せる語をして益々其の尊厳を加へしむるものである。」(高野岩三郎著『社会統計学史研究』92ページ)しかもこれを刻苦精励，ドイツのみならず，ヨーロッパ各国にわたっての当時までの統計文献のほとんど完全な集成を土台として，証明しようとしたのである。その手段としての道程は，人口統計論としても，重商主義の立場からみた人口経済論としても，大きな業績である。しかしながらその全部をもってしても，まだ神の尊厳を明示できてはいない。というのはこのような規則性だけでは神の存在の証明とはなり得ないからである。統計学に残した彼の功績は，彼が手段としたところ，すなわち大量観察による規則性の発見法である。しかし，この宗教的な外被をとり去るには，確率論の登場をま

たなければならなかった。そしてそれにはさらに100年を要したのであった。しかも，ここになお注意しなければならないことは，規則性は，現実の資料では理想どおりにはあらわれない，現実には平均からの変異がある。それにもかかわらず Süssmilch の場合，これに関してなんら問うところがなかった。このことは神の秩序の理念そのものにも原因があるとみるべきであろう。それにしても，このような業績を残した Süssmilch の全生涯をみると，彼はたんに神学的世界にだけ生きたのではなく，物理学，数学に親しみ，医学を学んだ時代もあった。

この理学的学風こそ，大数観察法を自覚させるに寄与したものと推断されるのではなかろうか。また一方，自然科学にあっても，神学的，形而上学的要請は，Galilei, Newton, Huygens 等の業績の結果として次第にその価値を失いつつあったが，それでもなおその痕跡を長く残し，18 世紀末 Lagrange にいたって，意識的にこれらを力学から取り払い始めたといえる。たとえば Euler の最小作用の原理は，一種の目的論的要請に依存していたのである。「全世界の機構は最も恵まれたものであり且つそれは最も賢明な造物主の手に成るものであるから，この世界に存在するところの何ものといへども何等かの極大若しくは極小の性質を示さないものはない」という信念があったという。このような時代にあったとすれば，ひとり Süssmilch を責めるにおよばないであろう。ここに歴史の偶然性は奇妙にもこの2人の学者を交友の関係においた。人口倍加に要する期間に関しては，Süssmilch は数学者 Euler に助力を仰いだのであった。

それはともかく，統計学が Graunt-Süssmilch の線において引いた方向こそ，ふたたび見失ってはならない主方向である。この延長に，近代統計学の定礎者 Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796—1874年) の偉大な存在をみる。すなわち，Süssmilch の神学的理念を打破して，神の秩序によらずにこのような規則性があり得るという観念をもつにいたるには，Quetelet まで進まなければならないのである。これは数の秩序として証明される。しかも賭博の

秩序として表現されるにすぎないのであって，それだけではいまだ神の秩序の証明とはなり得ないのである。ここに統計学の回顧は，確率論の登場を呼び出す番組に移る。そして，ドイツからイギリスへ渡ったわれわれは，ふたたびドーバー海峡を渡って，フランスへ目を転じなければならない。

第2章　古典確率論の構成

1.　確率論の誕生

確率論はサイコロ，カード，銭投げ等の賭博遊戯の流行と保険の発生とから生まれてきたと伝えられる。しかも，その発展の動きを与えたものは，交易を賭ける商業資本家が占星術よりも確実な指導をこの学術にもとめるというような社会が基盤になって存在したことである。たとえば，17世紀中葉の Pascal と Fermat との間の往復文書に取り扱われたカード遊びの数学的問題が，ひろく人びとの関心を呼びおこした事情の裏には，賭博には，富への道を確実にもとめる商人たちの渇望が学問外の世界にあったことを忘れてはならない。その後，Pascal, Fermat に始まって James, Jakob Bernoulli, De Moivre, Montmort, Bayes, Buffon, Daniel Bernoulli, Legendre, Lagrange 等当代一流の数学者の手を経ながら，その成果が Laplace の大著『確率の解析理論』(Théoriea nalytique des probabilités 1812年) に集大成されるまでの確率論を，われわれは今ここでは古典確率論と呼ぶことにしよう。この間に，数学の世界には，Newton, Leibniz による微積分学の誕生がある。それは，確率論の問題を有限個の場合を取り扱う組み合わせの問題から，幾何学的確率論へ導き，さらに確率論の解析理論をうちたてるための数学技術を与えるものであった。他方，17，18世紀の啓蒙的合理主義は，偶然的な事象に対しても数学的な取り扱いを行なうことに特別の興味をいだいた。思想的には，この時代精神こそ確率論を発展させた最大の動力であった。その駆使する数学解析の多彩さと合理主義の徹底さとにおいて，Laplace の大著はよくこの時代を代表するものというべきであろう。そしてこれを統計学の歴史に写してみると，統計学が

Süssmilch の宗教的ベールをとり去って，Quetelet の線に到達するために古典確率論の洗礼をうけなければならなかった時代を示すものである。

Pascal, Fermat から Laplace にいたる間に，数学においては上述のように微積分の発見があった。微積分の基本観念については，「経験主義的な解釈や形而上学的な連続律のみにたよっていた」のであるが，彼らには「前進」あるのみであった。古典確率論の一応の完成は，典雅にみえるであろう。だが人は，確率論のもった政治的，社会的意義を忘れてはならない。理知をいっさいの尺度として「代数学のたいまつによって倫理学および政治学を照らさん」（Condorcet）という時代精神，神の啓示に代わろうとする確率論，それはフランス革命の思想的基礎に関連することを見失ってはならないのである。

このような意義をもつ古典確率論の主要な特徴を，さまざまの角度からながめてみよう。

2.　組み合わせ論─確率論の発生形態

サイコロは立方体で6個の面をもち，その構造はできるだけの対称性と均質性とを目指して作られており，各面の相互間には，そこに記入された数字以外に何の差異もないことを理想として作られている。これを空中に投げあげたのが，机上に落ちて静止するとき，どの面があらわれるかは，人間にとっては現実に指定しえない未知の世界を現出する。投げ方の少しの相違，空中の運動，机上に落ちてから静止するまでの運動についてのごく微少な相違が，異なった結果をひきおこす。しかも，どの面がとくに他の面よりより多く現われるかを期待すべき根拠がない。したがって6つの面は，試行に先だっては，同様に可能な6つの場合である。一般に，同様に可能な場合の数が m 通りあるとき，その事柄の起こり方が m 通りあるといおう。

組み合わせの理論は，このような同様に可能な場合を想定し，その前提のもとに，種々の結合の場合について，同様に可能な場合の数を計算する技術として発生したのである。そして，その計算の基礎になるのはつぎの2つである。

今，ある事柄Aの起こり方が m 通り，他の事柄Bの起こり方が n 通りあるとする。そのとき

(1°)　A，Bが同時に起こるということがないとき，AかBかが起こるという起こり方は $m+n$ 通りある。

(2°)　Aの起こり方を $A_1, A_2, \cdots, A_m$ の場合からなるとする。これらは併立して起こることがないとする。$A_1, A_2, \cdots, A_m$ の各場合に応じてBの起こり方はそれぞれ $n_1, n_2, \cdots, n_m$ が可能であるとする。すると，A，Bの組み合わせのあらゆる起こり方は

(1)　$$n_1+n_2+\cdots+n_m$$

通りである。

Fermat, Pascal のころには，確率の概念よりはむしろ起こり得べき場合の数の計算が問題であったとみるべきである。Pascal の貢献は遺著『図形論』(1665年) にこれをみる。たとえば，n 個の物から r 個取り出す組み合わせの数を ${}_nC_r$ と書くと

(2)　$${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$$

という関係式が成り立つ。これは，組み合わせの数の定義ともみられよう。${}_nC_0=1$ という条件を設ければ，上の式から

(2′)　$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

となることは周知のとおりであるが，Pascal は算術三角形においてこれを示した。魔方陣，三角数その他の図形配置は，古代には信仰，占星と関連があったものであり，賭博における組み合わせ理論の役割を考えると，このようなことに確率論の前身が露呈するのである。

しかし，ここにこの事を説くのは，上述の式は整数 n，r を変数とする関数（定差）方程式であること，組み合わせの問題が，多くは定差方程式を解くことに帰着することを指摘したいからである。微分方程式，定差方程式を含めて，一般に関数方程式は現象形態の内面を貫く法則性を規定する数学的形式である。組み合わせの問題は，偶然現象を取り扱うことを目標とするが，それは

まったくの無規律性の探究ではないことをここに見いだすべきであろう。

図形数の復活として，近頃統計学における randomization の問題として，ラテン方陣 (Latin Square)，グレコーラテン方陣 (Graeco-Latin Square) の利用がある。

組み合わせ論は，確率論の発生形態である。しかしその価値は，歴史的なある時代の挿話的存在というのではない。起こり得べき場合が有限である場合においては，古典確率論は本質的に組み合わせ論の技術を出ない。物性論においても組み合わせ理論の開拓を要求するものがあるであろう。

3.　古典確率論における確率の定義

Laplace に組織大成された古典確率論における確率の定義は，簡単にいえばつぎのように定式化されよう。

ある事象の起こりうる場合の数がNであって，これらの場合がみな同様に確からしいものとする。今このうちで着目しているある事象が起こるのに好都合な場合の数をnとする。このとき，この事象の起こる確率は

（3）　$$P=\frac{n}{N}$$

と定義する。

この定義は，組み合わせ論の立場の自覚と反省とによって規定されたものでしかないことは，上述のとおりである。そして，組み合わせ論の基本事実に対応して，確率論の基本定理となるのはつぎの2定理である。

加法定理　ある事象Eがあって，k個の仕方 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ で起こり得るとする。これらk個の仕方は互いに排反である。すなわち，その中の1つが起これば他はけっして起こらないとする。するとEの起こる確率 P(E) は，各 E_k の起こる確率 $P(E_k)$の和に等しい。すなわち

（4）　$$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_k)$$

乗法定理　$A_1, A_2, \cdots, A_m$ なる事象があって，A_1 の起こる確率を $P(A_1)$, A_1 の起こったという条件の下において A_2 の起こる確率を $P(A_2/A_1)$, A_1, A_2 の

ともに起こったという条件の下において A_3 の起こる確率を $P(A_3/A_1A_2)$，以下一般に $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ のともに起こったという条件の下において A_k の起こる確率を $P(A_k/A_1A_2\cdots A_{k-1})$ とすれば，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ のともに起こる確率は

$$(5)\qquad P=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_k/A_1A_2\cdots A_{m-1})$$

前述のように，この確率の定義は，組み合わせ論においてすでに暗黙のうちに使用されていた概念をひき出し，これを明示することによってなされたのである。くり返していうが，それは同等に確からしさの概念，事象の集団の概念，分数比の導入にほかならない。だが，これだけでは確率論の基礎づけは不充分であった。

第1に，上述の基本定理に導いたところのものを突きとめることが必要である。それは事象の起こり得る場合の数を問題にすればたりるのではなく，事象そのものの取り扱いを考慮に入れてのみ理解されるべきものである。事象の細別，総合という行為が媒介されてのみ事象の起こり得る場合の数が計算されるのであったが，G. Cantor による近代の集合論が誕生するまで，そこには適切な表現が欠けていたのである。ここに一団の事象の集まりを考え，その細別，総合を許し，こうしてできた事象をも含有するような世界を定立しておくことが確率論の構成に必要であることは，古典確率論の自覚しなかったところである。この点に近代の確率論といちじるしい対照をなすことは，後章においてくわしくみることにしよう。しかもこの自覚を獲得するためには，まず多くの困難と失敗とを経験して，みずからの限界性を認識する必要があったのである。

今ここでは，以下の説明を簡潔にするという目的のために，事象の分割および総合を記号化して表現しよう。それは，集合論の基本概念の一部を援用するものであって，古典確率論では知らなかったところである。それは，確率論で取り扱う事象を集合論に翻訳し，事象，すなわち集合と見なす。集合論における集合論的演算は，事象の論理関係に対応する。

事　　象	集　　合
1. 事象AとBとは併立しては起こらない（相排反する）。	1 AとBとは相素である（共通部分がない）。これを $AB=0$ とかく。
2. 事象 $A, B, C, \cdots, N$ は相排反する。	2. $ABC\cdots N=0$
3. 事象Xは事象 $A, B, C, \cdots, N$ がことごとく併立して起こるという事象である。	3. $ABC\cdots N=X$
4. 事象Xは事象 $A, B, C, \cdots, N$ の少なくも1つが起こるという事象である。	4. $A \dotplus B \dotplus \cdots \dotplus N=X$
5. $\overline{A}$は事象Aが起こらないという事象である。	5. $\overline{A}$はAの補集合である。 $\overline{A}=E-A$
6. 事象Aは実現不可能である。	6. $A=0$
7. 事象Aは必ず起こる。	7. $A=E$
8. 試行とは，その下においては事象 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ のいずれか1つ，そしてただ1つが必ず起こるということを意味する。	8. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ は互いに素であって，かつEの分解（細分）をなす。すなわち $A_1+A_2+\cdots+A_n=E$
9. 事象Bが起これば事象Aは必ず起こる。	9. BはAの部分集合である。 $B\subset A$

第2にあげるべきことは，古典確率論の取り扱う対象は，実は上の定義によっては充分に規定されず，もし上の定義を固執するならば，古典確率論は多くの難点に出会わなければならなかったことである。このことは，実は第1にあげたこととも関連するのではあるが，今しばらくはその点に触れず，主として第2の難点を突き止めてみたいと思う。以下の記述において古典確率論の成果

を概観しながら，あわせてこれらの限界を示してみたいと思う。

4.　推測論の展開

古典確率論が Laplace の定義による確率の概念では充分に規定し得ないことは，1つは推測論においてこれをみることができるであろう。

確率論は現在われわれの理解するところでは，確からしさの理論である。その内容において組み合わせ論に近似する部分があっても，それは数学の技術として解釈されるべきであって，組み合わせそのものに意義を認めない。もちろん現在までの確率論が，人間の認識における確からしさのすべての様相をとらえているとはいえないのであって，確率論はただ一部分にすぎない。それはあくまである性質をもつ事象に関しての確からしさ，すなわち推測の確からしさの理論である。われわれは現在この性質をストカスティック (stochastic) という概念をもって規定しているのである。

ストカスティックを規定するものは2つの性質である。その1つは，非決定論的であること，その2つは，それにもかかわらず集団的規則性の存在することである。数学の定理としての集団的規則性の証明は，Bernoulli の大数の法則が最初である。これこそ確率論の誕生を意味するというべきであろう。しかも，それは無限にくり返し得る事象の系列の規定の下においてのみ証明されるものであって，この想定の外においては，推測論はその価値を失うのである。もとより，無限にくり返すということは理念にすぎないので，現実には充分に多数回の試行を許すということがこれに対応する。このような対応が理念的にすら認められない場合に対してもなお，Laplace の定義による確率を適用するならば，多くの背理と矛盾とにおちいるであろう。近代の確率論は，この背理と矛盾とを避けるために，確率空間の構成を論ずることは後章に述べるとおりである。

推測論に関する貢献には Jakob Bernoulli (1654—1705年)の『推論法』(Ars Conjeandict 1713年) と Abraham De Moivre (1667—1754年) の『偶然論』

(Doctrine of changes or a method of calculating probabilities 1718 年) とをあげなければならない。

Jakob Bernoulli の『推論法』は4部から成るものであった。その第1部は当時まで最大の労作であった Huygens の論文の再録，第2部は組み合わせおよび順列論，第3部は遊戯への応用であった。第4部は未完成におわったが，道徳および経済への応用を説くことになっていた。この論著においてもっとも大切な点は，大数の法則の1つの場合であるベルヌリの定理の表明であるといわなければならない。すなわち，もし何らかの実験をする場合，事象をAで表わし，この事象の発現の確率を先天的に p とする。実験を n 回くり返したときの出現数を r_n とする。n を充分大きくとれば「r_n/n と p との差異がどんなに指定された値よりも小さくなる確率が1にどんなにでも近くなる。」いいかえれば，ある事象の起こる確率を p とする。n 回の独立な試行においてその事象の起こった回数を r とする。すると，$\varepsilon>0$, $\eta>0$ をどんなに小さな数として任意に指定しても，試行の回数 n を充分大にすれば（充分多数回の試行についてみれば）p と m/n との差の絶対値が ε を越えるような確率を η より小さくすることができる（したがって ε 以下になる確率は $1-\eta$ より大になる）。このことをさらにいいかえれば，n 回の独立試行中に出現した頻度数 m が $pn-\varepsilon n$ と $pn+\varepsilon n$ との間にある確率（すなわち m/n が $p-\varepsilon$ より大でかつ $p+\varepsilon$ より小となる確率）は $n\to\infty$ のとき1になる。

De Moivre も同様の結果に到達している。彼はいう，「一定の法則を仮定し，これに従ってすべての事象が発生するとした場合，実験あるいは観察の回数を増加するにつれ，事象生起の比率が上の法則にたえず接近することを，われわれは証明することができる。」

だが，ここでさらに重要なことは，Jakob Bernoulli にしても De Moivre にしても，この定理の逆の利用を考え，その意義を認めたことにある。たとえば，今白黒の球を入れた袋の中から球をN回取り出したとする。そのうちR回は白球であり，残り S(=N−R) 回は黒球であったとする。そのときNが充分

大きければ，袋の中の白球の数と黒球の数の比はR対Sに近いものであろうと推論したのである。De Moivre は前述の語につづけていう，「今度は逆に，もし無数の観察から事象の比率が一定の数量に収束することを発見した場合，われわれはこの比率をもって事象生起を規定する一定の法則を示すものと結論し得る」と。こうして両者ともどもに，無限に試行をつづけていくことによってあらゆる事象を正確に計算し，そして偶然の中に秩序を見いだすことができるであろうと考えるにいたった。この思想は統計学の根本思想の1つである。

しかしながら，両者ともこの根本思想を現代のような意義において理解し得たとはいえないであろう。De Moivre の場合にあっては，上述のことからこれを根拠として，万有の創造者にして支配者なるものの存在を主張した。彼は「偶然が例外を生むことはある。しかし長い間にはこれらの例外も偉大なる創造の計画より必然的に生起する秩序の顕現に比すればものの数ではない」という。Süssmilch が統計資料の観察から神をみたのと同様に，De Moivre は数学の一定理の証明からその逆の利用を想到して，それにみずから幻惑されたのである。だがこれをもってただちに De Moivre の個人の不明に帰する前に，われわれは彼が生をうけた時代を認識しなければならない。他方また数学に対しても，現在のような公理主義の立場からこれをみるにいたっていなかったことに注意すべきであろう。数学の結果すなわち実在であるとの認識にとどまっていたとみるべきであろう。前者に関しては Karl Pearson はいっている，「De Moivre を彼の著 “Approximation” に，また Bayes を彼の定理に導いた原因は純然たる数学的のものよりも，より多く神学的および社会学的のものであった。」(Nature, 1926 年) Newton 以後の数学者は，Newton の数学とともに彼の神学に影響されたのである。

つぎに，ベルヌリの定理は，数学の定理として確かに証明できるのであるが，その定理を逆に用いるということに関しては，数学の世界の内部の定理としてまず樹立することが望ましいとすれば，実はベイズの定理を必要とするのであった。しかもベイズの定理は，確率論上たえず論争の1つの焦点をなして

きたものであり，近ごろこの定理の利用を避ける統計学者の多いことを忘れてはならないのである。

ベイズの定理　互いに排反した原因 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ があり，これらの原因の起こる確率をそれぞれ $w_1, w_2, \cdots, w_n$ とする。$w_1+w_2+\cdots+w_n=1$ となる。原因 C_i が起こったという条件の下において，ある事象Aの起こる確率を p_i とする($i=1, 2, \cdots, n$)。すると，この事象Aの起こった場合，それが原因 C_r より起こったという確率は

$$(6)\qquad \frac{w_r p_r}{w_1p_1+w_2p_2+\cdots+w_np_n}$$

この定理は，原因 C_r が起こり，しかもその原因の下において事象Aが起こるという事象を1つの複事象と見なし，これが確率論の対象となるならば，わけなく証明される。原因ということばを用いるけれども，それは理解を助ける手段として用いられるので，ようするに確率論の対象になる事象にほかならない。また求める確率それ自身を原因の確率と呼ぶけれども，それは事象Aの起こったという条件の下における事象 C_r の起こる条件付き確率にほかならない。

定理の証明

$$(7)\qquad A=EA=(C_1+C_2+\cdots+C_n)A=C_1A+C_2A+\cdots+C_nA$$

したがって　$P(A)=P(C_1A)+P(C_2A)+\cdots+P(C_nA)$

ところが　$P(C_kA)=P(C_k)P_{C_k}(A)$

さて　$P_A(C_r)=\dfrac{P(AC_r)}{P(A)}=\dfrac{P(C_rA)}{P(A)}$

$$(8)\qquad =\frac{P(C_r)P_{C_r}(A)}{P(C_1)P_{C_1}(A)+\cdots+P(C_n)P_{C_n}(A)}$$

ここに　$P(C_k)=w_k,\ P_{C_k}(A)=p_k$

を代入すれば求める結果になる。

統計数学において大数法則の下に理解するものは，確率論の諸定理である。しかしながら形式的な数学の枠外においてそれのもつ認識論的意義は，これに尽きるものではない。もともと大数法則というのは，1つの実在する科学的法

則として，それはある条件のもとにおいて妥当する観察の方法を基礎づけるものである。すなわちストカスティックなものに対してのみ妥当する。つまり，第1に非決定論的形式において把握されるものであり，第2に集団的規則性をもつものである。第2の集団的規則性は，集団に属する個体どうしを比較してみれば，適当な標識を導入するときそれらは等質なものであり，したがってそこに量的尺度の導入を可能とする契機をもつ。この量的尺度を標識として個々の個体を表現するとき，集団全体に対する総括的標識が可能となる。

だが，研究される大量現象の内部においてきわめていちじるしい量的差異がある場合には，量より質への転化があり得るのであって，ストカスティックではなくなるのである。量の限界が新しい質を決定する。たとえば農民経済における生産用具，労働力の雇い入れを表わす数字，あるいは農民経済における借地関係等の一定のものは，この意味において1つの限界を示す。

大数法則は大数観察においてはじめてはっきりと現われるから，いたずらに大きな統計資料を求め，これらの資料に無批判的に数学演算を施し，算術平均等を求めることは，そもそも大数法則の正しい理解に欠けるからである。これこそ事態を究明せずに，かえって事態を曖昧にし，不明瞭にするものである。

5.　ペテルブルクの問題をめぐって

ペテルブルク学士院記事 (1730—31年) に提出された確率論の1つの問題は，一見簡単なようにみえるものであったが，古典確率論の根底をゆり動かし，その発展と自己批判とにおいて重要な意義をもつものであった。

この問題は，賭博者が確実に勝つ機会を得るような賭博として案出されたものとみられる。その考えは，もし最初の1番に負けたら第2回目に賭け金をふやし，そこで勝ちさえすれば利得を得られるようにすればよい。もしふたたび負けたら，さらに賭け金を増して行く。このようにしてどこまでもつづけていけば，絶対に負けないだろう。甲が乙と1枚の貨幣を投げて賭博をやる。もし表が出れば相手乙から1シリングをとるが，もし裏が出ればさらに競技をつづ

ける。もし次回の投資において表が出れば，甲は２シリングを得る。もしふたたび失敗すれば続行する。今度甲が勝てば４シリングを得るというふうに進める。この場合甲の期待値なるものを考え，金額×確率をつくり，各回についてその和をつくると

$$(9)\qquad 1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2^2}+4\times\frac{1}{2^3}+8\times\frac{1}{2^4}+\cdots+2^{n-1}\times\frac{1}{2^n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots=\infty\ (\text{シリング})$$

期待値は無限大になる。しかし，乙に無限大の金額を賭けて，このような賭博をやる甲のような人がいるであろうか。われわれの常識では，そういうことを申し出る甲はいそうもない。損をするにきまっているように思われるからである。しかし数式の上では期待値は無限大なのである。

このパラドックスはどうしたら解決されるであろうか。以下，古典確率論におけるこの問題の解決への努力の跡をみてみよう。そうして，このような努力のうちにもたらされた反省と成果とをみよう。

【1】試行の独立性　上の解答では，第 $n-1$ 回まで裏が引きつづいて出て，第 n 回に表が出る確率を $1/2^n$ としている。このことに疑問をいだいたのが D'Alembert (1717—83年) であって，裏が連続して出る回数が多ければ多いほど，そのつぎには表の出る機会は多くなる，という意見を述べたとのことである。D'Alembert だけではなく，確率が前回の投貨の結果によって変化するということは，当時きわめて一般的な見解であった。しかし，現実においてそうであるならば，確率論における投貨試行に関する計算は根底から改められなければならない。それは独立試行でなくなるからである。もちろん独立試行でなければ，他の確率論的形式を採用すればよいわけであるが，そのような確率論的形式の発達しなかった当時としては，これでは実質的には，確率の理論を認めないということになる。裏裏……裏と何回つづいたとしても，そうなったあかつきに，つぎに表になるか裏になるかは，条件付き確率である。試行の独立性を認めるかぎり，表または裏になる確率は依然としていずれも $1/2$ である。

D'Alembert は，自分の意見に確認を与えるためには実験によるべきだと主張した。この主張自身は正当である。経験世界における投貨の試行が，確率論でいう独立試行に対応するか否かは実験によって判断されるほかはないからである。だが D'Alembert 自身はこの実験を行なわなかった。これを実験として確立した Georges Louis Leclerc de Buffon (1707—88年) の功績は高く評価されなければならない。この問題に興味をもった1人である Buffon は，1人の少年に上述の投貨の実験を行なわせた。このような実験をくり返すこと 2,084 回。このために総額 10,057 クラウンを支払うことになったが，そのうちで1クラウンを生じた場合が 1,061 回，2クラウンを生じた場合が 494 回等であって，理論をよく裏書きしている。D'Alembert の主張は敗れざるを得なかった。

$$\frac{1061}{2084}=0.509 \qquad \frac{494}{2084}=0.237$$

こうして「貨幣は記憶も意識ももたない」(Bertrand)。このような実験結果が，古典確率論の発展途上において獲得定立されなければならなかったという事実を，われわれは銘記しなければならないであろう。

【2】確率の人間的尺度　上述のように，D'Alembert の解釈ではペテルブルク問題のパラドックスは解けないことになった。反対に確率 $1/2^n$ は確認されたのである。だがこれは，n を大きくすれば，きわめて小さくなるのである。それにもかかわらず，ここに賭ける金額が大きいところから，$2^{n-1}\times\frac{1}{2^n}$ シリングとなって，1/2 シリングという値になる。ここにおいてつぎのような解釈が下された。

(1°) その1つは，きわめて小さな確率——たとえば Buffon 等によれば，0.0001 以下のような——は人間にとって0に等しい。それゆえ上記の級数は，一般項が $2^{n-1}\times\frac{1}{2^n}$ であるが，n が充分大きくなると，実は確率の方が0と見なすべきであるから，級数は途中から $0+0+\cdots\cdots$ となって，有限の項数でおわるとみるべきであるというのである。

(2°) n を無限大にすることは，人間としては意味がない。人間は遊戯をやる

のに，無限の時間をもつものではない。無限級数を考えること自体が意味がない。

確率の人間的尺度の問題を省察する際には，古典確率論が，歴史上本質的につくられた時代が商業資本主義の時代であったことを想起すべきであろう。賭博における機会の概念から転化して，一般的競争における成功あるいは勝利の可能性に対する機会に一般化されている。しかもその機会は，大数の法則をもって顕現する。大数の法則は，多数回の試行の後には確実にみずからをあらわす。賭博において勝利を得るための確実性は，大数試行によりあらわれる大数法則によるとすれば，勝利を得て致富の道をなすのには，多数回の試行の続行にたえ得なければならない。それは賭けの続行にたえる大資本をもつ者においてのみ可能である。本源的蓄積における致富の1つの道がここに開かれているのであった。だが，無限にくり返すことは人間の尺度をこえる。有限の尺度における闘争だけが問題である。無限と有限の問題がここにその1つの本質を現わしている。

【3】数学的期望値と人間（道義）的期望値　ペテルブルクの問題に対する1つの解答は，期望値の概念の変革にもとづく。この方向は，近代経済学における限界効用説を生むべき最初の刺激を与えた点において，重要な意義をもつのである。金額 x を所有する人がその金額より受ける総利用を $f(x)$ で表わすと，$f'(x)$ は限界効用に相当する。x が大きくなるにつれて，$f'(x)$ は減少するというのが限界効用説の基本テーゼである。富める場合あるいは富者が，その財産のある一定増分（減少）に対する尊重の程度は，貧しい場合あるいは貧者ほど高くないということである。

ある人の財産を a とし，金額 x_n を得る確率を p_n とすれば

(10)　　$\sum p_n\{f(a+x_n)-f(a)\}$

効用的期望値ともいうべきものである。これを道義的期望値ともいう。

Daniel Bernoulli は $f'(x)=k/x$ と仮定したから，上述の和は $x_n=2^{n-1}$，$p_n=1/2^n$ であって

(11)　$$k\left[\frac{1}{2}\log\frac{a+1}{a}+\frac{1}{4}\log\frac{a+2}{a}+\frac{1}{8}\log\frac{a+4}{a}+\cdots\cdots\right]$$

となる。これはどれほどの金額Xの増加の値と等しくなるかというと，$k\log\left(\dfrac{a+X}{a}\right)$と等しいとおいて

(12)　$$X=(a+1)^{1/2}(a+2)^{1/4}(a+4)^{1/8}\cdots\cdots-a$$

したがって，それは有限の値にとどまるのである。

小さな確率，試行の無限のくり返し等，人間の思考はこれを容易に構成することができるし，また，どんな小さな確率，どこまでもつづく試行を考えることは，古典確率論の構成上必要であって，これに制限をつけたなら，その数学は当時の力には負えない複雑なものとなったであろう。しかし，ここに，われわれが日常もつ確からしさの感性と相一致しないところのものがある。人間の日常にとっては，G. Cramer (1704—52年) のいうように，非常に小さな確率は，起こり得ないこととして生活している。「奇妙な突然事故や事件の報道を三面記事で読むとき，自分自身に起こりはしまいかとは一々考えては暮らさない。それがたとえば自分の県であり，自分の町であり，自分の家であった場合を考えよう。そうすると自分自身に起こりはしまいかという考えは次第に強まってくる。」そうした無視すべき確率 $1/2^{n+1}$ に，膨大な金額 2^n を掛けることによって，それで1/2という数をつくって人間的尺度へもってきたところに，ペテルブルクの問題の中心点がある。しかも試行が無限にくり返されるという条件のもとにおいてである。感性との矛盾は，こうして尺度の相違に帰せられるけれども，ここには問題とすべきことがなお残っている。もしも人間的尺度を離れて，短時間にきわめて多くの試行をくり返すものがあるとすれば，そのものにとっては，上の理論は矛盾ではなく，事実に近い模型としてあらわれてくるであろう，ということである。事実，このような世界を気体分子論にみることを，20世紀のわれわれは知っている。またいったい，確率はどのくらいの限度をこせば，これを確実と見なし得るか，またどのくらいの限度より小さければ，これを起こらないものと見なし得るか，これに対するわれわれの態度を

規定して議論を進めるものが，近代の数理統計学における検定法の立場であることをも，われわれは知っているのである。

6.　幾何学的確率論

Newton, Leibniz の発明した微積分法が確率論の武器として使用されるにいたって，確率論は，有限個の事物に関する組み合わせ論から飛躍して，起こり得る場合の数が無限の場合をも論題となしうるようになった。たとえば起こり得るすべての場合が，直線上あるいは線分上のすべての点，平面領域上のすべての点というような問題である。といっても，それは現在集合論でいうような一般の無限集合についての議論ではない。実は簡単な，そして多くの場合，初等的な幾何学的図形に関連して論ぜられたものである。そのために，幾何学的確率あるいは連続的確率といわれるものにとどまったのである。

空間に関する位相の概念から独立して論ぜられた古典的な組み合わせ論から，この幾何学的確率にはいるにおよんでは，もはや空間の概念を離れることはできない。近時コルモゴーロフ確率論において構成される確率空間は，最初から，事象の形成する空間を表面に出すものである。幾何学的確率論は，組み合わせ論と確率空間論との中間的，過渡的な存在であり，現代確率論への道を用意するものであるというべきであろう。

現代の確率論は，本質的に，一種の積分論とみられる。だがその積分論は，18 世紀の積分論ではなく，ルベグ積分論を核心とするものであり，これによって確率の概念を一応系統的に展開するのが，確率論の現状である。このことは，第9章に詳説するはずである。古典的な積分論では不充分で，ルベグ積分を利用しなければならなかった点は，後章で述べるようにもっとも究明を要する点である。現在からみれば，その形式化は不充分であるにしろ，古典的な積分論が，主として幾何学的確率論において，確率論と結びついたところは，現段階にいたる道程を前駆的に示すものというべきであろう。

幾何学的確率論の体系は，点集合論の用語を利用するとき，明確に表現され

る。最も簡単な例をあげよう。ここに一定の線分ABが与えられたとする。この上にまったくでたらめに1点Mをとるとする。とすればこれがある指定された線分PQに属する確率はどうなるか。古典確率論のように，同様に確からしいすべての場合というものを考えれば，線分AB上のすべての点がそれであり，当面の事象に都合のよい場合というのは線分PQのすべての点である。まったくでたらめにとるということを，どの点も同様に可能であるという意味に解釈すれば，場合の数は，分子，分母ともに∞になる。これでは進みようもない。したがってかぞえるということではなく，測るという考えが必要になる。上のような解釈（規約）のもとにおいて，点MがAB上のある任意に指定された一定線分PQ上にある確率は，この線分の長さに比例すると考えられよう。とくにPQがABと一致した場合には，その確率は1でなければならない。よって求める確率はPQ/ABとして与えられよう。線分PQは区間であり，したがって1つの点集合である。今一般にABをEであらわし，ABに含まれる区間Iに関して，MがIに属する確率をPr.{I}と書けば，区間Iの長さを|I|とかくとき

(13)　$$\mathrm{Pr.}\{\mathrm{I}\}=\frac{|\mathrm{I}|}{|\mathrm{E}|}$$

で与えられる。こうして，確率が区間に対して定義されるが

(14)　(i)　$\mathrm{Pr.}\{\mathrm{R}\}\geqq 0$（確率は負にならない実数である）

(ii)　$\mathrm{Pr.}\{\mathrm{E}\}=1$（Eに属する確率は1である）

(iii)　$\mathrm{R}_1\cdot\mathrm{R}_2=0$ ならば $\mathrm{Pr.}\{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2\}=\mathrm{Pr.}\{\mathrm{R}_1\}+\mathrm{Pr.}\{\mathrm{R}_2\}$（$\mathrm{R}_1$, R_2 に共通部分がなければ，R_1 か R_2 かのどちらかに属する確率は，R_1 に属する確率とR_2に属する確率の和に等しい。）

今の例の場合では，$\mathrm{R}=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\cdots+\mathrm{I}_n$ とすれば

(15)　$$\mathrm{Pr.}\{\mathrm{R}\}=\frac{|\mathrm{I}_1|+|\mathrm{I}_2|+\cdots+|\mathrm{I}_n|}{|\mathrm{E}|}$$

が成り立つ。しかし，(13)の関係がなくても，(14) (i), (ii), (iii)の関係式は満足できるのである。しかもそれは，ただ直線上の集合だけに関してではない。一般に，n次元空間での，有限個の区間の和集合Rに関してもいい得る。たと

えばあるn次元の閉領域Dで定義された，連続でかつ負にならない連続関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を考える。

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{Pr.}\{\mathrm{R}\} = \frac{\int\cdots\int_{\mathrm{R}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n}{\int\cdots\int_{\mathrm{D}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n}$$

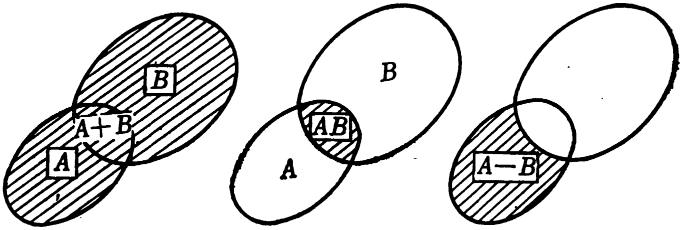
によって定義された区間関数Pr.{R}もまた(i), (ii), (iii)の性質をもつ。有限個の場合についての組み合わせ論的確率論はこうして幾何学的確率論に，その類推をもつにいたる。だが，われわれはここに多くの問題をもつ。

(1°) 集合としてRのようなものに限ってさしつかえないであろうか。理論の適用範囲を不当に狭くしないであろうか。

(2°) ある集合の部分集合のどのような集まりを考えるならば,上記(i),(ii),(iii)の性質を保ちながら，その集合系に関して上述の$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は，どのようにして見いだすことができるか。

この問題をすべての区間だけでなく，さらに一般の点集合に関しても定義されるように解決するには，集合論の用語を利用しなければならない。

和集合$A \dot{+} B$	Aあるいはbの少なくとも一方に属する点の全体
積集合$A \cdot B$	A, Bのどちらにも属する点の全体
補集合$E-A=\overline{A}$	Eに属し，Aにふくまれない点の全体
差$A-B=A\cdot\overline{B}$	Aに属し，Bにふくまれない点の全体
$A+B$	$AB=0$のとき定義されて，$A\dot{+}B$に等しい (2-1図)。



2-1図

この用語のもとにおいて，個々の区間$I_1, I_2, \cdots, I_n$に対して定義された確率を知れば，これらの区間の任意の2つの共通集合がすべて0（空集合）であるとき，和集合

$$R=I_1+I_2+\cdots+I_n$$

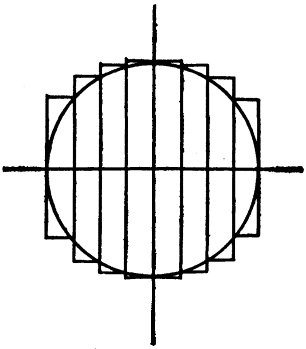
に属する確率が定義され，それは

$$\Pr.\{I_1+I_2+\cdots+I_n\}=\Pr.\{I_1\}+\Pr.\{I_2\}+\cdots+\Pr.\{I_n\}$$

となるべきであろう。それは有限個の場合の加法定理を，拡張して適用するとき考えられるものであろう。このように拡張するとき，一般に有限個の区間の和集合Rの集合に関して——区間自体もこれに属する——加法定理が成り立つことになる。

(1°) に対しては，理論の適用範囲を不当に狭くすることは確かである。たとえば，平面上の長方形 ($a\leqq x\leqq b$, $c\leqq y\leqq d$) をEにとり，一般にこれにふくまれる長方形 $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\gamma\leqq y\leqq\delta$ に対して

$$\Pr.\{I\}=\frac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{(b-a)(d-c)}$$



2-2図

と定義し，これをRに拡張するだけでは，たとえば上述の長方形Eに属するある円内Cに属する確率が与えられない。この円を区間の和集合によって近似した極限値として，Pr.{C}が与えられなければならない。極限操作を許さなければならない。このことは，集合系のなかにCをふくませることが，必要であることを示す。しかしこれだけではただちに，集合関数 Pr.{R} に関して，有限加法性では不充分で，完全加法性を必要とすることを示すものとはいえない。ここに完全加法性とはつぎのことを意味する。

ある集合系Fにおいて，これに属する任意の集合Aに関して集合関数$g(\mathrm{A})$が定義されているとする。そして

(1°)　$\mathrm{A}=\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\cdots+\mathrm{A}_n+\cdots$

(2°)　$\mathrm{A}\,\varepsilon\,\mathrm{F}$,

(3°)　$\mathrm{A}_k\ \varepsilon\ \mathrm{F}\ \ (k=1,2,\cdots,n,\cdots)$

(4°)　$\mathrm{A}_i\mathrm{A}_k=0$

のときには

$$f(\mathrm{A})=f(\mathrm{A}_1)+f(\mathrm{A}_2)+\cdots+f(\mathrm{A}_n)+\cdots$$

おそらくルベグ積分でなくとも，ヨルダン積分においても上述の極限操作は可能だからである。ルベグ積分を必要とするのには，

(a)　Fがボレル集合体であること

(b)　集合関数としての確率が完全加法性であること

この両者を絶対に必要とし，したがってヨルダン積分においては表現不可能な問題に出くわさなければならなかった。そしてそれは，確率論における大数の法則が深化されて，いわゆる大数の強法則として登場するときに必須の表現用語として登場するときまでまたなければならなかった。

第2の問題 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ はどのようにして決定されるかということは，幾何学的確率論の全部をあげて答える当の問題にほかならない。そして，幾何学的確率論は，いくつかの基本事象に関する確率を仮定し，これをもとにして当面の事象の確率を計算することにおいて，組み合わせ論的確率論と異なるところがない。計算の規則となるのが，確率に関する諸定理にほかならない。とすると，基本事象の確率はどのようにして与えられるか。たとえば上述の例についていえば，線分上に落ちる確率は長さに比例するというのが基本事象に与えられた確率であるが，これはどのようにして導かれたものであろうか。

この問題に対する Borel の解答は，つぎのようである。「それは規約である。われわれはこの規約にもとづいて，これから導かれる結論をもとめ，実際との一致をためせばよい。もし実際との一致が認められるならば，この規約を

採用しつづける。そうでなかったら，この規約を放棄すればよい。」この立場は，Kolmogorov の公理主義においても，これをみることができるのである。だがここに最も留意すべきことは，それだからといっていかなる規約から出発してもよいというわけではない。近似的に実際の模写反映とみられる規約から出発しなければ無効である。そうして，そのような規約を立てる背後には多くの過去の経験と，現実の世界における行為ないし実践が基盤としてこれをささえているのである。

このことは，すでに上の問題においても指摘できるのであるが，歴史的な例をあげておこう。

問題　円内に任意の1つの弦をひくとき，その長さがこの円に内接する正三角形の一辺より長くなる確率はどれほどか。

7.　力学的自然観と誤差論

確率論が誕生し，生長しつつあったこの啓蒙期の自然科学は，究極のところ，力学がその全部であったといっても過言ではない。したがって当時は自然をまったく力学的なものとして，すなわち力学的法則に従うべき巨大なメカニズムとして認識するほかはなかった。古典確率論を大成した Laplace は，この見解を最も明確に表明していう。「われわれは宇宙の現状を，過去の状態の結果として，また将来の状態の原因としてみなければならない。与えられた瞬間において，自然を生かすいっさいの力と，自然を組成している存在の相互間の位置をことごとく熟知している知的超人 (intelligence) がおり，その超人がさらにいっさいの事象を解析にかけ得るほど偉大であるならば，彼は，宇宙の最大の物体の運動をも，きわめて軽微な原子の運動をも，公式のなかに包含し得ることであろう。この超人にとって不確実なことは何1つとして存在しない，未来も過去も彼の目には等しく現在であるだろう。」 Laplace は彼のいわゆる超人の faible esquisse を，天体力学においてみたのである。微分方程式とその時刻 $t=t_0$ における初期条件とを与えるとき，解が未来 $t>t_0$ に対しても過去

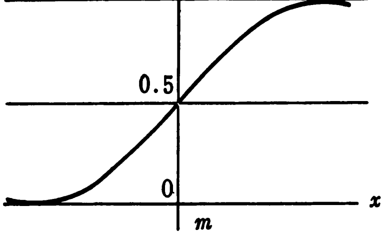
$t<t_0$ に対しても決定され，宇宙が機械論的に決定されていると考えたのである。したがって，人間が非決定論的な形式として確率の概念をもち，かつこれを必要とするのは，人間の知識が現実には常に制限されていて，彼の超人のように全知全能でないからである。無知であるがゆえに偶然がある。そしてそれを処理するために，確率論が存在するとみるのである。このような消極的な意義しか規定されない Laplace の確率論において，確率とはようするに数値的に算定された常識であるとか，健全に発達した知力ではしばしば説明できないが，本能によれば感知できるような事柄を正確に評価するものであるとか，といったことばがあるのも怪しむにたりないのである。だが無知を根拠にして，同様に確からしい，と主張し，この上に運算を行なっていくことが，奇怪な多くの矛盾に導くことはすでに示したとおりであり，同様に確からしさを実験的な根拠を離れて主張するのは無意味であり，確率論の対象ではないのである。それは，ただちに批判と再構成とを要求されるべきであったのであるが，これが正しい軌道に立ち入るまでには，さらに数十年を経なくてはならなかった。

ただこの思想は，天文学と結びついた応用面において，最も成功的であった。天文学における測定は最も正確であると見なされていたが，実際の観測は同一量に対して，異なった値をあたえる。諸種の観測の場合それぞれ異なった結果が現われるのである。これをどのように処理すべきか，この種の問題は物理学，天文学および測地学等においてまず経験されたところである。この問題の最も簡単な形式は，1つの事項について数回観測した場合おのおの異なる結果が現われたとすれば，何をもってその真正値とみなすべきかということである。遊星の運動のように一定の法則が現象を支配しているとみられる場合，真正値から多少かたよっていると思われる一定数の観測値を基礎として，遊星の軌道を計算しなければならない。誤差論と最小自乗法とは，天文学者や測地学者の手によって生まれたといえる。上述の Bernoulli, Hygens, D'Alembert, Lagrange, Euler, Laplace 等いずれも同時に天文学史に大きな業績を残した人たちである。

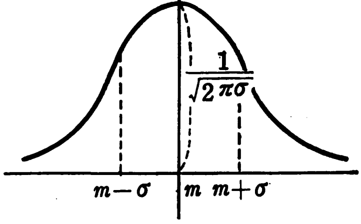
このことについてわれわれの回顧しておくべき点は，当時における学問としての天文学の位置である。Newton によって確固たる基礎におかれた力学は，主著『自然哲学の数学的原理』(Philosophiae naturalis principia mathematica 1687年)　の書名の示すように，「慣性の法則」「運動の法則」「作用と反作用の法則」という単純な3つの法則を基礎とする力学の演繹体系である。このような演繹体系は天体力学において大きな成功をみた。当時においては力学以外の諸現象にあっては，簡単な数理的理論を導くことができなかった。天体力学の理論がよくあてはまり，観測の精度が高いから誤差が問題になるのである。18世紀に形を整えてきた誤差論が天文学と関係したのは偶然ではないのである。力学的自然観の機械論的決定論の下においては，これら一致しない観測値の変動に対して，ここに真の値なるものが，人間には未知であるが，たとえば知的超人に対しては存在し，われわれのもつ変動は，この真の値からの誤差と解釈し，正確なる測定をなし得ない人間的制約に帰するという見方が支配的になるのは当然である。

このような解釈とともに，実際にあらわれてくる偏差の処理ということが問題になる。古典確率論の創建者は，以上の思想を主導としつつ，豊かな解析力によってこの問題に解答を与えた。だがこのことは，数学の力によってのみ誤差法則が導かれたという意味ではないことも，これから述べるとおりである。

偶然誤差Xの分布状態を表わす式としては，ガウスの分布が普通用いられる（2-3，4図)。



2-3図



2-4図

$$(17)\qquad \Pr.\{X \leqq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}du$$

多くの観測において，この法則によって誤差がよく表わされるという事実は，Gauss の天文，磁気，測地にわたる膨大な観測における経験によって確立された。また理論的研究から，誤差のもつべき分布関数が上式であらわされるという説明も試みられている。しかし，「実験家に聞けば，大多数の場合には正規分布に従うが，それに合致しない場合もある。合致しないのはたぶん観測の数が不足であったか，不整合であったためで，数学者の証明するようにそれは当然正規分布に従うべきものだと答える。他方数学者に聞くと，それは数学的に確立されたものではない，実験によって実証されたから信じているのだと答える。」(Poincaré, Calcul des prob. 149ページ) この事実は，観測，理論ともに不完全であることと，両者の相互的な依存性をよく示す事実として注目しなくてはならない。

理論的に導こうという考えでは，非常に漠然としているが，次のように考えてやるのである。

(1)　偶然誤差はきわめて多くの根源誤差の和である。

(2)　おのおのの根源誤差はきわめて小さい。

(3)　おのおのの根源誤差の生起は相互に独立である。

Legendre, Laplace, そして後に Poisson の整理した理論的研究は，だいたいこの線において正規分布を根拠づけることであったのである。しかし，ここで注意しなければならないことは，このような漠然としたことでは，まだ充分とはいえないことである。今世紀にはいって Paul Lévy, Feller 等により確率変数の和の問題に関して極限定理が確立されて初めて，その特徴づけが完成されたのである。

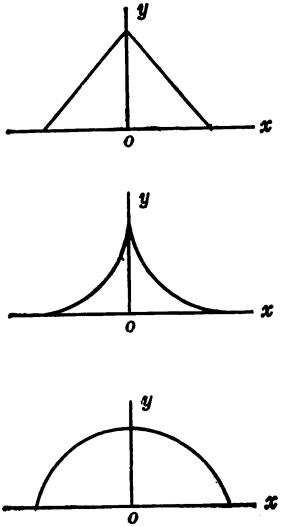
Gauss, Laplace の権威のために，正規分布に関する信仰というようなものがあって，一般の確率分布の理論は押えられていた。しかし，天文学者 Thiele, Charlier, Bruns 等の天文学の観測値の研究は，ガウス曲線の一般化となっ

た。またポアソン分布あるいは小数の法則の導入，ならびにその利用が意義をもった。生物測定学において Pearson が一般確率曲線を導入したことは，あとで述べるとおりである。

理論的に正規分布を基礎づけようとする1つの行き方は，算術平均の原理といわれるものである。1つの長さを測って互いに少しずつ異なる結果を得たとすると，これは，当時の考えでいえば，観測された量の真の長さを共通の原因としてもつ。したがって，その結果によって，すなわち観測によって定めようとするのは，この原因である。そこで，ベイズの定理を用いようというのが，当時の考えである。

最も probable な値は算術平均であるという原理は，かならずしも常に成り立つわけではない。このことは，Weber-Fechner の精神物理的定律を根拠にとると，当の天文学において起こる。すなわち2つの星の光度比の真値を x とし，$l_1, l_2, \cdots, l_n$ を観測値とすると

$$x=\sqrt[n]{l_1, l_2, \cdots, l_n}$$



$y=m|x|+c$

Simpson (1736年) および

Lagrange (1773年)

$$y=\frac{m}{2}e^{-m|x|}$$

Laplace (1774年)

$y=\sqrt{r^2-x^2}$

Daniel Bernoulli (1778年)

2-5図

を採らなくてはならない。さらに経済統計にはいって，指数論の諸種の平均法の形を比較する段になると，算術平均の原理はますます根本的に反省されなくてはならない。現代統計学の評価論はさらに根本的な答えを提供する。

ところが，以上のような経過ののちにもかかわらず，現代統計学における理論的研究においては，われわれはほとんど常に正規分布をもとにして理論を立てる。その理由に関しては後述にゆずろう。2-5図に正規分布が Laplace, Gauss によって確立されるまでに歴史の歩んできたところを跡づけよう。

8.　確率論の統計への応用

封建制度の崩壊に伴う国民経済の拡張は，広範な統計の収集を必要としつつあった。古典確率論が生長しつつあったこの時代，確率論と統計とを結びつけようとする試みは，De Moivreの『年金論』(Annuities upon Lives 1725年), Daniell Bernoulli の天然痘の罹病率，死亡率の計算，Euler の死亡表の改善等にみられるが，とりわけ抽出統計においていちじるしい。資料の一部をとって研究し，これを基礎として全資料に対する結論を導き出す抽出法が Laplace に負うところはきわめて多い。Laplaceは，フランス全国にわたって30県を選定し，これらの県について人口調査の結果，総人口約200万，出生数は1802年9月22日より1799年同月同日までさかのぼり，3年にわたって計算して，人口 28.35845 人に対して毎年出生1人という数を得ていることをもとにして，当時フランスの領土内の出生数が150万人であることから，全人口は 4,252万9,267人となる。このように特定の地方の人口数と出生率とによって全国の総人口数を推計することを提案した。今からみれば，碩学のこの方法も結果も，それ自身としては，きわめて幼稚というほかはない。

次章に述べる Quetelet も，この方向を推し進めた代表的な学者にほかならない。

Quetelet の主著『人間に就いて』のタイトル・ページに，Laplace の著『確率に関する哲理論』から，次のことばが引用されている。

「政治並びに道徳科学に観察と計算とに基礎を置く方法——自然科学に於て大いに吾々に役立つた方法——を適用しよう。」

確率論を裁判の判決に適用した論著があらわれ，人生のほとんどすべての問題を，確率論に帰着させて解決しようとしたのもこの頃のことである。

生物学者 Buffon は倫理算術（1777年）において，確率論を道徳問題に応用した。

投票選挙の問題を確率論で取り扱おうとする物理学者もあらわれた。

侯爵 Condorcet（1743—94年）は，この傾向を最もよく代表する。彼は確率論の立場から，倫理および政治においても自然科学と同一の精密度で，その真理を明らかにすることができるという信念をもった。

第3章　統計万能時代の起伏

1.　統計万能時代

Laplace の大著『確率の解析理論』(Théorie analytigue des probabilités) が完成されたのが，1812年であって，古典確率論がその形態を整えつつあったのは19世紀初頭のことであった。そしてこれにつづいて，いわゆる統計万能時代がくる。それは1830年から1849年まで，およそ20年間の Sturm und Drang である。まず事例についてこれをみよう。

【1】官庁統計　統計数字の発表に対する偏見は次第に取り除かれ，秘蔵された資料は公開され，多くの統計調査が計画され実施された。

A．**イギリス**　1833年商務局 (Board of Trade) に統計課が付設され，1837年人口動態統計に関する民事登録制 (civil registration) が最初イングランドに，後にスコットランドおよびアイルランドにおかれた。こうして人口統計の規則的な編成が可能になった。

B．**フランス**　1827年以来司法省から規則的に年刊統計報告が公表され，1833年には，1821年に一度廃止された中央統計局 (Bureau de la statistique générale) が再建された。

C．**ドイツ**　1833年創設された関税同盟は，関税収入を人口に比例して分配すべきであるという見解から，加盟諸国における定期国勢調査を要望した。このため3年ごとに定期人口調査が行なわれ，これは1866年まで継続したのである。

D．**オランダ・ベルギー**　1826年オランダに統計局創建，1827年国勢調査を担当した。ベルギーがオランダから分離するとともにこの局も廃止された

が，1848年再興した。ベルギーでは1831年統計局を設けた。これには Smêtes および Quetelet の指導があった。

E．**北欧諸国**　ノルウェーでは1837年大蔵省に製表係として統計局，デンマークでは1834年製表委員会を設けた。

【2】統計協会の設立　上記の新設または再建の官庁統計機関が，当時諸国に設立された統計協会の援助を受けるようになったのも，この時代の1つの特徴である。たとえばサクソニア統計協会，1839年ボストン市に創立されたアメリカ統計協会（American Statistical Association）等。イギリスでは，この種の統計協会がとくに多かった。有名なロンドン統計協会（Statistical Society of London）の外にマンチェスター，リバプール，グラスゴー，リーズ，およびブリストル等につくられた。また一般の科学協会で，その内部に統計分科会を設ける傾向が多くみられた。このような学会の創建にもとづいて，その主要な関心事となったのは，いわゆる社会問題であった。

「統計学的知識の価値はもはや疑う余地はない。それは慈悲の念を誘致し，博愛家の努力に対して目標と効果とを与える。また立法者に対しては，社会の福祉に関する方策の資料を与える。……このようにして提供された知識にもとづいて，社会の関心が首府やその他の多くの大都会の下層階級の肉体的，精神的堕落に強く集中されたことは争われぬ事実である。」（王立コーンウォール学芸協会の主張）

貧民階級の惨状に関する知識はこのようにして得られてきた。諸種のストライキおよび組合の統計的記述，人口統計委員会の犯罪統計委員会の設置，死亡率の精査等，これらの協会は活発に活動した。

【3】国勢調査の進歩

A．**イギリス**　1841年より各個人別に年齢，性別，職業の記載が必要となった。このときから，調査員に代わって戸主が国勢調査に記入する責任をもつことになったのは，重要な進歩である。資料の正確さがいちじるしく向上し，イギリスの人口統計が名声を高めたのもこの時代である。

B．フランス　1836年から家族別，世帯別記載，1876年から個人報告が得られるようになった。また経済統計に関する統計（輸出入，海運，農業等）の出版の価値は大きい。

C．ドイツ　1831年には，年齢層を3階級に，1832年には11階級に分類している。しかし人口統計よりも経済統計において成功し，1846年にはサクソニアで工業調査および総合的農業統計のための努力がはらわれた。

D．ベルギー　Smêtes および Quetelet の偉大な業績が注目される。1830年元旦に行なわれた国勢調査は画期的であった。中央委員会による統計の進歩改善は，他の国の模範であった。1846年の国勢調査は，人口，農業，および工業に関する調査をふくんでいた。家屋，火災保険，教育，宗教，言語，年金および公民権，家畜数，耕作地，物産額，職工数，賃銀，機械の総馬力数，織機等の機械台数等々。

E．北欧　ノルウェーの1835年の報告書では，年齢および級に分類して詳細な人口分布をもとめた。デンマークもほぼ同様のことを行なった。

【4】国際的協力　統計万能時代を描くためには，これにつづく時代の特色として，19世紀後半期における国際的な統計協力の風潮を述べておかなければならないであろう。この風潮を現わしたのは，国際統計会議の開催と国際統計協会の成立とである。

国際統計会議の目的は，統計調査の方法の国際的統一であり，これは各国の官庁統計の組織化と改善とに貢献したが，社会問題，労働問題に対する論議の盛んなことも見のがすことのできない特徴であった。自由貿易運動の普及，運輸，通信における画期的進歩等，これに先立つ時代のあとを受けて，Quetelet等の努力によって，第1回国際統計会議(International Statistical Congress, Congress international de statistique)がベルギーのブリュッセルで1853年に開かれてから，だいたい2，3年の間隔をおいて，ヨーロッパの重要都市を順次主催地として開催されたが，会議の決議の強制力増加に対するドイツの反対がもとになって，1880年ローマで開催する予定であった第10回会議を開く

ことなく，ついに国際統計会議は終わった。

しかし統計調査の実際問題においても統計理論の開拓においても，国際的協力の必要は少しも減少したわけではない。自由な学術団体として，1885年国際統計協会 (International Statistical Institute, l'Institut international de statistique) の成立をみたのは，この必要によるものである。これは各国の統計学者，経済学者の参加する権威ある存在となり，およそ3年ごとに，各国持ちまわりの会合を開き，定期刊行物を刊行した。

このような統計事業の隆盛が，イギリスでは18世紀後半から，ヨーロッパ大陸では19世紀前半から経験しつつあった産業革命を反映したものであり，その結果であることは，ここに指摘するまでもないであろう。資本主義社会のブルジョアとプロレタリアとの対立から，労働者の革命的な運動が始まった。われわれはここでは，1830年には七月革命があり，1848年には二月革命があって，いわゆる統計万能時代の発端と終末とに，それぞれ時期を同じくすることを指摘することによって，統計万能時代の歴史における位置を座標づけることができるであろう。

この統計万能時代の統計学を最もよく代表するのは，ベルギー人 Quetelet である。

2.　Quetelet の生涯，作品および統計思想

ヘントに生まれた Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796—1874年) の学問的生涯は次の3期に分けられよう。

(1°) **第1期** (1819—29年) ヘント大学を卒業し，数学の学位論文を提出し，数学教師の職にあった時代である。1823年天文台建設を政府に建議し，創設準備のためパリに派遣され，ここで Laplace, Poisson 等と知ったのは古典確率論の完成しつつあった時代である。1827年ロンドンにも遊んだ。

(2°) **第2期** (1829—55年)　1829年ドイツに，1830年フランス，スイス，イタリアに旅行し，この間たまたま某生命保険会社の業務改善の実際問題に関

係したことが，統計学の研究に従事させる機縁となったと伝えられる。1832年にブリュッセルの天文台が完成したが，彼はその台長となり，天文，気象等の観測に目ざましい活動を示した。人口および犯罪の統計的研究を発表し始めたのもこの頃である。

1841年，中央統計委員会が彼の提唱により設けられて，その終世会長となった。1846年には，前述の近代的人口調査をベルギーに施行するに当たって，その計画を指導した。統計専門家の国際的会合の必要を説いて，ついに主都ブリュッセルに第1回国際統計会議を開催するにいたったのも，主として Quetelet の功績に帰せられるべきであろう。

(3°) **第3期** (1855—74年) 統計資料の収集，著作の集大成に主力を注いだ。この頃の彼は社会統計に注意を向けた。

Quetelet の統計学上のおもな著述は次の3つである。

〔1〕『人間に就いて』(Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale, 人間とその能力の発達とについて，もしくは，社会物理学論，1835年)

〔2〕『社会制度』(De systèmes social et des lois qui le régissent, 社会制度とこれを支配する法則，1848年)

〔3〕『社会物理学』(Physique sociale ou essai sur le développement des fascultés de l'homme, 社会物理学もしくは人間の諸能力の発達に関する論述，1869年)

Quetelet の主要な研究内容は次の4方面に大別されよう。

(1°) 人口統計的問題：(a) 人口動態における原因を自然的原因と攪乱的原因とに分ける。前者は，性別，年齢，季節，後者は社会的，経済的，政治的および道徳的事情を考えうるとした〔1〕。なお，1845年の著述では恒常的原因，可変的原因および偶発的原因という分類を提出した。(b) Malthus は人口が幾何学的に増加するという論説を提出したのに対して，Quetelet は抵抗媒質中を動く物体との類推を指摘した。

(2°) 道徳統計の先駆：「毎年毎年同一の犯罪が同一の序列でくり返して現われるといういやな予想が立つ。監獄と裁判所の持分は，国家の歳入とほとんど同じに確定されている。」(1829年)「社会はいわば，犯されるべき犯罪の芽，ならびにそれが発芽する能力（便宜）を蔵しているということができよう。犯罪人はこれを実行する道具にすぎない。」(1833—35年)

しかし「この観察は，かえって反対に慰むべきもので，社会制度，習慣，文化状態および一般的にその生活方法の上に影響のあるすべての事柄の変改によって，人間を改良できることを示すからである。」(1835年) 結婚のようなものでも，年齢の組み合わせに非常な不易性があって，「あたかも国の端から端まで，こういうふうに結婚しようという申し合わせがあるかのよう」(1847年)である。

(3°) 人体測定学（Anthropometry）への貢献：人間の体力の発展および構成について生理学的な観察を行なった。徴兵適齢期にある壮丁の身長測定などは，その測定値が平均値を中心として後述の誤差の法則の分布をなしている。

(4°) 平均人 (l'homme moyen) の理論：統計観察の結果，平均的と認められるすべての性質を持った人間である。平均の身長，体重等をもち，またあらゆる知的および道徳的性質についても平均である。この人間は，人間社会において，ちょうど物体における重心のような地位を占めるものであるとした。平均人は時間的，場所的に不変なものではなく，社会状態から影響を受け，その変化とともに変化する。

このような生涯を送り，業績を残した Quetelet の統計思想は何であったか。

Quetelet の社会物理学の思想の背後には，天文学，気象学における観測という体験がある。これらの観測において得られる値は，理論値に誤差が加わったものであると考えられる。誤差は，系統的誤差と偶然誤差とがあるが，ここでは系統的誤差は，慎重な考慮によって取り除かれているとする。すると，偶然誤差は，多数回の観測においては，観測値の相加平均をつくることにより，

相殺されて消え去ることは，古典確率論の大数法則の示すところの理念である。

こうして理論値が，この多数回の観測値の平均によってはっきりと現われてくる。しかも天体力学においては，その理論値はある微分方程式の解として決定されるものである。Quetelet はこの類推を求めたのである。そしてこの観念をもって，気象，動植物の諸現象にわたって観察をとげた。ここに観察の対象になった多くの自然現象は，多くは回帰的な現象であることに注意しなければならない。およそ進化変革の理念はみられないのである。さらに Quetelet は，同一の結論を人間社会において見いだそうとしたのである。それなら，この理論値に相当するものは何であろうか。それは，ただ資料の与える観測値の平均によって記述されるものというのではない。この重要な一点において，Quetelet は，動植物の形態学における原型の思想に示唆を得たのである。そうしてそれは，詩聖 Goethe に負うものであった。そしてこの思想を社会統計において類比的に用いたのが，彼の平均人の思想にほかならない。Quetelet の考えによれば，観察する個人の数を増すにしたがって，肉体的および精神的特性はますます相殺され，社会の法則がはっきりと現われてくる。そしてこの社会の法則は，力学的体系のもつ必然性と同じように，必然性をもつ。たとえば，犯罪統計を収集すれば，平均人の犯罪傾向が示される。したがって犯罪の予算というものが考えられる。一般に社会統計によって種々の社会現象に関する平均値をつくるときには，充分に多量の統計の平均に関するかぎり，これらの平均の間には，Laplace の天体力学の法則の場合と同様に，決定論的な法則が支配していると考えたのである。

このようにみてくると，Quetelet の統計学のもつ妥当性の範囲に対して，われわれは明確な批判を下すことができるであろう。それは何よりもまず，18世紀の機械論的な決定論の上に立つものであり，社会的法則性の自然主義的解釈にとどまるものである。人間をもって，自然全体と同じ法則にしたがう自然の一部と見なし，社会全体は，個人の単なる算術的総和として考察され，諸種の諸力が平均値として現わされるのであって，それに関してはある均衡が確立

されているものとして，社会の自然的秩序を考えたのである。その社会史観は観照的である。

すべての具体的なもの，個別的なものはただ原型（Urtypus）の現われにすぎないのである。原葉（Urblatt）はときに芽となり，ときに花となる，という Goethe の思想に対しては，Spinoza の観照の哲学が決定的に影響している。すべての現象はそれぞれ特異の形態をそなえてはいるが，それは単に偶然的原因によるものであって，その本源には統一的な一般的原因がなければならないとの見方がそれである。

Quetelet にあっては，人間およびその他の有機体の構造のうちにそれぞれ一定の正常な標準がある。これからの偏差はただ偶然的原因の影響のもとにおこることにすぎない。そうして，正常な標準からの偏差は，測定の誤差と同一の分布法則にしたがうと考えた。すでに述べたように，Quetelet が偶然的偏差として取り扱ったものは，天文学における測定の誤差理論の類推ではあるけれども，問題は，この類推が統計学において許されるかどうかである。

天文学者が，星の距離，星の大きさ等を測定する際に，何回もの観測をくり返さなくてはならなかったことは，古典確率論の誤差論のところで述べたとおりである。しかしこの場合，くり返して観察されるものとして，少なくとも近似的に一定不変の大きさの存在を想定することは，妥当性のあることであり，この場合，変化の原因は，主として観察の条件の変動にあるとみるべきである。系統的誤差と偶然的誤差とに分けてみる考え方を確実に支持し得るものは，一定不変の大きさを想定し得るという事情にもとづく。いいかえれば，観測数値の集団をストカスティックな集団と見なして，そのように取り扱うことの物質的根拠が存在しているという事情である。これに反して，人体の測定，社会統計等において，正常な標準を導入する場合，それは仮説的なものであるというべきである。すなわちいちじるしい量の偏差は，このような正常な標準の存在そのものをも，成立し得ない仮説として，捨て去ることを要求することができるのである。現在の統計学的仮説検定の理論によれば，いちじるしい量

の偏差とは何を指すかを明確に規定し得ることは，後に詳説するとおりである。いちじるしい偏差のないかぎり，その妥当性が許容されても，一度いちじるしい偏差があらわれるならば，それは正常的標準からの偶然的偏差とのみはみず，新しい標準の存在を考慮に入れなくてはならない，という立場をとる。星の大きさ，星の距離において，その概測値にいちじるしい偏差があったからとて，星の大きさ，星の距離そのものの存在に疑点をもつものはなく，責は観測条件に帰せられ，系統的誤差の発見へ導くであろう。これに反し，他の多くの統計的測定においてわれわれの問題となるものは，ほぼ同一の質と思われるものが，ただ量的にのみ変化しているとみられるような集団を，人間の観念において構成して論じる場合なのである。

それは，たとえストカスティックな集団とみて取り扱うという場合にも，その本質上仮説的な存在である。星の大きさ，星の距離に関しても，厳密には仮説的な存在と見なすべきであろうが，この場合，高度に安定な仮説であり，その棄却ということは，一応問題外である。星の存在に対して疑念をもたないかぎり，一応問題外である。だが，真の長さ，真の大きさの類推をもって，「真実の農民，真実の労働者，真実の所得，真実の工業設備」というような概念が，経済統計学に忍び込み，そのような標準が，実在するように思うならば，救うことのできない過誤へ導くであろう。

3.　統計万能時代の狂熱と沈静

Quetelet の統計学が機械論的な唯物論にある以上，その進路には当然大きな限界があった。第1に経済学，社会学に関する彼自身の素養の欠如から，経済，政治，宗教の方面を，自然的原因に対しての攪乱的原因として考え，いわば偶然誤差に類比しているので，社会的法則の歴史観としてあまりにも幼稚な認識であった。第2に彼の利用した確率論の適用範囲に関して，反省が不充分であった。第1の非難は，ドイツ歴史経済学派によって与えられた。Adolf Wagner (1835—1917年) の著『一見恣意的にみえる人間の行為における合法則

性』(1864年) は Quetelet の社会物理学のいわばドイツ版であって，青年 Wagner が Quetelet の方法をドイツの資料に適用して，ドイツ学派に嵐を呼び起こしたものである。この見解に対して，観念論の故郷ドイツでは，従来の宗教観，倫理観を破壊する危険な唯物論的見解であるとして非難し，道徳統計論では，意思自由の問題をめぐって激しい，だが無駄な論争をひき起こした。だいたい，機械的唯物論の背景として利用された力学的自然観には，歴史的発展の観念が欠けていた。経済現象の歴史性を主張する歴史学派からの非難は，そのかぎりにおいて正当であった。しかし，意志自由の問題の論争にまきこまれるなどは，統計学の範囲外とみるべきである。統計学の方法論からみて重要なのは，つぎに述べる第2の批判である。Wilhelm Lexis (1837—1914年)，L von Bortkiewicz (1868—1931年) 等の貢献は，注目すべきものである。

社会統計にみられる変動は，はたして確率論のいわゆる誤差の法則に従うものと見なすことができるであろうか。現実において統計的系列の安定性はどれほどのものであろうか。これらの疑問を提出し，みずからその解答方法として，いわゆるレクシスの分散理論を提出した Lexis のことばをきけば，「Quetelet の精細な説明の魔力もさめて，Quetelet の説は雲散してしまう」であろう。

Lexis の著書を読めば，統計学の強熱時代が去って，今や沈静のうちに正しい進路を見いだしてきたことを見て取ることができるであろう。統計学が全科学の女王として祭り上げられた時代は去った。しかしその時代には夢想もされなかったほど堅固な基盤の上に立って，「自然科学および社会科学の有能な，欠くことのできない支柱」(Knopp) となったのである。

4. Lexis と Poisson

大局的にいえば，Graunt から Süssmilch を経て Quetelet にいたるまで統計学の歩んできた道は，人口的ないしは道徳的な大量現象等の社会統計における法則の定立ということであった。Graunt にあっては，大数の法則の自覚はなかった。Süssmilch にあっては，自然神学的観点からの解釈であった。

Quetelet の場合には，力学的自然観の類比において，社会現象を自然現象の図式にあてはめて考えた。これらの相違はそれぞれ時代に制約されたイデオロギーによるのであるが，ともかくそこに一貫して自己を貫徹するものは，法則定立ということであった。これは人間の認識の発展において，当然ふむべき1つの段階であったであろう。なぜなら，無秩序，複雑，無限の多様性のなかから，1つの近似として規則性を発見することは，認識の一歩前進であるからである。しかしこの一歩前進が終わったあとには，この前進自身が批判されるべき段階がくる。

Lexis 等の業績は正にこれに相当する。社会統計におけるこれらの規則性は，まぎれもなく，統計的比例数のある程度の安定性を意味するものである。たとえば，ある国では女児出生数100に対して男児出生数104という規則性があるというのは，どのような根拠にもとづいているか。大正元年から大正9年までの統計についてみれば，順次

104.1, 104.4, 104.9, 104.2, 104.3, 104.2, 104.3, 104.9, 104.5,

という結果が得られる。Süssmilch ならば，これは神の摂理であり，Quetelet ならば，自然的法則であるとみるであろう。だがくわしくみれば，いずれも 104 ではない。いくぶんかの変動がある。とすれば，これを安定と見なすことができるだろうか。商業資本主義の順調な発展の時期においては，そのゆっくりした運動は，条件つきではあるが，静止状態と考えられ，その上に統計的認識の法則をつくることも可能であったであろう。だが工業資本主義の世界はすべて急速な運動の世界であった。ケトレ主義の崩壊はここに始まる。

この安定性の問題に対する批判は，Süssmilch, Quetelet のともに欠いたところである。Quetelet にあっては，彼らによってつくられた統計的観察の諸結果によって統計学は社会的事象の特殊な法則を確立するための特殊な社会科学へと転化せんとした。死亡率，出生率，犯罪率は自然的法則に転化された。物理社会学という名がこの傾向を示している。Süssmilch にいたっては，そこに神の秩序をみたことはすでに述べたとおりである。だが Lexis は，分散

の理論によってこの安定性に対する批判条件を与えた。それによれば，従来驚嘆すべき規則性をもつものとされた統計的比例数の大部分は，批判条件に落第し，安定なものとはいえなくなった。こうして上述のように，Quetelet のいう意味ではその規則性はあやしくなってくる。たとえ，その規則性が認められる場合であったにしても，これ以後われわれは，力学的自然観による社会物理学を押しつけるべき必然性をもたない。その規則性は賭博的な遊戯において，仮定されるものにおいても導き得るのである。

Lexis の分散理論は確率論の応用であり，それが法則定立というよりは，検証ということに利用されてきたのは，注目すべき動向である。かくして統計的確率の記述的意義が前景に現われ始め，法則および規範という観念は背景にしりぞき始める。

Lexis の見解によれば，社会現象の自然科学的把握にとどまるとき社会科学は統計学となるのであるが，しかし，社会現象はただ統計学的把握にとどまるべきでないとした。社会現象の要素は個人であり，個人は動機によって行動する。しかもそれらは自分自身の理解できるものであって，このような個人の相互作用として理解できるものであり，また理解することが必要なのである。

Quetelet の唯物論的傾向は，対象が観照の形式の下において考察される。

Lexis による修正反省は，近代統計学への一歩前進であるけれども，彼においては，なお越えることのできない線があった。それは転化および生成の観念を明確に把握しなかったことである。それは静態的世界観のまぬがれがたいところであったというべきであろう。

Laplace の古典確率論，Quetelet の社会物理学は 19 世紀の後半にはいって，種々の角度から批判，反省，再建の対象となりつつあった。John Venn (1834—1923)，Antoine Augustin Cournot (1801—77 年)，Siméon Denis Poisson (1781—1840 年) 等による確率の経験論的定義等も，Laplace の古典確率論に対する批判をはらむものである。今われわれは，これを確率の頻度説と呼ぶのが適切であろう。

確率の頻度説は，統計万能時代にみられたように，統計的研究が多方面においていちじるしく行なわれ，法則の定立が問題となってきて，ラプラス流の確率の定義をもってしては，応用上不適切なことが，意識されるにいたったという事情を反映している。まず第1には人口統計，とくに保険数理に圧倒的な必要がある。われわれは，ある年齢層の死亡率はこれこれというとき，それは，上述のように，経験的には次のことを意味する。

(1°)　ある年度について統計的比例数として得られる。

(2°)　この統計的比例数をさらに多数の年度についてもとめて，相互に比較する。

(3°)　その結果，もし安定的なものであれば，将来そのような事情のもとでは，同じような比例数（死亡率）を経験するであろう。

一般的にいえば，この場合，われわれ人間を試行というものとして概念的に把握する。ある層の人間を多数集めてみるということは，試行を多数くり返すことにあたる。これらの試行を集めて観察するという，集団的な大量観察を行なっている。ただこの集団的観察において，ある観察がこの集団に属する観察であるかどうかが問題である。ある年度，ある地方，ある年齢層ということが上の場合の規定ではあるが，試行にもそのような規定がなければならない。だがそれは，あくまでも，集団的な規定であり，部分的な規定であって，その規定によってはまだ規定しつくされない多様性が残されていなければならない。このような集団のもつ，個々についてみれば非決定的な性質が，問題になるのである。つまり，個々には非決定的ではあるが，集団的に観察するとき，規則性が現われてくるものが問題になるのである。安定性をもつときには，死亡率という比例数に対して，われわれは死亡の確率という概念をおきかえる。だがここで Laplace の確率と対比する必要があるであろう。

試行のくり返しをN回とし，ある当面の事象Aがその度に $n(A)$ 回生起したとする。このような経験を k 回くり返したとする。

$$(1)\qquad n_1(A)/N_1,\ n_2(A)/N_2,\ \cdots,\ n_k(A)/N_k$$

そのとき，これらの数値はほぼ等しいとみられる。また他の事象Bに関しては，

（2）　$n_1(\mathrm{B})/\mathrm{N}_1,\ n_2(\mathrm{B})/\mathrm{N}_2, \cdots, n_k(\mathrm{B})/\mathrm{N}_k$

であっても，これも同様にほぼ等しいと見られたとする。それぞれの近似的の共通値をそれぞれ $p_k(\mathrm{A}), p_k(\mathrm{B})$ とかくことにしよう。

試行の系列において，AあるいはBが起こるということを，A＋Bで示す。AとBとが排反であるならば，

（3）　$n_i(\mathrm{A}+\mathrm{B})=n_i(\mathrm{A})+n_i(\mathrm{B})$

であるから

（4）　$$\frac{n_i(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\mathrm{N}_i}=\frac{n_i(\mathrm{A})}{\mathrm{N}_i}+\frac{n_i(\mathrm{B})}{\mathrm{N}_i}$$

は常に成り立つ。だが $p_k(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ を

（5）　$n_1(\mathrm{A}+\mathrm{B})/\mathrm{N}_1,\ n_2(\mathrm{A}+\mathrm{B})/\mathrm{N}_2, \cdots, n_k(\mathrm{A}+\mathrm{B})/\mathrm{N}_k$

の共通の近似値として定義するかぎり，

（6）　$p_k(\mathrm{A}+\mathrm{B})=p_k(\mathrm{A})+p_k(\mathrm{B})$

とはかぎらない。

しかし，その式は近似的には正しいであろう。$p_k(\mathrm{A})$ に関しては次のことがいえよう。

（i）$p_k(\mathrm{A})\geqq 0$；　（ii）$p_k(\mathrm{E})=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}}=1$；　(iii)　AB＝0ならば

（7）　$p_k(\mathrm{A}+\mathrm{B})\fallingdotseq p_k(\mathrm{A})+p_k(\mathrm{B})$

こうして，(1°) 先験的確率論で導入された確率と類似の計算ができる。(2°) この経験的な数値を用いて，未来における推測を下すことができる。それは，なぜかといえば $p_k(\mathrm{A})$に対して上の計算ができるからであって，その計算の進行路は，$\fallingdotseq$ を ＝ で置き換える，すなわち近似的な等式を絶対的な等式に高めて考えていくかぎり，形式的にはまったく同一であるからである。またその場合，独立というような概念が要求されるのであるが，それは統計的には，場合の数の分類から得られるべきである。たとえば，父におけるある性質αと子におけるある性質βとが独立であるかどうかということが問題のとき，父におい

子＼父	α	$\bar{\alpha}$	
β	a	b	$a+b$
$\bar{\beta}$	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	N

て性質αのないものを$\bar{\alpha}$，子において性質βのないものを$\bar{\beta}$とし，(α,β)によって父がαでありかつ子がβである事例をさす等々と規約すれば，

(8)　$$n(\alpha,\beta)=a,\ n(\bar{\alpha},\beta)=b,\ n(\alpha,\bar{\beta})=c,\ n(\bar{\alpha},\bar{\beta})=d$$

(9)　$$n(\alpha)=n(\alpha,\beta+\bar{\beta})=n(\alpha,\beta)+n(\alpha,\bar{\beta})=a+c$$

同様に

(10)　$$n(\bar{\alpha})=b+d,\ n(\beta)=a+b,\ n(\bar{\beta})=c+d$$

独立の概念としては，

(11)　$$\frac{n(\alpha,\beta)}{n(\alpha)}=\frac{n(\bar{\alpha},\beta)}{n(\bar{\alpha})}$$

$$\frac{n(\alpha,\bar{\beta})}{n(\alpha)}=\frac{n(\bar{\alpha},\bar{\beta})}{n(\bar{\alpha})}$$

$$\frac{n(\alpha,\beta)}{n(\beta)}=\frac{n(\alpha,\bar{\beta})}{n(\bar{\beta})}$$

$$\frac{n(\bar{\alpha},\beta)}{n(\beta)}=\frac{n(\bar{\alpha},\bar{\beta})}{n(\bar{\beta})}$$

が要求されるであろう。事例の数に関するこの要求は，先験的確率論

(12)　$$p_{\alpha}\{\beta\}=p_{\bar{\alpha}}\{\beta\}$$

$$p_{\alpha}\{\bar{\beta}\}=p_{\bar{\alpha}}\{\bar{\beta}\}$$

$$p_{\beta}\{\alpha\}=p_{\bar{\beta}}\{\alpha\}$$

$$p_{\beta}\{\bar{\alpha}\}=p_{\bar{\beta}}\{\bar{\alpha}\}$$

に対照する。

この様な対応をつづけていくとき，p_kに関しては，先験的確率論の，$p(\mathrm{A})$と並行して関係式が成り立つ。ただしそれは近似式である。さらに（3°）われ

われは，同様に確からしい場合をあげるという必要がない。このような事情を観破するとき，実際上の問題には，先験的確率を経験的比率で置き換えてわれわれの目的とする計算を行ない，推測を下すことができるであろうということが考えられよう。確率の経験的定義の意義はここにある。そしてそれは，統計的研究の拡大が必然的にもたらした方法であった。だが，必然的方法といっても，今述べたことには，多くのギャップがある。第1に，特定の経験に立つかぎり，それは変動をまぬがれない。第2に，特定の経験に立つかぎり，これは有限的であって，たとえば確率の加法定理も厳密には成り立たない。第3に，前述のような場合には，試行の相対頻度の近似的恒常性はくみとられているけれども，われわれが銭投げ等で体験する生起の無規則性を把握していない。たとえば表が出れば 1，裏が出れば 0 で表わすとき

(13)　　　1 0 1 0 1 0 1 0…………

というような系列であっては，相対頻度は近似的に 1/2 であるが，第 1，第 2 の難点を克服するには，模型として無限系列を考えて，$\lim_{k\to\infty} p_k(A)$ を考えねばならなかった。第3の難点を克服するのには，本世紀にはいってからの Mises の貢献をまたねばならなかった。頻度説の長所短所に関しては，ふたたびわれわれは第9章で論ずることにする。それにしても，頻度説の最も大事な点は，先験的な確率はようするにある近似の程度において，具体的現実を反映する数学的模型であることを指摘し，現実的に与えられるものは，頻度のみであることを指摘した点である。それには，思想上の大きな革命を経た後であったことを，注意すべきである。先験性は，人為的にまた理論的に，理性によって組み立てられた集団の存在に関するものである。

確率の経験的定義を生みつつあったこの時代は，統計的結論の妥当性に関する確率論的検定に，関心を深めつつあった時代である。医事統計の父といわれる P. Ch. A. Louis (1787—1872年) もこの時代の人であった。その取り扱う事例は，ときにきわめて少数の場合があった。Jakob Bernoulli, De Moivre, Laplace の理論によれば，統計結果の正確度は，観察数の平方根に比例して増

大するものである。数学者 Poisson は司法統計，医事統計にも興味をもっていたが，2組の観測値の差異の平均誤差をきわめて簡単に計算する方法を示した。観察数の少ない場合に対する信頼度の問題も，当時盛んに論ぜられたところである。だが観察数の少ない場合の統計的な処理式の検定は，20世紀にはいって，Gosset, R. A. Fisher の開拓にまたなければならなかった。それにしても，統計的研究の発達は，すでにこの頃 Laplace の確率論では不充分なあるものを感じつつあったのである。そして統計的結論の確率論的検定を要求しつつあった。その本格的な解決には，確率論が，その基本概念において，一層明確化され，その数学が一層精巧になることが要求されるのであった。われわれはここで，統計力学の理念を考えなくてはならない。

第2編　統計学における記述と理論

第4章　古典統計力学の理念

1.　古典統計力学の理念

19 世紀後半において自然科学には一大飛躍があった。あいつづく重要な研究成果のうち，とくに

(1°)　エネルギーの変化の証明，熱と仕事との関係，エネルギー恒存則

(2°)　有機細胞の発見

(3°)　Darwin の進化論

の三者は決定的に重要であって，それは人類の思考方法，世界観に変革をもたらすものであった。まずわれわれは必然的に，力学的自然観の偏狭を克服しなければならなかった。すでにみたように，統計学の性格は，根本的には過去のそれぞれの時代の支配的思考方法によって規定されていた。したがって，このような変革が，統計学の方法にも必然的に影響しなければならないとみられるであろう。事実 (1°) は統計力学の，(3°) は記述統計学の，生成の基礎となった基盤である。(2°) は間接ではあるが，遺伝学を通じてみれば，現代の統計学に根本的に影響している。本章では (1°) について論じ，(2°)，(3°) に関しては次章および第7章において述べたいと思う。

統計力学は，自然科学である物理学の一部門である。しかしながら，古典的な気体論が Maxwell, Boltzmann によって開拓されてから Gibbs の統計力学にいたる過程において，いいかえれば自然現象の機構に肉迫し，これを正しく反映する理論の構成を目指して進んだその過程において，従来の確率論を使用するのみでなく，さらにその基本概念に対して根本的な反省をうながし，また古典確率論に明示されなかった（あるいは萌芽しなかった）概念の導入ない

し明確な自覚を必要としたのである。

現在の公理主義確率論は，皮相についてみれば，それは Laplace の古典確率論の，現代的用語である集合論的表現のようにみられるが，単にそれだけのものとみるのは，現代確率論の骨格と機能とを理解したものとはいえない。両者の間には，統計力学という自然科学の成果が介在している。数学の一部門である現代確率論の構成には，統計力学の思考方法が寄与しているのである。現代の確率論の基本概念，基本的な問題がいかに多くこれらに負っているか，今事例をあげてみるならば，

(1°)　力学的体系と統計力学的体系の対比

(2°)　先験的確率分布（a priori probability）

(3°)　統計集団（statistical ensemble）

(4°)　エルゴード定理

(5°)　ゆらぎ現象と確率過程

(6°)　エントロピーの増加と現象の非可逆性

確率変数の概念，エルゴードの問題，確率過程の理論等現代確率論の核心的なものは，統計力学の経験をもって最もよく理解されよう。逆にいえば，気体運動の統計力学的考察に対してこそ，現代確率論は，もっとも適合した数学形式であるとさえいえるのであろう。

現在，われわれが理解するかぎりでは，統計力学の理念は次のように要約されるであろう。——ここでは，量子論の導入以前の古典統計力学の立場からみておこう。

力学系の行動を調べるにあたって，以前の古典力学では，運動を規定する微分方程式とその初期条件とを完全に与えられるならば，未来の状態の精密な予言が原理的に可能であり，それを求めることが努力の目標であった。しかしながら，物理的な世界に対してその初期条件，運動方程式の形を完全に知るということは元来，抽象的な極限概念であって，古典力学が成立するのは，理想化された事情のもとにおいてのみである。ここにさらに一段の現実への肉迫を要

求するならば，力学系の行動を，理論的に可能な最大限の知識の下でなく，不完全な規定から出発しても論じ得る方法が必要になってくる。統計力学の役目は，ここにある。

この意味では，自由度の少ない，比較的簡単な力学系にあっても，たとえば初期条件を完全には指定し得ないかぎり，これに対する統計力学的方法の適用が考えられないわけではない。しかし，そのような問題に対しては，微分方程式論の安定性の問題，比較定理の形にふくませて，解の近似性の問題として取り扱って片づけて，さしつかえなかった。歴史的には，統計力学はこのようにして，力学系として自由度のきわめて多い気体論から生まれたのである。

統計力学は気体論から誕生するまでに，多くの段階を経なければならなかった。気体論すなわち気体の運動学的理論は，19 世紀初頭 John Dalton (1766—1844 年), Amedeo Avogadro (1776—1856 年) 等によって，化学において確立された分子の概念を熱現象の考察に導入するものであって，気体の場合には分子の運動がほとんど自由であると考えられ，分子を完全に弾性的な球体と仮定して，相互の衝突のため各分子がいかに制約されるかを論じ，これによって気体の諸性質を説明しようとするものである。だから，分子説の確立はその理論の前提でなければならない。だが，Maxwell, Boltzmann が気体運動の分子論的構成に苦闘した当時，分子説の実験的基礎は，かならずしも確固たるものではなかった。とくに，1870 年代において，熱力学第二法則，すなわちエントロピー増加の法則の説明に異常な難関が横たわることが判明した。すなわち熱力学の第二法則によって，熱現象は常にエントロピーの増大する方向にのみ起こり，その逆を示さない点で非可逆的現象である。これに対して分子の運動が力学の法則に従うかぎり，まったく可逆的な現象でなければならない。可逆的変化のみを行なう分子の体系において，いかにして非可逆的な熱現象がおこるかということである。ここに困難があったのである。

気体論が出くわしたこの大難関は，Mach, Kirchhoff, Ostwald 等の記述学派ないしは経験批判論を発生させた。Mach 等は熱現象の力学的，分子論的説

明の可能性を疑った。Mach 等の見地によれば，物理現象の力学的説明はすべて仮説的なもの，技巧的なものである。われわれは物理学を事実の記載に限定し，事実の背後に仮説を立ててはならない。Mach 等のこの考え方は，力学的自然観を否定するとともに，あわせてわれわれの経験の背後にある外界までも抹殺しようとするものである。これに対して，Boltzmann の立場は，物質の存在しない運動は考えられないということであった。Maxwell により確立された気体分子に関する速度分布則を確率論的に完成し，エントロピーSと状態確率との間に $S=k\log W$（k は比例常数）を見いだし，H-定理を証明し，熱の非可逆性を気体論的に導き出すことに成功した Boltzmann は，物理学に確率の概念を導入したものであって，偶然性の介入によって始めてこの結果に到達し得たのである。したがって，確率とは知識の不充分のためにわれわれのやむなく用いる数学的便法でない。制御することのできない偶然誤差の処理の便法という立場からの前進である。そこに立って，始めてある種の知識を把握できるであろう見晴台である（したがって Boltzmann の成功は力学的自然観に寄与するものではない)。

2. 気体運動論における統計的見方

力学的自然観からすれば，「空気あるいは他の気体の単一な分子の描く曲線も，惑星の軌道と同じく，正確な形に規定されているのであって，それが違うように思われるのは，単にわれわれの無知識のためにすぎない。」(Laplace) しかしながら，われわれの取り扱う程度の気体は，無限大とみられるような多くの（1グラム分子中に約 6×10^{23} 個）の分子をふくむ。これを1つの力学体系とみるならば，非常に多くの自由度が存在する場合である。しかも，状態をきめるためには，ようするに，ある瞬間 $t=t_0$ において初期条件としてN個の分子の初期位置，初速度が与えられ，しかも $t>t_0$ に対してはすべての座標を時間の関数として表わすことが必要である。だがNは人間的尺度においては無限大に近い。人間の寿命を50年とすれば，約 1.58×10^9 秒である。他方ロー

シュミット数 6×10^{23} と比較すると，1人の人間が小さな体積に含まれる分子を一生涯かかって考えつくすためには，1秒間に数十億の分子を考えなければならない。だから，上の関数を知るというようなことは，架空のことである。たとえ知り得たとしても，それはいたずらに複雑なだけである。すなわち，Nが∞になる極限に対応する場合には，個々の軌道を追跡することは不可能であり無意味である。だから問題に対するわれわれの態度に，変革が要求される。ここに量より質への転換がある。

気体運動論には，このようにして，確率の概念を導入することが要求された。そこに利用される数学的模型と統計学的仮定とは，もちろん実在の1つの近似的な模写であるが，その妥当性は，気体分子のもつ物理的諸関係の量的関係によって支持され，保証されるのである。分子の大きさ，分子相互間の距離，分子の運動速度，おのおのの分子が行なう衝突の回数等に関する数量的な関係を考慮に入れてこそ，初めて確率論的考察の必然性が把握されるのである。

今われわれはここに，歴史を仮想してみよう。この仮想において，われわれは気体分子に関する知識を次々と追加補充しながら，確率論的考察が必要となる段階にいたることを示そうと思う。その仮想は，Daniel Bernoulli, Clausius, Maxwell を経て Botlzmann の段階にいたった，気体論発展の史実とある程度照応しているであろう。

まずわれわれは，われわれの出発点の知識を明らかにしておかなくてはならない。

（i） 理想気体については，Boyle, Gay-Lussac の法則によって，圧力を p，1グラム分子の体積を v，気体常数をR，絶対温度をTとすれば，$pv=RT$ であること。

（ii） 標準状態（温度 0°, 1 気圧）の下において，気体の1モル中に含まれる分子数（ローシュミット数）を知っていること，たとえば $L=6.023\times10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$，また分子量1の原子について質量 m_0 が知られていること（たとえば，水素原

子について 1.6736×10^{-24}g)。

以上を出発点として，われわれがこれから進んでいくとき用いる方法は，試行錯誤的であり，実在への逐次的近似法である。

【1】D. Bernoulli の段階　L，m_0 を知っているとき，われわれは次のようにして分子の運動速度に関するおおよその知識を得る。その方法は，実際の気体分子に対して，重要な仮定を立てて，そのモデルについて考えてみるのである。今，1つの直方体の中にN個の分子があるとする。この容器内の一点を共有する三辺を三次元空間の座標軸において考える。

(1°)　N 個の分子は各 1/6 ずつの割合で 6 組に分かれ，同一組内の分子は，3つの座標軸の正方向か負方向かのいずれかに直進運動をしている。

(2°)　壁にぶつかると向きだけ変わる。

(3°)　各分子の速度は同一で，v である。

これは Daniel Bernoulli のころの段階である。この仮説から，われわれは v の値を求め得るであろう。vN/6V は1秒間に 1cm² の壁に衝突する分子の数である。このような衝突の1つは，壁に対して m_0v の運動量を与える。

さて圧力とは，1秒間に，1平方センチあたりの運動量の変化であるから

$$\text{(1)}\qquad \mathrm{P}=2m_0v\cdot\frac{v\mathrm{N}}{6\mathrm{V}}$$

他方ボイルの法則によって，PV=NkT, (Nk=R)。したがって

$$\text{(2)}\qquad v^2=\frac{3\mathrm{R}}{\mathrm{M}}\mathrm{T}\quad(\text{ただし } \mathrm{M}=\mathrm{N}m_0)$$

ここに，R, M, T が知られていれば，v^2 の値は得られる。たとえば，R＝0.83145×10^8 erg/degree, T＝0℃，酸素分子をとれば M＝32 であるから

$$v^2=2.12924\times10^9\left(\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}\right)^2$$

【2】マクスウェルの速度分布則　上の模型では，すべての分子を通じて，速度一定として議論している。しかし1分子の速度は分子相互の衝突その他の原因によって始終変化するものとみられよう。James Clerk Maxwell (1831—79年) の出発点は，熱的平衡状態にある静止気体では，速度分布は常に一定の法則に従うものと想定する。〔1〕では速度 v は一定常数と仮定して，v の値をも

とめた。Maxwell においては，v は一定であるという仮定をしない。その代わり，v は一定の分布に従うものとする。その分布は，次の関数方程式に従うものと想定するものである。x, y, z の方向の速度成分を u, v, w とする。N 個の分子のうちで，u 成分が u と $u+du$ との間にあるものの数を $Nf(u)du$ とし，同様に v, w がそれぞれ v と $v+dv$，w と $w+dw$ の範囲内にあるものの数をそれぞれ $Ng(v)dv$, $Nh(w)dw$ とする。速度に関して，これら3つの条件を同時に満足する分子の数を $N\varphi(u, v, w)dudvdw$ であらわす。すると Maxwell の想定するところは，次のことに帰着する。

（i）**等方性**　どの方向も同一の性質を存し差異がない。したがって f, g, h は同一の関数形であり，φ は $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ のみの関数である。

（ii）**速度成分の独立性**

（3）　$$N\varphi(u, v, w)du\,dv\,dw=Nf(u)g(v)h(w)du\,dv\,dw$$

この2つの仮定から，関数方程式

（4）　$$\Phi(\sqrt{u^2+v^2+w^2})=f(u)f(v)f(w)$$

が定立される。

これを解くには $v=w=0$ とおき，$f(0)=\lambda$ とすれば

$$\Phi(u)=\lambda^2 f(u)$$

となり，関数方程式の両辺の対数をとり，

$$\log f(\sqrt{u})=\phi(u), \quad \log\lambda=\mathrm{A}$$

とおけば，

（5）　$$\phi(u^2+v^2+w^2)=\phi(u^2)+\phi(v^2)+\phi(w^2)+2\mathrm{A}$$

という関数方程式になる。これを解いて，ϕ が一次式であること，すなわち，

（6）　$$\phi(u^2)=\beta u^2+\mathrm{A}$$

を導き，けっきょく

（7）　$$f(u)=\alpha e^{-\beta u^2}$$

の形を出す。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du=1$$

であるから，

(8)　　$\alpha=\sqrt{\dfrac{\beta}{\pi}}$

そこで c^k（たとえば $k=1,2$）の平均値 $\overline{c^k}$ を求めることができる。

(9)　　$\overline{c^k}=\int_0^\infty \varphi(c)\, c^{k+2}dc\int_0^\pi \sin\ \theta\ d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi=4\pi\left(\sqrt{\dfrac{\beta}{\pi}}\right)^3\int_0^\infty c^{k+2}e^{-\beta c^2}dc$

たとえば，

$$\bar{c}=4\sqrt{\frac{2}{\beta}}\ ,\qquad \overline{c^2}=\frac{3}{2\beta}$$

気体全体の運動エネルギーをEとすると

$$E=N\int_0^\infty \frac{1}{2}mc^4\varphi(c)\,dc=\frac{Nm}{2}\overline{c^2}=\frac{3}{4}\ \frac{Nm}{\beta^2}=\frac{3}{2}NkT$$

この式から β が求まり，したがって，$\bar{c}$, $\overline{c^2}$ の値が決定される。この論法は，平衡状態に行きついたものとしての状態を調べるのであって，そこにいたるまでの過程を考慮に入れていない。たとえば，温度 273°K で，H_2 に対しては 1750m/sec, O_2 に対しては 425m/sec となり，拡張の速度と比較してみると大きすぎるようになる。しかし，運動は方向に関してランダムである。さらに衝突を考慮に入れることが必要である。

【3】分子の衝突回数および平均自由行程に関する予備的考察　今，分子はすべて直径 σ の球形をしていると仮定し，初めただ1個のみが運動して，他の分子は体積Vの空間に一様に配置され，静止しているものとして，その衝突する回数を求めてみよう。運動分子の速度をcとすれば，その衝突回数の多少にかかわらず，行程の総和は1秒間にc cmである。「分子の直径は σ であるから仮りに此空間が寒天の如き物にて充され，其内にN箇の砂を散布せる際に，此分子大の虫が此速度にて運動せりとすれば，1秒間に穿ちたる孔の容積は $\pi\sigma^2c$ なること勿論なり。而して此虫が此際出合ふべき砂の数は，$\pi\sigma^2c$ の容積内にある砂の数に等しき故に $Z=N\pi\sigma^2c$」（日下部四郎太著『物理学汎論』上巻)。これが単位時間に分子が衝突する回数である。そこで1回衝突して次に衝突するまでの距離を l とすれば，l の平均は

(10)　　$l=\dfrac{c}{Z}=\dfrac{1}{N\pi\sigma^2}$

さて，今われわれが便宜上設けた仮定をとる。今まで述べたところでは，マクスウェルの速度分布法則を用いなければならない。すると，平均相対速度 $\sqrt{2}\,\bar{c}$ を用いなければならない。

$$Z = N\pi\sigma^2\sqrt{2}\,\bar{c} \tag{11}$$

$$l_m = \frac{\bar{c}}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}N\pi\sigma^2}$$

平均自由行程の1つの式である。あいつづく二衝突間の平均時間として

$$\frac{l_m}{\bar{c}} \tag{12}$$

をとることができるであろう。

以上の考察から，室温程度では，気体分子の運動速度は毎秒数百メートルの程度であり，二衝突間の時間は 10^{-10} 秒の程度であり，分子の大さは 3×10^{-8} cmの程度である。これらの結果も求める方も粗雑であった。しかし今ここでは，われわれは発見的方法としての価値を認めればよい。

【4】気体論における分子衝突の様相　分子の大きさ，相互間の距離，そのおのおのの行なう衝突回数等に関して，その数値のおおよその程度を知った。これらの数量の大きさの程度を相対的に比較してみると，気体運動論の分子的考察において統計的見地を導入するのでなければ，進みようもないことがわかる。重要な論点はまさに，このことである。

今，このために拡大して考えて，問題を直観的に一応把握するのが便利であろう。以下数学者 Borel の説明を借りて述べよう。直径 10 cm の固定球が空間に一様に分布されていて，最も近い球間の距離が互いに数メートルである。今これと同じ大きさの球が，この間を運動していく。そして，それは1秒間の衝突回数が10億回程度の非常な速さである（衝突の際の反射は，光の反射の法則に従うものとしよう）。この非常に多く衝突するという事実が，衝突前におけるきわめてわずかの不確定を，非常な速さで，しかも非常に大きな割合で拡大していくことになるであろう。

このことを次のようにみることができよう。「運動する球の中心は1つの質

点となり，固定球の方は，中心はもとのまゝで半径を2倍にして考へる。今，運動する質点の或位置より，非常に細い光線の束が非常に小さい頂角をもつ転円錐を発射したとする。これが1度固定球にぶつかると，その頂角は拡大されることは，容易に想像されよう。1回の反射に頂角が10倍になつたとしても，1秒後には同様な反射が10億回繰返されるから，1秒後には頂角は10^{10}倍となるわけであつて，この光線の束の種々の部分はもはや同一の分子にはならない。最初に1つの細い束をなす光線の各部分の運動の歴史は1秒後に至らぬうちに，もはや相異つた分子に衝突するようになるために全然異つたものになる。細別して追求しなければならなくなる。しかし又1秒足らずに更に細別の必要がおこる。この様な細別の数は，指数法則に従つて増大して行き，遂には気体分子の総数と同じ位の大いさとなるわけである。この事から次の事が見透されるであらう。」（ボレル著，矢野健太郎訳『偶然論』）

(a) 細い円錐内部にある種々の初速度から出発すれば――いいかえれば，出発点においてそれだけの誤差があれば，――数秒後にはこの分子が，他の任意の1つの分子と衝突する確率は同様に確からしい。

(b) この衝突は，衝突される分子の表面上のまったく任意の点で同様に起こり得る。

(c) 今，1つの分子だけが運動し，他は固定したと考えたが，この仮定をとって，すべての分子が同様に運動している場合に立ち帰って考えれば，その任意の2つが衝突することが，考え得るすべての組み合わせについて同様に確からしいということになる。

衝突の影響は，このようにして，最初非常に小さいと仮定した軌道の束を非常な速さで拡張させるので，数秒の間には，分子のその後の運動は，非常に多くの可能性が，先天的には同様に確からしいという意味で，非常に不確実なものとなるのである。ここで次のことを指摘しておかねばならない。ある与えられた瞬間 $t=t_0$ では，これらのうちのただ一つが実現されるわけであるが，それを規定しつくすことができない。したがって始原条件に不確定がのこる。そ

の不確定のために，時間 $t>t_0$ に対する状態に対しては，ただ統計的にだけ問題は提出され，解かれ得る。

3. Boltzmann の段階

Maxwell から Gibbs の統計力学の理念に達するまでには，Ludwig Boltzmann (1844—1906年) の段階を経なければならなかった。

Boltzmann のこの方面の業績については，われわれは次の諸点を強調しなければならないであろう。

(1°)　マクスウェルの速度分布の導き方は，平衡になりつくした状態だけを考え，その状態を記述する関数方程式を想定し，これを解くことにあった。Boltzmann は，分子の衝突という力学的な機構に立ち入り，しかもかならずしも平衡になりつくさない任意の状態から出発して，その行きつく極限としてマクスウェルの速度分布を指示した。それは物質の熱的性質を力学模型の上に立って説明する方向への一歩前進である。

(2°)　しかしながら，Boltzmann は，その際，衝突回数算出の仮定 (Stosszahlensatz) を用いている。この仮定は，本来確率論的にのみ解釈されるものであって，純力学的仮定ではない。この仮定を用いるかぎり，純粋に力学的な1つの体系を，個別的に，力学の法則によって追求し，ゆきつくところを求め，次にこれをこのような体系すべてについて平均して得られる結果をもとめるものではない。このような追求は，事実は不可能なのである。Borel が指摘するように，それは次の確率論の問題を解くことと，けっきょくは同じことを解いている。

問題　各分子の速度を，原点として一定点Oをもち，この速度に平行なベクトル OM であらわす。すると原点までの距離の平方の和がある特定の与えられた値であることを知って，空間における点Mの最も確からしい分布を見いだすこと。

(3°)　Boltzmann が証明したマクスウェル分布への近迫は，現在の数学の

用語でいえば，法則収束（convergence in probability law）である。すなわち，始原分布が時間の経過とともに行きつく極限分布法則を求めたのである。これは，個々の力学的体系が力学の法則にしたがって経過していく状態を追求して，のちにその極限の力学系の様子を示したものではない。

（4°）原子論的立場を固執し，あくまでもエネルギー論者の現象論と闘ったBoltzmann にとっては，個々の現実に与えられる力学系について熱平衡が成り立ち，マクスウェル分布の成り立つことを示すことがその立場上絶体的に必要であった。

これに対する解答を与えるため，Boltzmann は次のような道順をとる。

（i）仮想集団の空間を想定する。それは位相空間であるが，個々の力学系は，この位相空間の一点で表わされるとする。これはミクロカノニカル集団といわれる。

（ii）われわれが巨視的に平衡とよぶ状態は，ある任意の原始状態から出発した力学系が（自身の閉じた系としての運動方程式にしたがって）時間的につぎつぎととっていく状態のうち，長時間にわたって滞在する位相空間の部分である。この部分は初めの状態のとり方には依存しない。

（iii）個々の力学系をその元とする仮想集団についての，ある物理量に関する平均を集団平均といい，ある個々の力学系の時間的経過についての物理量の平均を時間平均という。同じ物理量に関して

（13）　　**集団平均＝時間平均**

を示すのが Boltzmann の目指すところであった。

（iv）このためには，次の等式を必要とした。

（14）　　集団平均＝集団平均の時間平均
　　　　　＝時間平均の集団平均
　　　　　＝時間平均

この3つの式のうちで，第1は，ミクロカノニカル分布の時間に関する不変性により成り立ち，第2は平均順序の交換であるから，とくに病理的な場合でな

ければ成り立つ。第3の等式を見いだすために，Boltzmann はエルゴード仮説を導入したのである。

（v）　力学系の各状態は位相空間の一点として表わされる。状態の変化は，こうして位相空間での点の運動となり，それを位相軌道とよぶ。総エネルギーが E の位相面を離れないエルゴード仮説というのは，もとの形ではこの E という位相面上には実はただ1つの軌道しか存在しないのであって，位相点はその運動の際に，E 面上のすべての点を通るというのであった。この仮説によれば，統計集団に属するどの力学系状態も同一軌道にあるわけであるから，時間平均はすべて共通である。しかし，エルゴード仮説は，このままの形では，認められないもので，解析的な曲線をもって一般に n 次元（$n \geqq 2$）空間の領域のすべての点をおおいつくすことは数学的にはけっしてできない。数学者 A. Rosenthal および M. Plancherel がこれを示した。こうして，P. および T. Ehrenfest の示したように，エルゴード仮説の代わりに“1つの位相軌道は E 面上の任意の点を通らないとしても，その点のいくらでも近くを通る”といういわゆる準エルゴード仮説(Quasi-ergodic hyopothesic) を提唱しなければならないのである。

こうして Boltzmann がエルゴード仮説と呼んだところの要求は，直観的には漠然とした意味で，1つの軌道がエネルギー面上を，いたるところ経過するということであったとみるべきであろう。ただし Boltzmann 自身は，そのような用語を表面に出すことさえしなかったといわれる。

したがって，Boltzmann のプログラムは，次のように理解されるべきであろう。熱力学的性質を模型の力学系にうけ入れてみるならば，それは長い時間の後には平衡状態に到達してそこにとどまるのであるから，力学系の性質の長時間平均をとれば，それが平衡状態における性質をあらわすものであろう。平衡状態，たとえばマクスウェル－ボルツマンの分布というような状態は，位相空間内できわめて大きな領域 A を占める部分に相当する。Boltzmann のいうようなエルゴード性が成り立つならば，力学系が，位相空間を動きまわる道中

において，この大きな領域Aを通過する時間はきわめて長いわけである。したがって，任意に時刻を指定して，その時刻に力学系がどのような状態にあるかをみると，領域Aにある，すなわち平衡状態にある，という確率が大きい。平衡状態へ近づくこと，H-関数の減少もこの見地から統計的に解釈されるであろう。

4. Gibbs の統計力学

20世紀初頭の1902年に Gibbs の名著『Elementary principles in statistica mechanics』が刊行された。これこそ，Clausius, Maxwell, Boltzmann の各段階を経て生長してきた気体運動論に，古典統計力学としての一応の完成を与えるものである。しかも古典論としての完成は，とりもなおさず，量子論への発展の契機をふくむのである。

19 世紀の気体運動論では，物質の構造に適合する模型を常に念頭におき，分子の性質に関して種々の仮定をおいて議論した。1つ1つの分子が，統計的意味における個体であった。だが，Boltzmann にしてもすでに，1つの気体状態ではなく，気体の1つの状態を点として表現する位相空間の概念を用いる必要があった。Gibbs にいたっては明らかに，態度に変換がある。この点を強調して Gibbs はいう。

“物質の構造に関して仮説を設け，その仮説の上に仕事，議論を進めていくのは，不確実な基礎に立つものである。こうした難点のために，私は自然の神秘を説明しようという試みをさまたげられた。そして力学の統計的分野に関する，より明確な主張を演繹するだけという，もっとひかえ目な目的に満足せざるを得なかった。そのかぎりでは自然界の事実と，仮説の一致ということに関しては，誤りをおかす懸念はあり得ない。なぜならば，自然界の事実についてわれわれはどんな事柄をも仮定しないからである。”

こうして Gibbs は，統計集団 (ensemble) を第1に考察のスタートにおく。Gibbs の統計集団というのは，その要素をなすのは分子ではなく，気体の力学

的状態である。同一の統計集団に属する力学的状態は，少なくとも実験を行ない得る諸性質に関しては全然同一のものであるが，しかし，分子の運動は同一ではない。分子の運動に関して起こる可能性のあることはすべてふくむように，この集団をきめておくならば，統計力学はこれら多数の気体のなかで最もしばしば現われる性質の研究ということになるのである。

こうして第1に，統計力学ではある力学系を問題とする場合，それが，初期条件において完全に規定されず，時間的経過についても個々にその経過を追求できないために，これを統計的にみる。たとえば40歳の人間がいたとしよう。この人の死亡の時期をここで予言することは，一般にはできない。その人を規定する諸条件はあまりにも複雑である。しかし，次のようなことはできる。生命表を開いて，年齢40歳の人の平均余命をみれば，何年と出るであろう。そしてそれを答えとすることができる。この場合，ただ年齢だけでなく，性別，地域別，職業別等の立場から分類して生命表ができているならば，さらに予言は的中する可能性を高めるであろう。それはともかく，当面の人がどのような集団に所属するとみるかが問題である。それがきまれば，それが所属する集団についての平均値を求める値とする。統計力学においても，与えられた力学系と前述のような意味で同様なものの集団を概念上構成し，この集団についての平均値をもって答えるのである。第2に，統計力学はなんらかの事前確率を必要とするものである。上述の意味で同一の集団に属する互いに異なる多くの状態が，それぞれ起こり得る可能性をもつが，その可能性の程度を事前確率という。このことを1つの力学組織がとり得る互いに異なった状態という。

この事前確率を前提として設けなければ，Gibbs の統計力学は打ち建てられない。それは，古典確率論で，サイコロ遊び，銭投げ等多くの問題において，それぞれ各目のあらゆる確率，表裏のあらゆる確率等を前提して出発するのと同様である。後者の場合，それぞれ各目のあらわれることに確率1/6，表裏の出現に確率1/2を仮定するのであるが，それは実際にはもちろん多くの経験，試行等の実践を経てのことであった。統計力学における事前確率の仮定も，そ

れ自身は，アプリオリであるとして与えられても，その経緯にはそうした経験があり，またその仮定の妥当性は，こうして立てられた理論と実験との対比によって判断されなければならないのはいうまでもない。

事前確率の仮定として普通採用されているのは，位相空間における平等事前確率（equal a priori probability）の仮定である。それは，位相空間における等しい体積に属する事前確率は相等しいというのである。R_1，R_2 を位相空間上の任意の2つの領域とし，体積

$$v_i=\int\cdots\int_{R_i} dq_1\cdots dp_f \qquad (i=1,2)$$

が相等しい，すなわち $v_1=v$ とすると，R_1 に属する確率と R_2 に属する確率は相等しいとするのである。この仮定を証明なしに，出発点におくところに，ギッブズ流の統計力学の本領があるといえよう。

以上の二点，すなわち，統計的な解答と平等事前確率の仮定とに対して，起こり得べき疑問をまず検討してみよう。

（i）　第1に統計的な解答しか与えられないことに対しての不満である。しかし，これはわれわれの当面する力学系の状態が，完全には規定されないものであるかぎり，統計的にみざるを得ないのである。しかも平均値のみならず平均値のまわりの変動も計算できる。たとえば平均値の外に，標準偏差がわかったとすれば，平均値からある任意に指定された値以上にくい違う確率も評価できる。しかも，統計力学で実際問題として解かなければならない多くの場合において，この変動はきわめて小さい。

（ii）　事前確率を仮定することは当然として，そのうちでとくに平等な事前確率をとることが妥当であるか。リウヴィルの定理によれば，次のことがいえる。位相点が力学の運動方程式に従って，位相空間上に軌道をえがく，いいかえれば，運動方程式は位相空間における変換群$\{T_t\}$$(-\infty<t<\infty)$ を定めるのであるが，この変換は体積不変である。すなわち，任意の集合Aについて，Aの体積と，Aが時間 t に移されてできる集合 T_tA とは体積が相等しい。Gibbsは，正当にも，リウヴィルの定理を principle of conservation of extension in phase space とよび，その重要性を強調した。だがここで重要なことは，ただ体積不変ということではない。その形がどのようになっていくかということであろう。その形は，一般には，時間とともに変化するものである。このことは，衝突という機構に立ち入って2節で述べたことを振り返ってみれば明らかであろう。あとで説くように，この特性を測度可遷の概念によって表現しようとするのが，エルゴード論の行き方である。それは，コップの水の中に，インキの一滴を落とすと，それが拡散によってほどなく一様になるような，位相空間における拡散という方がいっそう直観的であるであろう。このことから同等事前確率の仮定をもっともらしいものとして認めようとするものであろう。

ようするに，統計力学の立場では

（i）　統計的な立場からの解答を与えるだけである。すなわち，正確に規定された結果でなく，平均において期待されるべき結果を与える。

（ii）　ここに平均とは，当面の力学系の状態をふくむ，力学系の状態の仮想集団に関しての平均である。

（iii）　平均ではあるが，平均のまわりの変動はきわめて小さいから，この平均をとって，実際上さしつかえない。

（iv）　このように統計的接近であり，平均を用いるからには，当然事前確率を仮定しなければならない。

（v）　事前確率の仮定として，平等事前確率を仮定するのがただ1つの妥当な仮定である。

5.　エルゴードの問題

Gibbs の段階においては，統計的な立場を明らかにした点において，Boltzmann に比べて一歩の前進がみられるのである。だが，1つの理論のもつ長所短所をあわせて認識することによってのみ，われわれは前進の道を見いだすことができるであろう。

力学的機構に関する想像的な多くの仮説を避ける熱力学的考察では，巨視的

観測で示されるものが大切であり，急激かつ不規則に変化交替する力学的過程の個々別々の相には目をくれない。しかもこれと同時に，統計的考察であるがために，個別相をふくむ集団の概念を確立したのである。

われわれはここで，2つの点について詳しくみよう。第1に統計的な見地として，仮想集団における平均値および偏差を問題にする態度は，はたして物理学的な解答として充分であるかという点が問題である。われわれが巨視的観測でみていることは，集団からの多くのサンプルについて経過をとり，その平均をとっていうのではない。現に実験しつつある個別的な物理体系が，時間とともにどのように経過するかをみているのである。インキを水のはいった容器に落としたときの拡散のように，現に一様な分布に近づく場合をみている。このことを表現するのに，仮想集団について平均してみると，一様分布に近づくというのは，現代の数学の用語でいえば，法則収束ということである。法則収束はかならずしも，個々の場合の収束を保証するものではない。個々の場合，収束に対して解答を与えるのでなければ，まだわれわれは現実の問題に対する解答を得たとはいえないであろう。

統計学における平等先験確率の仮定についても，なお多くの問題があるであろう。統計的考察を行なうものであるかぎり，先験確率の存在は仮定されなくてはならないであろう。しかし，このことから，平等先験確率を仮定しなければならないとはかぎらない。ある任意の分布を仮定しても，力学的体系が個々に行きつくところは，位相空間における平等分布であるということを示してのみ，その意義に現象論的，記述的意味あるいは working hypothesis 以上のものがあるであろう。

この2つの要求をみたすためには，エルゴードの問題を論ずるほかはない。この問題については1930—31年にいたって G. D. Birkhoff および J. von Neumann によって明確な数学的表現が与えられたが，その仕事は Poincaré, Caratheordory の線をひきつぐものである。そこでは，ルベグ測度論の採用があって，これにより初めて，エルゴード仮説の明確な表現がみられた。個別

エルゴード定理は，個々の力学系の時間的に経過して行く状態に関して，ある物理量の時間的な平均は，ほとんどすべての場合に，位相空間における平均値に収束するというのであり，その収束は概収束である。概収束とは，ルベグ可測な集合から0測度をのぞいて，いたるところで収束するということである。位相空間を想定し，先験的確率の存在を仮定するかぎりにおいて，Gibbsの統計力学の流れに沿うものである。しかも，それらの理論では，位相空間における位相点の運動を，tをパラメーターとする変換群$\{T_t\}$$(-\infty<t<\infty)$として把握し，しかもこの$\{T_t\}$は，Boltzmannの立場からいえば，衝突の機構に立ち入って論ずべきであるのに，これら数学者の理論においては体積不変の変換として考えられる。その方法は現象論的であり，記述的である。だが反対にそれと個別エルゴード定理を求めるという段においては，Boltzmannの固執した見解に対して，なんらかの解答を与えようとするものである。現在エルゴードの問題に対しては，ここで全般的にその説明をしつくすことは困難である。

Boltzmannが Mach, Ostwald 等の現象論者と戦って，悪戦苦闘したころには，その思想を表現するのに適切な数学的用語を欠いた。位相空間のすべての点を通る軌道は，数学的に不可能であるが，物理的にいっても，そのことが必要なのではない。ルベグ積分論が加われば，“すべての点”でなく“ほとんどすべての点”という表現が可能になり，これで充分なのである。また，マクスウェル速度分布，H-定理に関するBoltzmannの証明は，さきに述べたように衝突回数算出の仮定に立脚するために，すでに確率論的なものであり，1つの気体の状態の個別相を追求するものではない。この点を徹底して，位相空間における上述のような変換の流れとして把握することが，方法的に洗練されていることはいうまでもない。位相空間の定立，ルベグ積分の採用，位相空間における流れとしての把握――この見方への発展のためには，Gibbsの統計力学として気体論が整頓される段階を経なければならなかった。それは現象を，実在を，記述する用語を豊富にすることであった。けれども，その段階が究極に達した最後の段階であるとして，平等先験確率の仮定を導入してエルゴード論

の不必要をとなえるのは，物理現象認識の目標を見失うものではなかろうか。第1に，その段階は法則収束の立場を出ない。われわれは，概収束の問題として取り扱わなくてはならないのである。そして，そのためには，第2に，先験確率として平等分布を仮定する代わりに，任意の分布から出発して，到達する姿として把握すべきである。静的な，均衡の理想状態を設定して，そこにおける平均を論ずるのではたりない。現実の個別相の行きつく姿としての均衡を，過程の極限として把握しなければならない。この目標を追求すること自体は実在論者 Boltzmann の思想をうけつぐものである。以上のことからもわかるように，現在のエルゴード理論は，記述論者の洗練を経た後に，実在論者の目標を追求するものであって，両者の立場の総合に立つとみられるべきであろう。

数学者によって主として開拓されつつあるエルゴード理論に対して，物理学者の側においては，多くの冷淡無関心がある。だが，その原因となるものにルベグ積分論に対する無理解がある。数学者の側における研究の進め方に，かならずしも，上記の目標に主眼をおかないものもあるのがその1つの原因であろう。数学者の側で自然科学への関連，実在への近迫という使命を忘れないこと，物理学者の側で自然解明の数学的用語の不断の洗練を理解すること，それが協力のための前提条件でなければならない。

6.　ゆらぎ現象の表現

熱的平衡にある場合に，熱力学の用いる諸量は，それぞれ適当な量の平均で与えられる，というのが統計力学の見地である。個々の場合には，平均と異なった場合の存在することが，その特徴をなす。ただ，平均からひどく隔たった状態の確率が無視できるほどに小さいというだけである。

ブラウン運動は，平均からの隔たりの変動を示し，これが分子説の立場から説明されたために，Ostwald のようなエネルギー論者も始めて原子の実在を認容するにいたったといわれる。確率論からいえば，現在の確率論の核心的な問題である確率過程論は，これのモデルとして役立つことを契機として，誕生し

たものとみられる。

ブラウン運動の歴史は，2つの意味で科学者にとって教訓的である。第1に，この物理的に重要な現象が，他の分野である植物学者 Robert Brown によって見いだされたことである(1827年)。第2に，ブラウン運動の理論がつくられるまで，すなわち理論が指導できるようになるまでは，実験も，またいかなるものを測定すべきかすら判明しなかったことである。この運動の起因について，現在一般に正しいと信じられている Delsaux や Carbonelle の説明，すなわち懸濁微粒子（花粉）が液体の分子と衝突することによるとの説明に到達したのは，1880年代のことであり，この間の50年間多くの人びとによって種種の説明がくり返された。ところが，それからさらに数十年たって，Einstein (1906年)，Smoluchowski (1906年)，Langevin (1908年)，Fürth (1920年) 等によってブラウン運動の理論が発表され，上記の見解を支持した Gony, Exner の期待は"華々しい実現の時代"を迎えた。

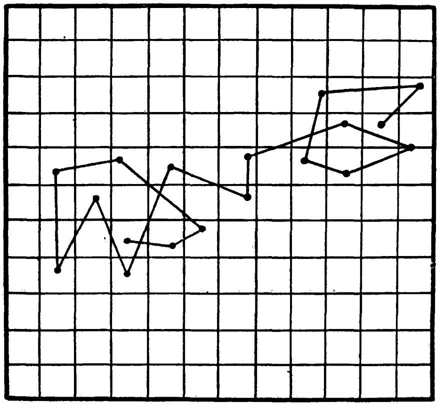
とくに Einstein (1906年) の理論によれば，次の結果がもたらされなくてはならなかった。

(a) 一定の温度Tにおける，同一の半径 a をもつ球と見なせる多くの微粒子が粘性係数 u の液中において行なうブラウン運動において，任意の時間 τ の間に，ある一定の方向 x に沿ってなす各微粒子の変位を，これにあずかった微粒子の数で除した商 $\overline{\Delta x^2}$ は時間 τ に正比例する。

(b) 比例常数は $k\mathrm{T}/3\pi ua$ である。ただし k はボルツマンの気体常数である。

(15) $$\overline{\Delta x^2}=\frac{k\mathrm{T}}{3\pi ua}\tau$$

そこで Perrin は (15) の関係式の成否を実験的に検証しようとして，まず Einstein の理論の根底に横たわる（3つの）根本仮定の妥当なことを確かめたのち，ブラウン運動そのものの観測に移った。そのために，微粒子の運動を水平面上に投影したものを調べるため目盛りのついた対物鏡を用い，同一微粒子の位置を30秒ごとに読んで，これを方眼紙に記入した（4－1図参照)。



4-1図

この30秒ごとの位置を順次結ぶ線分を一定直線上（たとえばx軸）に投影したものの自乗の平均をξ^2で表わす。

またこの一定直線上への線分の投影の長さ（向きをも考慮に入れて）の度数分布を4-1図から求めることができる。以上は実測値からただちに与えられるものである。

他方，ブラウン運動が完全に無秩序的に起こるということから，τ秒（この場合30秒）のうちに起こる微粒子の変位の自乗の平均値を$\overline{\Delta x^2}$とすれば，変位の値が，x_1とx_2の間にある確率は

$$(16)\qquad \frac{1}{\sqrt{\overline{\Delta x^2}}\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2\overline{\Delta x^2}}}dt$$

となり，したがって図のようなν個（4-1図では$\nu=17$）の線分からなるものについての度数分布は理論上（上式）×νで与えられると考えた。ここに，Einsteinの理論によれば，上式にあらわれる$\overline{\Delta x^2}$は（15）式で与えられる。

そこで上記の実測値と理論値とを比較してみたところ，Perrinはほぼ一致すると見なしてよいという結果に達し，Einsteinの理論は実験的に確かめられたことになったのである。

30秒ごとの測定にもとづいて判断すれば，ブラウン運動は4-1図に示すよ

うに錯雑した軌道であるが，測定時間をさらに短縮して 10 秒ごと，5 秒ごと，あるいはそれ以下にすれば，軌道がなめらかな曲線に近づくようになるかというと，そうはいかない。ますます，複雑な，無秩序な軌道を示すだけである。こうして 1 つの微粒子の軌道を精細に追跡しようとしても，それは不可能であって，ここに問題は統計力学の対象として始めて意義をもつことになるのである。

可能なすべての軌道の集合 Ω を考える。1 つの軌道は Ω の一点 α で表わされると見なす。問題を一次元にかぎれば $\alpha \in \Omega$ なる各 α に対し

(17)　$x=x(t, \alpha) \qquad (0 \leqq t < \infty)$

にしたがって，軌道は表わされるものと考える。こうして

(18)　$x_1 \leqq |x(\tau_2, \alpha)-x(\tau_1, \alpha)| < x_2$

となるような α の集合（Ω のある部分集合）というものを考える。今かりに，Ω に測度が与えることができて，しかも $m\{\Omega\}=1$ とすることができたとすれば，上式を満足する α の集合の測度とは，上式を満足する確率ということになる。したがって

(19)　$m\{E_2[x_1 \leqq |x(\tau_2, \alpha)-x(\tau_1, \alpha)| < x_2]\}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi A(\tau_2-\tau_1)}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{s^2}{2A(\tau_2-\tau_1)}}ds$$

とおくことは，Ω という今のところはただ説明の便宜にとどまるパラメーター空間をのぞいて考えるならば，けっきょく次のような確率変数 $X(t)$ を考えることに帰せられる：

(20)　$Pr.\left\{x_1 \leqq |X(\tau_2)-X(\tau_1)| < x_2\right\}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi A(\tau_2-\tau_1)}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{s^2}{2A(\tau_2-\tau_1)}}ds$$

しかも，(i) ブラウン運動の場合任意の二区間 $[\tau_1, \tau_2]$ と $[\tau_3, \tau_4]$ とが相互に重なり合わないかぎり，$X(\tau_2)-X(\tau_1)$ と $X(\tau_4)-X(\tau_3)$ とは相互に独立な

確率変数とみなせるから，

$$(21)\qquad X(\tau_2)=X(\tau_1)+X(\tau_1,\tau_2)$$

さらに(ii)ブラウン運動の場合，時間に関する一様性をもつと見なすことができ，したがって Homogeneous Random Process (H.R.P.) であることから，

$$(22)\qquad X(t_2)=X(t_1)+X(t_2-t_1)$$

としてよい。すなわち (L) あるいは，(L*) の特別の場合として

$$(23)\qquad (\mathrm{L_W})\qquad F(x,\tau_2)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x-y,\tau)d_yF(y,\tau_2-\tau_1)$$

$$(24)\qquad (\overset{*}{\mathrm{L}}_{\mathrm{W}})\qquad f(t,\tau_2)=f(t,\tau_1)f(t,\tau_2-\tau_1)$$

が成立することになるのである。

そこで数学の問題として，一般に ($\overset{*}{\mathrm{L}}_{\mathrm{W}}$) で規定される確率現象がときに(24)で表わされるには，いかなる条件が必要かという問題が起こる。これが解決できれば，Lévy 等の論じた一般の確率現象において，ブラウン運動のモデルを与えると見なし得る確率現象の位置が明確になる。最後に今までの記述に関して注意しておきたいことがある：

注意1：Perrin はある1つの軌道に関しての時間平均について，これを，上述の正規分布と比較した。これは，充分大きな時間についての（前の場合には ν を充分大にした場合の意）ある量の時間的平均が，可能なすべての軌道についてその量の空間的平均（すなわち Ω における平均）に等しくなるというエルゴーデシティを仮定して，その論拠に立つことは，ここに断わるまでもないと思う。

注意2：観察時間が次第に短くなって，ある極限の時間に達すると，その時間内における微粒子運動はもはや不規則とは考えられないということになる。Perrin によれば，水中で 1 ミクロンの球に対して不規則でありうる時間の最小限は1秒の 10 万分の1の程度，1ミリの球に対しては1秒の 1,000 分の1の程度であろうといっている。これらの時間は，観察において到達し得る時間よりはるかに小さいから，ブラウン運動を記述する比較的簡明な数学的モデル

として，上述のような H. R. P. を考えることはさしつかえないであろう。ただし，測定技術がいちじるしく進歩した時には，このようなモデルでは満足できなくなるかもしれない。

第5章　記述統計学の文法

1.　記述統計学の系譜

統計学といえば，平均値，標準偏差，モード，中位数，四分位数，相関係数，回帰係数等々，膨大な統計資料の提供する数値に対して施こして得られる一連の計量，その運算とその機能とを思い浮かべる。これが現在より30年以前の数理統計学の姿であったであろう。だが現在の統計学では，そのような数理統計学を記述統計学といい，統計学の，重要ではあるが1つの分野にすぎないものとして取り扱い，数理統計学の主流をむしろ，およそ1920年以後に発達した分野である推測統計学におく。われわれは両者の区別と連絡とを明確にとらえなくてはならない。これが現代の統計学を理解するための重要な支点となるであろう。

このために，われわれはまず，数十年前まで支配的であったこの記述統計学の系譜をたずねる必要がある。記述統計学は，進化，遺伝の生物現象を研究した Galton の優生学，Pearson の生物統計学における研究手段を抽象化したものである。そして生物現象の統計的観察においてだけでなく，社会統計，経済統計，人口統計の分野においても利用できる言語となったのである。だが1つの分野において成功した場合でさえ，これを他の分野に抽象するには，元の分野における本質的な制約を見失いがちであり，類推の誤謬におちいる危険をまぬがれがたいものである。

われわれは，さらに記述統計学の源を探るとき，Charles Robert Darwin（1809—82年）の進化論につきあたるのである。科学の様相と自然の解釈とを変革し，人類思想発達の歴史全般に広く深い影響を与えた Darwin の著『種の

起源」(On the Origin of Species by means of Natural Selection, 1859年)に刺激されダーウィン説の帰依者になって，遺伝の現象に興味をもち，その方面に熱心な研究をすすめたのが，Darwin のいとこ Francis Galton (1822—1911年) であった。彼の著『遺伝的才能および天才』(Hereditary Talent and Genius, 1864年)，『遺伝的天才』(Hereditary Genius, 1869年)，『人類能力の研究』(Inquiries into Human Faculty, 1883年)，等は優生学の誕生を意味するものであるが，それは統計学からいえば新しい統計数理の開拓をも意味するものである。すなわち四分位数，百分位数の導入，相関係数，回帰係数の利用等がこれである。Galton の著『自然的遺伝』(Natural Inheritance, 1889年)，の序言に，「この方向はいわば高いレベルにある道を走って進むようなものである。そこからは予期しない方向への広い視野が与えられる。またそこから降りて行けば，全然違った種々の目的地へ達することも容易である」とある。Galton はみずからいうように「進化の問題を統計学的に取り扱った最初の人」であるとともに，そのために導入した方法の豊かさについて自信をもっていた。当時数学者として弾性論等の応用数学を研究していた Karl Pearson は，これから大きな示唆を受けた。「因果関係よりも広い概念がある。すなわち相関である。相関という新しい概念からみれば，因果関係はいわばその極限の場合である。相関の概念を利用することによって，心理学，解剖学，医学および社会学等も，その大部分が数学的処理を施こし得られるものになる。数学を立派に使えるのは因果関係の範疇にはいる自然現象に限るという見解を自分は持っていたが，この偏見を打破してくれたのが Galton であった」とは，後年統計学の定礎者としての Karl Pearson の述懐するところである。Pearson を生物測定学の創建に進ませた直接の動機は，1890年動物学教授としてロンドン大学の同僚となった W. F. R. Weldon（当時31歳）の影響であった。進化論を数量的に実証しようという Weldon の学問的計画は Pearson（当時34歳）を非常に感激させたといわれる。

Darwin, Galton, Weldon, Pearson ……この系譜は，記述統計学の性格を

決定しているのである。Graunt, Petty, Halley を生んだイギリスから，古典確率論の誕生を主として大陸にたずねたわれわれは，ふたたびドーバー海峡を渡って，イギリスに帰らなければならない。われわれが大陸にいた時に，イギリスが統計学上何ら記憶すべきことを残さなかったというのではない。イギリス伝統の経験主義は，計算法，統計，生命保険に多くの実用数学を発達させていたのである。だがイギリスにおける Newton 以後の数学理論の進歩は，大陸に比べれば沈滞であった。

2. 生物統計学の使命とその制約

ダーウィン説を要約すると，（Ｉ）生命のクモの巣といわれる生物の連関関係，全有機物相関の観念，（Ⅱ）生存競争の認識，（Ⅲ）生物の変異性，（Ⅳ）自然淘汰の理論，（Ｖ）進化観念の主張にあるであろう。ところで，Darwin の研究方法はどのようなものであったか。彼においては，周到な観察力，深刻な洞察力，論理的な推理力，さらに豊富な想像力において，たぐいまれな博物学者をみるのであるが，その立論の根拠はおよそ次の事実にあったというべきであろう。

(a) 飼養動物および栽培植物に生ずる進化の事実への着眼

(b) 下等動物から高等動物に進む体制の段階を示す系統樹

(c) 外面的形態が多様であるにもかかわらず，生物における一般的体形の存在を示す解剖学的証拠

(d) 祖先形体では充分発達していたと思われる発育不全器官

(e) 漸次高等な形態の現われたことを示す地質学的記録

(f) 個体の発達が種族発達を再現すること

(g) 地理的分布によって，生物が中央より散布されたことが示されること

Darwin は回顧していう，「飼育状態および自然状態にある動植物の変異に何らかの関係のあるすべての事実を集めることによって，おそらく全問題の上にいくらかの光明が投げかけられることになるかもしれない。私の最初のノー

トブックは1837年7月に開かれたのであった。私は純然たる Bacon の諸原理にしたがって研究した。すなわち，何らの理論ももたずに，あますところなく事実を収集した。とくに飼育による生産物については，印刷された質問票や，熟練した飼養者や栽培家との会話や，あるいは広く文献を調べることによって事実を集めた。私が読んだり，抜萃したりしたあらゆる書物や雑誌のリスト，そのなかには定期刊行物や学会会報は全巻ふくまれているのであるが，それをみると，われながら自分の勤勉に驚くのである。人間が動植物の優秀な種族をつくるのに成功するカギは淘汰である，ということは自分にはすぐわかった。けれども，自然のままの状態において，どうして淘汰が行なわれるか，これは私にとってはしばらくは解けない謎であったのである。」(The Life and Letters of Charles Darwin, vol. 1, p.83) この謎を解いて，法則の探究に導いたのは何であるか。Darwin の場合には，Malthus の人口論を読んで，その示唆によって生物界における自然淘汰の概念に到達したのであることは，自伝に示すとおりである。しかしそれは，想像力によって提示された1つの仮説というべきである。この仮説に対する自己批判の時期がなければならない。この時期は4，5年間もつづいた。Darwin は語る。「このようにして，私はやっと研究の規準となる1つの理論を得たけれども，私は，どうあっても偏見を避けなくてはならない，それにはしばらくは，どんな短いものにしても，概要を書くまいと決心した。1842年6月，すなわちこの霊感を得てから4年後になって，始めて私の理論のごく簡単な抜き書きを，鉛筆で35ページに書くことを自分で許す気になった。」こうして，Darwin がその説を発表するまでには19年以上もかかったといわれる。

Karl Pearson が科学的研究方法の模範としてあげるのは，この Darwin の研究であって，それは，Pearson によれば次の3段階より成り立っていなくてはならない。

(a) 事実に対し，これを注意深く綿密に分類 (Classification) し，その連関と系列 (Correlation and Sequence) とを観察すること。

(b)　創造的な想像力により科学的な法則を発見すること。

(c)　真理の妥当性は，自己批判にたえ，健全な精神をもつすべてのひとの検証にたえること。

Darwin の研究方針は，これを Mendel の研究方法と対比してみるとき最も鮮明にその区別をみることができるであろう。Darwin の場合には，観察とその分類とはあったけれども，それらは真の意味での実験とは違うのである。Galton, Pearson が，Darwin の方法を模範として進んでいった場合に，この点の反省がたりなかった。これには彼らの科学観が致命的に影響している。Galton, Pearson は，Darwin の方法は要するに統計的大量観察にあるとみたのであった。第2に，Darwin の理論には数量的検討が欠けていた。この点に対する整備が，生物統計学者の任務とするところであった。Pearson はいう，「進化の一般概念をより良く理解するには，型，変異，相関というようなもの，すなわちこれまであいまいさが認められながら用いられてきた用語に，より決定的な意味を与えなければならない。」生物学の基礎的概念である進化とか淘汰とかが厳密な限定を可能とするようになったのは，進化論の数理論のおかげである。形質遺伝，リバアション，またはテレゴニイを説くとき，「変異の数値とは何か，諸君はこの相関関係の規準をもたれるか，諸君はその形質の遺伝の大きさを比べられたか。」単なることばだけの記述を打ち捨てて，生物学者は自分たちの観念の学問的な尺度をもたなければならないとした。

統計的観察とその諸概念の数学的記述，ならびにそれによる検証の客観化，これが生物統計学者の進んだ道である。これに対して2つの方面から批判が起こった。それは第1に，メンデリズムとの対立である。これは統計的観察法を進化および遺伝の研究方法とすることに対する批判である。第2は，検証の方法，統計資料の作成，補整に関する批判であって，これは Student, R. A. Fisher 等に始まる現在の数理統計学によって加えられるものである。これらの批判と対立とは，これを受けるべき生物統計学者 Karl Pearson の徹底的に非妥協的な性格も影響して，尖鋭な様相を示した。メンデリズムと生物統計学の対立，

いわゆる小標本論と大標本論との対立——Karl Pearsonが強硬に生物統計学，大標本論を擁護し，その所信を貫いて精力的な活動を行なうことによって，前者に関しては W. Bateson 等と，後者に関しては R. A. Fisher 等と，鋭く反目さえするにいたった。さらに根本的にいえば，Karl Pearson はマッハ主義者とみられる。彼はその科学観において記述学派であり，経験批判論者である。その哲学思想に対しては，Lenin らの攻撃を受けなければならなかった。

けれども，ここではまず，過去および現在において生物統計学の与えてきた実績を静かにみるべきである。そしてまた，それが生まれてきた環境を省察すべきである。そしてそれのもつ制約を認識すべきである。この点に関して，われわれはまずDarwinの進化論のもつ制約自体を認識するのが肝要であろう。

16 世紀以来，人間による種の変革は相当発達してきたが，とくにイギリスでは，次第に集約的な形態をととのえるにいたり，耕作方法の改良，機械の採用，家畜の飼養の合理化を宣伝する団体の創設などがあった。人為淘汰によって数多くの栽培植物および飼育動物がつくり出された時代に Darwin は生をうけたのであって，たとえば Darwin の淘汰理論は，イギリスにおけるイエバトの無数の変種を材料としている。だが，これらのものをつくりだす方法は，多くの場合，偶然にできた変異を人為的に淘汰する方法が採用されていたにすぎない。Darwin の理論は，ようするに，この栽培および畜産の技術を理論化したものであり，その研究方法は主として観察によったものである。生物の種類を適当に変革して人間の生活に役立たせるためには，このような人為淘汰でなく進化の物質的機構に立ち入り，これを自由に支配し得る段階に進まなければならない。そのためには，観察，記述の現象論的研究方法にとどまることは許されない。Darwin は変異と遺伝との事実を指摘したのであるが，変異の法則，遺伝の機構には Darwin は立ち入ることができなかった。それは根本的には細胞の機構と発達とに関する分析的研究を必要とするものであった。これは，以後の生物学史の示すところであるが，Darwin の時代は，ようやく細胞説が確立されたばかりであった。このような制約のもとにあるダーウィニ

ズムを人類社会に応用して優生学を説いた Galton，ダーウィニズムを数学的記述方式によって確立しようとした Pearson には，あらかじめ越えることのできない限界があった。しかし，Galton, Pearson の段階が無駄であったというわけではない。現象論的段階と本質論的段階とは，自然認識の一定の段階に対応して，くり返し，代わる代わる現われてくるのであって，直線的に前者から後者へ進むというわけのものではなく，らせん的に進むのである。生物学のみならず，自然科学および社会科学の広範な領域にわたって利用できる記述的方法を確立した生物統計学は，不朽の価値をもつものである。ただそれから生んだ進化論においては，現在では生物統計学は唯一の方法でもなければ，またとくに主要な方法でもない。

3.　記述統計学の文法

進化論の数学理論と称し，一般に生物現象の数量的記述を目標として立ち上がった Karl Pearson が，統計学に導入した概念はきわめて豊富である。しかし，そもそもそれらは，変異淘汰，遺伝の諸概念に明確な数学的記述を与えることが目的であったのである。われわれはこの点に重点をおきながら，それをみていこう。以下主として Pearson自身の解説を，彼の著『The Grammer of Science（科学の文法)』（平林初之輔訳『科学概論』）によってみてみよう。

〔I〕 **変異の表現**　ダーウィニズムの根本思想は淘汰による変異の累積である。不顕著な変異（variation）が累積して変種（variety）となる。変種はわかい種（incipient variation）といい，これらはともに遺伝するように認めていた。それはとにかく，変異はダーウィニズムの根本概念である。変異は形質においてあらわれるのであるが，適当な形質は，数量的にあらわされる。

秋，1本のブナの木から 20 枚の葉をとって葉脈の数をかぞえると，かならずしも一致しない。2本のブナの木の別々の部分からそれぞれ 20 枚ないし 30 枚の葉をとって，葉脈の数を比較してみよう。これらの二系列は，2本の木にとって個性的である。ここでいう個性とは，葉脈数の最頻値が前者は 18，後

葉脈の数 ——	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
第 1 樹 ——	…	…	…	…	…	1	4	7	9	4	1	…	…
第 2 樹 ——	…	…	…	3	4	9	8	2	…	…	…	…	…

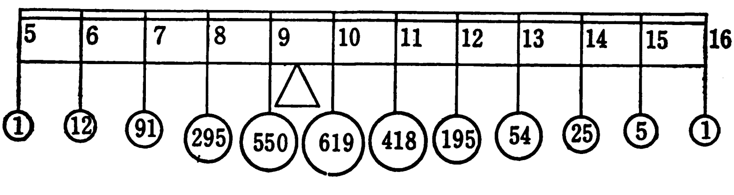
5-1図　　(Pearson による)

者は15ということである。さらに多数の葉をとって調べるには，最頻値数ではなく，平均値が便宜な記述方法であることがわかる。これが個体平均である。今2本のブナの個々の木について調べたことを相当多数のブナについて調べることによって，ブナという種を代表する種平均が見られるであろう。個体平均はこの種平均のまわりに変異を示すものである。

すなわち，個性を，種平均値と個体平均値との差違と見なし，個性の数量的概念を見いだそうとするものである。

形質がこのように数量化されているならば，度数分布というものがつくられる。この度数分布は図示できるが，ここにその分布の状態を示す記述方法が Pearson によって導入された。

「均一に目盛された軽い棒をとり，斑帯の体系の平均数を表わす目盛の点に置かれた粗い旋回軸の上にそれを乗せることとする。さらにこの目盛の対応する点に，この棒から，5から16までの帯の各組の度数に比例したおもりをつるす。この棒が，与えられた粗い旋回点で，与えられた速力で回転するようになっているとすると，一定時間内に，摩擦によって停止するようになるであろう。さて，旋回点の近くにおもりを集めれば集めるほど，それだけ早く棒は停止する。また旋回点からおもりが遠ざかっていればいるほど，停止するのに時

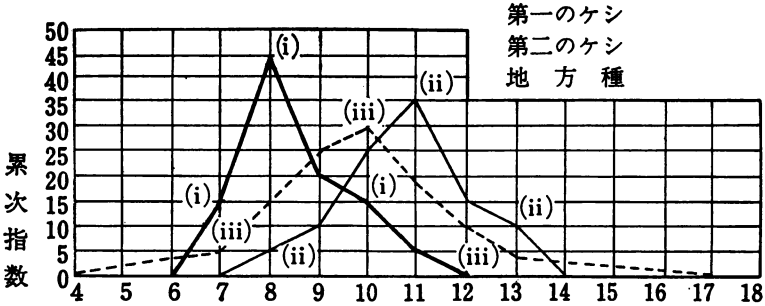


5-2図　　(Pearson による)

間がかかる。いいかえれば，棒が停止するまでに要する時間が，その範囲にわたるおもりの集中または分散に関する求められている尺度である。」

種を代表する平均値，種内部の変異を記述する積率とくに標準偏差，これらの計量が，種族，環境，淘汰を反映すべき計量として採用されたのである。

野生のケシの種嚢の班帯数



5－3図　　(Pearson による)

〔II〕 **集団の比較**　これらの計量の利用について，Pearson のいうところを聞こう。「ある器官，あるいは形質に関して，優先交配が起こっているかどうかを発見しようと思えば，交配した成員の平均値と変異を調べ，他方，交配してない成員の平均値と変異を調べて，両者を比較すればよい」，「雌雄淘汰が進化の原因であるかないかというはてしない議論をするよりも，静かに統計を集めてみる方がはるかにましである。」

「最初に身長を考えてみよう。中流階級からとった，インチで表わした次のような結果がある。

	代表値	変異性
夫	69.136±0.126	2.628±0.089
一般男子	69.215±0.066	2.592±0.047
妻	63.869±0.110	2.303±0.078
一般女子	64.043±0.061	2.325±0.043

夫と男子との最頻値の差異　　＝－0.079±0.142

変異性上の差異　＝＋0.036±0.101

妻と女子との最頻値の差異　＝－0.174±0.126

変異性上の差異　＝－0.025±0.085

ここで±の印のついた数字は，probable error（いわゆる確率誤差；中央誤差）すなわち数学者が，観察した値と真の値との間の起こり得る差異を確かめる量である。代表値と変異性の4つの差異のうち，差異が，変異の起こり得る誤差を越えているのはただ1つだけである。この場合ですら，私たちは，一般に妻と婦人の身長に重要な差異があると主張することはできない。事実，そうした差異がもしあったとしても，それはおそらく優先交配以外の原因から説明されるであろう。しかし私たちの統計はわずか200～300におよんでいるにすぎず，またこのために収集されてはいない。こんなありさまであるかぎり，その統計はやはり，身長，または身長ときわめて密接に関連する他の形質の基礎に立つ。人類における優先交配の証明を示すものではない。たとえば，妻が一般の婦人よりも変異することが少ないからといって，男子はその妻として，背の高い人を選ぼうとするものでもなく，また非常に背の高い婦人とか，非常に背の低い婦人とかを配偶とすることを拒否するものでもないようである。」

〔III〕 **度数分布の表現**　「変異の全理論は，確率論に属する。最も良い曲線の形式を発見し，それを用いて，異なった形質の度数多角形について簡潔な記述が与えられるようにするのが数学者の義務である」とは Pearson の見解であった。

変異を度数分布によって表現するとき，究極においては，その分布は，正規分布，すなわちガウスの誤差分布法則によって表現されるべきものである，という信念が19世紀前葉以来長く支配的であった。正規分布でよく表現されない，すなわち正規分布がよく適合しない統計材料が得られたならば，それは統計材料の収集が不足であるか，かたよっているためであると解すべきで，観測結果を充分にすれば，標準の値のまわりに，必ず正規分布をなすという信念を抱いていた。現在のわれわれからみて，そこには多くの飛躍と過誤が指摘され

るのであって，この信念の頼むにたりないことはいうまでもない。

天文学における観測の精密化は，19世紀末葉にいたって，Gauss の権威に抗して，頻度数曲線の一般化となって現われてきた。われわれはここに，Thiele, Chalier, Bruns 等の天文学者をあげることができる。

生物統計学の方面からも，度数曲線の一般化が必要となった。いわゆるピアソン型分布関数というのがそれである。ここに法則，規範から現象記述への推移がある。その導入の仕方に2通りある。

1つは，きわめて現象記述的である。Pearson は経験的にみて，統計材料が等質であるかぎり，分布密度関数の形に関して，一般に次のように仮定してよいと考えた。すなわち x をある形質を表現する計量を表わす変数とし，

$$y=g(x)$$

によって x に対する分布密度を示す。すると

(1°)　$|x|$ が限りなく大きくなると，0に近づく。

(2°)　$g(x)$ は単峯である。すなわち $g(x)$ が最大値をとる x があったとしても，ただ一つしかない。

(3°)　$g(x)\geqq 0$（これは当然)。

(4°)　$g(x)$は x 軸と高次の接触をする。

このようなことを念頭において，Pearson がけっきょくのところ採用したものは，分布密度関数 $g(x)$ は次の形を満足するという仮定であった。

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y(a_0+a_1x)}{c_0+c_1x+c_2x^2}$$

これをピアソンの微分方程式という。

もう1つの導入の仕方は，ある適当な確率論的形式を考え，これに関する分布法則を導き，その分布法則の極限法則を規定するものとして，上述の微分方程式に到達しようとするものである。

ここに，r 個の球を含む1つの袋があって，そのうち rp 個は白球であり，rq 個は黒球であるとする。今その中から一度に n 個の球を取り出してその色を調べるとき，その中に白球がちょうど x 個はいっている確率を y_x とすると

(2)　$y_x=\dfrac{{}_{rp}C_x\times{}_{rq}C_{n-x}}{{}_rC_n}\quad(x=0,1,2,\cdots,n)$

となる。そこで

(3)　$y_{x+1}-y_x=\Delta y_x,\quad \dfrac{1}{2}(y_{x+1}+y_x)=y_{x+\frac{1}{2}}$

とおけば，$\Delta x=1$ として

(4)　$\dfrac{\Delta y_x}{\Delta x}=y_{x+\frac{1}{2}}\dfrac{2(nrq+n+rp-1)-2(r+2)x}{(nrq-n+rp+1)+(rp-rq-2n+2)x+2x^2}$

に到達する。この定差方程式の極限として，上述の微分方程式が得られる。

上述の微分方程式を解いて，解として得られる諸関数のうちで分布密度として適当な部分をとることにより，Pearson は，12個の型の分布関数を導き出した。そのなかに，正規分布，長方形分布，J字型分布，U字型分布等をふくむ。とくに第Ⅰ型，第Ⅲ型は，理論的にも大切である。

〔Ⅳ〕 **遺伝の量的尺度**　ここにおいて重要なのは，重畳の原理と相関の方法である。

(1°) **重畳の原理**　「個体(zygote)となる性細胞(gamete)の結合，動物の場合では，精虫と卵との結合を，もう少し綿密に調べてみよう。Mを，個体が後に到達する生命形態の形質，または器官の平均とし，Zを特殊デヤイゴートから出た個体の変異とする。$m_1, m_2, m_3, \cdots$ を，その種族の精虫の中の，いくつかの形質の平均とし，$m_1', m_2', m_3', \cdots$ を，その種族の卵のいくつかの形質の平均とする。特殊精虫の形質を $m_1+X_1,\ m_2+X_2, \cdots$ で表わすものとすると，それは種平均からの変異，$X_1, X_2, X_3, \cdots$ で記述される。同様に，特殊卵の形質を $m_1'+Y_1, m_2'+Y_2, m_3'+Y_3, \cdots$ で表わすと，卵の種平均代表値からの変異 $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$ で記述される。次にこの特殊精虫と特殊卵との結合の結果である個体のM＋Zは，諸形質の値，$m_1+X_1, m_2+X_2, m_3+X_3$ 等および $m_1'+Y_1$, $m_2'+Y_2, m_3'+Y_3$ 等によって決定されなければならない。さて変異を平均と比較して，Zは次の形態をとることがわかる。

(5)　$Z=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3+\cdots+\beta_1Y_1+\beta_2Y_2+\beta_3Y_3+\cdots$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots$ は卵と精虫との無限に多数の形質が測定されてのちに，始めて決定される不変数である。Zに与えられた形態によって，遺伝の性質に関する何物かをみることができる。各αが雄の要素からの遺伝を限定し，各βが雌の要素からの遺伝を限定する。もし両者が，特殊形質Zに存在すれば，その遺伝は融合しているといわれる。αの組とβの組とのいずれかが，他の組よりも数量的にはるかに大きいとすれば，場合次第で雄，または雌の要素が優性だといわれる。もし各αまたは各βが0だとすれば，その遺伝は排他的だといわれる。」（科学概論）

正常型の設定，誤差論との類比において，古典確率論の伝統，すなわちLaplace, Quetelet の線を出ていない。

(2°) **回帰と相関**　遺伝の数学的理論において，重要な概念は回帰および相関である。「種族的変異は個体的変異より大きい。同じケシのカプセルは，他のケシのカプセルを比べたときよりも互いによく似ている。同一個体に属する相似の機関におけるこの類似は，相関関係の特殊な場合である。」

「5－1表——いわゆる相関関係の表——は今や明瞭であろう。どの欄でも，たとえば9の欄をとると，表に含まれた11,026のカプセルの中から，9の帯のカプセルを持つ同じ植物に，6，7，8等の帯のカプセルが発見される度数に対応した度数分布表が得られる。各欄の下には，その欄の帯の平均数が与えられ，全系列の平均は 10.04 である。こうして，欄9の平均は9ではなく 9.51 である。

いいかえれば，同じ植物で9カプセルと関連したカプセルは平均9ではなく，また一般総平均10.14でもなく，9から一般平均の方へ逆行（回帰）している。平均数の横欄は，この法則が普遍的に成り立ち，関連したカプセルの平均が，一般平均に向かうということを示している。」

「5－1表はこの結果をグラフで説明している。横線に沿って，選ばれたカプセルの斑帯の数を目盛りし，また垂直線に沿って，関連したカプセルの各群の平均，6.33，7.11，8.22，9.06 等に等しく，$5a$, $6b$, $7c$, $8d$ 等の長さが引かれて

第1のカプセルの班帯の数

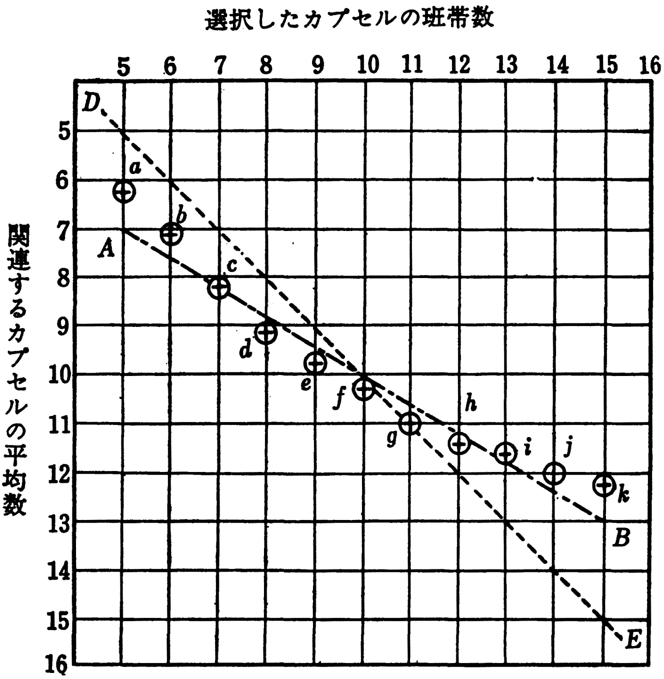
第二のカプセルの班帯の数	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	総計
5	…	8	4	…	…	…	…	…	…	…	…	…	12
6	8	38	46	23	11	5	2	…	…	…	…	…	133
7	4	46	184	163	146	78	31	8	1	…	…	…	661
8	…	23	163	390	398	279	111	75	32	4	…	…	1475
9	…	11	146	398	554	415	250	161	68	9	5	…	2017
10	…	5	78	279	415	514	520	240	112	27	10	…	2200
11	…	2	31	111	250	520	770	366	160	52	9	…	2271
12	…	…	8	75	161	240	366	252	178	35	12	…	1327
13	…	…	1	32	68	112	160	178	92	23	11	…	677
14	…	…	…	4	9	27	52	35	23	28	12	…	190
15	…	…	…	…	5	10	9	12	11	12	4	…	63
16	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
総計	12	133	661	1475	2017	2200	2271	1327	677	190	63	…	11026
平均	6.33	7.11	8.22	9.06	9.51	10.12	10.78	10.96	11.19	11.82	12.05	…	10.04

5－1 表　(Pearson による)

いる。こうして得られた点 a, b, c, d 等を結ぶと，回帰の多角形ができる。さて直線を，点 $a, b, c, d, e, \cdots, i, j, k,$ の体系にできるかぎり精密に適合するように引く方法は，数学者の示すところである。彼はそれらの点の線からの距離の総計をできるだけ小さくするという方法でやるのである。

カプセルの群の度数を列序という。たとえば4, 9, 27, 52, 35, 23, 28, 12が14 に対応した列序だといわれる。列序の標準偏差を見いだすことができよう。これを文字$\sum$で表わし，σをもってすべてのケシのカプセルの標準偏倚を表わすとする。「さて全然回帰がないと仮定し，5列序の平均を5，6列序 平 均 を6，7列序の平均を7というように仮定すると，回帰線は対角線 DE となる。いいかえれば，回帰がないとき，回帰線の傾斜（すなわち 45 度の線）は1である。

これに反し，AB が水平だとすると，各列序の平均は10.04 すなわち一般総数の平均となり，完全な回帰となり，相関関係が全然なくなる。したがって線



5－4図　　(Pearson による)

AB の０と１との勾配が，対のカプセルに現われた，回帰または相関関係の総計の尺度であることがわかる。」

「こうして相関関係を理解する，数量的方法のだいたいがわかった。その順序は簡単に５－４図のようになる――

(イ)　同じ個体，または別の個体の対をなす機関のある性質を，500から1,000までの場合について測定し，計算せよ。

(ロ)　その対をなす一方の，与えられた大きさの機関を継続的に選択し，その対の他の一方の機関の列序を作って，相関関係表を用意せよ。

(ハ)　縦欄の総計と横欄の総計とをそれぞれつくって，おのおのの平均と標準偏差とを求めるが，これらが２つの機関のそれぞれの平均値と変異度とを与える。これを M_1, M_2 および σ_1, σ_2 とせよ。

(ニ)　各縦欄列序の平均を求めよ。これをグラフに記入し，これらの平均を通って引かれたもっとも適合した直線が，第1の機関に対する第2の機関の回帰線であり，その傾斜は $r\sigma_2/\sigma_1$ に等しい。同様にして，第2の機関に対する第1の機関の回帰線は横欄の平均を作図して得られるので，その傾斜は $\sigma_2/r\sigma_1$ である。数学理論によれば，これらの2つの線が，図表において2つの機関の総数平均に対応する点で交わり，さらに r は次のような方法で求められる。M_1+X を対の一組の第1の機関の数値とし，M_2+Y を対の他の一組の第2の機関の数値とする。こうしてXとYとを関連した対の平均値をとり，これを標準偏差の積 $\sigma_1\times\sigma_2$ で割れば，結果が r である。すなわち相関係数である。

(ホ)　図表を調べると，もし大きさ $m_1=M_1+X$ の第1の機関があれば，第2の機関のもっとも確からしい数値（すなわちその列序の平均値）は，

$$m_2=M_2+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(m_1-M_1)$$

こういう方程式を回帰方程式と呼び，$r\sigma_2/\sigma_1$ を回帰係数という。簡単にいえば，第2の機関の平均からの確からしい変異は，第1の機関の，その平均から観察された変異に対する，回帰の結果である。回帰が完全なとき，すなわち $m_2=M_2$ の時，回帰係数または相関係数 r は0とならなければならない。相関関係が完全な場合，すなわち $r=1$ の場合，m_2 が M_2 とは違ってくることはほとんど確かである。

回帰の現象の説明に関して，Pearson の説明を聞こう。たとえば父が異常であっても，そのような親をもつ子の平均は，父ほどには異常でなくて平均へもどっているのは，次のように考えられるという。「人はその父の産物であるのみでなく，また過去のすべての祖先の産物であり，非常に注意深い淘汰が行なわれないかぎり，その祖先の平均は一般人口の平均とおそらく大きくは相違していないであろう。第10世代までさかのぼれば，人は 1,024 人の曾祖父母をもつ。人はこれらの祖先の産物である。それらの人たちの平均は，一般人口の平均とほとんど相違しない。この平凡な祖先の非常な影響が回帰の運動であ

る。」

このように考える Pearson は，淘汰を次のように解釈する。「先祖の間の平凡要素という邪魔を取り除くことができるとすれば，明らかに回帰は除去され，また異常な人の種が創造されよう。これはまったく，1つの種が確立されるまで，それを淘汰し，孤立させている飼養家によってなされる方法である。

たとえば父と子との相関関係の表にもどると，その回帰線が得られ，父と子との身長の相関係数が得られる。相関係数は，いわば類似の平均度を予知し得る量である。したがって形質遺伝の量的尺度である。」

だが，この量的尺度は，個人の場合には適用されると考えるわけにはいかない。「形質遺伝を取り扱っている統計家は，原子を取り扱っている物理学者のようなもので，個体に関してはほとんど何もいうことができず，その知識は多数を含めた群に関するものである。」

(3°) **重相関** 以上に述べたことは，遺伝に関していえば，片親と子との関係についてであり，もし片親だけ淘汰されたとすれば，子にどんな変化が行なわれるかを確かめることであった。今同時に両親を考えた場合には，どのような影響があるか。これを論じ，さらに進んで祖先遺伝の法則を論ずるために Pearson の導入した概念に，重相関がある。以下，Pearson の導入の道程をたどってみよう。

一般の父親，一般の母親，一般の子について，それぞれある器官に着目し，それぞれの平均値および標準偏差を，父親については m_1, σ_1；母親については m_2, σ_2；子については m_3, σ_3 とする。ある特殊の父親，その配偶者である母親，この両親から生まれた子を考え，そのおのおのの，それぞれ一般の父親，母親，子からの変異を，上述の器官に関して h_1, h_2, h_3 とする。遺伝現象を記述する方法として，重相関論における大事な仮定は

(6) $$h_3=c_1h_1+c_2h_2$$

として表わされることである。これを仮定してしまえば，問題は係数 c_1, c_2 の決定ということになる。c_1, c_2 をきめるのには，次のような考え方をする。

$(h_1^{(v)}, h_2^{(v)}, h_3^{(v)})(v=1,2,\cdots,n)$ を上述のような父，母，子の組の n 組とする。

（7）　$$\sum_{v=1}^{n}(h_3^{(v)}-c_1h_1^{(v)}-c_2h_2^{(v)})^2$$

を最小にするように，c_1, c_2 をきめるのである。すると

（8）　$$c_1=\frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{1-r_{12}^2}\ \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$c_2=\frac{r_{23}-r_{21}r_{13}}{1-r_{12}^2}\ \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

となる。これは重回帰係数といわれる。ただし r_{ij} は h_i と h_j との間の相関係数である。

ここで Pearson は，両親遺伝を，1人の人為的な親からの遺伝の問題になおすために，中間親というものを導入する。これは，重相関の概念によって最もよく理解されるものであるが，簡単のために $r_{13}=r_{23}$, したがって $\beta_1=\beta_2$ のときについて述べると

（9）　$$\mathrm{H}=\frac{1}{2}\left(h_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}h_2\right)$$

という変異をもつ1人の親を仮想することに相応する。この1人の親と子との相関の問題にひきなおして考えられるというのが，Pearson の中間親の思想であった。

2人の親から，1人の中間親が形成されたと同じく，4人の祖父母から，1人の中間祖父母が形成され，8人の曾祖父母から1人の中間曾父母が形成される。以下同様にして進み中間親，中間祖父母，中間曽祖父母等々を，それぞれ第1代，第2代，第3代中間親等々とよぶ。今，与えられた子孫に関して，その両親，その祖父母，その曾祖父母等々とたどることができたとして，それぞれ，各代の中間親をつくる。各代の中間親，たとえば第 i 代中間親が，その属する世代の種族平均値（問題の形質に関する）からの変異を H_i で示し，当の子孫が子孫の属する世代の種族平均値からの変異を h とするとき

$$h=r_1\frac{\sigma}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}}H_1+r_2\frac{\sigma}{\frac{\sigma_2}{(\sqrt{2})^2}}H_2+\cdots+r_k\frac{\sigma}{\frac{\sigma_k}{(\sqrt{2})^k}}H_k+\cdots\cdots \tag{10}$$

ここに $\sigma, \sigma_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ はそれぞれ，当の子孫，第 i 代中間親の属する世代の種族標準偏差である。

r_i は，子孫と第 i 代中間親との相関係数である。

Galton のいわゆる祖先遺伝の法則は，

$$(\sqrt{2})^i r_i=\left(\frac{1}{2}\right)^i \qquad (i=1,2,3,\cdots) \tag{11}$$

であるということである。Pearson は一般に

$$r_i=r\alpha^i \qquad (i=1,2,3,\cdots) \tag{12}$$

という幾何級数であらわされる場合を問題にしたのである。

4.　Pearson の記述哲学

記述学派の論拠を明らかにするために，今しばらく，われわれは焦点を Pearson に合わせ，Pearson 個人の生涯を知り，その科学観をつきとめてみよう。

Karl Pearson (1857—1936年) はもと数学を専攻し，一度はロンドン大学の応用数学および力学の教授となった人である。通常ならば，弾性論の研究などをやって教授の職責をはたすべき地位の人であった。だが，Pearson は若いころから哲学，宗教，社会の諸問題に深い関心をもち，それぞれの方面で相当の研究をしていた多方面の人であった。1879年大学を卒業してキングスカレッジで特選研究生となったが，それから 4，5 年の間は思想的な悩みにおちいった。このことは彼の著『The New Werther』(1880年) にその由来がうかがえる。これは Arthur なる青年がその婚約者に送る書簡の形式で書かれたものであるが，Arthur はすなわち自己のシンボルにほかならない。しかし，Pearson は，疑うべきものを疑いつくしたのちに，ともかく自分の進むべき道をようやくにして見いだした。それは彼の著『自由思想の倫理』(The Ethics of Free

Thought, 1887年）にみられる。ここで彼は一切の神話の独断を放棄し，時代の最高の科学的知識を学び，それを推し進め，また普及させていくこと，これが自由思想家（free thinker）の進むべき道であると述べている。これは青年 Karl の信条告白であるが，また同時に彼の一生を規定し，生物統計学者 Karl Pearson の一生を導いた指導原理でもある。このころはもちろん，一生を通じて彼に決定的に影響したのは，Spinoza の観照の哲学と Darwin の研究態度である。社会問題もまた Pearson から一生念頭を離れることはなかった。「人生の幸福は，自己の所属する社会の安寧をすすめることである。道徳的とは社会的ということである」とは彼の言である。

Pearson が次第にその思想に安定と方向を見いだし，その科学観を簡明にすることができたのは，1890年代であって，彼の著『科学の文法』にこれが示されている。

1892年に初版が出てから，2版（1900年），3版（1911年）と改訂が加えられたが，根本的な態度には変更はない。

以下，この書に整理された Pearson の哲学を紹介しよう。Pearson の認識論によれば，実存的なものは，直接の感官印象（sense-impression）であって，これが脳髄の中に恒久的な刻印をつくる。これが心理学にいう記憶にあたる。直接の感官印象と，結合され蓄積された印象との結合によって構成物がつくられ，われわれはこれを自我の外に投影して現象と名づける。実在の世界とはこのような構成物のことであって，感官印象以外の物の容認は形而上学である。だが，これらの感官印象から機械的および精神的結合によってわれわれは概念をつくり，推理を引き出す。これらが科学の事実であり，科学の領域は本質において思考の内容である。他人の意識は1つの推理であり，それは直接の感官によっては経験されないから，これを投影（eject）と名づける。物とは何か。われわれが感官印象の，多かれ少なかれ恒久的ないくつかの群をひっくるめて，これを1つの分類によってまとめ，これを物質というにすぎない。このようにして Pearson の考えは，物質とは感覚の恒久的可能性という定義

(John Stuart Mill) に非常に接近する。

直接の，あるいは蓄積された感官印象の形における材料から，われわれは概念を引き出す。そしてこれらの概念についてその関係を確かめ，その関連を科学的法則とよばれる簡単な記述，あるいは規定において表現しようとして，われわれは推理する。ようするにわれわれの感官印象の関連を，できるだけ簡単，正確，包括的に記述するのが，科学的法則である。いわばそれは心的速記である。それは当然人間の認識能力に制約され，人間にとってのみ意味がある。このことを理解するためには，たとえば，海辺に生活する盲虫を考えてみるがよい。この動物は永久に月を知らないのであるから，われわれ人類のもつ潮汐の理論は，この動物にとってはどのような意味ももたない。また熱力学の第二法則は，疑うことのできない精密さをもって広範な人類の経験を要約したものであり，そのかぎりでは，引力の法則と同様に1つの自然法則である。だが気体運動論は，マクスウェルの魔物を考えさせる。この魔物のように，個々別々の分子の運動をたどっていくことのできる動物にとっては，熱力学の第二法則はかならずしも自然法則ではない。自然の法則には，数学の演繹におけるような必然性はない。大体必然性は，概念の世界に属し，知覚の世界には属さない。また自然の法則は法律のような強制力をもたない。Ptolemy, Keplerの天体運行の学説も，Newton の万有引力の法則も，ともに記述でしかないのである。ただ後者の方が簡単，正確，包括的という点で，思考の経済になるからより優秀であるというにすぎない。自然が人間に法則を与えるという叙述よりも，その反対の，人間が自然に法則を与えるという叙述の方がより多くの意味がある。自然法則は，われわれの認識がすすむにつれて，たえず仮説の位置へひきもどされ，経験の検査によって再検討されなくてはならない運命をもつ。科学的法則に与えている普遍性，すなわち絶対的性質は，人類の精神に属するものである。それは現象の世界が，すべての普通人にとって実際的に同じであるという知覚機能によるものであり，また連想，論理的推理の仮定，蓄積された印象および概念からなる内部の世界が，すべての普通人にとって同一である

という思索機能によるものである。

さて，このような科学的法則を表現しようとする過程において，われわれはしばしば感官印象の材料を，それだけでは別々の感官印象を形成し得ない要素に分析する。すなわち直接感官によって検証し得ない概念に到達する。たとえば，原子および分子のようなものは，物理学者が現象を分類し，現象の関連を規定するために理知でこしらえた概念である。

原因と結果の概念も，この立場からみなければならない。力学において力，原因を考えるのは誤りであって，Kirchhoff とともに，「力学は運動の学問である。自然界に起こる運動をできるだけ簡単に，完全に記述するのがその目的である。」 自然の機械観もまたとらない。ある現象の機械的説明に到達したといわれるのは，力学の具体的用語をもって，ある種の知覚の順序が記述されたということを意味するにすぎない。

空間と時間とは現象世界の実在ではなく，われわれが事物を分離して知覚する様式である。それらは無限に大きくもなく，また無限に分割もされず，本質的にわれわれの知覚の内容によって制限される。無限性と永久性とは概念の産物であり，現象の実在的世界の現実ではない。時間は空間と同じく，あの偉大な分類機械，すなわち人間の知覚能力が，これにもとづいてその材料を配列するところの設計の１つである。

物理学者は粒子の助けによって，宇宙の概念的模型をつくる。これらの粒子は知覚的物体の個々の部分の象徴であるにすぎない。

このような見地から物理学をみる Pearson にとっては，感官印象が生命ある類に属そうが，または生命なき群の類に属そうが同じことである。機構としての生命は，純粋に思考の経済上つくられる概念である。感官印象の背後の何物かに到達し得る感官もなければ，仮定された実体「物質」をわれわれが知覚し得るような形而上学的感官もない。同様に，また他の仮定された実体生命をわれわれが知覚し得る特別の感官もないのである。物質を感官印象の一群の実体，生命を他の群の実体であると主張し，物質とその属性の力との助けによっ

て生命を説明しようとするとき，われわれは形而上学的独断におちいる。生物学におけるわれわれの目的は物理学における目的と一致するのである。すなわち，最も広大な範囲の有機的諸現象をできるだけ簡単な方式で記述することにある。

生物学的概念によってわれわれの知覚的経済の範囲をなんらの内在的矛盾もなく簡単に摘要し得るようになるならば，その生物学的概念は科学的に確実であろう。しかしその瞬間，生物学者が一歩前進して，自己の概念の確実性の根拠に立って，なんらの知覚的等質物もなお見いだされないのに，生物学的概念が現象世界の実在性をもつと主張するならば，科学の確固たる根拠から形而上学の流砂へとすべり込む。それは原子と分子の概念の現象的存在を主張する物理学者に一致するものである。これが Pearson の説くところであった。

5.　Pearson の学問的生涯

Karl Pearson の人一倍長い学問的生涯は，いわば，前述の科学観の実践であった。

Weldon との協力のもとに，生物測定学の樹立に努力した 1890—1900 年までは，その第1期である。目標は，Galton のいわゆる「祖先遺伝の法則」の妥当性を検討すること，器官の相関および変更に関して淘汰の影響を明らかにする理由の確立であった。そこでは，重相関の概念の導入とともに，膨大な資料についての重相関係数の計算が遂行された。「進化論への数学的寄与」（1893年）に始まって，ピアソン型分布関数，モーメント法，χ^2–分布等の導入がなされたのもこのころであって，Pearson 一生の統計理論の重要な面は，この時代に形成されたとみてよい。そこには，ただ前進があるのみであった。

だが，1900年，メンデルの法則が3人の学者によって再発見され，メンデル学派が勢力を得るにいたって，生物統計学者の Pearson と Weldon は，彼らからの批判を受けるとともにやがてはメンデル学派との対立抗争を意識しつつ，両人は生物測定学を育成していく時期にはいる。これは 1906 年，Weldon

が病死するまでの時期である。生物測定学の統計的方法と，遺伝学の実験的方法とは，かならずしも常に相敵視しなければならないものではない。それにもかかわらず，両派の指導者相互間の感情的対立に加えて，生物学者と数学者との相互間の認識不足もわざわいして，この対立は，Pearson の終生変わることのない抗争へ導いた。

ここに一応，Pearson, Weldon の主張の合致点というものを，むすこの E. S. Pearson によって，あげてみることは，無駄ではないであろう。

(1)　遺伝現象に関する機構については，われわれは現在，非常に貧弱な知識しかもたない。個々の親子間の相関関係をあらわす数学関係を求めようという希望は，今のところ，架空として，まず捨て去らなくてはならない。

(2)　われわれは大量観察によって，多種多様の形質，諸種の生物についての遺伝現象を収集し，そして育種試験を行なって綿密周到な分類を行なうべきである。それには統計と労力的な計算とに訴えなくてはならない。

(3)　このためには同胞相関 (fraternal correlation) と同型相関 (homotypic correlation) との関係を明らかにする必要がある。ここに同胞相関とは，同一親をもつ兄弟相互間の相関であり，同型相関とは，同一個体に属する，同一型器官相互間の相関である。たとえば，1本の木からとった葉の間，花の間にはそれぞれ類似がみられる。これが同型相関であるが，この類似を生じさせるのと同一の原因が，同一個体の精虫あるいは卵細胞間の類似を生じさせると考えられる。したがってこれが同胞相関にあるとの考えである。このようにして遺伝は homotyposis の1つの現われとみる。

(4)　遺伝に関する生物測定学的あるいは統計学的理論は，遺伝の生理学的理論の否定を意味するものではない。しかし，その確認または否定には役立つ。Galton の祖先遺伝の法則に対すると同様に，新しい仮説であるメンデリズムもまた当然，観察事実との一致に関して数量的な検討が加えられなければならない。random に配偶をとった集団に関して，解析的にメンデルの公式を展開した結果が，はたして生物測定学的観察事実と一致するか否かが，検討されな

ければならない。

(5) Galton の祖先遺伝の法則は，生物学的な仮説ではなく，重相関をもって記述された統計的な法則である。したがって遺伝に関する生物学的理論がどうあっても，その主張は正しい。

(6) 物性説を分子論的に立てていくことは非常に価値がある。しかし分子論の確立する以前に，実際生活においては，分子論によらない記述的な物性論が必要であり，また役立った。自然のままの状態において遺伝現象を統計的に検討していくことは，これと同様の価値をもつ。そのような研究では，個体間の遺伝過程に関して複雑なモデルをつくり，それを検討する必要はない。

以上の見解が，はたしてどれほどの妥当性をもつか，その検討は後にゆずろう。ともかく，Pearson は以上の見解をもとにして，膨大な資料の収集および整理を行なった。22 個の同型相関係数は 0.86～0.17 であって，平均 0.4570 であるのに対し，19 個の同胞相関係数は 0.69～0.20 であって，平均 0.4479，したがって (3) の見解は立証されたものと考えた。育種試験を行なったのもこのころであり，人間の肉体的形質から精神的形質の遺伝の問題に進んだのもこのころであった。これは，学童に関する教師の報告を利用し，兄弟間の相似を統計的に調査するのであった。このために，四分相関係数，四分関数が盛んに利用された。肉体的（精神的）相関係数は，兄弟間は 0.54(0.51)，姉妹間は 0.53 (0.51)，兄妹（姉弟）間は 0.51(0.52) である。この結論は，Pearson の重視したところで，国民優生の方法は，良質の遺伝素質をもつものを多産的にする以外に，他に方法がないとの見解を，Pearson は抱くにいたった。冷厳な現実を，これらの統計を通じて，直視しなければならなかった Pearson の胸には，厭世的な悲観のきざしをみるにいたったと伝えられる。

メンデリズムとの対立と Pearson 等の多産的な研究業績とは，1901 年ついに学術雑誌『Biometrika』の創刊へ導いた。Pearson の業績の多くは，これによってうかがうことができる。これは生物統計学派の機関誌であった。

1906 年は，Pearson の生涯の一転機を意味する。盟友 Weldon が病むこと

数日にして急性肺炎で逝った。かけがえのない生物学の協力者を失ってから，数学者 Pearson がひとりでメンデル学派とたたかうことは，およそ不可能なことである。Pearson が，このころから遺伝学よりも優生学へと移っていったのは，自然のいきおいである。1906—1911 年，これは Pearson の学問的生涯の一時期を画するもので，それは Pearson がその主宰する研究所を着々充実していった時代である。Pearson は，進化論の研究から生物学，遺伝学，優生学と，はるかに数学の世界以外へ進出し，それらの統計的な研究に熱中したとはいえ，また一方において，彼の念頭を離れなかったものは，統計的研究方法の確立であり，観察資料に対する数学の適用であった。そこで，生物測定学研究所 (Biometric Laboratory) においては，統計学を応用数学の一部門として教授し，統計家を科学者の水準にまで高めることが，Pearson の念願であった。Weldon は夭折したが，老 Galton は健在であり，ロンドン大学に資金を寄付して特選研究生を設けた。また彼の設けた Eugenics Record Office は発展して，優生学研究所 (Eugenics Laboratory) となるにいたった。Pearson は事実上両研究所を主宰して多忙をきわめる。この時期の統計的研究としては，肺結核に関する統計，人類遺伝に関する基本資料の収集分析，頭蓋測定学的研究等がある。統計理論としては，random migration の理論，組別相関，四分相関等があげられよう。

1911 年 Galton が 89 歳の高齢をもって永眠したとき，Pearson はすでに 54 歳であったが，Galton の希望もあったので，彼は応用数学教授の地位を去って，優生学の教授となった。前述の両研究所はここに合体されて，応用統計学教室 (Department of Applied Statistics) となり，Pearson がこれを主宰したのである。このころより長年月にわたって Galton 伝 (1915 年) の編集に主力を注いだのである。これはただ同学の先輩に対する敬愛の念によるのみでなく，おそらくは Galton 自身をも優生学の研究対象としてみて，これが価値ある研究対象であったからであろう。1914 年，第一次大戦が起こると，Pearson の研究所は，統計的処理と計算能力とをもって，戦争遂行に協力したのであ

る。

だが，このころは統計学史にとって重大な転機をもたらしつつあった時代である。それは小標本論（small sampling theory）が R. A. Fisher 等によって次第に形成されつつあった時代である。Pearson 自身，小標本論に関する研究もあり，また小標本論と従来の大標本論との間には，歴史的に緊密な関連があるのであるけれども，老Pearsonの小標本論に対する態度は，いちじるしく保守的であった。こうして，1920年大戦が終わったのちに，1933年に退職し，1936年病没する日まで，R. A. Fisher との対立はかなりに尖鋭であった。さきにメンデリズムとの抗争から，客観的にみれば退却した Pearson は，1930年代においては，統計理論の主流の外にいる先輩であり，後進は Pearson の統計学から離れてしまっていたとみるべきである。それにもかかわらず，Karl Pearson はその生涯をあげて主張を改めなかった。精力的な努力は，Pearson の生涯を一貫してみられる特徴である。1920年から1933年までといえば，Pearson の 64 歳から 77 歳にあたる。統計学の理論的研究の第一線からやや離れてしまったのは，年齢からいっても仕方がなかったところであろう。この間における Pearson の関心事は，E. S. Pearson によれば，(i) 統計数値計算表の作成，(ii) 畜犬等，(iii) 頭蓋骨研究，(iv) 人体測定学，(v) 博物館，(vi) 雑誌『The Annals of Eugenics』の編集であった。

(i) の方面で Pearson を中心とするこの研究所で行なった主要なものは

(a) The Tracts for Computers (1919—)

(b) Tables for Statisticians and Biometricians, Part I (1914); Part II (1931)

(c) Tables of the Incomplete Gamma-Functions (1922)

(d) Tables of the Incomplete Beta-Functions (1934)

(a) の No. I の編集者の序にいう。“過去5年間ロンドン大学内の応用統計学教室は，特殊な戦時研究に関係した計算を多量に遂行してきたが，その間計算家の役に立つような簡単な教科書のないこと，とくに必要な補助の数値表のな

のいに困却した。Tracts for Computers はこのギャップを埋めようとするものである。”

容易に手にはいりにくい数値表の再版，補間法，求積法，計算法等いろいろの表の発行が計画され，実行されたことは周知のとおりである。

(a)，(b)，(c)，(d)はどれも，一般の計算家にとっては重宝なものである。

統計資料の度数分布に対して当てはめる公式を，ピアソン型分布曲線にもとめることは，現在の統計学者はあまり行なわない。

しかし，おのおのが正規分布あるいはその他の初等的分布法則にしたがう確率変数であっても，それらの種々の結合として（運算の結果として）表現される確率変数にあっては，その分布関数は，もちろん正規分布とはかぎらず，種種の形式のものが得られる。そのなかにはピアソン型分布のいくつかのものが含まれている。Pearson のつくった数値表等は大変重宝である。現に R. A. Fisher らの研究によれば，ピアソン型分布曲線のうち第 I，II，III，VI およびVII型は精密標本論にあらわれてくる。ピアソン型分布でない場合，しかもこれを表現する簡単な方式がないとき，その分布関数の積率をいくらか計算して，ピアソン型分布の分類基準に照らして，その型で近似的に表現されるかどうかをみることも多い。

Pearson ののこした人類遺伝の宝 (Treasury of Human Inheritances) は，疾患，欠陥，不具，才能の家系調査を種類別にやったもので，大事な資料である。

なお，Pearson の研究所からは，Memoirs Series と Lecture Series とが出ている。

Karl Pearson 退職のあと，応用統計学教室は機構の改革が行なわれ，そのあとは二分されて，むすこの E. S. Pearson と R. A. Fisher の2人の教授に引き継がれた。すなわち，前者は統計学教室 (Department of Statistics)，後者は優生学教室 (Department of Eugenics) を担当することになったのである。

6.　記述統計学の文法批判

記述統計学についてわれわれは，その系譜，文法をたずね，その背後にある哲学をも指摘した。そこで，この節では，(1°) 進化論の数量的確認として，記述統計学の文法ははたしてその使命をはたし得たか。どのような論理を用意してこれに対処したか，を明らかにしたい。次に (2°) 現在の推測統計学に対して，記述統計学は，どのような関係にあるか，両者の間の連続と相違とを，2つながら指摘したいと思う。

〔1〕 もと進化論は，自然の生物界の歴史的発展を説くものであって，力学的自然観に伴う機械論的な静態観を打破するものである。しかも Darwin の進化論においては，淘汰によって偶然的変異が累積されていくということに進化の要因があると考えた。すなわち個々の種の内部において，個体と個体とを比較してみると，それらは同一の形質をもつものではなく，偶然的な変異，すなわち差別性を示すという自然の事実にまず着目したのである。進化論の数量的確認を目標とした記述統計学が，この自然界の事実をありのままに記述する手段として，度数分布を，基本的概念として必要としたのは当然である。しかもその変異の要因を追求することのないところに，その特徴がみられるのである。ところで，ダーウィニズムにあっては，この偶然的差別性が，種の特質そのものを打破するにいたるものと考える。この考え方に対応して，記述統計学ではいちじるしい量的偏差を新しい種族の表現とみようとするのである。とすると，いちじるしい量的偏差とは何であるか。それは，偶然に起こる量的偏差としては，そのように大きな偏差が起こることはきわめてまれである，というような偏差であると解する。いいかえれば，このような偏差以上の偏差が偶然に起こる確率はきわめて小さいということである。では，確率はどのようにして算出されるか，きわめて小さい確率とは何であるか。ここで確率ということは，度数分布そのものに由来する。度数分布から，ある与えられた偏差以上の偏差の起こる確率が計算できる。たとえば，でたらめに摘出された野生のケシ

のカプセルで9以下の数の斑帯を持つものが，度数分布において，2,268 のケシについて 399 あるとするなら，確率は 0.18 である。これはたとえば，袋のなかの球をとり出す場合のように，ある母集団があって，そこから at random に出てくる値として考えることに対応する。ただしここで，母集団とは，いろいろな値をある特定の割合でふくむ袋のようなものである。統計資料というのは，この母集団から，でたらめに抽出して出てきた値の一団であると考えるのである。以上の見方が，記述統計学にあったことは，Pearson の著『科学の文法』第10章に明らかである。この点われわれは，現代統計学と紙一重の差しかないことに気づくであろう。ここにわれわれは，記述統計学と現代の統計学との関連をみることができるのである。しかし同時にまた，ここに相違点が指摘されなくてはならない。母集団と標本との区別は，現代統計学におけるほど明瞭ではなかった。このことは，標本の構成員数が大きいこと，すなわち大標本であることが，すべての統計的結論の前提として必要であり，かつまた充分であると考えたところに，よく現われているのである。事実 Pearson は，小標本論がビール会社の技師 Gosset によって育成されつつあったときに，これを危険視し，naughty であるとした。このことについては，のちにふたたび論ずることにしよう。

それはともかくとして，同一の種の内部に量的偏差の存在を認めることと，いちじるしい量的偏差が異種を立証するということは，一見論理的に矛盾した2つの議論といわなくてはならないであろう。人は，このことから弁証法的な論理というかもしれない。記述統計学が進化論の数量的確証に用いた論理はまさにこれである。現在の統計学は，この論理の構造を，仮説検定論において充分に説明している。こうして，(1°)母集団と標本との区別の明確でないこと，(2°) 大標本だけを有効と考えたこと，(3°) 論理構成の不明確などの点において，Pearson の思想は，現代統計学とはっきり区別されるべきものであるけれども，同時にそれは，現代統計学への前進基地を用意したものというべきであろう。

統計集団を比較して，両者の間の異同を論じようとするとき，Pearson 等の用いた論法についても同様のことがいえるのである。その論法は次のようである。

「A，B 2集団がある計量に関して，実は同一集団であって区別すべきでないかどうかが問題になったとしよう。A，B 2集団の統計をとったところ，その計量に関して平均値はそれぞれ m_1, m_2 であり，標準偏差は σ_1, σ_2 であった。このとき，$|m_1-m_2|$ が $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ の3倍より大きければ，A，Bはちがうといえる。3倍以下ならば，ちがうということはいえない。」

古い統計学の教科書では，よくこのような表現をみるのである。だがこれは実は正確ではないのである。ここで，まず次のことに注意しよう。

(1°)　$m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ はあくまでも資料から得られた値である。したがって資料がちがえば，これとちがった値になるかもしれない。ここで統計というのは，ようするに標本とみるべきである。

(2°)　とすれば，これら $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ はどのような値をとり得るものであろうか。たとえば，袋のなかの球のとり出しのように，ある母集団があって，そこから at random に出たいくつかの数値から計算された計量と考えられよう。ここに母集団は，いろいろな値をある特定の割合でふくむ袋のようなものと考えられる。それは，だから，分布関数をもつ。今の場合母集団の平均値，標準偏差は（簡単のために）それぞれきまった値をもつ，と考えよう。

(3°)　すると問題は，記号をも母集団と標本とをはっきり区別して，次のようにいう方がよい。「2つの母集団の平均値を m_1, m_2，標準偏差を σ_1, σ_2 とする。m_1, m_2 は未知とする。今標本平均値として $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，標本標準偏差として s_1，s_2 を得たとしたとき，この標本をもとにして，m_1 と m_2 とは相等しいと推論し得るか，$m_1 \neq m_2$ と推論し得るか。」ここに上述の(1°)および(2°)の m_1, m_2，σ_1, σ_2 は，この記法によればそれぞれ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, s_1, s_2$ である。

(4°)　上述の問題において σ_1, σ_2 が既知であるか，または未知であるかによって，問題は変化する。

(a)　σ_1, σ_2 がともに既知ならば，$|\bar{x}_1-\bar{x}_2|$ が $\sqrt{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2}$ の特定の何倍か以上である確率が問題である。その確率は正規分布から求められる。

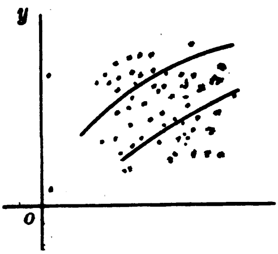
(b)　σ_1, σ_2 がともに未知ならば，その取り扱いは精密標本論によらなければならない。

このように，記述統計学の表現を現代の立場から明確にして，その思想をみるならば，いちじるしい偏差とは，起こることのまれな，すなわち出現の確率の小さな偏差ということである。起こることのまれなということ，すなわち出現の確率の小さいということは，そもそも何を指すか。小さい確率というところに，人間的な尺度がはいってくる。前の“3倍”というのは，正規分布の場合は確率0.0027に対応するものである。この論理はなお，精密にいえば——簡単のため(a)についていうと——$|\bar{x}_1-\bar{x}_2|$ が $\sqrt{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2}$ の3倍より大きいなら，$m_1=m_2$ という仮説を棄てる。3倍より小さいなら，$m_1=m_2$ という仮説を棄てられない，ということである。このように述べてくると，集団の比較にとった論法を，厳密な形式において論ずるとき，それは仮説検定法へ導くものであることを知るであろう。また量の偏差のいちじるしさは種の形成を示唆するという論法は，Darwin の進化論のためには重大な研究手段となることに注意すべきであろう。

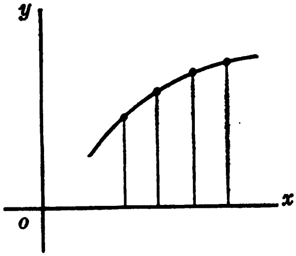
だがくり返していうならば，集団の比較という点においても標本と母集団との区別が明瞭にされてないのが，Pearson 統計学の，現代統計学とちがう点である。またここでもひたすら資料の大きいことを要求し，小標本論をとらないことも相違点である。このことは，母集団の概念の定立を欠いたためである。それは観察の論理であって，実験の論理でなかったからである。そこには漠然とした（誤った）大数観察の原理の適用があるのみで，比較の原理の応用ということが欠けており，母集団を物質的に確保するという意図を欠いていた。ここにその記述哲学の欠陥が暴露しているというべきであろう。

〔2〕　Pearson の統計学を特徴づけるものは，さきにも述べたように相関の概念であった。Pearson はいう。「数理統計学の目的は，2個以上の変量が，

関数的関係にはない場合について，これら変量間の相互関係を論ずることである。」たとえば x と y との関係をみる場合，これを (x, y) 平面にプロットしてみるとき，1本のまとまった曲線の上にのっているというように物理学者は理想化して取り扱うのであるが，統計学者の取り扱うのは，かならずしも1本の曲線の上にのるとはかぎらず，だいたいにおいてある帯状の領域にちらばっているような，関係である。それは生物学社会学等における研究対象の複雑多様な状態を記述するために，欠くべからざる概念であるとしたのである(5-5, 6図)。



5-5図



5-6図

記述統計学では関数の概念の拡張として，相関の概念を理解し，これを広く利用しようとしたのであるが，ここにまず関数とは何かが反省され，相関ははたしていかなる意味でその拡張になっているかが論究されなくてはならない。変数 y が変数 x の関数であるというのは，x の値を任意に指摘すれば，それに対応して y の値がいく組か決定される，ということである。ここに決定といっても，決定するための操作(処置)が effectively に与えられていることを要求しないのが，Dirichlet によって導入された関数の概念である。もと関数は，変数 x の多項式，指数関数，三角関数，代数関数のような，当時の意味で解析的にあらわされる関係をもつ変数を意味した。そこでは，x を与えたとき，これに対応する y の値を構成する方式が与えられている。これに対して，Dirichlet の関数の定義では，x を与えられるとき，これに対応する y もまた与えられるというのである。それは，関数すなわち対応である。甲，乙2人のうち，甲が，乙にはわからないやり方で，(x, y) 平面上に，1つの曲線をかいて乙に渡

す。乙からみれば，y は x の関数といわなくてはならない。y は写す以外には書くことはできない。書かれたものとして与えられているにすぎない。Dirichlet の関数の定義は，それゆえに，現象記述的なものであって，現象構成的なものではない。因果ということを関数関係ということで表現しようとするとき，ここに関数を，Dirichlet の定義による関数の概念をもって解釈すれば，因果関係は対応ということ，あるいは必然的な継起ということだけしか意味されないものであることを，われわれは銘記しなければならない。そこに，記述哲学が忍び込んでいることが指摘されなくてはならない。相関の概念が因果の概念の拡張であるというのには，おそらく，因果とは関数的関係をさし，関数的関係を Dirichlet の意味に解してのことであろう。ここに Pearson のいわゆる相関の概念の本質が露呈されるであろう。

しかしながら，因果関係をそのように解釈することは，はたして妥当であろうか。そのような解釈が正しいか否か論じていくならば，けっきょく，その背後にある記述哲学，すなわち経験批判論の批判にふれなくてはならないであろう。このことに関しては，次章に論じることにしよう。

ここでは一般の曲線的相関関係でなくて，直線的な相関関係，すなわち相関係数について，数学の技術的な面からみておこう。第1に，関数関係があっても相関関係がない，すなわち相関係数は0ということがある。たとえば $x^2+y^2=1$ という関数関係が (x, y) の間にある場合，x と y との相関係数は 0 である。平面上に散布した点列について，最小自乗法の考えでこの分布を近似的に最もよく表現（記述）する直線の方程式をもとめたものが相関の方程式であるから，それは初めから記述的なものでしかないのはいうまでもない。Pearson にあっては，しかし，これを遺伝現象の解明に用いようとしたのである。そこには，研究対象それ自身において，相関を保証すべき物質的な実体，客観的な存在があったのである。しかし，相関係数自身の記述性を利用して，このような応用されるべき根拠をもたない対象に対しても，無批判的に濫用することにより相関係数は，記述的用法を実体的なものと見誤った空虚な用語となり，空

中楼閣をみずから築くにいたるのである。時系列論等における応用等にわれわれはそうした実例を多く経験してきたのである。

それならば，相関関係というのは無用のものであろうか。変動の要因が指摘され，関数関係が定立されている場合には，もちろん相関関係のようなものは不必要であろう。しかし，多くの問題において要因は錯綜し，変量相互間の関係が明らかでないのがむしろ通常である。このような場合には，まず，発見的な方法，研究の端緒となるような方法が望ましい。そのためには，ここぞと思われる変数の組をとらえてきて，それら相互間の変動のありのままの姿を記述する方法をもつことが望ましいということになるであろう。この意味で記述的方法は，けっして不要になることのない1つの研究方法であろう。しかし，科学の認識としては，ここにとどまることのできない段階であることもまた銘記する必要がある。

第6章　経済統計学の計量

1.　経済統計学の成立

経済現象の統計的研究は，すでに17世紀において物価に関するものについて盛んであったし，19世紀になると，農業や労働者の生活に関する調査がとくに顕著になってきたことは，第3章「統計万能時代」で述べたとおりである。その後についてもいくつかの例をあげると，家畜の調査はしばしば国勢調査に付帯して行なわれた（1835年スウェーデン，1838年および1861年デンマーク，1873年および1883年ドイツにおいて等)。農業調査としては，1846年ベルギーで行なわれた全般的農業調査では，耕地面積，ヘクタールあたり生産量および総生産量，使用種子量，ヘクタールあたり平均穀量，地代，土地の平均価格，農業人口，賃銀等が調べられたのであった。1862年および1882年フランスにおいても農業調査が整備された。労働統計では1880年にベルギーで，1846年の調査方法を一層改善した。ドイツでは1875年および1882年に行なわれた工業調査がいちじるしい。アメリカにおいても工業統計調査への着手は早かった。資本，賃銀，材料，生産物の観察，経営数，労働人員等にわたった。貿易，海運等に関する統計は，イギリスが進んでいたのであって，1834年から定期的報告がなされたのである。

これらの統計事業は，ようするに事実の記載，とくに数量的記述であって，それは正しく，方法的には，かの国勢派後期の段階であった。しかし認識の進展は，いつまでもこの階段にとどまることを許さないことは，前にしばしば述べた場合と同一である。事実，これらの調査が盛んになるにつれて，まず抽出調査の必要が前面にあらわれるとともに，その可能性も増大してきた。なぜな

らば，調査が盛んになるにつれて，当然の結果として，調査に要する時間，労力，費用の節約が必要となるし，調査が盛んになって諸種の統計的資料によって種々の社会的大量経済量の数量の程度および変動が認識または推定されるにしたがい，多くの推定が可能になり，抽出調査で充分事がたりるようになるからである。

次に統計的調査から示唆されて，統計的通則が，事実の記述以上のものとして，主張されるにいたった。たとえば，Ernst Engel (1821—96年) は，労働者の家計の研究から収入と生活費目の間に関連のあることを指摘して，いわゆるエンゲルの法則をとなえ，William Stanley Jevons (1835—82年) は，地球に関する太陽の放熱量と景気，とくに農作物価格との対応に注目して，いわゆる太陽黒点説をとなえた。前者は，統計事実の要約としての記述であるし，後者は統計事実より示唆された仮説である。それは単なる事実の記載よりも一歩前進しているが，科学としては，なお低い段階であるといわなくてはならない。

経済統計学が方法論的にも本格的になったのは，20 世紀にはいってからであり，これは，20 世紀にはいってから，経済統計の調査が本格的かつ全面的になったことと関連している。そこには議会主義の確立によって，人民が直接政治に参与するとともに，国家の秘密主義が打破され，財政，金融，産業，消費，貿易，交通，労働等の全面にわたって実態調査が必要となった事情が背景にあるのである。しかし，方法論の立場からいって，20 世紀の経済統計をそのように平面的に解釈するのは，正しくない。景気変動分析における統計的方法こそ正しく，20 世紀にはいってから 30 年間の経済統計を特徴づけるものというべきであろう。経済統計学の名に値するものはすべてこの辺にその起点をおくべきであろう。

景気変動の研究は，よく知られているように，恐慌を説明する努力についで起こったものである。

Adam Smith (1723—90年) から Alfred Marshall (1842—1924年) にいたるまでの正統学派，ならびにドイツの歴史学派はいずれも，恐慌に対して，こ

れを経済学の中心問題とは考えなかった。しかしながら1763年，1772年，1783年，1793年の商業恐慌は多くの論議を産んだし，1815年ころになると，事実として近世的な恐慌が成立し，しかもその周期性が顕著になってきて，恐慌の問題は，経済学の方面にあらわれるとともに，これに関する論議は盛んになった。

恐慌を学説化する理論は，正統学派の批判者の側から起こった。われわれはここに，J. C. L. Simonde de Sismondi (1773—1842年)，Johann Rodbertus (1805—75年) 等の名をあげることができるが，Karl Marx (1818—83年) にいたって，恐慌が，資本家的生産方法の本質に内在する矛盾が，周期的に爆発する瞬間的過程であり，かつ矛盾の瞬間的な強力な解決であることが，指摘された。しかし一方において，恐慌の心理的説明や太陽黒点説のような物理的説明もまた試みられていた (W. Stanley Jevons)。W. Roscher (1817—94年) のように，恐慌をもって，ある攪拌的原因によってうまれる非常的事件とみる見解もあった。攪拌的原因としては，生産技術における新発明の採用，戦争，平和回復，財政上の変革，凶作，流行等の経済外の強制を意味する。

恐慌の理論の展開に対して，他方において，Clement Jugler, Max Wirth, Tugan-Baranowski 等により，恐慌の実証的研究が進められてきた。Jevons, Edgeworth がこの問題のために提示した統計的方法は，指数論として包含されるものである。しかもこの種の統計的研究を，初期の理論的研究に対比して見るとき，次の3点が特徴的であろう。第1に，恐慌の循環性に着目し，ただ恐慌という特異的現象にのみ注意せず，活況と沈滞との交替を全面的に，時間的経過として取り扱うこと。第2に，適当な指数を導入して，景気をこれによって表現（記述）すること。第3に，景気変動の機構に立ち入らずに，景気変動の記述を目標としたことである。ようするに，景気変動を数量化する標識を形式化し，この形式による現象を記述するというのがその建前とするところとみるべきであろう。

以上のように，経済統計学の精華としての景気予測論は，これを必要とする

にいたった資本主義経済の段階を反映するとともに，方法的には19世紀後半以来発達した指数論を要具とするものであり，その本体は1つの時系列論をなすものであった。

したがって，われわれは，指数論と時系列論との両者の本質をつきとめなければならない。

2.　物価指数論の沿革

一般的にいうと，指数は一種の比例数である。ある1つの統計的変量の系列があるとき，この変量に関するある大きさを基準にとり，普通100または1,000をもってこれを表わし，これに比例して，この系列の各要素を無名数をもって表わす。こうしてできた系列が，相対的統計系列ともいわれるべきものである。これを指数ということもあるが，普通にはこのようなただ1種類の統計的変量のただ一つの系列の相対的表示を指すのではなく，いくつかの統計的変量についておのおのの系列がある場合，ある基準量に関連させてこれを1つの無名数の系列にまとめて表現したものを指数というのである。以上のように単なる相対的統計系列が単純指数といわれるのに対して，総合指数という場合もあるが，以下では単に“指数”という場合にはこの総合指数を意味する。指数はこの機能に関していえば，イギリスの統計学者 A. L. Bowley の定義が妥当であろう。彼は，「ある種の量的変化はわれわれは直接にはこれを観察できないけれども，他の種々の量に一定の影響をおよぼしてこれらを増加させ，あるいは減少させるという事実は知ることができる。指数とはこのような量的変化を測定するために用いられる数値である」と述べている。ゆえにそれは計量化の問題の1つにほかならない。われわれは，ここでは物価指数論に限定してその沿革をたずねることによって，経済理論と統計的方法との関連をうかがうことにしよう。

まず物価指数の歴史をふり返ってみると，債務の弁済に対して紙幣減価の影響を避けるために一種の計表本位として使用された場合（たとえば1747年マ

サチューセッツ植民地）もあれば，通貨政策の標準として，くわしくいえば貨幣数量と貨幣価値との関係を究明する要具として用いられた場合（たとえばナポレオン戦争と不換紙幣濫発のために物価の変動に苦しめられた19世紀初頭のイギリス）もある。1896年頃より第一次大戦終了まで継続した一般的物価騰貴が社会生活におよぼした影響，さらにこれに引き続いた大戦後の苦悩は，実質所得の比較という問題をめぐって，生計費指数がとくに問題になったのである。J. M. Keynes の物価指数の分類に従うと；

(1)　全体としての社会に対する貨幣購買力の指数

　(a)　消費標準指数　(b)　収入標準指数

(2)　勤労階級の指数

　(a)　生計費指数　(b)　賃銀指数

(3)　通貨標準指数

(4)　特殊指数

　(a)　卸売標準指数　(b)　国際標準指数　(c)　その他の特殊指数

があげられている。

このように，事実において，物価指数がそのために作成され利用されるところの目的は多様であり，それに応じて多様の算式が併存しているのが現実の状態である。それにもかかわらず，物価指数の究極の目的は，貨幣の一般的国民経済的交換価値の比較であると考え，「物価指数の計算には種々の方法があり得るであろうが，真の，あるいは最良の方法は，ただ一つしかない。それは貨幣の交換価値の真の変化を最も正確に示すものである」との見解をとる，いわゆる単数論が主張された時代があったのである。

現実の交換取引に関係なく貨幣の購買力を測定しようとして，「ちょうど磁石の吸引力が個々の具体的な吸引現象に関係なく抽象的に測定できるように，個々の価格から，そのような価格を成立させた売買取引に無関係に，貨幣の購買力を読み取ろう」とする考え方がある。しかし客観的な，あるいは固有の貨幣価値というものを抽象的に考え得るとしても，これが科学としての意味をも

つためには，具体的に把握する方法が規定されなければならない。けれども，貨幣価値という概念は，どのようにして定義されるものであるか。貨幣が現実に他の財貨労務を購入し得る力によって規定されるものとすれば，貨幣の購買力とは「一定社会が個々人の消費を助けるとして，財貨と労務の購入に彼らの貨幣所得を費やす際に，それらの財貨労務を購入する貨幣の力を意味する」(Keynes) というべきであろう。この意味では「購買力は常に一定の状態における個々人の特定社会の消費に関連させて確立されるべきもの」である。

問題をより具体的に述べてみよう。時点 i における商品 $a, b, \cdots, n$ の価格を $p_i^{(1)} p_i^{(2)}, \cdots, p_i^{(n)}$ $(i=0, 1, 2, \cdots, m)$ とし，今 n 種の商品についての $(m+1)$ 個の時点における価格が次のように与えられたとする。今時点0を基準時点とすれば，時点 i における第 k 種の商品の価格指数 $\mathrm{P}_i^{(k)}$ は6-1表および(1)式で与えられる。

6-1表

商品＼時点	0	1	……	m
a	$p_0^{(1)}$	$p_1^{(1)}$	……	$p_m^{(1)}$
b	$p_0^{(2)}$	$p_1^{(2)}$	……	$p_m^{(2)}$
c	$p_0^{(3)}$	$p_1^{(3)}$	……	$p_m^{(3)}$
⋮	……	……	……	……
n	$p_0^{(n)}$	$p_1^{(n)}$	……	$p_m^{(n)}$

$$(1)\qquad \mathrm{P}_{0i}^{(k)}=\frac{100p_i^{(k)}}{p_0^{(k)}}$$

物価指数作成の問題は，具体的には次の事柄に帰着するであろう。

〔1〕　物価指数の目的の確立

〔2〕　物価指数関数の方式選定

〔3〕　物価指数算出のための資料の収集および整理

物価指数は初め〔2〕のいわゆる形式問題をめぐって盛んであって，できるかぎり，理想的な算式を見いだそうとする努力がつづけられた。だがその場合，

注意すべきことは，物価指数計算の目的をどこにおいてあるかの問題，すなわち〔1〕の問題に対する態度である。しかし形式的問題に関して詳細な基準条件を案出した研究者たちは，その目的を漠然とした諸物価の平均的な変動においたものであり，指数計算の目的が前提する経済理論的な省察において不充分であったのである。〔2〕の問題だけから物価指数を論ずるならば，究極において平均ということをどのようにして表現するかという問題になるのである。形式的問題としては，総合の方法として総和法と平均法とがあり，加重の方法として基準時点数量，比較時点数量，任意固定数量等がある。したがって，総合，加重の種々な形式の組み合わせの結果として生ずる諸種の算式はきわめて多種類に達する。たとえば

(1°)　単純加重の総和指数

(2)　$$\mathrm{P}_{0t}=\frac{100\sum_{k=1}^{n}p_t{}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}}$$

(2°)　単純加重の平均法による指数。これは，ようするに

$$\mathrm{P}_{0t}=f(P_{0t}{}^{(1)}, p_{0t}{}^{(2)}, \cdots, p_{0t}{}^{(m)})$$

として規定されるものである。ここに，$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$は$x_1, x_2, \cdots, x_m$ の対称な関数であって，たとえば，算術平均，調和平均，幾何平均，中央値，最頻値等を意味する。たとえば

(3)　算術平均式　$\mathrm{P}_{0t}{}^{\mathrm{M}}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{p_t{}^{(k)}}{p_0{}^{(k)}}$

(4)　幾何平均式　$\mathrm{P}_{0t}{}^{\mathrm{G}}=\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{p_t{}^{(k)}}{p_0{}^{(k)}}}$

(3°)　加重の問題　個々の商品の重要さに比例して，その価格変動の影響が結果に現われるように計算した総合指数を加重指数というのであって，上述の単純加重の指数は，同一の加重をあたえた場合としてみれば，その特別な場合であるといえる。

総和指数の場合には，商品の生産量，取引量，消費量のような数量によって

加重する。したがって，加重総和指数は二時点における生産，取引，または消費の総金額の比較によってえられる指数がある。今，基準時点および比較時点 i における商品 k の数量をそれぞれ $q_0{}^{(k)}$，および $q_i{}^{(k)}$ とすると

（5） Laspeyres の算式（基準時点数量加重総和指数）

$$P_{0i}{}^{L}=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_i{}^{(k)}q_0{}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}q_0{}^{(k)}}$$

（6） Paasche の算式（比較時点数量加重総和指数）

$$P_{0i}{}^{P}=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_i{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}$$

平均指数の場合に対しては，金額を加重として加重平均指数をつくるのであるが，基準時点の金額は $p_0{}^{(k)}q_0{}^{(k)}$ であるのに対し，比較時点の金額は $p_i{}^{(k)}q_i{}^{(k)}$ である。なおこのほかに，$p_0{}^{(k)}q_i{}^{(k)}$ とか，あるいは $p_i{}^{(k)}q_0{}^{(k)}$ というような加重も考えられる。以上のように加重平均指数の場合には，4通りの加重方法があり，平均の仕方には，算術平均，幾何平均の2通りが実際上用いられるから，合計8通り（4×2）が考えられる。たとえば

（7） $$P_{0i}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{p_i{}^{(k)}}{p_0{}^{(k)}}\times p_0{}^{(k)}q_0{}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}q_0{}^{(k)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_i{}^{(k)}q_0{}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}p_0{}^{(k)}}$$

（8） $$P_{0i}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{p_i{}^{(k)}}{p_0{}^{(k)}}\times p_i{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n}p_i{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}$$

（9） $$P_{0i}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{p_i{}^{(k)}}{p_0{}^{(k)}}\times p_0{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_i{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}$$

(10) $$\log P_{0i}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}q_0{}^{(k)}}\sum_{k=1}^{n}\left(p_0{}^{(k)}q_0{}^{(k)}\times\log\frac{p_i{}^{(k)}}{p_0{}^{(k)}}\right)$$

等々。なお多くの形式が与えられる。しかしわれわれは，細部に立ち入らず，問題の核心をみよう。

まず問題を形式的方面からみるならば，物価指数の作成は，上述のように，広義の平均法の利用である。算術平均，幾何平均，中央値，最頻値等種々の平均法の存在するなかにあって，そのどれを使用すべきかという問題が起こる。平均法の比較検討が最も意味をもったのは，実に指数の問題においてであったといえよう。もっとも「評価の誤謬」の問題として，平均の理論は古くから取り扱われていた。物価指数の総合方法の問題としては，幾何平均法を主張する Jevons の思想と，算術平均を可とする Laspeyres の考えとが対立した。さらに進んでは，諸種の可能な算式のなかから最適なものを見いだそうとして，選択の標準を設けようとする試みがある。Irving Fisher (1867—1947年), Bortkiewecz 等がそれである。たとえば，次のような基準があげられた。

(1°)　比例性テスト (Proportionality Test)：個々の価格がいずれも同一の割合で変動するときには，物価指数 I_{0t} も同一の割合で変動すること。

(2°)　単位無差別性テスト (Commensurability Test)：個々の商品の数量単位の定め方にかかわらず物価指数 I_{0t} の値は不変である。

(3°)　時点逆転テスト (Time Reversal Test)：基準時点と比較時点とを逆にして物価指数を計算しても，変化の割合は同一である。すなわち

(11)　$$P_{0t}=\frac{1}{P_{t0}}$$

(4°)　補間テスト (Intercalculation Test) あるいは循環性テスト (Circular Test)：任意の時点 i, j, k に関して

(12)　$$P_{ij}\times P_{jk}=P_{ik}$$

(5°)　要素逆転テスト (Factor Reversal Test)：同一の形式による物価指数と数量指数との積は，金額指数に一致しなければならない。すなわち P_{0t} をある形式によって算出された物質指数とし，Q_{0t} を同一の算式により算出された数量指数とすると

$$(13)\qquad P_{0i}\times Q_{0i}=\frac{\sum_{k=0}^{n}p_i{}^{(k)}q_i{}^{(k)}}{\sum_{k=0}^{n}p_0{}^{(k)}q_0{}^{(k)}}$$

このテストに照らしてみると，$P_{0i}{}^{M}$, $P_{0i}{}^{L}$, $P_{0i}{}^{P}$ は比例性テストおよび単位無差別性のテストを満たすのみである。ここにおいて，種々な方式が導入された。Fisher のいわゆる理想算式 (Ideal Fomula)

$$(14)\qquad P_{0i}{}^{F}=\sqrt{P_{0i}{}^{L}\times P_{0i}{}^{P}}$$

Bowley の式

$$(15)\qquad P_{0i}{}^{B}=\frac{\sum_{k=1}^{n}p_i{}^{(k)}(q_0{}^{(k)}+q_i{}^{(k)})}{\sum_{k=1}^{n}p_0{}^{(k)}(q_0{}^{(k)}+q_i{}^{(k)})}$$

これらの二算式は，時点逆転テストに合格するが，循環テストを満足しない。Fisher の導入した要素逆転テストは，そもそも比例性テストおよび循環性テストとは両立しないのである。

こうして，形式的な見地からは，物価指数の算式決定の問題はとうてい解決できない。それは物価指数が何の目的のために用いられるかという点を明らかにしないで，記述用語としての指数に執着するためである。

漠然と物価の水準といっても，それは種々の目的のために使用されているからである。

〔3〕の問題は，物価指数作成の実際に当たって，価格資料の収集，整理の問題である。それはけっきょく，調査に関して調査主体，調査客体，調査地域，調査時期，調査方法の全般にわたる問題をふくむものであり，とくにその全部について，種々の標本抽出法の問題が伴うところの統計的問題である。標本抽出の問題に関連してみるとき，Edgeworth 等のいわゆる確率論的方法は興味がある。この考えは，単純平均指数の理論に付随してのみ考えられてきているのであるが，物価指数が，すべて統計資料にもとづいて計算されるものであるかぎり，どのような算式をとるにせよ，指数自身がそこに標本変動をもつ変量

であると見なされるべきであって，将来その見地から，もう一度見なおす必要のあることをここに指摘したい。

〔1〕の問題に対する研究こそ，最近における物価指数理論のいちじるしい進歩であった。R. Frisch は，物価指数論の相対立する2つの立場を，原子的方法 (atomic) と関数的方法 (functional) と名づけた。原子的方法では，売買される個々の財貨の価格と数量とを，いずれも独立変数として考え，物価指数をこの二組の変数の一定形式の関数と考えるのであるが，その関数形の決定は，形式的な規準によるものである。これに反して関数的方法では，価格と数量との間に，経済理論の規定する特定の関係の存在することを認めるものである。G. Haberler (1927 年)，A. A.Konüs (1924 年)，A. L. Bowley (1928 年)，J. M. Keynes (1930 年) のこの方面の主流的研究の指向するところは，関数的方法の適用であった。R. G. D. Allen (1933 年)，H. Stachle (1935 年)，A. Wald (1937年)，等の物価指数論の最近 10 年の発展も，さらにその方向に沿うものであり，それは，いわゆる数理経済学的方法と統計学との結合を目指すもの，すなわち計量経済学的方法によったものである。

ここにわれわれは統計学の認識上学ぶべき多くのものをもつであろう。算術平均，最頻値，中央値，加重平均等諸種の平均のうちで何が最適であるかというような上述の形式的問題は，これらによって特徴づけようとする問題の集団の性質および限界を決定したところにおいてのみ意味があることは，指数論の形式論の失敗が教えるところである。「算術平均そのものは，重要な事実を解明するよりも，むしろこれをあいまいにするものである。簡単に引き出し得るというその効用の点からいっても，それは実はしばしば怠惰を正当化する手段となるものである。」(Bowley) 第2に，理論の必要ということである。統計が現象記述の役目をはたすのみならず，進んで，現象の根本に横たわり，偶然性の揺動のうちにおいてもみずからを貫徹するところの必然性を理解するための要具となるためには，理論が前提されなければならないということである。このような理論があって始めて，統計資料の選択も可能となるであろう。

生計費指数が有効であるためには，家計の動態を注視し，これを考慮に入れなければならない。総合指数としての物価指数については，個々の商品の価格指数間の経済的相互依存性について一段の研究が必要とされることであろう。

統計的研究と理論との総合，これが物価指数論の進路であった。

3. 景気予測の統計的方法

ハーバード景気指数の統計技術的変遷をたずねることによって，われわれは，統計的方法と理論的方法との関係についてふたたび多くを学ぶことができるであろう。

ハーバードの当初の景気指数は1919年4月に発表されたもので，1903年1月から1914年6月に関するものである。これは，次のような多数の統計を利用したものである。

（A曲線）ニューヨーク市中銀行手形交換高，10鉄道会社社債利回わり，ダウ・ジョーンズ工業株価，20社鉄道株価。

（B曲線）銑鉄生産高，ニューヨーク市外手形交換高，ニューヨーク市中央銀行支払準備金総額，ブラッドストリート物価指数，労働統計局物価指数。

（C曲線）ニューヨーク市中銀行貸付総額，同預金総額，60日ないし90日商業手形割引率，4か月ないし6か月商業手形割引率。

これらの多くの統計をどのように総合したかというと，おおよそ次のようである。

(1)　各統計数列のトレンドを観察し，1903年ないし1914年の期間はことごとく直線的発展をなしていることを確かめた。すなわち，直線がだいたいの傾向をよくあらわすことを視察（あるいは最小自乗法）によって論断し，これらの統計数列の直線的傾向値を求めて，これによって実際値を割り，これによって各統計数列の変動傾向を除外した。

(2)　季節的変動のいちじるしい統計数列，たとえば手形交換高，生産高，貸付，預金，支払準備金総額等については，さらに連鎖比の方法をもって季節指

数を算出し，(1)の結果からこれらを引いて季節変動を調整した。

(3)　傾向および季節変動をとり除いた統計数列をA，B，C各グループごとにまとめるために，各統計数列の変動の幅を同一にする必要があるから，(2)の結果に対して，おのおの標準偏差によって割るという運算を行なった。

(4)　このようにして得た統計数列をA，B，C各グループごとに単純算術平均の方法によって平均し，ここに3個の類型線を得る。この3個の類型線における追随反復の関係が，すなわち景気循環のありさまを表示するものであるとして，これを景気指数にとったのである。

このような指数構成法は，それが創案されたときには，将来大変革を受けるようなことはまずないように思われた。ところが事実は，1919年に景気指数が創始されてから20年間で，改正を行なうこと実に6回におよんだ。アメリカ式の試行錯誤法の方法で進んでいったのであるが，ただここに注意すべきことは，それが便宜的な改正である点である。失敗の原因は，しかし，単に統計技術的なことであったわけではない。われわれは，その方法の意義を再考すべきであろう。

上述の方法はA線（投機)，B線（商業)，C線（金額）の三曲線の運動の時間的前後関係，すなわち継起関係を確立して，景気の将来を予見しようとするものであるが，それは，単に歴史的類推に立つものであって，みずからも認めているように，無理論をモットーとする。しかし，歴史的類推の原理自体はもともと単純な経験的期待にすぎない。必然性をこのように解するのが記述哲学の見方であるけれども，ここに記述論のあやまりがある。さらに，ハーバード法は景気指数の波形状について，正確にこれがくり返すことを仮定しているのは，大きな仮説である。いわゆる長期傾向なるものも，発展の大勢を示すものとして，視察または最小自乗法によって決定されるけれども，それは記述的なものであり，便宜的なものである。

このような景気研究における最大の欠点は，正に理論の欠如である。統計的研究が理論の指導なく進む場合に当面すべき失敗を示すものである。だがその

理論は，静態理論からは与えられないものである。またその理論は，定量的な表現をもつことによってのみ，景気研究の目的をはたし得るものである。ここでも経済学の計量化が問題になるのである。

現代の数理統計学の建設者の1人 J. Neyman の論文に，景気分析に関する従来の統計的研究を批判したものがある。以下その大要を紹介しよう。

景気分析に関する従来の統計的研究は，経済的メカニズムの作用した結果そのものの記述であって，経済的メカニズムそのものに注意を払っていない。これに反し，理論的研究がもしあるとすれば，それは当然，経済的メカニズム自身に関する仮説を形式化し，この仮説から出てくる結果と，現実の結果とを対比して，仮説の適否を判定するものであろう。

天文学において，Newton 以前と Newton 以後とが，このような研究方法の区別を示すものである。

Newton 以前になされたすべて，あるいはほとんどすべての研究は，天体の運動に関するメカニズムに関して何の仮説とも関係がなかった。しかし他方において，たとえこのメカニズムが何であろうとも，そのメカニズムによって円運動だけが起こるべきものであろうと信じていた。この時代の天文学者は，円運動の複雑な体系を樹立することによって，観測と一致させることを目標としていた。このような体系にもとづく予言は，しばしばきわめて成功的でさえあったのである。

Copernicus によって，円運動の本質的な中心が地球であるという独断は破られ，Kepler によって円運動の独断がすてられた後にあらわれた Newton の万有引力説こそ，観測される運動の諸性質に関する仮定を設けたのでなくて，これらの運動を支配するメカニズムに関する仮説を提示するものである。

景気分析に関する従来の統計的研究の認識の特徴を，Rhodes に従って次のように要約してみることができよう。

今，時刻 t_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ のおのおのにおいて，s 種類の経済指数 $X_k(t_i)$ $(k=1, 2, \cdots, s)$ が与えられている。これらをそれぞれ時系列としてながめると

き，それはきわめて多くの経済的要因にもとづくものであろう。そこで，今ある1つの要因が存在して，これを，これらすべての指数とよび，Iであらわす。

このIの性質はしかし規定されない。すなわちその性質も定義されない。Iの X_i におよぼす影響についてのメカニズムを問わない。ただ，X_i とIとの間の関係を記述する依存関係を想定するのであって，それはメカニズムが何であろうとも，最後の結果は X_i とIとを結ぶある特種の方程式によって表現されなくてはならないという仮定を設けることに相当する。

そこで次の関係を想定する。

$$(16.1)\qquad X_k(t_i)=a_k I(t_i)+b_{k1}\xi_1(t_i)+b_{k2}\xi_2(t_i)+\cdots+b_{km}\xi_n(t_i)$$

ここに ξ_j $(j=1,2,\cdots,n)$ は，相互に無関係なある経済的な要因であるとみる。この段階はまさに天体の運動を多数の円運動に分解した仮説に相当するものである。しかも，Ptolemy の円のなかで地球が不動の中心であるとの仮説に対応して，次の仮定をおく。すなわち

$$(16.2)\qquad A_{j1}X_1(t_i)+A_{j2}X_2(t_i)+\cdots+A_{js}X_s(t_i)=B_jI(f_i)+C_j\xi_s(t_i)$$
$$(j=1,2,\cdots,s\ ;\ i=1,2,\cdots,n)$$

という関係式である。

以上のような前提のもとに，$I(t_i)$ を求めるのがすなわち目的である。それには，A_{jl} $(l=1,2,\cdots,s)$ というものが計算されなければならない。しかしこれは，以上の仮定を認めるかぎり別に困難はない。それは時系列の平均値，標準偏差，相関係数

$$(17)\qquad \overline{X}_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_k(t_i)\quad (k=1,2,\cdots,s)$$

$$s_k{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_k(t_i)-\overline{X}_k)^2$$

$$p_{kj}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_k(t_i)-\overline{X}_k)(X_j(t_i)-\overline{X}_j)$$

を資料から計算することによって求められる。しかし，ここで問題の焦点とな

るのは，このような因子 ξ_j の実在性でなければならない。以上の解析では，これを主張し得ないことは，次の Neyman の例がこれを示す。

今3つの地方A，B，Cにおいて，経済指数 X_1，X_2，X_3 について次のような関係式がそれぞれ成り立ったとしよう。

(18)　A地方：
$$X_1(t)=I(t)+\xi_1(t)$$
$$X_2(t)=I(t)+\xi_2(t)$$
$$X_3(t)=I(t)+\xi_3(t)$$

(19)　B地方：
$$X_1(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}I(t)+\frac{\sqrt{5}}{2}\xi_1(t)$$
$$X_2(t)=\frac{1}{2\sqrt{3}}I(t)+\frac{3}{2\sqrt{5}}\xi_1(t)+\sqrt{\frac{22}{15}}\xi_2(t)$$
$$X_3(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}I(t)+\sqrt{\frac{10}{33}}\xi_2(t)+\frac{2}{\sqrt{11}}\xi_3(t)$$

(20)　C地方：
$$X_1(t)=\xi_1(t)+\xi_2(t)$$
$$X_2(t)=\xi_1(t)+\xi_3(t)$$
$$X_3(t)=\xi_2(t)+\xi_3(t)$$

ここに $I(t)$，$\xi_i(t)$ はすべて平均値0，標準偏差1で，相互に独立な確率変数とすれば，A，B，Cのいずれについても

(21)
$$\overline{X}_k=0,\ s_k^2=2,\ p_{kj}=1\ (k\neq i),\qquad i,j=1,2,3$$

となる。したがって，Rhodes の方法では，標本変動は別として，同一の結果を与えなければならない。しかし，もしわれわれが(18)—(19)の関係式を知っていたら，C地方については $I(t)$ は存在しないこと，およびあたかも関係式

(22)　A地方：　$I(t)=\mathrm{Const}(X_1(t)+X_2(t)+X_3(t))$

　　　B地方：　$I(t)=\mathrm{Const}(X_1(t)-X_2(t)+2X_3(t))$

がえられることを知る。

4.　計量経済学への道

一方において，理論なき統計は盲目であり，他方において統計なき理論は空

虚である。このことを，われわれは指数論と景気予測論においてみてきたのである。経済統計学が，進み行くべき道は，経済理論と統計との総合でなければならない。

このような試みの1つとして，Henry L. Moore : Synthetic Economics (1929年) があげられるであろう。そして翌1930年に，計量経済学会(The Econometric Society)が，その目的を明示した世界的な学会として創立された。

「計量経済学会は統計学および数学に関連し経済理論の発達をうながそうとする国際的な学会である。その主たる目的は種々の経済理論に対する理論的数量的接近と，経済的数量的接近との総合をめざすところの諸研究を促進することである。」(会則第1条)

その総合はどのような見地から行なわれるべきか。Schumpeter はいう。「われわれはいかなる信仰——科学的であると否とを問わず——をも強いようとするものではない。第1には経済学は科学であること，そして第2には，この科学が数量的であるというきわめて重要な側面をもつということ以外には，われわれにはなんらの共通の信仰ももたない。われわれは宗派でもなければ，学派でもない。」(Econometrica. 第1巻1933年)

しかしながら，事実はどうであったか。総合の1つの相手となった経済理論は，数理経済学であり，総合の他の相手の統計学は，従来の大標本論的な記述統計学であった。これが少なくとも，第二次大戦までの姿であった。いわゆる数理経済学は限界効用学派にその源泉をもち，それはいわゆるブルジョア経済学であるとの批判があるのは周知のとおりである。ここに社会主義経済学との対立は否定すべくもない。他方統計学は，精密標本論の洗練を経て，すでに記述統計学から推測統計学へ生長している。してみれば，計量経済学が従来歩いてきた道とは異なった進路が予想されるであろう。精密標本論の経済学への応用は，第二次大戦中，アメリカで試みられている。他方，理論経済学が，マルクス経済学に対して「共通の地盤」を提供しようとする動きは，世界の経済学界の顕著な動向である。これら両方面の進歩は，計量経済学の一般的な生長な

いし進化を，将来において約束するものであろう。ここでは計量経済学にいたるまでの歩みを振り返ってみよう。

ひとしく数理経済学の創建者であった Augustin Cournot と Léon Walras との間にも，すでに，相違がみられたのである。Cournot は，フランスの古典確率論の歴史に残る確率論の大家であった。彼の特殊均衡理論は，統計資料の整備によって実証されないかぎり，経済理論としての現実性を欠くものといわなくてはならない。このことは，Cournot 自身よく知っていたところであろう。一方 Walras の一般均衡理論は，あらゆる経済的計量の相互依存関係の究明であり，これの相互関係を示す連立方程式の定立であった。そしてその研究を容易にするために，仮説的な静態を前提においた。その理論は，それが包括的であればあるほど，現実の経済世界の様相とはいちじるしく相違した仮説的なものとなり，現実の統計資料を，その理論からいかに解釈するか，逆にいえば，いかにしてその理論を現実の計量と結びつけるか，に関しては，多くの困惑を感じさせるものであった。経済学に数理的な説明方法が導入されて以来，需要曲線，供給曲線が論ぜられ，財貨の販売数量を横軸に，それに対応する価格を縦軸にとって連続曲線が想立される。しかし，これがどのようにして抽き出され得るかということに関しては，久しくこれに答えるものがなかった。すなわち，現実の計量を離れた概念的な存在であったのである。

Moore のいわゆる総合経済学と称するものは，相関係する経済的諸量のすべてを，現実的な連立方程式に総合する方法によって，動的均衡，変動および長期傾向を具体的に実証的に記述しようとすることにより，理論と実証との総合を目指したものであった。仮想的な静態的均衡状態はあくまで仮説にとどまる。現実の経済世界は，経済与件の変化する世界である。そこで Moore は，上述の経済統計学において発達したトレンド計算の技術を利用した。統計に現われた現実値（すなわち観察値）を傾向値で割った値なるものが，Walras の均衡方程式を満足する静態的経済量であるとして与えられたのである。

しかしながら，そのような総合経済学は，トレンドが前述のように現象記述

的なものであり，しかもこれを単に一般的均衡公式につけ加えるだけである以上，経済理論としてきわめて微力なものであり，きたるべき本格的理論のための準備段階以上のものではあり得ないことは明らかである。統計素材による需要曲線の現実化に関するH. Schultz等の結果に関しても，その根本において，需要曲線，供給曲線と，歴史的な均衡移動の方向との混同がある。そこには，経済理論の一段の精密化と統計技術の洗練とを必要とする。われわれは，「理論経済学の安定した公式の統計の助けによる数字的吟味などは幻想の領域に属する」(L. von Bortkiewicz) とまでは思わない。「統計学者の直面する困難は，商品の価格とそれに応ずる数量の一回の観察は需要曲線上のわずか一点を示すだけである。需要曲線上の重要な部分のみに対する経済的証拠を得るためには，多かれ少なかれ延長した時間から多数の観察を用いなくてはならず，この期間中に需要曲線そのものが変化するということがあり得るのである」(E. J. Working) の言に，この問題の困難を認めなければならない。

経済統計学の新しい進路に関しては，第15章「統計学の将来」において，少し触れるであろう。それは，推測統計学と理論経済学との結合に関連するものであるから，本書としては，推測統計学の鮮明ののちにおいてのみ説明されなければならないわけである。しかし今かりに，そうした段階——それは正確にはまだ試みという程度を出ないが——からみるならば，本章に述べたかぎりの計量経済学の構成は，理論経済学と統計学との結合とはいっても，その統計学たるや，記述統計学であったことをわれわれは明確にしておくべきであろう。

第3編　実験統計学の基盤

第7章 実験の計画

1. 実験の計画

記述統計学が，観察結果の整理を目標とするのに対して，現代の統計学の特徴は，実験の計画を主な使命の1つとする。われわれは，ここで実験の論理を明らかにしなければならないであろう。

実験と観察との相違点は，観察では自然のままがあらわれる，観察家は自然の語るところを聞けばよい。それに反して実験は，ある事柄を知ろうとする計画の下に試みて得た結果である。いいかえれば，実験家は積極的に自然に問いかけて秘密を暴露する，という区別が通常つけられる。しかし，実験も，けっきょくはある目的の下に生起された観察であってみれば，上の表現はまだその本質をついていない。実験が観察と異なるのは，取り扱う対象の自然的とか人為的とかいうことではなく，実験の研究態度の積極的とか消極的とかいうことでもない。それのもつ理論的な性格にある。われわれは実験の技術と，実験論理とを分けて考えなくてはならない。

実験医学の理論的確立者 Claude Bernard (1813—78年) がその著『実験医学序説』(Introduction à l'étude de la medecine expérimentale 1865 年) にいうように，実験者の論理は所与の事実の肯定にあるのではなくて，みずから抱く理論の正否を実証的にためそうという点にある。

正しい実験は，4つの段階をもつ。

(1°) 事実の確認

(2°) この事実にもとづいて，その理由を与えるような仮説の構想

(3°) この構想の下に立って推理を下し，実験を組み立ててこれの物質的

条件をくふうし，実験すること。

(4°)　この実験から生まれる新現象の観察を行ない，これが仮説の構想を承証すれば，仮説は学説となる。承証しなければ，この新観察にもとづいて仮説をあらためる。

このようにして次から次へとくり返す。

観　察 ↘ 構　想 ↗ 実　験 ↘ 理　論

盲目の博物学者 François Huber が「ミツバチの新研究」を行なったときには，みずからは観察ができないので，下男に観察と実験とをさせたのである。みずからは構想と理論とにあたった。こうして2人で機能を分担した。

観察と実験の相違は，このように，観察が記述であるのに反し，実験は仮説の検証である。この相違の中に，最も重要な分岐点がある。仮説というわなを暫定的にこしらえて，自然を拷問にかけて白状をきくという点に，Galileo に始まる実験科学の特色がある。ある種の観念論や機械的唯物論においては，対象，現実が，観照の形式のみで考察されてきた。この思想体系に属するかぎりでは，統計学は Quetelet, Pearson の線を越えることはできなかった。しかし，人間の認識は，人間を実践の世界で把握しなければ充分ではない。事物の認識は実践においてのみ得られる。人間は第1に動物である。第2に生産要具を使う動物である。生産要具の生産において，人間はいわば，「自然の直接的変化からしりぞき，まず始めに自然を変化させるための要具をつくり，そして次にはその要具を用いて，自分の直接の目的に帰っていく」。ここに直接の目的とは，環境の征服である。人間の認識においてもこれと同じ過程が起こっているのである。人間は始め自然の直接的な認識からしりぞき，まず概念をつくる。この概念の助けをかりて，次に物の本質へいっそう深くはいり込み，いっそう完全に物を把握する。人間の認識の積極性は実験において実現され，概念，推理の構成，および感覚の助けによるこれらのものの検証を可能にするのである。

2. 実験的研究の例

1900年メンデルの法則の再発見とともに，遺伝に関するメンデリズムと生物統計学派の対立が起こったことはすでに述べた。それから今日までの遺伝学の発展は，われわれに実験と観察との相違を明らかに示し，記述学派の長短をよくあらわすものである。Darwin の研究は，進化の内的機構である遺伝と変異とに対してきわめて不充分であり，進化の過程を観察的に明らかにしたにとどまるのに反し，メンデリズム以後の遺伝学は，進化の内的機構を実験的に明らかにした。現在われわれは，人間の力をもってある程度遺伝を支配し得るにいたり，種の人工変革をきわめて短い時間に，必然的な方法で実現するにいたっている。

現在われわれは，遺伝学研究の方法として，細胞学的方法，実験形態学的方法，系統的方法，記述的方法の諸方法をもっている。遺伝の物質的根拠を顕微鏡下で立証する第1の方法，人為的に外界の環境を調節し，発育途上の変化をみる第2の方法に対して，Mendel 等のとったのは第3の方法である。第4の方法は生物統計学を指す。これら2つの方法を対比することがここで最も肝要である。Gregor Johann Mendel (1822—84年) の遺伝の法則，W. Johannsen の純系の研究，H. De Vries の突然変異説 (mutation) はみなこの第3の方法に属する。

Mendel の頃までに，植物の交雑実験はしきりに行なわれ，種々の結果も知られていた。Joseph Koelreuter (1733—1806年) は種々の植物の雑種をつくり，雑種が両親より均等に遺伝をうける雑種強勢や雑種不稔の現象を観察した。Thomas Knight (1799年)，John Goss (1822年)，Naudin (1862年) 等の業績にも，エンドウマメその他の植物の交雑における性質の分離まで観察記載してある。これに対して，Mendel に不朽の偉業 (1866年および1870年) をなさしめたものは何であったか。これをまず検討しなければならない。

(1°) 実験の目標を明確にしたこと。

(a)雑種の子孫がどれだけ別々の型となってあらわれるかを決定すること。

(b)各代に出てくるいろいろの型の雑種を明確にきまった類に分けること。

(c)これらいろいろの型のものの相対上の数の割合を計算すること。

(2°)　実験の目標を達成するための技術の成功。

(a)親子の関係を明確にして連続的に系統繁殖をしたこと。

(b)雑種の分類のためには，変異の多い計量的性質は相手にしないで，最も区別しやすい形態的性質についてのみ考える。

(c)しかも，特定の形態的性質の対についてそれぞれ別に考えること。

(d)研究の結果をかぞえ，これを統計的に考察した。

(e)実験材料として選んだエンドウマメが適当である：(イ)いくつかの区別しやすい形質を有し，(ロ)自然に放任してもほとんど他花しないし，(ハ)雑種は完全に繁殖力をもつ。

賭博場におけるできごとを，自然現象のモデルとして利用する仮説をあげてみると，1つは気体運動論であり，他は遺伝因子の理論である。気体運動論の核心は，定比例の定律にもとづく。これは2種の気体が化合して，ある新しい化合物をつくるとき，これらの量の比が一定であるという実験的事実にもとづいている。遺伝因子の理論では，個体の遺伝的形質は，気体における分子のように，粒々の遺伝因子によって決定される。そしてどの卵細胞がどの精子と結合するかという点において，袋の中から取り出した玉が赤か黒かというのと同じ偶然さを仮定する。

2対の因子について差異のある雑種，すなわち両因子雑種（dihybrid）に関する Mendel の実験に例を求めてみよう。エンドウマメに2品種があって，一方には種子の表面にしわがよって角形であり緑色の子葉をもつもの，他方は種子が円形で黄色子葉のものである。この2つの交雑の結果，F_1 には円形種子，黄色子葉ができ，F_2 には，4通りの種類ができる。すなわち，Aを円形種子，Bを黄色子葉，a を角形種子，b は緑色子葉に関する因子とすると，これらは理論とよく一致しているといえるであろうか。ここに現われる実験数はかなら

円形黄色　×　角形緑色
AABB　　　$aabb$
$F_1 A_a B_b$

F_2 表現型	AB	Ab	aB	ab
理論比	9	3	3	1
実験数	315	108	101	32

7-1表

これからまた

F_2 表現型	A	a	B	b
理論比	3	1	3	1
実験数	423	133	416	140

7-2表

ずしも大きくはない。それは，大標本を要求するならば，満足されないものである。けれども，遺伝の理論は，これらの実験の上に正確に組み立てられていった。それは Mendel が，親子の関係を明確にし，系統繁殖をしたことに根拠がある。すなわちここに用いられた数学的モデルとの近似が正確であったからである。そうして，そのかぎりにおいては，標本の数が大きいということは必要でないのである。また，数学的モデルとの近似的な類似が確保されるのでなければ，標本の大きいことは充分条件ともならないのである。

実験遺伝学は，このようにして，小標本論の発生の根拠地であった。細胞学の発達により，遺伝の物質的基礎が細胞の染色体に含まれることが知られるにいたって，遺伝因子の説は確固たる地位を占めた。小標本論の成功はこのことに対応するのである。物理学における分子説の勝利と Energetik の敗退と同じく，遺伝学におけるメンデリズムの成功は，Galton, Pearson の生物統計学的研究の欠点をよく暴露し，記述統計学の限界を最も明確に指示する。だがこのことは統計学の進歩を促進するだけであって，その死滅を意味するものではない。遺伝の実験において得られた数比がどの程度信頼できるか，実験上の数値が予期の分離比と一致するかいなかを確かめるかぎり，遺伝学における統計

学の必要はつづくのである。

3. 農事試験法の沿革

農事試験が技芸から科学の域へ進んだ最近100年間の進歩は，現代の統計学の基盤となるものである。このことを明確にするために，やや詳細にその沿革をたずねてみよう。

イギリスにおいて，この方向への第一歩は，1843年ロンドンの北方約40キロのロザムステッドに，同地方の地主 John Lawes が自己所有の農場に試験場を開き，青年学者 Joseph Henry Gilbert の助力を得たことから始まる。ロザムステッド農事試験地の事業の目的は，農業の根本原理を発見し，これをもって農業技術の改善，農村生活の向上に資するにあった。開設当時から，試験所の研究範囲はきわめて広範にわたり，動物の解剖学的研究，植物の栄養研究が盛んに行なわれた。また両者の研究が相まって着々と進んだ頃，肥料工業が盛んになり，イギリスは率先してこの工業に力を注いだ。19世紀の農業の発達に対して肥料工業の進歩を通じて（とくに過燐酸石灰および窒素肥料に関して）ロザムステッド試験場の貢献は偉大なものがあるといわれる。

この試験場のとった試験圃場は，まず旧圃場（classical field）である。これは1843年創立以来，引き続き同種の実験を行ない，肥料の効果を充分に例証する幾多の資料を提供している。これは，綿密な調査と準備の後において，1つの標準をきめて，これを不変として永久に続行するものである。

この試験法では，個々の試験区(plot)は，面積は2分の1エーカー（約2,000平方メートル）を普通こえないものであって，これに対して，1区ずつそれぞれある特定の施肥を行ない，その結果を比較して各種の肥料処理を比較しようというのである。ところが，おそらく相当後になって明らかになったことであろうが，地質の変化を原因とする試験の誤差がはなはだ大きい。すなわち隣り合わせの2つの試験区において産額が年々異なる。試験開始以来同一の施肥をほどこした2つの試験区において産額の差が10～20％にも達した例がある。

このような事情のもとでは，施肥を異にする2つの試験区を比較する場合，どの程度施肥により，どの程度試験区固有の地質の相違によるかが判明しないことになるわけである。旧圃場の思想として，試験圃場を入念に区切り，多年にわたって，同一試験区に同一施肥をくり返したのである。そうすれば，気象条件のような時期的経過をもった変動に関しては，その施肥に対する影響をみることができるのは確かである。このようにして，たとえば，コムギ，マンゴルトの生産に対する降雨の影響が調べられた。しかし，これによっては，試験区相互間に存在する地力の相違は見いだされない。もちろん，地力に対する考慮もなかったわけではない。圃場の両側に，無処理区ともいうべき試験区を対照（control）としておき，その残りの部分に肥料処理を行なった。この無処理区というのは，すべての試験区に共通にほどこす耕作以外には，なんらの処理も加えないという意味である。そうして両側の無処理区を比べて収量がほとんど違いないというのであれば，試験圃場全体が均一であるとし，これを信用して試験をつづけるというわけであった。しかし，これは，ただ対照区だけに関することであり，土地の地力が，両側だけ低く中央が高いということもあり得るのであって，その場合には，両側の対照区の収量が一致するだけであるから，中央の試験区と同様に，対照区にも施肥すると，同一の結果になるかどうかはわからない。

このようにして，農事試験は，その当初から，異質的な性質をもつ材料を取り扱わなければならなかったのであるが，その点に対する反省が不充分であったため，デンマークの Royal Agricultural Society にしても，アイルランドの Department of Agriculture にしても，比較的大きな試験区を設けて広い面積にわたって持続的な試験を行なったが，その結果もちろん，見るべき成果はあったが，一面はなはだしい無駄もあって，これから信頼のできる結果をひき出すことはできなかった。決定的な結果を得るためには，大規模な試験を続行する必要があった。たとえばアイルランドではコムギの2種 Archer と Goldthrope とを比較するために6年間にわたり51回の比較試験を行なった。

しかもそれだけではたりなかった。決定的な結果を出すには，25％以上も一方が他方より収量が多いといわねばならなかったからである。

この問題における真の困難が判明したのは，1910—11年頃 Stratt および Wood, Mercer および Hall, ならびに Montgomery 等によって，試験圃場の各部分の収量を比較する試験結果を明らかにすることによってなされたのである。

著　　者	種　　目	試験圃場（エーカー）	試験区（エーカー）
Stratt および Wood	マンゴルト	9/10	1/1000
Mercer および Hall	コ　ム　ギ	1	1/500
	マンゴルト	1	1/200
Montgomery	コ　ム　ギ	7/45	1/1440

7-3表　　（1エーカー＝4,046.8平方メートル）

地力の地域的変動は，ある程度，地域的に傾向をもち，全くの randomness を示すものではない。この地力の変動に加えて，収量に影響するものとしては，播種，秤量，もしくは測定等に関する種々の実験誤差が累加している。これらは，多くの場合，偶然誤差として取り扱われる。このような事情が農事試験家の対処しなければならない事態である。この上，収量の結果を知るには，少なくとも1か年を要すること，事故のために収量を得られない場合がよく起こること，農事試験の経費の大きいこと，これらの事情を考えるとき，その困難は大きいものである。統計学的処理を加えること，20世紀初め以来発達した Karl Pearson の生物統計学を採用することは，農事試験を志す人たちの試みたところである。Mercer および Hall は，1エーカーをわけて，コムギの場合は500個の小試験区で，マンゴルトの場合は200個の小試験区で収穫して，その変動性を示した。その分布が正規分布のよい例を与えることを示した。だが同時に，地力の変動がかたまっていることを示した。上述の小試験区を単位にとり，これらの単位の小試験区を数個ずつ組にして試験区を仮想的につくり，それらに関しての標準偏差を調べることにより，1/40 エーカーより

大きな小試験区を用いることは，大した役に立たないことを示し，それゆえ，1/40 エーカーを試験区の大きさにとるのがよいとした。

これらいずれの場合においても，試験圃場全体は一見とくに均一になっていたのであるが，収量は予期しないような変動を示した。のみならず，この変動は地域的に at random であるというのではない。圃場のある部分は，目立って収量が多く，他の部分は目立って少ない。そこで，収量によって等高線をかくと，地図のように山がところどころにあらわれるのである。隣り合う小試験区の間には正の相関がはっきりあらわれるということは，くり返し試験で立証されたのである。地力のこの変動から，われわれは一応次のような処理をすればよいのではないかと思われよう。

(1°)　相互に比較しようとする試験処理を受ける試験区をなるべく近くに置いて，地力の変動を平均的にうけるようにすること。

(2°)　このためには，試験区をなるべく小さくとること。

けれども農事試験の実際問題になると，第1に作業が不便である。第2に，周辺効果があっていけない。すなわち，各試験区の外側にある周辺の収量が他の試験処理をうけるため，いいかえれば，他の品種のものと並んだら他の肥料をうけたりするものと隣り合うために影響を受ける関係上，これが収量試験の資料として用いられない。ところで，試験圃場を小さく区分して小試験区をたくさんつくると，この用いられない部分が大きくなるのである。

このような困難に直面してまず第1に考えられたのが，

【1】Beaven の正方形試験区の棋盤方式（Chessboard System of Square Yard Plots）である。これは各試験区が4フィートの正方形であって，その中に列の間隔6インチの8列のうねをつくり，各うねに2インチの間隔で播種したのである。収穫にあたっては外側の2列をとりのぞいた。これにより隣り合う試験区の影響をとりのぞいたわけである。さてここで注意しなければならないことは，これらの試験区に対して試験事項をいかに配置するかである。

この際次の2点が考慮された。

(1°)　各種の試験事項が地域的に平均して分布されていること。

(2°)　同一の試験事項を受けもつ試験区が接近しないこと。

Beaven 自身の配置は，7－1図のようであった。この図は40個の試験区からなるが，これを必要なだけ，たとえば，普通4回くり返す。

A	F	C	H	E	B	G	D
B	G	D	A	F	C	H	E
C	H	E	B	G	D	A	F
D	A	F	C	H	E	B	G
E	B	G	D	A	F	C	H

7－1図

このやり方では，AとHとをくらべると，Aの方が少し左へかたよっている。これに対して7－2図のような改良を提案した。

A	F	F	A	E	G	B	D
B	G	E	A	F	F	A	E
C	H	D	B	G	E	A	F
D	H	C	C	H	D	B	G
E	G	B	D	H	C	C	H

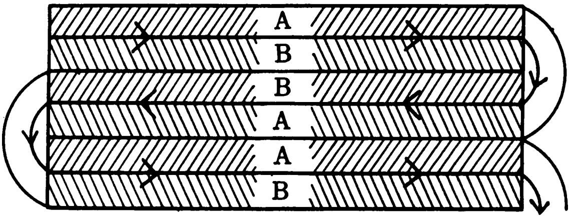
7－2図

この棋盤式配置は，とくにコムギの雑種の試験に用いられたのであって，イギリスで現在普通に用いられているコムギの2種類 Plumage-Archer と Spratt-Archer とは，このような試験をうけて，それぞれの他の競争の品種よりも優秀であることが立証されたのち，大規模な試験をうけた。

【2】ロッドうね法 (Rod-Rows Method) これは1うねの長さを1ロッド，すなわち約5メートル程度にとり，同一うねには同一品種を植える。元来は1うねずつ別の品種を植えることにより，比較上便利な点がねらいであるけれども，隣接作物間の相互作用があるために，同一品種のものを3うねないしそれ以上くり返し，さらに，収量比較の際は他の品種と隣り合ううねは除外すると

いうことにせざるを得ない。すると，2うねは除外されることになるが，3うねくり返しのときは 2/3，4うねくり返しのときは 1/2 だけが，無駄になるという不利益が伴うのである。それでこの方法はアメリカでよく用いられたけれども，非常に多種多様な系統，品種を予備的に全部試験して，そのうちのある物だけを残すというような場合には，この方法もよいが，一般にはあまり推賞されない。

【3】Beaven の半条播機法（Half-Drill Strip Method）半条溝の原理　これは農業の規模における試験として，Beaven が発見した方法である。これは，条播機の種入箱をくふうして，これを2つの半分に分け，そのおのおのに相異なる品種A，Bを入れておき，これをまくとき，一挙にAとBとを7-3図のようにまくのであって，まずABというふうにまいて畠の端へ達すると，こ



7-3図

こで回転して今度はBAとなってまくのである。このようにつづけていくと，ＡＢＢＡＡＢＢＡＡＢ…というふうになるのである。ただしA，Bと書いたところは，作条がそれぞれ10条内外からなっており，その幅は2メートル内外であった。

【4】逢機集区法あるいは乱塊法（Randomized Blocks）およびラテン方格法（Latin Square）　半条播機法では，きわめて幅のせまいうねを用いることとなるから，肥料試験では，他の付近の試験区に影響する恐れがある。これらのものに対しては特別の研究が必要となるのであって，ロザムステッドにおいて R. A. Fisher がとくにこの点を研究した。R. A. Fisher の導入したのは，

逢機配置法（random arrangement）ともいうべきものである。R. A. Fisher は従来のすべての配置法は不充分であるという。逢機配置法は，変量分析法という統計的解析法を道具として登場し，農事試験法に根本的な革命をあたえたものである。現在，これは乱塊法というのがふつうである。

乱塊法では，試験圃場を若干個のブロックに分ける。各ブロックの内には，試験しようとする変員（たとえば，品種，施肥等）のすべてを1回はふくむようにする。これはつまり系統的にやるわけであるが，これに反して，各ブロックの内部において，各試験区にこれらの変員をいかに配置するかは全く逢機的（random）に行なうもので，たとえば，サイコロをふってそれによってきめる。この方法の得失をあげてみよう。

(1°)　同一ブロック内部では，地力の一様性は確保できやすいのであるから，試験処理を全圃場の各試験区へ逢機的に，すなわちでたらめにばらまく方法で配置するよりも，地力の変動を打ち消すであろう。しかも内部では逢機的である。これが利益である。

(2°)　これの不利益としては，次の点があげられる。試験圃場は若干個の乱塊から成っているわけであるが，これらの乱塊の大多数を通じてある特定の1つの品種なり処理なりが他のものよりも，地力の点で有利な位置をとることがある。たとえば試験圃場は北側が肥沃であり，あるAが各集区で北側によっているということが起こり得る。このような事情は変量分析法で考慮に入れられているが，ただ誤差を大きくすることもいなめない。

この困難を克服するために R. A. Fisher の採用したのがラテン方格法である。これは，試験項目が若干個あるとき，これを縦からみても横からみても各変員が1回ずつあらわれるように配置するのである。たとえば試験項目の変員

A	D	C	B
B	A	D	C
D	C	B	A
C	B	A	D

7－4図

が4つで，これをA, B, C，Dであらわすと，その配置法には，たとえば7-4図のようなものがある。

〔5〕要因配置計画（Factorial Design） 地力の変動に対処するために異常な困難を克服しなければならなかった農事試験は，その努力の結果として，さらに進んで要因計画の思想に達したのである。これに関して R. A. Fisher は次のように説明している。

「実験にあたっては，着目する観測結果あるいは効果に影響をおよぼすと想像される諸原因がある場合には，これら諸原因を，なんらかの方法によって，多数の基本的な要因に分解し，実験の際には，そのうちのある特定の因子を除いた他の諸因子を一定に保ち得るような管理条件を設定し，この取り除いた単一因子だけを，その管理条件のもとで変化させてその効果をみる。この建前をとる方法を，科学的道程の本筋であると見なしているのが，一般の通念であろう。しかし，研究の実際についていうと，はたしてこれで充分であろうか。ある法則の説明あるいは実証を目標として計画された場合には，なるほどこれでよいであろう。説明実験の場合であれば，できるだけ単純な様式でその法則を応用すれば，ことはたりるであろう。しかし，真に発見的な方法といえるであろうか。無数にあり得べき因子のうち，若干のものがとくに研究の価値があろうとは思われるけれども，これを決定的に説明するのが不可能な場合が多いのが実際の姿ではないか。のみならず，ある因子の効果がその他の因子の変化とは独立別個に働くかいなか，あるいはその効果は，その他の因子群の変化と簡単な特殊関係にあるか，ということに関してはなんらの知見をももたない場合が多い。研究のために数個の因子をあげ，それらを個々に調べていくという研究方針をとることがあるとすれば，それは実は，それらの因子が管理しやすいとか，計量しやすいというだけであって，自然法則が，これらの変数を項として，簡単な関数関係であらわされるためではない。

かりに研究者が，このような環境のもとで，ある因子にのみ自分の注意を集中したとすれば，多くの場合，それは時間，材料あるいは設備の関係に制約さ

れて，その問題をより多方面から充分に考察できないためか，そうでなければ机上論におちいるためである，と推定してまずさしつかえない。」

複雑な装置，機械，あるいは生産過程，いずれにあっても，これらに関連して起こり得べき変化は，それらの部分部分が相互に潜在的に交互作用をしているものとして考察することが一般にまず必要であり，これらの交互作用によっておこる効果について判断を下す必要がある。だが，これらの交互作用をも検査するということになれば，非常に経費はかさむのではないかという懸念があるわけである。しかし，実をいえば，この懸念は，実験の計画により克服されるべきであって，あまりに誇張されている。ただ従来は，多くの要因を同時に変化させて，その結果から結論を出すことを考えなかった。それは，いかなる実験を計画すればよいか，またその計画された実験から得られる結果をいかに分析して，求める知識を読みとるか，この2点についてなんら知らなかったからである。

ある地方に新品種を導入して，その最適品種，最適施肥法，最適栽培法をきめようという場合を考えてみよう。従来のやり方であれば，最適品種，最適施肥法，最適栽培法を決定するための試験が各個別々に行なわれる。ところで，それを行なうには，たとえば肥料試験ならば，品種，耕作法等はそれぞれある特定のものにきめて行なうのであるし，品種試験では，施肥法，耕作法はそれぞれある特定のものを選んで行なうというふうである。これを数学の問題で表現するとよくわかるであろう。品種，耕作法，施肥をそれぞれV, S, Mであらわす。V は $v_1, v_2, \cdots, v_a$; S は $s_1, s_2, \cdots, s_b$; M は $m_1, m_2, \cdots, m_c$ というふうに変わり得るわけである。つまり品種は a 通り，耕作法は b 通り，肥料は c 通りあるわけである。収量Yは，V, S, Mの関数として

$$Y=f(V, S, M)$$

とすれば，問題は

$$f(v_i, s_j, m_k) \qquad (i=1, 2, \cdots, a\ ;\ j=1, 2, \cdots, b\ ;\ k=1, 2, \cdots, c)$$

なる $a\times b\times c$ の値のうちの最大値を求めることである。

従来のやり方ではこの $a \times b \times c$ 通りのすべては実験を行なわないで議論しようというのであるから，論理上当然手抜かりがあるわけである。従来のやり方をすれば，ある1面積についてこの肥料の水準が最適だということがわかっても，上述の別の試験の結果，選抜された品種には適用できないこともあり得るわけである。もちろん，品種間の相違が，施肥の水準，栽培法のいかんにかかわらず，同一である，たとえばA品種はB品種よりも，両者同一の施肥，同一の栽培法をほどこすかぎり施肥のいかん，栽培法のいかんにかかわらず，優秀である，という場合も理論上は考えられないわけではないが，これは実際上まずない。かりに，そういう場合であったとしても，上述の試験は要因試験にくらべるとずっと効率がおちる。効率が落ちるという意味は，同一個数の試験区から得られる知識が要因試験に比べて少ないということである。この点は，要因試験に伴う分散分析法によって事態を明らかにすることができる。

4. 小標本論の誕生

William Sealy Gosset (1876—1937年) が，オクスフォードのニュー・カレッジで化学および数学を学び，ギネス・ビール会社に農芸化学の技術者として奉職したのは1899年のことであった。ビール会社は，材料の変動に富み，温度変化に鋭敏に感ずる事柄に関係し，また実験が小系列からなることなどのため，統計的方法を用いる必要と当時の大標本論の制限とを，最も早くから気づいていた。当時このビール会社には大学出の技師も多かったが，そのなかでも Gosset は数学が得意な方であったから，彼に標本の小さい場合の取り扱いが課題として提供されたことと思われる。小標本論の誕生は1908年 Gosset が Student というペンネームを使って発表した今日のいわゆる t-分布 に始まるのである。このギネス・ビール会社では，Gosset の発見以来この分布をすでに使用していたのであるが，会社以外ではあまり知られていなかった。その頃数理統計学界を代表したロンドン大学の統計学研究室では，大標本に関係したことだけを取り扱っていたのである。もしかりに Student が大学の student

であったら，小標本論は彼の手では生まれなかったであろう。ビール醸造の技術を通じて，彼は小標本論を樹立し得たのである。アイルランドにおいてオオムギ栽培に関し行なわれた事業に関して，ギネス・ビール会社は主要な役を演じたのであるから，Student は収量試験ならびに一般に農事試験に第一線的な体験を経たのである。彼の役目は事務所にすわって結果の計算をするだけではない。収穫前に試験場をずっと見まわり，その困難と細部とをことごとく知っていたのである。

これらの研究において Student は指導的な役割を演じていた。彼は 1906 年 Karl Pearson 教授の許へいって，これらの問題を論議した。

前述の E. S. Beaven の許へもしばしば訪問した。Beaven はオオムギ栽培の大家であったから，数学のことはわからないにしても，このことはおおいに Student を益したであろう。Student 自身多くの人たちに統計学的研究の指針を与えた。彼の論文をみれば，仕事は量的にはきわめて小さいが，質的にはすぐれたもので，いずれも統計学上の珠玉である。

Student の小標本論の出発点になった思想は，何であるか。それは x と y との 2 つの変量があるとき，x, y, $x+y$, $x-y$ の標準偏差をそれぞれ σ_x, σ_y, σ_{x+y}, σ_{x-y} とし，x と y との相関係数を ρ とすれば

$$\sigma_{x+y}^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2+2\rho\sigma_x\sigma_y$$

$$\sigma_{x-y}^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\rho\sigma_x\sigma_y$$

となる。ここにその秘密がある。Student は「あらゆる実験についての計画をなすにあたっては，問題は σ_x^2, σ_y^2 を小さくすることでなくして，ρ をできるだけ大きくすることである」といっている。Student が Beaven の半播種機法を唱導したのもこの思想であり，その根拠は上式にある。

Gosset は，ビール会社の仕事の関係上，導入しなければならなかった統計的方法を，G. B. Airy，Lupton，M. Merrimam 等の誤差論や最小自乗法の教科書に求めた。1904 年には“誤差論の応用”に関する報告文を書いて，これを会社の技師たちの参考書にした。この，いわば業務用のテキストのうちにすで

に Gosset の鋭い洞察はその片鱗を示している。

(1°)　誤差法則

$$y=\frac{1}{C\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{c^2}{x^2}}$$

をあらわすCを推定するのに，(a)平均誤差と，(b)標準誤差と2種の計算法がある。

(b)の方が(a)の方より114/100の割で効率が高い。

これは現代の統計学の用語でいえば推定論の問題である。

(2°)　ピアソン分布の応用として，haemacytometer をもって，yeast cells をかぞえる場合にあらわれる標本誤差の問題があることを指摘したのは Student である。

(3°)　ここに，Student の業績のうちで最もすぐれたものであり，現代統計学の出発点となったステューデントの分布について語るべきであろう。

平均値m，標準偏差σの正規母集団から，任意抽出によりひき出して，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の値を得たとする。すなわち大きさnの1標本が得られたわけである。

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

がそれぞれ，標本平均値，標本標準偏差といわれるものである。

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は標本抽出の結果わかったもので，また別に抽出を行なえば，違った結果になるであろう。一般にその変動を標本変動という。

標本変動を論ずるには，上述の$\bar{x}, s$に対して，確率変数$\mathrm{\bar{X}}$，Sを次のように定義して考える。

$$\mathrm{\bar{X}}=\frac{1}{n}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\cdots+\mathrm{X}_n),$$

$$\mathrm{S}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\mathrm{\bar{X}})^2$$

ただしここに

（i）　各 X_i はいずれも平均値m，標準偏差σの正規分布に従う。

（ii）　各 X_i は相互に独立である。

Student は，$\overline{X}$，S の標本分布を精密に求めたのである。精密に求めたという意味は，従来の大標本論では$n\to\infty$の場合しか考えてなかったのに対し，各有限一定のnについて，問題を考えたことを指すのである。

Student の論じた仕方は次のようであった。

（i）　まず確率変数 S^2 の各次のモーメントを順次求めてみた。そうしてそれと同一の各次のモーメントをもつ分布密度関数を考えることにより，S^2 の標本分布密度は

$$\mathrm{Const}\times\sigma^{-n+1}(s^2)^{\frac{1}{2}(n-3)}e^{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}}d(s^2)$$

であることを，ほとんど確実であると考えた。

（ii）　確率変数 $\overline{X}^2$ と S^2 との相関係数を計算してみてその相関係数が 0 であることを確かめた。そうしてこのことから$\overline{X}$とSとは，相互に独立であると考えた。

（iii）　次に $z=\overline{X}/S$として，z の分布関数を求めて，理論的に

$$p(z)=\mathrm{Const}\times(1+z^2)^{-\frac{1}{2}n}$$

を得た。

（iv）　上述の関数の諸係数を調べ，とくに $n=4\sim10$ に対しては関数表をつくった。$n\geqq30$ になると平均値 0，標準偏差$\sqrt{n-3}$の正規分布に近づくことを示した。

（v）　$n=4$ の場合の標本実験を与えた。

現在の統計学では，z ではなく

$$t=\sqrt{(n-1)}\,z$$

を用いるし，また上述のような証明法はとらないで，もっと厳密で簡単な証明法を知っている。しかし，発見法としてみるとき，Student の上述の方法は多くの学ぶべきものがあるであろう。Student は上式を，数学の演習問題として

出したのではない。大きさ n の観測値が与えられたとき，これをもとにして，母集団の平均値が何であるかを知ろうとすることにあった。彼の仕事では，n が小さい場合が必要であり，従来の n が大きい場合に対応する公式は，役に立たないというところに問題があったのである。Student は「きわめて多くの回数にわたっては，くり返し得ないような実験がある。このような場合には，きわめて小数の例（小標本）にもとづいて，それから結果の確実性を判断しなければならないようにもなることがある。化学実験の若干のもの，多くの生物実験，それから農事試験や大規模実験の多くは，そうした種類のものであるが，これらは，統計学的研究法の適用される範囲内になるものとなってきている」と述べている。

(4°)　上述の S^2 および Z の分布関数を理論的に導き出し，さらにこれを確かめるために標本実験を行なったが，同じく標本実験を，相関係数の標本分布を実験的に導びき出すのに用いた。それは1組の大きさ4の標本745組と，1組の大きさ8の標本750組を用いたものである。

母集団の分布密度関数が

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\,exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right\}$$

で表わされる双変正規母集団から得た資料 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ から，標本相関係数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

を求める。この r の標本分布関数を求めるのが問題である。

Student の取り扱ったのは $\rho=0$, $n=4, 8$ の場合である。Student は，この問題を解析的に取り扱うほどの数学の力はもたなかった。彼は，上述の標本試験によって想像を述べたのである。このとき，Student がロンドン大学に学んでピアソン型分布曲線に親んでいたことが役に立った。すでにステューデントの分布のときに，S^2 の分布密度関数として正しくも第III型分布を想定したよう

に，ここでは前の場合とは違って確かな根拠はなかったにもかかわらず，ここでも，$\rho=0$ の場合には，わずか $n=4, 8$ の場合の実験から一般の n について

$$\mathrm{Const}\times(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}$$

になるだろうとの，正しい推測を下したのである。

もしも Pearson の第Ⅲ型分布関数を知らなかったら，Student はステューデント分布を発見するにいたらなかったであろう。Pearson は，Student 等の小標本論に対して，同意を示さなかったし，Student も多くを学ばなかったといったとも伝えられる。それだけのことを表面的にみれば，対立的にもみえるであろうけれども，両者には学問的に連絡があり，小標本論は，Pearson の研究を道具として，足場として，使って生まれたことを見のがしてはならないのである。

第8章　大量生産の管理

1. 沿　　革

近代統計数理の発端の1つを農事試験にたずねたわれわれは，もう1つの基盤として，工業方面の大量生産管理を指摘しなければならない。すでに計画と管理ということばが表面化されてきたこの進展は，それを育成した社会の経済状態を反映していることはいうまでもない。19 世紀前半の産業革命によって，確立した欧米先進資本主義国の自由主義経済体制は，およそ 1870～1890 年代に最高に達し，やがてそれは独占への移行を意味する。独占企業の出現，すなわち大規模な生産の集中は，大量生産の統計的管理を必要かつ可能とするにいたったのである。ここでは，それに立ち入る前に，品質管理の諸段階を振り返ってみよう。

互換性の概念が確立されたのは，1780 年代の頃といわれるが，当時，生産に関する観念は，正確に指定寸法のものを製作しようという考え方であって，今日のいわゆる公差（tolerance）の思想とはいちじるしい対照を示すものである。

そもそも製作部品の寸法を全く同じようにつくりあげることは，不可能である。現実に生産された結果は，実は，指定寸法と若干のくい違いがある。しかし，そのようなくい違いがあっても，そのくい違いが，ある程度以内のものであれば，実際上の用途には間に合う。一方，このくい違いをなるべく小さな限度に収めようとすれば，いいかえれば，精度を高めるには，きわめて経費のかかることである。部品の仕上寸法をある範囲内に仕上げれば，充分であることは，慎重な多数の測定試験の後において確立された生産上の観念である。通り

公差（1840年）から，通りおよび止り公差（1870年）までの二段階が経られたのである。

しかし，通りおよび止り公差を設け，通りおよび止りゲージを設けることは，必然的にこれら範囲外の寸法の排除を意味するものである。すなわち不良品の処分が当然伴う。

これに関係して，第1に，不良品の割合をどうしたら，統計的に最少限にくいとめられるかという問題が起こるし，第2に，品質検査に伴う抜き取り検査の問題が生ずる。これらのことが，まず品質管理に関する統計的方法の導入をうながしたのである。そこには，工業生産品の品質，形状に標準を設けて，これを統一する規格的統一の問題があって，イギリス（1901年）を始めとして，漸次各国に波及し，1930年頃までには，ほとんど主要なすべての国に規格協会が設けられている。

品質管理の論理的な構造は，いってみれば規格，生産および検査の三段階からなることは明らかである。この三段階の推移のうち，偶然に関する管理を，実践によって実現しようとすることが，すなわち統計的管理といえよう。

2. 統計的管理状態

近代生産の特徴は，くり返しくり返し同一のものを生産しようとすることである。このために精細な規定なり限度なりが，原料，生産要具，生産工程のいずれにも設けられている。しかし完全に同一の原料，同一の生産要具，同一の生産工程というものはあり得ないから，完全に同一の製品をつくることは，不可能である。製品にあらわれる諸変動のうち，あるものは，技術者の知識の動員によって，いかなる原因に基因したかが突き止められる。突き止められる原因を順次取り除いていくことによって，製品にあらわれる変動は次第に小さくなっていくであろう。しかし，突き止められる変動の原因が排除されて，もはや，突き止められる原因が見当たらなくなっても，変動は消失しないであろう。生産におけるこのような変動は，偶然的原因による偶然変動として取り扱

われる。ようするにそれは，そのときの知識の範囲外というだけであって，知識の進歩によっては，その原因が突き止められることもある。消費者にとって，断定不可能な変動の原因であっても，生産者からみれば，容易にそのよってくるところを指摘できる場合がある。

近代生産は，時間的に，流れ作業の形式を典型とする。製品の完成段階はもちろん，工程中の各段階においても，そこに時間的に測定結果，試験結果を記録していけば，それぞれ，時間的系列に従う統計系列，すなわち時系列を得るのである。今かりに，突き止められる変動原因は除去されて，残るところは，相互に独立におこる偶然的原因によって変動するだけであるとするならば，たとえば測定値の系列として，

（1）　$O_1, O_2, \cdots, O_n, O_{n+1}, \cdots$

を得たとすれば，それは乱数表のような数値の無規則的な系列となるであろう。

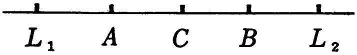
数学的にいえば，独立な確率変数の系列をここに想定し，それがとり得る種種の値の系列のうちから，その１つが，現実化されて現われたのが上述の系列であると考えられよう。また，袋のなかから球をとり出す操作のような試行の後において得られた系列としてこれをみることもできよう。ここに確率論援用の基礎がある。

しかし，ここに次のことが注意されるべきであろう。たとえば生産要具としての機械について考えてみれば，その設計と製作とは，科学的思惟と科学的計算とにもとづき，それは初めから，論理的な意図の具体化されたものである。そのかぎりにおいて，一応合理的ではある。けれども具体的存在としては，かならずや非合理的な部分をもつ。これを補うために，たとえば，「こつ」とか「かん」というものが，尊重される段階がある。それは本質的には手工業的時代の理念というべきであって，近代生産の大量生産管理の方法が統計的方法を採用するのと，対比してみられるべきものである。

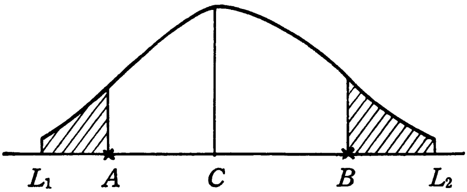
3. 統計的管理の実践

統計的管理の行きつくした状態を前に述べたが，そこへ到達することを目標として，統計的管理の行なわれるべき実践的経路が，明らかにされなければならない。

生産上の規定として，たとえば，通りおよび止りゲージが採用されて，最大寸法 L_2，最小寸法 L_1 が指定され，(L_1, L_2)の範囲外にあるものは，不良としてすてられるべき事情のもとにあるとしよう。そういう場合においては，統計的管理の第一歩は，生産の現状からの統計的事実として，合格品のもつ寸法の平均値Cなるものを把握してくるのである。それはもちろん，$L_1<C<L_2$ である。そして第2の問題は，この Cのまわりにいかなる変動を示すかということである。しかし，ここに注意すべきことは，ある期間の生産についての測定平均値からCを求めても，それが，将来実現されるべき生産に関して，あるいは，過去において行なわれた生産に関して，平均値をよく表わしているとの保証はない。この保証は統計的に平衡状態にはいってからいえることなのである。したがって，ここにいう平均値，またはそのまわりの変動ということは，統計的な平衡状態を実現するための足場となり，道具として用いられるものであって，それは現実を把握するための仮説的な概念である。この点は，実在そのものに，静態的な正常状態が存在することを前提とする古典統計学のいき方とは違うのである。この平均値Cのまわりの変動分布は，現実に測定してみれば，種々の形式のものがあるであろう。(L_1, L_2) の間，とくにどこにかたよるということなしに一様に分布しているもの，Cの付近がとくに多いもの，あるいは，生産工程の途中において，大きく製作すれば，削り直せばよい，小さすぎたら，廃品となるほかはないというわけで，変動分布が L_2 のまわりに集まっているようなもの等，種々あるわけであろう。平均値Cを見いだし，この変動分布を観察した場合，統計的管理のとるべき次の処置は，8-1図のようにCをはさみ，(L_1, L_2)の内部に，1つの区間，A，Bを設けることである。このA,



Bは管理限界ともいわれるべきものであって，製作者の測定結果が区間A，Bの間にあるかぎりは，一応問題はないとみる。A，Bの外に落ちるならば，たとえ(L_1, L_2)の内部にあり，したがっていまだ不良でなくとも，生産工程に対しては，過度の変動を示すものとして，技術的知識の動員によって，突き止められるべき原因でないか，その原因を調べ出そうと努めなければならない。とすればこのようなA，Bはいかにして設定されるか，統計的管理が理想的に押しすすめられて，変動分布の分布型が確定不変なものとして，存在するにいたるならば，8－2図のように，斜線の部分だけが問題として残る部分となる。

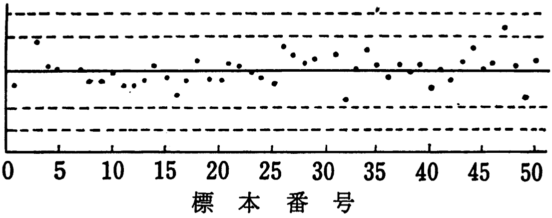


8－2図

しかし，それは，到達しようとするゴールであって，出発点ではない。出発点におけるABの設定はそれとは意味をことにする。それは第１に，仮説の検定という意味のものであり，ABは検定のための手段である。第２に，このような検定を通じて漸次統計的平衡へもたらす実践過程のための手段となる。

以上の所論を次に段階にわけてさらに詳しく説明しよう。

【1】突き止められる変動因の発見　管理図の典型的な場合をつくるのに，前にふれた8－2図を頭において考えてみよう。今，第t番目の標本において，ある特性についての平均値を$\bar{x}_t$としよう。標本番号tを横軸にとり，特性平均値を縦軸にとることにより，8－3図上に黒点として示された点列が得られる。これに対して特定の管理水準を引くのである。それは，管理が進んでもはや偶然的な原因しか作用していない場合を想定し，その場合にあらわれる変動のみ



8-3図

を考えた場合，平均値相互間には，どれだけの変動が許されるかを示すものである。すなわち管理水準線にはさまれた範囲外に出る変動は，有意的であるとみるのである。

しかし，管理図というものが，生産の始めからいつでもつくれるように思ってはならない。管理水準を決定し，これを管理図に表わす場合，常に必要なのは，偶然的な原因による変動についてなんらかの計量をもつことである。しかも，これは，実際には，次の2通りの場合のいずれかによってのみ可能なのである。

第1種 過去の経験により，品質の標準がわかっており，偶然的原因による特性の変動は，ある平均値Cおよび標準偏差σをもつというような場合である。こういうのは，新製品がはたしてこの標準に合致しているかどうかをみようという場合の方法である。

第2種 これは，品質の標準としての平均値Cおよび標準偏差σのうち，いずれか少なくとも一方がわかっていないという場合である。根本的には，生産はこのような状態から出発していかなければならない。こういうときに1組の試験記録に対して，試験結果それ自体から内部的に判定を下す必要がある。したがって，生産は統計的に均衡であるとの仮説を設け，この仮説のもとに，平均値および標準偏差の推定値を用い，これ等の値を用いて仮説を検定するという立場をとるのである。したがって仮説の検定こそ，両者を通じての一貫した方法である。してみれば，その仮説の検定に移る前になすべき多くのことがある。以下これを論じよう。

【2】合理的な群への分類　製品単位体の特性にあらわれる変動のうち，あるものは突き止められる原因である。材料の出所の相違，製造機の相違，工員の熟練度による相違等々。「これら突き止められる原因をのぞく」ということばを用いたのであるが，具体的には，それは，何を意味するかといえば，これらの因子を基準にとって，分類をすることをさす。すなわち製品単位体の特性に関する統計資料を，材料の出所別に，製造機別に，工員の熟練度別，工場別，等々に分類することをさす。こうして，統計資料はいくつかの群に分かれるのである。その理想とするところは，次のようであろう。

(1)　同一の群の内部にあっては，変動は統計的に均衡であること。

(2)　群と群相互間にあっては，突き止め得る原因の相違があること。

統計的分析は，まず偶発的原因に基因すると見なされるべき，各群内部の変動を問題にする。次には，群相互間に起こる差異のあるものにも目をつける。群相互間には技術的にみて，差異があるだろうとの推定のもとに分類されたものであるけれども，別にそうした差異を生ぜしめるような因子が存在しないかもしれない。別に存在しないときには，偶然的な変動だけになる。

技術的にみた群内部の同質性と群相互間の異質性，この両者のいずれに対しても，統計的検定の道があるのである。このような検定に当たって統計学者のよって立つ仮説的なるものが明確にされなければならない。それは，すべての場合を通じて，ある母集団から抽出された標本についての特性値の変動と対比して，その系列を観察するのである。そして，多くの場合，そのような母集団として正規分布を仮定し，かつ抽出法は任意抽出法であるとする。しかしそれは本質的なことではない。正規分布でなく，抽出が任意抽出でない場合も，必要である。いずれにしても，その論法は演繹的である。それは，確率論の内部の問題として，その確率変数の分布関数を決定することによって得られる。

【3】管理限界の設定　前述の管理図（8－2図）の例にもどっていうならば，ここに問題となることは，管理限度の設定に当たって，いかなる点が考慮されるべきかということである。それは少なくとも，次の4条件を満足しなければ

ならないであろう。

(1°) 突き止められる変動原因の存在する場合には，管理限界の設定によって，これが検出されること。

(2°) ただ検出可能なばかりでなく，実際に突き止められる変動原因の発見を容易ならしめること。

(3°) 管理方法は継続的であり，かつ自律的であるべきである。そうした体系において採用し得るものであり，かつなるべく簡単であること。

(4°) 突き止められる原因が存在しない場合において，管理限界の範囲外に落ちる確率はある限度以下にすべきこと。

管理限界をあまり幅広いものにとると，(1°)の条件が満足されにくくなる。管理限界をあまりに幅のせまいものにとると，管理限界外に落ちるものが多くなる。突き止められる原因が存在しないにもかかわらず，その度ごとにいちいち調べてみなければならないということになって，(4°)の条件に反する。(2°)，(3°)は具体的には何に関係するかといえば，それは，管理限界を引くにあたっていかなる統計量を用いるかということに関係するのである。

(3°) に関して重要なことは，突き止められる原因が除去される度ごとに，管理図上の管理限界が一般に小さくなるという改訂をうけることである。くり返していえば，統計的管理の行きつくした統計的管理の均衡なる状態は，理想であって，多くの場合，そこへいたっていない。したがって，確率表により，計算された管理限界を設定して過度の精密をもとめても，無意味である。突き止められる原因の所在を指摘するという重要な機能は，ある適切な観点から，標本を類別する点にあるといわなければならない。これに関連して重要なことは，時系列としての管理図の取り扱いと，そこにおける小標本論の意義である。時系列としては，そこに，傾向とか周期的変動がみられる場合が少なくない。それは偶然変動でなくして，突き止められる変動因の所在を暗示する場合である。技術者の知識においては，すでにこのような変動因の所在が予想できない場合において，統計的方法によって，それが暗示されて探究の端初となる

というようなところに，統計的方法の意義がある。また小標本の意義についてであるが，時系列において，多くの時点についてのたとえば平均について考察しているのでは，ある種の変動は相殺されて消えてしまう。たとえば，1日の午前に上って午後に下る変動的波は，1日についての平均をみていてはわからない。しかし，生産面において問題になるのはこのような波である。標本についての平均等は，当面の問題に対して役に立たない場合がある。小標本でもよいのではない。問題によっては小標本でなければ研究できないのである。小標本については，変動は一般に大きいのであるが，それは，研究要具としての小標本の無効力を意味するものではない。小標本には，小標本としての分布が明示され，確率が計算できるかぎり，問題はないのである。ここに，大量生産管理における小標本論の意義がある。次に(4°)に関しては，統計的管理の均衡状態に近づくにつれ，実際には，突き止められるべき変動因のないのにもかかわらず，管理限界線だという理由で，いちいち調べるという手数は極力避けなければならない。アメリカにおける経験として，管理基準になる統計量が正規分布をしている場合において，次のような管理水準をきめている例がある。すなわち，偶然変動のみであって，突き止められる原因の存在しないにもかかわらず，この基準限界線におちる確率は，0.003であるようにとるのである。

【4】仮説検定法としての管理図法　統計理論としての Neyman–Pearson の仮説検定の理論は，次の論理構造をもつ。大きさnの標本があったとき，この標本がある特定の母集団πから抽出されたという仮説をHとし，このHを検定する問題を考える。この場合，(a)抽出法がはたして任意抽出であるか，あるいは，(b)母集団が抽出の経過中に不変であるか否かという問題には，ふれない。すなわち，抽出は任意抽出であり，母集団がπであるか否かは問題であるが，とにかくある一定の母集団であるとして問題を考える。問題は，少し局限すれば，母集団がπであるか，あるいは他の母集団π'であるかということである。これに対してわれわれは，標本$\sum$をみて判断を下すのではあるけれども，そこには一般に2つの種類の過誤があり得る。

e_1 第1種過誤：$\sum$ が実は π より抽出されたのにもかかわらず，仮説Hが棄却されるという過誤。

e_2 第2種過誤：$\sum$ が π' より抽出されたのにもかかわらず，仮説Hが採用されるという過誤。

この統計理論は，ある特定の統計量の，確率変数としての分布を調べ，その分布にもとづいて有意水準，すなわち棄却限界なるものを設定し，この設定によって始めて，第1種の過誤 α をいかにするかが問題になるのであって，これを指定しなければ，決定されない。

たとえば，α は 0.01 とか 0.05 とかをとる。ただし一般には，α を決定するだけでは，まだ棄却限界を具体的に決定するわけにはいかない。それにはなお，第1種過誤が一定値のうちで，できるだけ第2種過誤を小さくするという方針が採用されなければならない。これについての詳細は，仮説検定論に譲ろう。

この統計理論が管理図法に応用される場合には，次の3点に注意されなければならない。

(1°)　管理図の場合においては，（必然的に有限な）時系列の点列が得られたある特定の時期においての仮説検定が問題なのであって，この時期以外の，より広範な時期を補外して，その間における生産工程あるいはくり返し作業の仮説を検定しようというのではない。ネーマン-ピアソンの仮説検定は，母集団に関する仮説検定であるけれども，全期日を通じての生産管理が統計的に均衡であることを仮説にとり，これを検定する場合にのみ，その検定論を応用できるように思うのは誤解である。

(2°)　仮説の棄却そのものは何を意味するか。管理図の場合，突き止められる原因のないということ，すなわち統計的管理の均衡状態を仮説において，この仮説を検定して有意的でなかったとしても，そのことは，そのような仮説が標本についての判断からは棄却されないというだけであって，採用してよいという保証をあたえるものではない。すなわち帰無仮説の論理的性格をはっきり把握しなければならない。

(3°)　統計的管理の方法を全体としてながめる必要がある。そうしてそのうちにおいて，要具として用いられる仮説検定の理論の任務と限界とを明らかにしなければならない。品質管理に手をかけた生産の初めにおいて，ほとんど常にいい得ることは，突き止められる原因の存在することである。したがって，これらを漸次除去していくことが問題であり，こういう場合には合理的な群への分類が，大事なことであって，確率表にもとづく詳細な管理水準はそれほど重要ではない。しかし，次第にそうした原因が取り除かれて次第に均衡な状態に落ちつくならば，管理水準，限界が有用な用具となる。すなわちネーマン-ピアソンの仮説検定の理論は，母集団の存在を想定し，任意抽出を前提するものである。統計的管理自体は，この想定と前提とが，その管理の進行の過程において，次第に近似的に具現していくのである。この実践的経過のうちにおいてのみ，統計的仮説検定の理論が意味をもつのは，論理上当然である。さらに詳説すれば，

(a)　統計仮説検定の数学的理論

(b)　統計的管理状態のモデルとしての袋の中の球の抽出

(c)　大量生産の管理

の3つの相違がよく理解されなければならない。(c)が(b)なるモデルにおいて，考えられるということは，管理の最初においては期待されないのであって，それは，管理そのものの過程を経て逐次近似的に，それに接近するというだけである。そうして接近の程度が進むにつれ，(c)は(b)として，確率論的に同一形式になり，したがって(a)が(b)に適用されて，その妥当性が保障されると，次第にその程度において，(a)が理論的モデルとして役立つようになるのである。

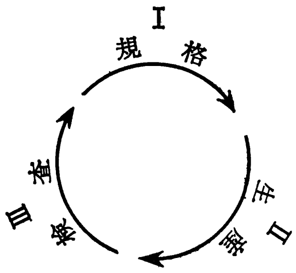
【5】過程としての品質管理　品質管理の三段階としては，Ⅰ；規格，Ⅱ；生産，Ⅲ；検査（判決）の三段階がある。大量生産管理の統計的管理が採用される以前，すなわち推測の統計学が導入される以前には，ある甲なる人が規格を勝手につくり，乙がそれを標準にして生産に当たり，丙が生産物がはたして規格に一致しているか否かをみるというふうに，その間の相互関係はⅠ→Ⅱ→Ⅲと直

線的な関係として解釈されていた。これに対して，大量生産管理に統計的方法が適用されると，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの関係は，１つの科学的実験の進行過程の類推において理解されるべきものとして，Shewhart は次のように説いた。

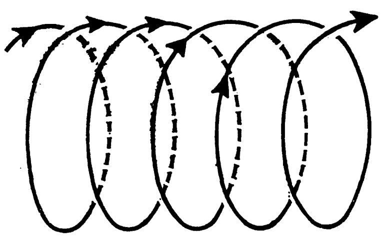
すなわち，ある規格Cが設けられ，公差の範囲が (L_1, L_2) として与えられるとき，統計的管理においては，上述のように（A，B）なる範囲を設け，この範囲外にあるかぎり，たとえ (L_1, L_2) の範囲内にあっても，なお管理は充分でないと考え，突き止められる原因の指摘，除去に努力する。しかもここに，A, B, C はⅠ，Ⅱ，Ⅲの順にきまるものではない。A, B, C は，実際においては，検査の結果を参照してきめられるべきであり，それはⅡを，したがってⅠを前提とするという関係になるのであるからして，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの関係は循環的とならざるを得ない。しかも全く同じ状態へもどるのでなくして，管理のより前進した状態へ進むのである。したがってそれは8-4図のようではなく，8-5図のように，いわばらせん的に進んでいくものとみるべきである。Shewhart は

規格——仮説の設定
生産——実験の遂行
検査——仮説の検定

という対応をつけることにより，大量生産管理の進み行く工程を科学的実験の進行過程になぞらえた。



8-4図



8-5図

その過程は，1日にしてなるものではない。小数の品物しかつくらない生産では到達し得ない。

以上の解説においてわれわれは，しばしば，技術者と統計学者とを対比させると同時に，その協力を説いた。技術者と統計学者との対比というのは，そのような機能を代表させる意味からの区別であるから，現実には同一人において具現してもかまわないことはもちろんである。いや，同一人において具現することこそ，大量生産管理の遂行には理想的であろう。しかし，それにもかかわらず，両者の区別が管理の本質を理解するために便利であろう。

技術者の機能，すなわち技術として，われわれの理解したところのものは，上述の所論では，いかなるものであるか。それは，労働手段の体系というようなものではない。実践の原理としての技術であるけれども，しかし，過程しつつある手段とか行為の形というように説くのは，技術の論理的性格を明らかにしないで，技術の現われた現象的姿にとらわれているのである。われわれは，上述において，技術の動員により，突き止められる原因の指摘，除去ということを再三説いた。それ自体は統計学の直接には力のおよぶところではない。このことを詳言すれば，偶然性と必然性とを区別し，統計学の示唆によって，必然性の所在を問題として取り上げるのであるが，必然性の洞察およびその利用が，技術の致命的な任務であることを指摘するものである。必然性の洞察ということは，必然的な関係の存在を認識するという意味であって，それは，法則を定立し得る段階にまでいたることをかならずしも要求するものではない。科学の目的はそこまでいたらねばならないのであるから，そこに科学と技術との相違がある。しかし，技術はただ必然性の存在を認識するだけではない。その関係を法則的に定立し得なくとも，この関係を，意識的に利用して，自己の計画を実践において具現し得るにいたっていなければならない。

すなわち，客観的法則の具現が生産的実践において，保証されている段階にはいっていなければならない。「かん」とか「こつ」といわれる技能は，その多くは，無意識的であり，客観的必然法則の存在を分析し自覚し得る段階にい

たっていない。ただ結果において客観的必然法則の具現したものとして解釈し得るだけである。また科学的認識は客観的必然法則の定立が当面の問題であって，それの具現が生産的実践において保証されるか否かに立ち入るならば，技術の問題とみるべきであろう。技能，技術，科学の三段階のこの相互関係は，しかしながら現実においては，それほど鮮明に区別して表現されるとはいえない。としても，概念上の区別は明確に規定されなければならないであろう。

わが国においては，大量生産に関する統計的方法の応用はいまだ全面的ではない。しかし，電気，紡績，機械の三方面等においては，その必要を自覚している技術者のいることを知っている。大量生産に関する統計的方法の応用は，すでに述べたように一朝一夕にしてなるものではない。近代統計学の適用が，小標本論を意味するがゆえに，そこには，資料の集積，経験の蓄積を，不必要とするかのように考えるのは大間違いである。

このことは以上の所論により明らかである。

大量生産の統計的管理は，ただちに工場内の運転技術の管理のみを意味するものではない。材料に対して，工作機械，測定装置に対して，生産方式に対して，あるいは設計に対して関係者の相互間の連絡協力と統一とによる資料の集積および分析をまって，初めて万全を期待し得るのである。それは，突き止められる原因の指摘のために不可欠あるいは有効な方法となるからである。それは，生産手段，生産対象，工程，設計，運転等を含めての，生産の全部門全過程の要所要所に，正確な記録をとることを要請するものである。これらのことが行なわれるためには，いきおい資本主義社会としては，巨大な生産の集中たる独占的な段階を前提としてのみ考えられるのであって，このような管理は，計画経済との関連を，技術の面から示唆するのである。

4.　工業標本論の諸様式

標本抽出の問題は，工業方面ではきわめて多種多様な様式において起こる。しかし，統計学の立場からいえば，それは当然共通の原則の上に立つものであ

って，それを具体的な問題の様式によって種々の形式に分類することも可能である。ここに共通の原則とは，それはようするに，一部分を知って，それが抽出された元の全体に対しての推定を意味するのである。ただ標本論に必ずつきまとう問題——標本の抽出方法，標本の大きさ（標本を構成する単位体の個数），標本より得られた推定値の信頼度の問題——に対する解答を与える段取りになると，E. S. Pearson 等のいうように，次のような分類が便宜であろう。

A．標本抽出法

(1)　任意標本　　(2)　代表標本

B．材料の形式

(1)　分離的な単位体　　(2)　バラに混合した材料

C．標本抽出の環境

(1)　工場における場合　(2)　使用者への受け渡し物件からの場合

以下簡単な解説を述べよう。

A(1)　**任意標本抽出法**　よく混ぜ合わされた供給源からでたらめに若干の単位体が選出される場合が，任意標本抽出である。

A(2)　**代表標本抽出法**　ある製品の品質が，全製品の部分部分によって異なることが明らかな場合，ないしは，こうあるらしく思われる場合には，これらの部分部分のおのおのから，ある特定の個数の単位体あるいは特定数量の材料を抽出するようにくふうするのが得策である。その目的とするところは，純然たる任意標本抽出法によって得られる場合に比べて，全体をより良く表現（代表）する標本を獲得することである。

B(1)　**分離的単位体**　これには製品のこともあり，構成部品のこともある。たとえば鋼球軸受，可鍛鋳物，レンガ，電球，鋼軌条等。

B(2)　**バラの材料**　固体の場合もあり，液体の場合もある。たとえば，石炭，鉱石，粘土，油等のような原料とか，セメント，液状あるいは粉末状の化学薬品，穀物等があげられる。

C(1)　**工場の場合**　生産者が，自己の希望する標準にまで材料が到達してい

るか否かを決定し，工程管理の検査を持続するため，標本検査を施行する場合を指す。

C(2)　**使用者への受け渡し物件の場合**　これは受け渡し物件に対して1つの用心として行なう標本抽出であって，品質が規格と合致するか否かを決定しようとするものである。受け渡し物件から標本を抜き取るよりも，製造の現場で標本を作成する方が信頼のおける知識がえられることは明らかである。生産各部においていかなる程度まで品質水準が同一に保持されているかは，生産者ならばよく知り得るのである。時間的変化，製造機と製造機との相違とかいったものを見いだきすよう標本抽出を考案することも可能である。これに対して，消費者側では，取り引き物件から真に代表的な標本を作成しようというのは，経済的理由からむずかしい，ときには不可能ともなる。

この意味で，生産，消費両者が協定して，規格保証制度を設けるのが一番よい。これは製造工程中に施行する標本検査によって品質管理を確認するとともに，その証拠を消費者にも利用させるものである。

例 1.　**A**(1)，**B**(1)，**C**(1)　小物部分（たとえば鋼球軸受）を大規模に製造し，これに対して日常検査を施行し，規格諸条件に合致しているか否かを決定するような場合が，統計的技術を応用するのに理想的な状態である。この場合検査の目的は，検査に付された個々の仕切りの受諾あるいは拒否を決定することである。

検査の方法はいわゆる属性法による。すなわち個々の単位体の良不良の選別である。そして，ここに重要なことは，仕切りと仕切りとの間には往々にして，突き止められる変動原因がある場合が少なくないけれども，各仕切りの内部では，それぞれ品質に関して均衡であり，これより抽出される標本は任意標本をとるということである。どうしても抜き取り検査でなければならないものと，破壊試験ではないが，経済的理由のために，抜き取り検査を行なわなければならないものがある。いずれにしても根本の要請になるものは，

（2）　$$\frac{\text{仕切り内における不良品の個数}}{\text{仕切り内の部品の総個数}}=\text{仕切り不良率}$$

の管理である。仕切り不良率がある限度 p_t 以上の高率のものは，検査に合格となる確率が，ある確率 α 以下であること，仕切り不良率がある限度 $\overline{p}$ 以下の低率のものは，検査に不合格となる確率が，ある限度 β 以下であることが要請される。p_t を裕度不良率，α を消費者危険率，β を生産者危険率ということがある。$\overline{p}$ は場合によりそれぞれの名前をつけるのが適当であるけれども，たとえば，基準不良率，工程平均不良率という場合がある。ある工場の目標とする仕切り不良率は，基準として1％であり，この程度の仕切り不良率をもつ製品に対しては全数検査のできる場合でも，万全を期して全数検査を行なって手数をかけるよりは，抜き取り検査でことをすまし，このためにかりに不良品がまぎれ込んでも，それはあとで仕末をつけることができるという場合がある。といっても過度に不良率の高い仕切りを通過する確率は，ある限度以下に押えなければならないというのが多くの場合の事情である。

以上において，確率という観念があらわれてくるのは，仕切り全部を検査するのではなくて，仕切りより抜き取った標本だけの検査結果にあらわれた不良個数についての結果から，推定を行なうからである。つまり，標本変動のあることが確率論適用の根拠となる。

仕切りの構成個数をNとする。上述の消費者危険率 α，生産者危険率 β，裕度不良率 p_t，工程平均不良率 $\overline{p}$ が指定された場合，この条件を満足するよう，抜き取り個数 n と許容不良個数 c を求める問題がしばしばおこる。ここに許容不良個数 c というのは，大きさ n の標本のうちに見いだされて不良の個数について r が c を越えない場合には，合格であるという意味にとる。$r>c$ の場合の処置については，場合はいろいろにわかれる。

たとえば破壊試験であれば，全仕切りを棄却するという場合もある。非破壊的である場合には，元の仕切りの標本になったもの以外，すなわち，$N-n$ 個の単位体を残らず調べるというような方法がある。

上述の問題を，数学的に解くには，条件がなおたりないために，n および c が決定されない。これに加わるべき条件として，たとえば，上述の非破壊的検査に当たって仕切り不良率 p の仕切りに対しては，平均検査個数をかくと，

$$n+(1-\mathrm{P}(p))(\mathrm{N}-n)$$

ここに $\mathrm{P}(p)$ は，仕切り不良率 p の仕切りが，検査に合格する確率である。そこでたとえば，$p=\bar{p}$ のとき，すなわち

$$n+(1-\mathrm{P}(\bar{p}))(\mathrm{N}-n)$$

の値を最小にするという条件をつくるならば，これは (n, c) の選び方についての1つの条件となる。

標本不良率 r に対して大きさ n の標本についての二種の許容不良個数 c_1 および c_2 を設けるという場合がある。

$r>c_2$ ならば不合格，$r<c_1$ ならば合格とする。これに対し，$c_2 \geqq r \geqq c_1$ の場合には合格，不合格を決定せずに，さらに抜き取りを行なう。第1回目の標本の大きさ n_1，第2回目の標本の大きさ n_2 とすると，第2回の標本の不良個数を s とするとき

$r+s<c_2$ ならば，合格

$r+s>c_2$ ならば，不合格

とするという仕組である。

この場合には $\mathrm{N}, \alpha, \beta, p_t, \bar{p}$ は指定されて，(n_1, n_2, c_1, c_2) を決定する問題である。ここにも，条件がたりないから，さらに加わるべき条件が考慮されなければならない。

2回抜き取り方式の種々の形式が考慮されている。

戦時中，アメリカにおいては，系列検査（sequential test）なるものが考察された。この検査法は，従来の検査がネーマン-ピアソンの理論にもとづくのに対して，A. Wald の新しい理論にもとづくものであって，その効率が高いために戦時中，公表が禁じられていたといわれるものである。

例2.　代表標本の例示　仕切りの全体に対して各部分にいかなる異常性があ

るか，その程度を研究することが肝要な場合には，各部分が取った単位体なり抽出部分なりは，これを各個別々にして取り扱わなければならない。消極的に，単に別々にして取り扱うのみならず，進んで，これらの変動を考慮に入れて，代表標本のとり方を考案するにいたるのである。

たとえば，レンガの強度を問題にするような場合，それがある程度まで焼成中の窯内の位置によることはよく知られるとおりである。それで次のような二種の標本法には明瞭な相違があらわれてくることが知られている。

(1)　窯内の9区域のおのおのから2個ずつのレンガを抜き取る場合（代表標本）

(2)　18個のレンガを全く無制限に，でたらめに窯から抽出する場合（任意標本）

試験標本を10組それぞれ独立に形成した場合の結果が実験例として報告されている。第1法によって抽出された18個のレンガにもとづくものと匹敵する程度の信頼性を持つ平均品質の推定値が得られるためには，第2法では，54個のレンガにもとづかねばならないという結果が与えられている。

この例によって，生産中に標本抽出を行なうべきであって，取り引き物件の受け渡しの際の標本抽出ではレンガが窯のいかなる位置からきたかが不明であるから，(1)の方法を行なえない。

代表標本の思想は，種々の標準規格にもあげることができる。例として：

(a)　一般用マニラロープ

「第18条……綱が10本以上のアサからなる時には，少なくとも10本をとって試験に供すべし。しかして10本あるいはそれ以下ごとに3本宛はより糸の中心部より選び取るべし。」（イギリス）

(b)　瀝青道路乳剤

「散荷受け渡し1台のタンク貨車につき，タンクより乳剤を移す際，全積載量をほぼ等分した割合をもって1ガロンずつの標本を5個採取すべし。この際，1標本はタンクの明け始めに，また他の標本は終了の頃にとるよう注意す

べし。この15個の標本を合わせ1ガロンの標本を作るものとす。」(イギリス)

5.　規格論における統計的方法

第1に規格は，その目的とする材料あるいは単位体の集合から標本を作成する際に，標本抽出法を指示する。第2に規格は，試験と判定条件を条文において明示することによって，当の試験結果が，規格条文に規定された限度内に収まっているかを自動的に判断できるよう仕組まれている。この2つの機能を考慮に入れるとき，品質判定の要具としての規格の統計学的意義が検討されなければならない。これには種々考慮すべき問題を伴うのであるけれども，次の二点をとりあげておこう。

【1】性能試験と品質指標（相関，回帰の方法）規格に対していかなる信頼がおけるかという問題を考えるに当たり，不確実の忍び込むところをつきとめなければならない。まず試験条項の選定という点に関して，表題の区別に注意しなければならない。

性能試験において，測定される特性は，その材料なり製品なりが実際使用される設計において一般に利用される特性である。たとえば鋼材の抗張力は，構造物に使用されるべき諸部分の寸法を決定するために利用できる。これに反して，品質指標においてはかならずしも必要ではない。たとえば，ペイント，セメント，鋼鉄材等の材料に関しては，組成を規定すれば，品質の変動をある範囲内に収めることができる。品質指標と性能との量的関係，すなわち回帰関係が基礎になるのである。

【2】規格設定の方法と実験計画　規格はすでに述べたように，その本質においては，規格，生産，検査の三段階をらせん的に進みながら漸次完成されていくものである。したがって，単に演繹的に規格が理論的根拠からのみ規定されるのではない。実際用途の性能と試験判定との両者間の回帰ならびに相関関係を推定するにたる資料が存在しなければならない。そうしてそれは単に，所要の資料を獲得しなければならないというのでは解答にならない。市場において

一般に満足と見なされる製品について，試験を施行することにより，主要な特性を発見することも必要であり，他方，理想的な材料ないし製品について，いかなる特性が具備されているかをみる必要もある。演繹と帰納とが併用される。しかし，演繹的に到達した標準では，ある品質特性にのみ重点をおいているようなことがまれではない。他方，帰納的な標準では，規格判定当時には，参考資料が乏しく，しかもこれにもとづいて作成する関係上，保守的になり，健実な発達をさまたげるという弊害もある。問題はらせん的に進みつつ解決されなければならない。それとともに規格制定を目的として実験資料を収集整理する場合の実験計画の重要性をここに指摘したい。ポードランドセントの規格の問題のように，コンクリートとモルタル試験について各社のデータを集成するときには，性能に影響する諸因子をおさえて，各因子にそれぞれどれだけの考慮を払うべきかが考慮され，計画されなければならない。この実験計画に統計的理論の応用が肝要であることがとくに指摘されなければならない。

第9章　社会統計の認識

1.　統計調査の理念

この章は主として社会統計の認識に関連して考えてみよう。社会統計の調査論に関して，1つの通念ともいわれるべきものが，今なお流布しているようである。近代統計学の立場を徹底させるためには，まずこの通念の批判から始めるのが便利であろう。

その通念とは，統計調査というものは，本来は，調査の対象となる集団を直接全部観察すべきである。すなわち集団の要素である単位現象を1つも残さず把握することにより，集団の表章としての統計を求めるのが目的である。したがって観察の全部性，悉皆性がその本質的条件である。ところで理想はあくまで悉皆調査であるけれども，実際には，それは普通多くの場合実行不可能かまたは困難である。それゆえに，一部の統計単位のみに局限して，それだけを実地観察するだけですまし，それをもとにして全体を推測するという方法も用いなければならない。標本調査がそれである。既知の統計数字から，一定の具体的関係をたどって，未知の数字を推定算出する手続をもって代用する場合も起こる。これが推算である。部分調査といい，推算といい，いずれも本来の統計ではない，いわば非統計的方法または擬似統計的方法といわれるべきものである，と。

この見解に対して，近代統計学では，まず調査の目的という点から，統計調査の性格を考えるのである。すると理念的に2つの目的があることが認められるであろう。この2つを明確に区別するのである。両者は共にひとしくまず現状の記述から出発する点では相違はないけれども，1つの目的は，目録記録の

作成，登記であり，これに対して他の1つの目的は，科学的認識の前提あるいは行動（政策）決定の基礎資料を形成することである。

前者の意味においては，調査は，その定義上当然悉皆でなければならない。国勢調査本来の目的の1つが，歴史的にいっても法律的にもいって，ここに存在することはもちろん否定できないことであって，特定の日時（たとえば昭和22年10月1日午前0時）における現在人口をありのままにかぞえ出すことが，ともかくその目的であることには違いない。課税，選挙に関連して名簿をつくる調査の場合においても，調査は悉皆でなければならないのはいうまでもない。

しかし，後者の意味においては，いわゆる悉皆調査もようするに1つの部分調査でしかあり得ない。すべての調査は，ようするに標本調査にほかならないことをまず知るべきである。この点の認識こそ実に近代統計学を理解するための必須な1つの前提であるとさえ，いわれるべきことであろう。

統計調査のもたらす結果は，まず何よりも時所的に制約された事物の現実状態の認識を確立することである。このことは悉皆調査であっても，標本調査であっても変わりはない。

しかし現状の認識といっても，暗黙のうちに将来の予測を含むものであり，実は将来の予測を含むがゆえに存在価値をもつのである。単に特定の時刻，場所における記録というだけならば，統計としては多くの場合意味をもたないのである。現状の認識とはいうけれども，いかなる国勢調査であっても，それが完成された時には正確には現在でなくして，すでに過去の資料である。これにもとづいてわれわれが行なおうとする一般化は，補間，補外のいずれであっても，それは調査しない時期あるいは時間に関連している。このような資料が意味をもつのは未来に関しての，あるいは過去の調査しない時期に関しての，推論の基礎としてのみ認められることである。国勢調査の記述するところは，調査の時所に制約され，したがって偶然的な変動をこうむっている人口にすぎない。ところがわれわれが利用しようとするのは，これらの偶然的な変動をうけながらもそこに1つの傾向線を引き，そうして諸関係を見いだすことができる

ような人口現象の把握でなければならないのである。国勢調査は，過去のある時期において，この偶然的な原因の組み合わせから結果として何が表われるかを示すものではあるけれども，われわれの知りたいのは，これらの偶然性のなかにうもれた必然性の把握であり，特定の時所にのみには制限されないところの一般化でなければならない。このように見てくるとき，科学的な目的をもつかぎり，すべての調査においてその目的とするところは，ある瞬間に支配した状態を見いだすことでなくして，その基礎によこたわるところの諸傾向および諸関係を見いだし，これに偶然による変容を加えることにより，実状を近似的に決定することである。ある瞬間における人口の総数そのものも，よく考えてみれば，われわれの知りたいと思うことに関しては，ようするに1つの標本にすぎないのである。

統計調査をこの観点からみてくるとき，諸種の調査方法の得失比較が問題になってくる。現実の問題としては，統計調査には，経費，時間，労力等に関連して制約がある。問題は，所与の経費，所定の時間の範囲内で，いかにしたら最も多くの告知量をもつ統計が得られるかということである。その裏をいえば，所要の告知量をもつ統計を作成し，しかも経費，時間を最小にする調査方法いかんということでもある。この意味では悉皆調査はかならずしも万能でもなければ最優秀であるともかぎらない。国勢調査のように，調査結果の編整発表までに数か年を要するものは，時間という点においてすでに無意味である場合も起こり得る。また経費の点から考えても，悉皆調査を 10 年ごとに行なうよりは，2，3年の間隔で，より多数回の標本調査を行なう方が経費も大差なく，しかも，補間ないし補外の点からみると，時間的に後者の方が間隔が小さい関係上，より有利である，というような事情も起こり得るし，またより広範な調査事項をそこに盛り得るという利点もあるのである。

統計調査は，いわゆる悉皆調査をも含めて，すべてある意味で標本調査であるとの見解は，現在われわれのもつ統計的認識の本質を反省するならば，当然到達すべきものである。しかしながら，これは統計学が発達し，統計調査の網

の目が各方面から，社会実態調査のため張りめぐらされた現段階に達して始めて，みずからの能力を自覚するにいたったというべきものであろう。統計学の歴史はすでに述べたように，政治算術派の生誕においても，推算が主な仕事であった。Graunt，Petty の行なったものはいずれも，推算であった（第1章参照)。けれども，ひとしく推算といっても，現在のそれとは違って，推算の信頼度に対する客観的な保証がない。そこに重要な相違点のあることを忘れてはならない。19世紀にはいって始めて，ヨーロッパでは人口の推算期を終わり統計機関の整備と相まって，国勢調査期にはいったのである。電気的統計機の発明は，技術的にもそれを可能にした。こうしてあらゆる統計観察は，費用，時間をおしみさえしなければ，常に悉皆調査を行ない得るものと考えられるようになり，集団の悉皆観察をもって統計学の本質的要件と考えるにいたった。このようにして，上に述べたような通念さえ生まれるにいたった。しかしながら，諸種の調査が悉皆調査を理想として企画され実施されてきた結果，社会実態の究明のために種々の知識が獲得され，これが蓄積されるにおよんで，ある場合には相当の信頼性のもとで，標本調査をもって悉皆調査にかえ得るという保証が漸次形成されつつあったわけである。人口の静態統計とともに，動態統計が完成されていくことにより，ある期間ある地方における人口の変動の起こり得べき範囲ということが明瞭になる。この変動の範囲がわかれば悉皆調査の意味は変わってくる。1か年間に100万も自然増加をみるという国において，ある特定の時点において全国総人口の統計として何百何人までも正確に知ることが，記録以外では，何の意味があろうか。

このように悉皆調査の進出自身が標本調査の行なわれ得る可能性を保証しつつあったわけである。ここに標本調査の可能性とは，標本調査の誤差範囲を推定し得ること，所要の誤差範囲に収めるべき標本調査を実施し得ること，この2点をいうのである。また近代社会の進み行く道は，好むと好まざるとにかかわらず，統計なしには生きていけない社会である。多岐複雑な調査事項に関しての統計の整備が記録の意味においてではなく，あくまでも行動の指針として

ますます要求され，ますます必要になってくる。

資本主義国家における独占資本の確立とともになされつつあるブルジョア的計画化にしても，あるいは社会主義国家の計画経済にしても，経済計画のいかなる活動も正しい計算によらずには考えられない。しかも計算は統計学なしには考えられないのである。この必要は，標本調査の意義を自覚するにいたらしめたものであるといわなければならない。

2. 統計的認識における理論的規定

統計的認識は，本源的には統計調査によって得られる。それゆえに統計調査の分析から始めなければならない。統計調査はおよそ3つのふむべき順序がある。第1には統計資料の企画であり，第2には統計資料の生産であり，第3には統計結果の解釈である。そして，この順序のすべてを通じて，Kaufmannのいわゆる5つのWが，相互にからみ合って影響し合うのが現状の姿である。ここに5つのWというのは，周知のように，調査主体“Wer だれが”，調査客体“Was 何を”，調査時期“Wann いつ”，調査地域“Wo どこで”，調査方法“Wie どのようにして”を指すのである。しかし，この角度からながめることは次の節にゆずろう。本節において肝要な点は，統計的認識の三順序の存在を認識することである。さらに肝要なことは，統計調査の企画，生産，解釈の三段階は，これを大量生産の規格，生産，解釈の三段階にそれぞれ対応してみるべきことである。統計調査，したがってまた統計的認識の論理自体が――大量生産の統計的方法の理念の項で説明したような意味で――弁証法的論理によって理解されるべきである。

統計調査の企画にあたっては，統計調査の目的がまず明確に定立されなければならない。問題は，いかにして統計的方法によってこの目的を達成するかにかかわるのである。現実は無限の多様性を包括するのに対して，人間の認識は一歩しりぞいて概念をつくり，概念の助けをかりて，この対象にぶつかっていく。社会の実態に関する統計調査においてもこの事情に変わりはない。概念を

つくることに対応して，統計調査では理論的規定が前提されなければならない。統計調査における理論的規定は，概念は事物の連結，合則性，発展を暴露する形式であり，それは先科学的認識の直接性を超越し，普遍を把握しようとするものである。けれども従来はこの理論的規定という点をとかく軽く考えて明確にしなかった。そうしてここから統計に伴ういっさいの不能率，虚偽，欺瞞が忍び込んできたのである。

調査単位の選定，調査標識の設定においてすでに理論的規定が必要である。たとえば失業統計は，客観的，社会的な存在として失業者群の存在するという事実の上に立つ。しかしながら，失業者とは何であるかを理論的に規定しないかぎり，失業統計の調査はできない。国際労働局の定義によれば，失業とは，労働者が労働の能力および意志を有するにもかかわらず，現に職業がないもの，または労働市場の状況により職業を見いだし得ない状態を意味する。そのかぎりにおいては，次の者は失業者とは認められない。「(イ)頽齢衰弱者，(ロ)痼疾の疾病者，重傷者，不具者，酒乱または怠惰の悪癖があって就業に適しない者，(ハ)意志にもとづく不就業者，浮浪者で，みずから求職の途を講じない者，(ニ)ストライキまたは工場封鎖のため就業しない者（有業者として調査するを要す），(ホ)失業当時の業務に比較して収入およびその他の点で不満足だが，とにかく就業の機会を得ているもの（有業者として調査するを要す）。」

失業者のこの定義は，未就職者，帰農者，前業者を失業者としてふくまない。わが国のように家族制度の強固な農村では，１人当たりの労働量の軽減によって，職業を失った労働者が農村に吸収される。このようないわゆる，潜在的失業の存在を見のがすことは，客観的な実在としての失業状態の把握とはいえない。労働者の生活を安定し，労働失業の原因を突き止めるための統計であるか，あるいは労働政策の成功を誇示するための統計であるか，統計調査の目的が改めて問われなければならない。もし前者であるならば，(イ)より(ホ)までこそ徹底的に究明されるべき失業問題の中心課題であるべきである。これらが調査できないというのならば，労働組合の未発達，労働保険制度の不信用等が，

からみ合ってきているのであって，調査できないということ自体が，すでに失業問題に関係している。これらを除外するところに理論的規定があり，それは一定の立場，経済理論を暗黙のうちに前提とするものといわなければならないのである。

人口統計学においても，社会の階級的構成と階級的相互関係の動態とに関しては，統計調査が今日なおいまだに不充分であるように思われる。抽象的に等質的な1個の人間と見立てて，人間の数をかぞえ上げることにあまりにも興味をもち，行政区画別の分類にあまりに拘束されすぎているのではなかろうか。それはある意味では先科学的態度であるとともに，また他の意味ではそれはそれ自身1つの立場，理論的規定を意味することが改めて指摘されなければならないであろう。

統計的方法の先科学的利用に対して戒めるべきことは，すでに第6章で述べた。それは，過去の経済学に例をとったものであった。生物統計学の限界性についてもすでに述べたとおりである。これに対称的なのは，統計力学における統計的方法の援用であろう。そこでは素粒子，原子，分子および天体のような多数の性質を統計的方法のみによって規定することは考えないのである。それは理論物理学との密接な協働においてのみ，対象の究明に向かうのである。

問題の中心はむしろ社会科学における先科学的な統計の利用である。しかしながら，これはかならずしも統計学者のみの責任ではないようである。事実をいえば社会科学の多くの部門が実証科学としての域に到達していないことにもよるのではないか。ある方面の学問はいまだに科学とはならず，単に経験的な知識の集積であって，体系化されていない。そこでは，これらの知識を若干の原理から演繹し得るという段階にはいたっていない。他方ある方面の学問は，演繹的ではあるが，科学の1つの基本性格であるところの実証性をもたない。このような科学は，みずからの学問的根拠から，統計に対して理論的な指針を与え得る，という段階にはいたっていない。社会科学の発達した理想の状態を想像するならば，社会統計は社会科学の理論に対しての実験という意味をもつ

べきものではあるまいか。ここに実験というとき，ひとは自然科学における実験を連想して，対象に加えるところの人為的改変に重点をおき，そのようなことは，社会科学においては，一般に不可能であるとするであろう。しかし，実験というものの論理的性格は，第7章で説いたように，仮説の検定ということにある。対象に加える人為的改変は，実験の技術に属することであって，仮説の検定のための手段である，とみるべきであろう。

今，社会統計を社会科学の実験として規定することは，かならずしも現段階におけるその位置，機能を表現したものとはいい得ないであろう。しかしきたるべき時代における統計学の役割は，どうしてもそこへいたるのではなかろうか。このことの説明に関しては，なお，われわれの側に説明上多くの準備を要するであろう。まず社会計量の問題がある。実験計画の概念をさらに厳密に省察する必要がある。近頃における経済学の発達もまた参照されるべきである。これらの準備の後に，ふたたびわれわれは本問題に立ちかえるであろう。しかし結論をあらかじめいうならば，以上のような了解のもとにおいて，統計調査は科学的なものとなるべき必然性をもつことを指摘しなければならないであろう。

3.　社会調査における妥当性と信頼性

社会現象に関する統計においても，すでに述べた5つのWがあるわけである。われわれは，これを調査主体，調査客体，調査方法の三方面に分けてみたいと思う。5つのWのうち調査地域，調査時日は以上の3つとは独立なものでないから，ときには客体の方に，ときには方法の方へ入れて考える方が論理的である。従来統計調査に関して云々されたことの多くは，とくに統計であるがゆえにそうであるのでなく，そもそも広く一般に社会調査それ自身に伴うものというべきものである。統計調査を論ずる前に社会調査一般を考えるべきであろう。社会調査における調査主体の立場を，たとえば見物者の立場になぞらえて，予定の番組で演出されていく舞台をみているように考えていることが多

い。しかし，これはかならずしも社会調査の実相を，如実に描き出したものとはいえない。このことは，実際の調査を少し省察すればほとんど明らかなことである。社会調査は多くの場合，調査主体自身が社会に対する働きかけを行なって，その反応によって判断を下すというのが現実の姿である。したがって，主体，手段の二者を客体から切り離し，前者を捨象して抽象的に客体のありのままの姿というものを想定することは，かならずしも調査という事象を忠実に表現していないのである。調査主体と調査客体の交渉のために客体自身に強い反応があらわれ，調査客体の自然経過がゆがめられるという事情もまた当然考慮に入れておかなければならない。この干渉状態を的確に認識することが社会調査の1つの特徴をとらえることであるとさえいえよう。ただし，手段と客体との交渉が微弱であって，近似的な見方として見物人の立場に立つと考えられてよい場合もあるのはもちろんである。

次に社会調査の正確性ということについて考えてみよう。これが調査単位に関する標識の確認の正確度にまず第一に関係してくる根本的なことであるのはいうまでもない。ところで，自然科学や生産技術における計測とは違って，そこには，誤差，誤謬のみではなく，欺瞞さえも伴うのである。社会調査を科学的にするのには，まずこれらの邪魔物の所在を確かめることが必要であり，さらに進んで，それによって起こってくるところの原因をつきとめ，できれば，これを除去するか回避することが望ましい。しかし，実はそれも不可能な場合の方が多いわけであるから，その場合の処置が講ぜられなければならない。処置とは何であるか。それは，このような邪魔物について，起こり得べき程度，範囲を熟知し，これを考慮に入れた社会調査法を案出することである。ところがそのような社会調査法の案出は，多くは標本調査法の設計に帰着する。われわれは社会調査において統計的標本調査が1つの重要部を占める意義をここに認めなければならないと思う。

これに関連して社会調査の重要な基本概念として，調査の妥当性と信頼性とを規定しておく必要がある。われわれの用語として社会調査の妥当性というの

は，誤差，誤謬，欺瞞等にもとづくところの偏倚と変動性とがないことを意味する。これに対して，社会調査の信頼性というのは，このような偏倚と変動性との存在しないことではなくて，存在してもかまわないが，その起こり得る程度なり範囲なりがある程度把握されていることを意味するのである。簡単にいえば，前者は真実の解答を用意することを目標とする。これについては，ひとり統計家の責任で対処できることではなく，心理学者も必要であるし，とくに当面の社会問題に関する専門家の指導ないし協力を何よりも必要とする。そこでは調査方法を当該科学の専門的見地から整えることが主要任務となるのである。後者，すなわち信頼性の問題は，調査結果の利用可能性ともいわれるべきことである。それは，実践に対しての価値判断をふくむ概念である。既往の経験をもとにして，偏倚と変動性の範囲を見当つけ，既定の費用，手数，時間の制限のなかで，所要の正確度において，調査結果を得るのには，どういう調査資料をもとにすればよいかを研究するのである。所要の正確度というのは，一般的にいうと，偏倚と変動性との双方（あるいは一方）に対して指定の量以内にあるべしという制限をいう。今調査資料という用語を用いたけれども，すでに，このように信頼性が問題になる場合の多くは，調査は記録作成の意味のものではない。科学的一般化，行動の指針の意味のものである。してみれば，前節に述べたような理由から調査資料というよりは，調査標本という見方が可能であり，必要である。このようにして信頼性の問題は主として標本抽出方法に関係するものである。なおここに偏倚と変動性という2つの用語の区別を明確にする必要があるであろう。偏倚というのは，物理測定における定誤差の類のものに対応するものであって，一定の偏向を有するものであるから，多数回の観察結果の平均において相殺されるものではない。これに対して，変動性は，かならずしも一定の偏向を有しないものであって，社会調査がくり返される場合，その結果がある中心的な状態のまわりに散布しているような結果を示すものである。これは統計調査はすべて標本調査であるといえるならば，標本変動ともいわれるべきである。測定における偶然誤差の分布がこれに類するもので

ある。偏倚と変動性，この2つの概念は一応独立なものであるから，偏倚の大小ということと変動の大小ということとは相互に無関係である。偏倚は目標からの一定のずれであり，変動は，この一定のずれをもつ点のまわりにおける分布状態を表現するものである。われわれの意味するところは，以下の例において，具体的に了解されるであろう。

以下，調査主体，調査客体，調査方法の三方面から，妥当性と信頼性の問題をうかがってみよう。さきに述べたように，現実には，これらの三方面を切り離して論じられない局面を示すことがあるが，われわれは便宜上，一応の分類として，おおよその意味で三方面に分けてみようとするものである。

【1】調査主体にもとづく偏倚と変動性 統計調査の主催者，賛助者もしくは後援者のいかんが，統計調査に偏倚と変動とを生ずることは，むしろ常識として周知のことに属するであろう。統計調査にもとづく収獲予想高が，ある官庁によれば必ず高く，他の官庁によれば必ず低く与えられること，世論調査が新聞社によって行なわれると，その新聞の購買者にのみ調査票を届けるということから，一般社会の世論を反映させるという目標に対しては偏倚を生ずるということ，面接調査員の質問の仕方が，応答者に影響をおよぼすこと，生計費調査は，会社側と労働組合側との双方から提出されなければならないことなど，すべてこの類に属する事柄である。以上は一般の社会調査についていえることであるが，調査主体にもとづくこれらの偏倚と変動とのほかに，もっと根本的には調査主体自身からくるところの調査能力の限界ということが，明瞭に意識される必要がある。客観的な状態ということを，漠然と想定する前に，それをいかにして把握するかが問題にされなければならない。社会調査の目的は，集団的観察である。社会調査が可能となるためには，これが集団的に把握されなければならない。それゆえ，調査単位体の所在するところへ力がおよぶこと，その集団について同時観察の能力のあること，一定期間持続して同一条件のもとで観察できること，調査対象として客体を把握し，服従させ得ること等が，実は前提されているわけである。これらの条件のために，調査主体のいかんに

よっては，ある種の社会調査は，ある程度以上の組織力，統制力をもつ機関においてのみ可能となるのである。とくに統計調査に関しては統計法の制定により，相当の統制の下におかれるようになったのも，統計調査の本質にもとづく必要によるものである。

【2】**調査客体の反応**　調査主体がある調査方法をもって，調査客体に働きかける結果として，調査客体は反応を示す。この反応にあらわれる偏倚と変動性とが，妥当性と信頼性に関係する重要な因子として指摘されよう。本人に年齢を問い合わすような場合，そこには何の故障もあり得ないように思われる。ところが，アメリカのある研究によれば，わずか8日ないし10日の間隔で2回にわたり本人に年齢を問い合わせたのに対し，前後の回答が一致しないで年齢に1か年以上の相違のあるものが，8,500人に問い合わせたうち，実に10%におよんだといわれている。別の人による報告では，このような相違が17%に達したという。してみると，年齢の申告にも意外な変動性があるわけである。ところで，年齢の申告に偏倚のあることの有名な例としては，5の倍数，すなわち10歳，15歳，20歳等々という概数年齢にあたる人口が，その前後の年齢より多い。この奇怪な事実が，多少とも各国の統計にあらわれていることは，統計学の常識である。ソビエトの1926年12月17日現在の年齢別人口によれば，50，55，60，65，70歳がいずれもその前後より多い。人口統計の正確さを測るバロメーターとして，5の倍数の年齢にどれほど集中するかが計算されさえしている。概数年齢の問題とともに，高齢人口の申告における過大申告という偏倚があることもまた周知のとおりである。

年齢でさえこのような状態にあるとすれば，他のもっと複雑で，主観をまじえる余地のある調査事項に関してはおして知るべきである。職業調査の申告にいたっては，回答の偏倚と変動とは当然予想されるところである。同じくアメリカにおける調査によれば4,500人の労働者とそのおのおのの雇主とに対して，労働者の所属職業を問い合わせた。まず職業をわずか9種類に大分類して，そのいずれの種類に属するかを調べた。これは大分類だから，いちじるしい不一

致はなかろうと思われたにもかかわらず，当の労働者とその雇主との回答が不一致のもの21.7%におよんだ。これを細分して233種類の職業に分類してみると，当然不一致はさらに多くなるわけであるが，不一致の割合は実に35.5%にいたったといわれる。このような不一致は，職業調査における回答の変動率として覚悟しておかなければならない。これは1つには，定義に明確を欠くからでもあり，また職業分類が非常に困難であって，分類が論理的に整頓しがたいこと，またその分類を調査客体によく徹底させることが困難なこと等にも起因する。分類の困難な一例をあげると，洗濯業をとってみると，各国の統計で職業分類はまちまちであって，被服業（ベルギー，ドイツ，イタリア），清掃業（オーストリア，インド），家事的個人的用務（アメリカ），個人的用務（イギリス），という解釈がつく。日本では紡織工業（1930年），紡織品製造業者（1940年）という解釈があった。

対象の反応として，考えに入れておかなければならないものとしては，無回答（Nonresponse）の問題がある。郵送法によって質問票，調査票を送る。ところがこれに対する回答が帰ってこないものがある。多くの場合，回答をよこす者とそうでない者との間には，質的な相違がある。したがって回答をよこした者のみについての統計をもって全体を代表させるのは危険である。未回答者の一部を抽出して，これに対して追究調査を行なう，すなわち面接調査員を派遣したり，さらに調査票を郵送したりする。これもまた全部が回答をよこすとはかぎらないが，こうして得られた回答を前の回答といっしょにして調査資料にする。この種の問題には当然費用，時間の考慮が加わるわけで，郵送法，面接の経費，所要時間と，所求の信頼度があらかじめわかっていれば，所求の信頼度をもつ統計結果を最少の費用で獲得するには最初何枚の調査票を分配すべきか，追究調査はいかなる程度にすべきかが，規定される場合もある。全数調査を意図して多数の調査票を郵送し，その結果，調査者の計画とは違って60%の回答しか得られないというよりは，10%の標本調査を計画的に行ない，これが95%の回答率を確保する方が，まさっているともいえる場合もあること

を銘記すべきである。なぜならば，回答を得た60%は全体をよく代表し得ないのに対して，後者はよく代表性をもつことがあるからである。ここにも標本調査がいわゆる全数調査にまさる点があるわけである。申告もれの問題として，出生（および死亡）に関しては，遷延届出の調査を材料にして出生（死亡）届もれ届出率が計算されている。

社会調査における偏倚と変動とには，そのよって起こるところが，単に無意識的な誤謬だけではなく，そこに意識的な誤謬があり，欺瞞がある。道徳上の利害関係上，不正申告，虚偽の申告の起こり得ること，経済上の利害関係にいたってはことにはなはだしいこと，これらは常識であって，統計は当てにならないといわれる原因はここにある。経営調査における製造量，販売量，農業調査における経営面積，家畜数，収穫高等は所得税統計にあらわれる所得額と同様，過少申告という偏倚を伴いがちである。労働統計における賃銀，労働時間の申告には，労働者側と雇主側との両者の数字に大きなくい違いがある。

【3】調査方法に伴う偏倚と変動　調査方法という技術面に関連を生ずる偏倚と変動性とを論じよう。ただし，Kaufmann のいわゆる5つのWのうち，調査時期 Wann，調査地域 Wo，（狭義の）調査方法 Wie を含めてここでは考えることにする。

すでに述べたように，社会調査の目的を，単なる記録の意味でなく，科学的な一般化を目標とするもの，または行動の指針を与えるもの，という意味にとるならば，調査時期，調査地域の問題は，既定のものとして指定されるのではなく，調査主体が，その調査目的を達成するために適当に選ぶべきものであり，したがって，広義の意味では技術的な方面に属するとみるべきであろう。

まず調査時期の選定ということに関しては，従来，静態調査，動態調査の区別が詳細に論議されている。この区別はもちろん，実際上たいせつなことではあるが，両者はいずれも，補間なり，補外なりを行なうための手段として考えるべきである。前者は一時点における状態を確立しようとするものであり，後者は一定期間内における状態の推移を描き出そうとするものである，という相

違はあるけれども，調査時期の選定は，ようするに調査目的を明確にすることを前提として決定されるべきことであって，この点明瞭に意識されなければならない。周知のように国勢調査は 10 月1日午前0時を期して行なわれるが，この時節は人口移動の少ない秋であること，この時刻には，人は就眠のため自宅，宿舎におさまっていること等が，選定理由としてあげられよう。してみれば，これは眠っているときの社会の人口をみているのであって，昼間の日常的活動をみるためではもちろんない。働いている大都会の活動状態ということであるならば，また別の時刻時日を選ばなければならないということになる（昭和22年10月1日の臨時国勢調査では，夜間人口だけでなく，昼間人口の実情や都市と農村との動態的な人口交渉もわかってくるというのが1つの特徴である)。動態統計における期間の区切りということもまた慎重に考慮されるべきことである。ここにも社会調査が先科学的に行なわれることが危険であり，あるいは無意味であることが指摘されるのである。ある社会現象を時間的経過として把握するためには時間的変化の特徴を描き出すと同時に，偶然的な動揺にいちじるしく影響されないような適当な期間が定められなければならない。一般にいうと，あまりに長い調査期間にまとめてしまうと，時間的変化を消失して，高低の特徴を消してしまうし，あまりに調査期間の短い調査結果を羅列しては，偶然変動に支配されて大局を見失いがちである。この問題は，けっきょくのところ，標本抽出法の問題として，一般的に考究されるべきものであることを付言したい。

調査時期についていったことは，調査地域に関してもまた当てはまるのである。ここでも統計調査はようするに，標本作成法の一環として観察することが肝要である。したがって，全調査範囲において，いかなる地域を選んで調査するとき，全範囲が妥当性の二点からみて最もよく代表されるか，という問題になる。

狭義の調査技術の問題になると，第1に調査の原資料の採取方法が考えられなければならない。郵送法，電信，電話によるもの，面接法がある。そのいず

れによるべきであるか，次には，いかなる事項を調査すべきであるか。質問事項の選定，整理，表現が問題である。質問形式としても，「あなたの御意見はどうですか」といって回答内容を制約しないところの自由問答法（free answer question）もあれば，多項選択法（multiple choice）といって，自分の意見にもっとも近い意見を多数の項目のなかから若干個選ばすという方法もある。さらに範疇的質問法（categorical question）または二分質問法（dichotomous question）といって，表示した意見に対する賛否を求めるという質問の型がある。

郵送法の利点としては，(1°)面接調査法の欠点である暗示をあたえるということがない，(2°)費用および手数の点からいってサンプルを広く配布できる，(3°)質問書に書き入れる時間的余裕のため，注意が払われることがあげられる。郵送法の欠点としては，(1°)回答率が低い危険がある。したがって，標本が代表性を失いやすい。費用もかならずしも低いとはかぎらない。(2°)質問事項が簡単になりがちであり，実態把握の点で不充分である。(3°)面接法よりも，けっきょく時間が多くかかる懸念もある。面接法については，だいたいにおいて，面接法の長所がすなわち郵送法の欠点となることであり，逆に面接法の欠点はすなわち郵送法の利点となることである。電信，電話によるのは，両方法の中間的なものである。

このように各方面から調査に伴う偏倚と変動とを列挙してくると，統計は虚偽と欺瞞に満ちているとして，ひとは不信の念を強めるだけになりがちである。しかしこれが現実の姿であれば，現実を回避することなく，真正面から凝視していくほかはない。そしてその際，肝要なことは，認識の本質を見失わないことである。認識の本質はしばしば説いたように，受動的な観照にあるのではなく，認識は人間がその一部分である周囲の外界事物への実践的干渉の結果起こるものである。真理は，人間の実践のうちに確認されるべきである。してみれば，妥当性は保証されなくとも人間の実践を保証する信頼性，すなわち利用可能性が保証されていればよい。この観点に立つとき，社会調査における偏

倚と変動とを克服する道が開けてくる。その方法は次のとおりである。

第1に，偏倚および変動自体がいかなるものであるかを，組織的に調査しておくことである。避けられない偏倚と変動とに対しては，それを極小にする努力も必要であるが，その範囲と程度とを評価することができればよい。第2に，個別的な調査で見いだされない偏倚や変動も，集団的観察においては，平均状態からのいちじるしいずれとして，これを指摘し得るし，それによって補正も可能になる。第3は，偏倚は，ある集団では一定の偏向をもち，多数例の相加平均では相殺されないけれども，並列的，対立的な他の集団では，一定ではあるが違った偏向をもつということがあり，これらの集団の総合された集団では打ち消し合うことも起こり得るのである。第4には，以上のような方法とともに，すすんで実験法の導入が考慮される。アメリカ世論調査研究所では，世論調査に先だち，テストとして分割投票法 (Split Ballot Technique) を行なう。それは同一の問題を2つの仕方で表現して，標本人口集団の半分ずつに配布して，その正確さを調べる。市場調査において，広告効果の測定のためのテストのような実験法，すなわち文案を異にする2つの広告をつくり，これを限られた2つの地区に分布させて，この2つの広告を比較するというようなのがこれである。第5に，近代統計学の主要な方法である実験計画法を導入することであろう。農事実験の統計理論が，地力の変動性の克服から生まれたことはすでに第7章に述べたとおりであるが，その理念と方法とは社会統計における偏倚と変動とを克服する手段として，利用されるべきであり，この点未開拓の分野として残されている。以上に述べたところから明らかなように，総体的にいって，統計的標本作成法が全面的に利用されなければならないのである。

信頼度を確保する上に集団的観察の偉力というものが認められるであろう。統計的調査が，一般の社会調査とことなるのは，この点にあるのであって，統計調査の方法論は，上述のような一般の社会調査の技術に属することを除けば，標本作成法の問題であるといえる。それは，各分野の専門知識をもとにし

て，調査対象の偏倚と変動とに関する知識を前提として，いかにすれば，最も有効に調査が行なわれるか，すなわち最少の経費，時間，労力のもとに，最も妥当性と信頼度の高い調査結果が得られるかを考究するものである。われわれはこれを次節に論じよう。

4.　統計調査の論理構造

社会統計は統計調査という実践を通じて獲得される。統計調査の典型的な場合についてその方式と論理構造とを考察することによって，社会統計の提供する認識がいかなる性格をもち，いかなる制約をもつかが推論されよう。ここでもわれわれは現実の分析から始めなければならない。空想的に統計学のあるべき姿を想定するのではなくして，統計学の現段階を凝視して，これに対して的確な位置を座標づけることは，やがて，統計学の将来の段階への進路に対して正しい方向係数を規定することになると思われる。

本節では，われわれは，社会統計を主眼において論じよう。それゆえここでは，統計といえば，社会統計を意味する。以下に述べることの多くは，一般に統計のある形態および統計的認識のある段階を表現するものであるけれども，ここでは実態の考察から出発するから，研究対象であるところの社会統計から目を離さない方がよいであろう。

社会統計の認識に関するもののうち，統計調査そのものに固有なのではなくして，一般に社会調査について成り立つ事柄は，統計的認識の本質にふれるものではない。それゆえ，それらは一応分離して考えた方がよい。前節ではそういう観点から，統計調査に固有でないものをより分け，一般的に考察をすすめてきた。これらの準備を経て，今われわれは一般の調査とは違って，とくに統計調査のもつ性格と機能をつきとめるべきところへきたわけである。

結論からさきにいえば，社会統計学の現代において到達している段階は，一般に認識のとるべき段階というものの世界にこれを位置づけてみると，なお低い段階にあるといわなければならない。その大部分は，現象記述論的な認識段

階を抜け切らず，その一部分のみが実体機能論的な認識段階にようやくはいりかけている程度といわなければならない。このことは，統計力学等と比較してみるとき，あるいは遺伝学における統計的方法の援用と対比してみるとき，はっきりといいきることができる。社会統計のよって立つ論理は，分類の包摂関係により規定されるものが大部分である。しかしこのことは，社会統計学のどうしてもとどまるべき限度であるのではなくして，社会科学の現段階に束縛されるがためであるとみるべきであろう。現段階はけっして社会統計のいたり尽くした極限段階ではない。社会科学の進歩とともにもたらされるべき段階も，かならずしも想像されないことはない。しかし的確な予想は，現段階の本質を明確に把握することによってのみ，可能であろう。

社会統計の理念には，普遍と特殊との対立的な考え方が根底にあり，それは根本的には分類の論理の上に立つことが指摘される。まさに形式論理的な範疇から出発するのである。しかしながら，他方において統計的認識は，演繹的な認識ではない。この論理的な二重性格が明確に指摘されなければならない。統計調査によってわれわれの獲得する認識を検討してみれば，根本的には弁証法的な方法を予想するものといわなければならない。近代統計学における種々の方法は，次第に社会統計へ応用されつつあるが，社会統計学の論理を弁証法的に理解すべき観点を与えていることを，明確に自覚しなければならないと思う。

われわれの結論としてかかげたところを以下に吟味してみよう。社会統計における統計調査の実態についての論理を分析してみれば，そのよって立つところの基礎の認識論は，多くの場合，分類の論理関係を利用することにあるのを知るであろう。そこでは個物と普遍との包摂関係が根本的な観点としてうち立てられている。あらゆる個物は無限の多様性を包蔵するのに対して，普遍はこのような個物，すなわち個別的な対象をただ近似的にのみとらえ得るにすぎない。しかし普遍なくしては個物をとらえることはできない。個物はもと感性的な存在として与えられるのに対して，普遍は概念的認識として利用される。統計調査についていえば，調査単位体の資格を定義する理論的概念規定がまさに

この普遍に相当し，各調査単位が個物である。この理論的概念規定にもとづき，その外延を，現実の存在について求めるところに統計調査の第一歩が始まる。この外延を形成する個物の集合を集団という。この集団に所属する個物は現実の存在であって，それらは上述の概念規定によってのみ制約したものであるから，個物は無限の多様性をふくみ，個物相互間には無限の差別性が存在する。しかし統計調査の観点は，個物のより完全な把握にあるのではなくして，集団的観察にある。いいかえれば，集団としての性質を摘出することにある。それは，理論的規定そのものを，現実の個物を通じて，観察しようとするものである。このためには，集団的観察においては各個体を表示する標識を導入し，この標識に表われるかぎりにおいて個物の様相をとらえようとする。それは実在の射影である。標識は，元来は質的なものである。しかし，射影された世界だけではそれは定性的と定量的とにわけてみるのが，便利であろう。たとえば日本国民という概念規定だけでは，それにより規定された個々の実在は，男女，老幼，貧富，健康者病人等々，無限の多様性を持ちうる。しかし性別をとれば，それは定性的な標識であり，身長，体重を考えれば，それは定量的な標識である。このようにして，ある標識を導入すれば，個体に対して，その標識の一定の様相がそれぞれ対応する。これを集団全体としてながめるならば，個物を独立変数とする標識の変動状態が，関数として規定されることになるのである。

ここに標識というものは，しかし，せまい意味にとってはならない。世論調査において調査単位体，すなわち被験者の提示（表明）する意見というものも，個物（調査単位体）の標識と考えられるのである。個物と普遍との対立，個物の集団化，標識の導入，これらは，しかしながら統計学にのみ特有のことではないことを注意しておかなければならない。

先へ進もう。標識の変動状態を観察するに当たって，われわれは集団自身を，必要があればさらに各層に細別し，1つずつの層になっている各部分集団の内部について，まず標識の変動状態を調べ，次には層と層との間の比較に移

るという段階をとる。層別化の原理ともいうべきものである。しかし層に分類するためには，いかなる因子についての分類であるかが規定されなければならない。考慮にかかる因子が2通りあれば二重分類であり，いわば二次元の格子でつくられた部室分けを行なうことであり，一般に因子がn通りあればn重分類であり，n次元格子部室別を想定しなければならない。人口集団の身長統計を，年齢別，男女別，地方別にみるならば三因子であり，三重分類が用いられる。供出に関する農民の世論調査を，経営面積，水田地率，自作割合について分類するのも，三重分類である。因子の数とともに，各因子の起こりうべき様相を幾通りに考えるかも問題である。たとえば年齢を5階級に分け，地方を30地域に分けて考えるならば，上例の三次元格子部室の数は5×2×30となるわけである。普遍に種差を加えて個物の様相を次第に精確に規定していくのと同じ理念によって，それは成り立つものである。標識の変動状態を調べるという設問に対して，独立変数の方にあたる集団自体の分割から始めるこの方法では，いわば1つの相補性とも称されるべきものが現われる。すなわち分類の因子数を多くし，各因子の様相の細別化をすすめると，おのおのの格子部室にはいる調査位の数はますます減少する。したがって集団性が希薄になる。一方，因子の個数と各因子の段階数を増すことにより，細別された各集団は純化される。この層別化の過程も，しかしながら，かならずしも統計的認識の特質ではないのである。

統計的認識の特徴といわれるものは，次の段階からである。すなわち層別化のある段階に立ち入って，われわれは，各部分集団内部における標識の変動に対して，もはや変動原因を指定することを断念する。そうして，そのかぎりにおいて——すなわち問題の標識の変動に関するかぎりにおいて——各部分集団の内部では，各調査単位の示す変動は，等質なものの示す変動と考える。各部分集団内部において標識の変動の存在することは事実であるから，それは事実として認める。しかしもはやその変動原因を問わないという段階にはいるのである。等質な各部分集団においては，当面の標識を数量化して把握し得ること

の，理論的根拠が与えられる。定性的な標識は，計数化され，定量的な標識は計量化される。等質な部分集団にまで細別しないでも，形式的には標識の数量化は可能である。しかしながら，数量は，それに対する運算が適用されて意味があるのであって，単に数として量としてあらわされることは，数量化の本領ではない。貧農の所得と富農の所得とは，ともに金額にあらわされても，それらの所得を加えて平均するという運算が，実質的には何の意味をももたない。農民経営を合計して経営数で割って得られる平均消費の法則は，農民社会の実状を反映しないで，かえって隠蔽する役割をはたす。統計的認識の１つの特徴は数量的把握にあるといわれるのは，統計認識が，等質な集団の標識を数量化することだけを意味するのである。等質という条件をとって，単に数量的把握と考えるのは非常な謬見であり，非科学的である。そうして，およそ科学的な統計調査を正しく企画し，生産し，解釈するものは，何人もそういう誤謬はおかしてはならないのである。

等質的な部分集団の確保は，しかしながら，かならずしも実行可能ではない。したがってある種の統計は，そこまでの細別を意図せず，ただ見やすい形で提示するという意味で，原資料を種々の角度から部分集団に類別して，標識を数量化して，表示する。この段階の統計であっても，もとより無用のことではないのはいうまでもない。しかし，このような段階に統計はとどまるべきではない。それではむしろ集計と呼ばれるべきであり，一種の記録作成である。

統計的認識の進むべき地点は，等質的な部分集団の確保である。さらに進んで，この等質的な部分集団内における計数または計量の変動がストカスティックとして把握されるにいたって，そこに確率論の適用される対象となるのである。

以上の所論をここで整理してみよう。統計調査の理論は，次の手続において理解されてきた。

等質な集団において，定性的な標識は離散的な数，あるいはその組み合わせとして，定量的な標識は連続量を表現する直線，あるいは一般に空間の点とし

て，これを把握できる。普通前者を計数化，後者を計量化といい，これらを総合して数量化という。しかしこれではただ数量に対応できるという意味にすぎない。標識の変動状態を数量の世界へ写す目的は，この数量の世界の動きをみていれば，もとの標識の世界における動きが把握されるという点にある。そのためには数量の世界における動き，たとえばそれはまず四則算法を許す世界だから，この四則算法に対して標識の世界においてそれぞれ意味がなければならない。一般にいうと，数量の世界に許された演算に対して，標識の世界に意味が対応しなければならない。われわれが数量化と称するものは，この条件を満たすものとして規定される。標識の世界のA, Bに対して，数量a，bがそれぞれ対応するというだけではない。数量の世界で $a+b$, $a-b$, ab, a/b をつくれば，それが標識の世界において意味をもたなければならないのである。山田太郎の小作米の供出A，谷村次郎の小作米の供出B，川野三郎の小作米の供出C，等としてそれらの石高を a, b, c 等で表わすとき，$a+b+c+\cdots$が意味をもつ個人，社会がなければ，数量化は意味がないのである（第1章参照）。和の極限というべき積分学についてみても，本格的になったのは，動力の時代となった機関の効率が問題となり，エネルギーが全面的に前面におし出されたからである。そうした社会が前提になっているのである。

等質でなくとも，形式的には，標識に対して数量を対応させることはできる。しかし，等質でない集団にあっては，数量の世界の演算に対応する意味が標識の世界で見いだされ得ないのである。ここに等質ということは，変動原因をあげられない，あるいは変動原因をあげる必要がないということであるから，そこに，主観的な制約の余地を残す，米穀の供出総量をかき集めることのみを問題にすれば，農民の階級という質的相違を無視して，供出高の総和をつくればよいであろう。

等質な部分集団へ，もとの集団が分解されてしまったとき，各部分集団では標識の変動因がもはや指摘されない。しかし，標識の変動がなくなってはいない。すなわち部分集団という変域（定義域）における標識という関数は一定常

数ではないが，変化の要因が決定されないという意味で非決定論的なものとなるのである。そうしてこの場合，もしもこの等質な部分集団それ自身が，ある等質な母集団から，あたかも袋のなかから球を無作為的（at random）に抽出する場合と同様に抽出された標本と見なせるならば，ただに非決定論的であるばかりでなく，変動のあらわれ方に1つの制約をもつことになる。すなわち，たとえば頻度の恒常性がこれであり，一般的にいうと集団的規則性がこれである。このようにして，以上の条件のもとでは，等質な部分集団内における標識の変動は非決定論的であり，かつ集団的規則性をもつゆえに，ストカスティックになるのである。等質な部分集団が，こういう段階にあるとされるとき，確率化されたという。とくに，等質化されかつ数量化された部分集団が，この段階にあるとき，標識は確率変数としてあらわれれるという。球よりの抽出ということに関しては，さらに後に詳しく考えよう。ここに重要なことは，現実の部分集団をそれの標本と見なせる母集団の定立である。それは部分集団ごとに対応してきまる。母集団は仮想的なものであっても，実在的なものであっても，その点はさしつかえないのである。しかし，ここでも，数量化のときと同じく，そのような母集団の定立がそもそも意味をもたなければならない。それは，認識の目的によって規定されるのである。

母集団の定立は，しかし観念論的に考えてはならない。それは後に説くように仮説の提出という意味に解釈されなければならない。

以上の所論をまず少し整理してみよう。われわれの進んできた段階は次のようであった。

(a)　**集団化**　理論的概念規定によって，現実の個物から構成された集団をつくる。ここに普遍は集団の構成原理として現実化され，個物は普遍の個別的限定，すなわち現象（事象）としてとらえられ，この集団に属する調査単位となる。

(b)　**標識化**　個物は無限の多様性と差別性とをもつ。しかしすでに調査単位として集団に所属するにいたっては，標識を設けることにより，各調査単位に

あらわれた標識の様相によって，調査単位を把握することができる。個物は事象となり，事象は様相となる。

(c)　**層別化**　集団を特定の因子に関して，部分集団の層に細別する。それは集団全体における標識の変動状態を，これらの部分集団の内部および相互間において，観察するためである。

(d)　**等質化**　当面の標識の変動に関して，もはや変動原因の指摘されない部分集団は，この標識（の変動）に関して等質であるという。等質な部分集団にわけることを等質化という。

(e)　**数量化**　等質部分集団の内部において，定性的な標識は計数化され，定量的な標識は計量化されるとき，等質部分集団は数量化されるという。

(f)　**確率化**　適当な母集団を等質部分集団のそれぞれに対応させ，そうして調査単位の表わす変動が，これらの母集団の内部ではそれぞれストカスティックであると見なされるとき，各等質部分団の標識の，または標識をもって表示された事象自体の，生起変動が確率化されたという。とくに数量化された等質部分集団に関しては，確率変数であるという。

われわれはここで，歩んできた道を振り返ってみよう。以上(a)より(f)にいたるまでの1つずつの段階には，そこへ進みうるための前提があって，これが満足されなければならなかった。たとえば「もはや変動原因が指定されない」「標識の変動がストカスティックである」というような前提が，(c)から(d)へ，(e)から(f)へ進みうるためにそれぞれ前提となっている。しかし，これらの前提の満足されていることは，いかにして根拠づけられるか。これに対して，一応は，次のようにも答えられるであろう。すなわち，当面の統計調査自体ではなくして，それからみれば外的な知識と経験とによって判定する，と。ここに外的な知識とは，社会科学の理論にもとづくものがあるし，また他の調査からすでに得られた経験もあげられる。これらは，もちろん重要な指針を提供する。しかしながら，当面の統計調査自体とは独立に与えられるとみられるかぎりでは，当面の統計調査の結果に対しては，いわば先験的なものである。かくして(a)よ

り(f)への進行が，この先験的なものによってのみ指導されるように思われる。しかしもしそれだけであるならば，一体統計調査は何のために行なわれるのであるか。新たな記録の提出という意味ならば，もちろんそれだけの存在理由はある。しかし今，われわれはそれを問題にしているのではない。既成の理論，既成の観念を確実正当なものとして，その例題を与えるためではないであろう。統計は科学的認識として新しいものを提供しなければ無意味である。この点の論理がいかに説明されているかが，最も重要なところである。しかしながら，事実は統計調査の実際に当たって，調査者はそういうことをかならずしも意識しないで行なっていることが多い。その論理を明確に意識しないでも，統計的存在自体が，研究者を正しい道へひきつれていく。しかしこの論理を自覚することが必要である。一言にしていえば，研究の実状に即してみれば判明するように，(a)より(f)への進行自体が，1つの仮説の提示という意味になるのである。

これを説明するために，(a)より(f)までが完成されたと見なされる統計調査を前提に置いて考えよう。(f)の段階までたどりついたその瞬間に，統計は今きた道を帰るための可能性をみずからにおいて具有するにいたっている。すなわち自分の進んできた道の正当であるか否かを判定する基準をもつ。(a)より(f)までの段階は，明らかに，質より量への進行であった。異質のものが等質に層別され，ついに量に窮まるとき，量は1つの物指となって，質と質とを比較する基準となる。この物指をもって，われわれは，今きた(a)より(f)までの道が確実なものであったか否かを検査し直すことができる。この物指は，歩んできた道を正当なものとして得られたものである。そしてその物指をもって，進んできた道が正当であるか否かをみようとする。

一見それは循環論法であるかのように思えよう。しかし，この点にこそ，統計的論理方法の秘訣は存在するのである。まさに，仮説の検定という概念なしには理解されない論理といわなければならない。近代統計学の進歩は，何よりもこの論理に対して明確な自覚と形式化とを与えた点にあるといえよう。その

ような論理は，しかしすでに統計学の誕生とともにあったわけであるし，記述統計学においては，もはや実質的にそこまできていた（第5章参照）。

彼らは何をなしつつあるかを知らずに実行し，明確な自覚と，したがって適切な表現とを欠いた。欠いたがゆえに，そこには多くの混乱もあった。

物指の使い方は次のようである。等質な集団内部における計数，あるいは計量の変動の起こり得べき限界が規定される。もし，実際の変動が，この限界を越えるならば，等質という仮説は棄却される。変動がこの限界を越えなければ等質という仮説は棄却されない。たとえば，今まで異質的な存在として，層別された部分集団相互が，はたしてそうであるか否かを問題にしよう。想定された部分集団のうちの若干個をとってきて，等質なものであるという仮説を立てる。そうして，これを上のように設定する。仮説が棄却されるならば，その区別は有意味の懸念があり得るから，その差異がいかほどであるかを評価すべきである。ここに評価の問題が起こる。仮説が棄却されないならば，両者は等質である。部分集団相互を区別することは，当面の標識に関するかぎり無意味であるから，層別の壁をとって，いっしょにしてしまう。

この論法を，従来も暗黙のうちには利用していたのであった。しかし精細に検討するならば，この論法は確率の概念を利用して，その基礎の上に立つことが見いだされよう。正確な表現に関しては，第 11 章にゆずろう。

しかしここで，明確に把握しておかなければならない根本的な点は次のことである。統計学的方法は，第1には質的相違を量的相違へ還元することである。すなわち質より量へはいることである。第2には，このようにして得た量をもって質をはかることである。異質性の認証，新しい質の発見がここから生まれてくる。

なおこれに，次のことを要約として加えておかなければならない。

(1°)　統計調査は，集団化に始まり，標識化，層別化，等質化，の諸段階を順次経たのちに，数量化および確率化に立ちいたるのであって，その途中の過程を飛ばすことは，非科学的であり，虚偽と欺瞞は多くここに起因する。

(2°)　統計調査は確率化の段階をもって完成する。ここにいたらない調査はむしろ集計といわれるべきである。確率化の段階に到達したときわれわれは，統計的検定の方法を適用し得ることになる。

(3°)　この統計的検定は，異質性または等質性の確認，新しい質的存在の検出に役立つ，(a)統計に関する質的相違の判断は，一応は，先験的に（当面の統計調査とは独立という意味で）与えられなければならない。しかし(3°)により，その判断自身が検定され得るのである。(b)いちじるしい量的相違は質的変化を示唆する。

(4°)　確率化とは，その部分集団に属する調査単位体がある集団からの標本とみるとき，ストカスティックであるということである。このためには，その個数が大きいこと，すなわち大標本であることは，必要条件でも充分条件でもない。小標本であっても，確率化された集団の内部では，大標本に充分に匹敵するだけの信頼性を持ちうる。

(5°)　統計調査は，企画，生産，解釈（利用）の三段階をもつ。これらの関係は弁証法的に理解されなければならない。企画あっての生産であり，生産あっての解釈ではあるけれども，一方において解釈問題を予想しての生産であり，解釈と生産とを考慮しての企画でなければならない。

(6°)　質より量へ，この量を通じての質の判別。この過程を一層論理的にするためには，確率化がいかに作用するかが問題の要点である。これは第11章にゆずる。

次節以下に述べようとする現行の社会統計の標本作成法に関する理論的な理解は，およそ，以上のような段階にあるものと規定して把握することができるように思う。いっさいの統計的認識は，かくして質より量へ，そうしてこの量を用いて質の確認および検出への方法をとる。社会統計においては，社会的集団の構成および構成の動態をこの方法によって研究するのである。課題として与えられるところは，個々の集団の構成のみではなく，構成の動態，諸産業の構成，労働生産の動態，資本の有機的構成等の動態までも調べなければならな

い。私経済，社会経済，国家経済の各観点から，社会統計を取り扱わなければならない。集団の範囲は，ただ増大するのみである。そのとき，ただこれらを質的に区別することは許されない。量的観点が導入されなければならない。このことからして，統計学の進出は必然性をますのみである。しかしながら，社会統計学の現段階は分類の論理の上に立ち，普遍と特殊との包摂関係を利用しているのであるから，問題を過程として把握する点においては不充分な論理であると思われるのである。ただこの間にあって，近代統計学が量より質への論理ともいうべきものを，数学的に確立したところの検定理論を提供しえたのは，重要な進歩であるとはいえるであろう。近代統計学の論理構造から説いて，検定理論を正確に規定し，確率化の意義を明らかにすることは，第11章にゆずり，ここではおよその輪郭を備えるにとどめることにしておく。

5. 推計としての統計調査

Wagemann はその『探偵としての数字』(Zahl als Detektiv) において，一般に推計というものを次のように分類している。

A．分析的推計 (Analytische Schätzungen)

1. 代表法 (Repräsentation)　2. 包摂法 (Induktion)

B．総合的推計 (Synthetische Schätzungen)

1. 代用法 (Substitution)　2. 拡張法 (Generalisierung)

ここに分析的推計とは，全体と部分との関係から推定判断を下すものである。それを2つに分けて，部分から全体を推定するのが代表法であり，逆に，全体から部分を推定するのが包摂法である。総合的判断というのは，全体と部分との関係にない集団間の関係にもとづいて推定する場合を指す。異種の集団間のとき代用法といい，同種間のとき拡張法という。代用法の例としては，相関関係を利用するもの，ある集団現象の変化を他の種の集団現象に反映させて間接に表現させるもの，あるいは兆候的にするものなどがこれに当たる。相関係数を利用するのが主である。拡張法の例としては，主として補間補外等の数

学解析の操作を用いて時間的な過程を論ずるようなものがそれに当たる。

統計調査はすでに述べたように，理念的には，標本調査として把握されるべきである。この見地に立ってみると，それは一事を知って全体をうかがうというものである。それゆえ推計という目標をもつものであることはもちろんである。Wagemann の分類に即していえば，社会統計における統計調査においては，上述の A.1 代表法が基本的に必要である。包摂法は分布問題として数理統計学の対象となり，代用法は照準（control）として統計調査で用いられる。拡張法は動態統計において利用される。それゆえここでは，代表法としての推計に関して考えることにする。推計として統計調査をみれば，それは標本作成法を意味するものにほかならない。前節において統計調査が集団化，標識化，層別化，等質化，確率化の諸段階を経てのち，統計的認識を完成することを示した。推計を与えるという見地からも，この諸段階の意義が強調されなければならない。標本作成法の企画ならびにその実施は，この諸段階を確保することにより完成されるのである。

【1】判断利用と任意抽出　標本は抽出という概念と，母集団という概念を前提とすることはいうまでもない。前節で述べたように，層別された等質部分集団が確率化されているときには，われわれのもつ資料Σなるものは，次のように考えられる。すなわち，Σはいくつかの等質な部分集団 Σ_i に層別され，各 Σ_i はそれぞれ母集団 Π_i からの任意抽出とみられる。したがってΣ自体はこのような母集団 Π_i の複合母集団 Π からの選出および抽出とみられる。選出および抽出という実践行為に主観点をおいてみるならば，統計調査には2つの原則がある。その1つは選ぶことであり，他の1つは抜き出すことである。正確には前者を判断利用，後者を任意抽出ということにしよう。

推計の目的は，いうまでもなく，推計しようとする客観の真の値というべき目標に対して，なるべく偏差の少ない値を見いだすことである。ところが，偏差をなくすことはできない。われわれにできることは，すでに述べたように，推計の信頼性を確保すること，いいかえれば，起こり得べき偏差の範囲をなる

べく小さくすると同時に，推定値の信頼性を示すこと，この2つである。これを目標として標本作成法は決定される。なおここに標本作成法は実行可能なものであり，また経費，時間，労力等は指定された範囲において，標本作成法は計画されなければならないという条件がつく。

判断は，適当に利用されるならば，起こり得べき偏差を小さくするという点において貢献するものであり，これに対して任意抽出は，標本のもつ信頼度を数量的に示す根拠をあたえるものである。

標本作成法は，いかなる調査単位をいかにしてつくり出すかということである。それには，前述のような複合母集団ともいうべきΠが想定されていて，ここから抽出するという概念が成り立たねばならないのである。Πを分解して，$\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_k$とするところに判断は利用されるべきであり，各$\Pi_i$から調査単位体をとるという最終段階においては任意抽出が用いられるべきである。もし，判断が利用されず，層別なしに任意抽出を行なったならば，標本変動は大きくなって，推計値は真の値といちじるしくくい違う危険を生ずる。もし任意抽出が最終段階において用いられず，便利とか判断によって最終的に調査単位体の採否が決定されるならば，客観的な信頼度は計算されないことになるのである。統計調査の本領は，この信頼度の確保にあるといわなければならない。

【2】統計調査における変動と偏倚 判断を利用するということと，判断選出とは区別しなければならない。判断選出とは，調査単位の採否を最終的に判断によってきめる方法である。たとえば，典型的な群，都市，市区，世帯，工場，農場をとるという調査法，面接調査員の判断にまかせて被験者を選出する法等はこの類である。この方法では，なるほど，ときには偏倚の少ない資料も得られるであろうけれども，これによっては客観的な信頼度は与えられないのが一般である。もしも判断の適否に関する見解が専門家の間で一致をみなかったならば，信頼度を与える方法がなくなる。もっとも，判断選出法の方がよい場合がないわけでもない。それは調査単位の個数がきわめて小さい場合には，標本変動を小さくした方がよいから，偏倚が判断に伴う危険は冒した方がよ

い。たとえば，調査の予備試験とか，試験的に実地調査で調査費を見積もるというような場合は，判断選出で結構である。なお，判断選出法で信頼度の算出されないものは，任意抽出法を適用して，信頼度を判断した標本法と比較して経費を論ずることは無意味である。前者は，たとえば面接1回につきいかほどの費用であるかというのに対して，後者は，所要の信頼度を与えるための費用であるからである。統計調査の本領はあくまでも信頼度を明らかにした推計を与える点にあるのである。標本変動が，これこれの範囲を越える確率は無視できるという場合，この範囲を標本変動許容範囲というのであるが，この範囲を指定以内にとればよいのであって，それ以上の精密をもとめることは無意味である。たとえば，厚生，食糧配給等の諸問題の計画に関しては，アメリカの統計学者では「市民数の調査では変動係数（標準偏差を平均値で割ったもの）が1%――すなわち，その範囲を越える確率が2.5ないし3%――であれば結構である」(Deming) とされている。

3節において偏倚と変動との若干について吟味してみたが，それは統計調査に固有のものとはかぎらず，広く一般に社会調査においてみられるものもあったのである。とくに統計調査に固有のものとしては，われわれはまず何よりも標本作成法自体に起因するものをあげなければならない。不回答より起こる偏倚，調査票に起因する偏倚，回答自体に生ずる偏倚，これらは標本作成法に固有ではない。しかし調査とか回答者の選出方法とか，推計方法とかからおこる偏倚は，標本作成法の負わなければならないところである。回答を寄せる好意があるとか，面接調査員の便宜であるとか，専門家の判断とかいうもので影響されるならば，偏倚のはいり込む危険は大きいものとなる。

【3】標本作成の原理　標本作成方法として用いられる手段をあげることによって，判断利用と任意抽出の原理がいかに具体化されているかをみよう。

標本作成の手段は，次のように分類されるであろう。

A. **判断原理**（計画性）（選）

(1)層別法　(2)照準法　(3)標準法

B．抽出原理（偶然性）（抽）

(1)任意化法　(2)機縁法

層別法（stratification）は，たとえば世論調査において全人口を農村，都市，年齢，階級等の社会層に分解するように，変動原因別に集団を分ける，という操作を意味する。照準法というのは，特定の照準（control）を設けてその条件を満足するようにすることである。たとえば，ある特性のもとの母集団全体における平均値が，標本におけるその特性の平均値と一致するようにというのは1つの照準となる。また層別に分けたとき各層からとるべき標本の大きさ（員数）を各層における人口数に比例するようにというのも1つの照準であって，これの方法を按分法（Quota Method）とよぶことにする。標準法というのは，判断を利用して，典型的なもの，基準的なものをつくることを意味するのである。層別，照準，いずれも代表を選ぶという意味であるわけであるが，とくに標準というとき，調査単位体の最終決定を判断原理によって決定するという意味をもつことの方が多いといわなければならない。この点において層別，照準いずれも，調査単位体をこの範囲あるいはこの条件のもとで選べというだけで，最終決定を指示しない。調査単位体の数字も個々の対象の平均的性格あるいは典型性がたいせつである。標準法は個別調査の趣を呈するにいたるのである。

確率化法（無作為化法, randomization）についてはすでに述べたし，また後にその技術を詳しく説明する。ここに機縁法との区別を明確にすることがたいせつである。自分の病院にきた患者の病例をもって，任意標本とは一般にいい得ない。無作為法であるためには，標本を抽出すべき母集団が定立されていなければならないこと，これからの抽出がランダムであるとの客観的条件が満たされなければならないことを忘れてはならない。機縁法は，しかし重要な方法であって，人類遺伝学において特殊な病疾の家系的調査などはこれによることが多い。

標本抽出に関する統計数理は，すでに Bernoulli の時代からあり，Laplace

の方法については第2章で述べたとおりである。近代においてはイギリスのA. L. Bowley ならびに国際統計協会の努力により，進歩が促進された。これは1910年代のことであり，これはやはり時代の反映がみられることである。さらにこの進歩を一段とすすめたのは，Jersy, Neyman等の功が認められなければならない。

国際統計協会の指定による委員会のうち，統計学における代表法の応用を研究する委員会があったが，1926年の報告に次のようにいっている。

「資料の一部をとり出してこれを直接研究の対象とする際，これを選ぶのに，2つの原理のいずれか一方が採用される。ある場合には，2つの原理を混用することもできる。そのうち1つの原理は，標本にふくまれるべき単位体を無作為的(at random)に選ぶことである。この方法が適用できるのは，どの単位体も，標本にふくまれる確率を等しくするような事情にある場合だけである。もう1つの原理は，単位体の組を有目的（purposive）に選出することによってつくり上げられるものであって，この有目的的選出によって標本が集団全体と同一の特性のもつようにしようとするのである。賭けごと，遊戯の経験の基礎になるような種類の資料とは違った構成をもち，したがって任意抽出を応用し得るような上述の条件に合致することの困難または不可能な場合には，この方法をとるべき理由がとくにあるわけである。これら2つの方法はそれぞれ得失がある……。」

6.　任意標本抽出法の技術

任意標本抽出法ということをいかにして実践的に確保し得るか，この問題について論ずるのが本節の第1の目的である。次には，いわゆる任意標本抽出法といわれるものに，若干形態を異にするものがある。それを列挙するのが第2の目的である。

第1の目的から始める。任意標本（抽出）法というのは random sampling method の訳語に当たるわけであるが，長年，この random の訳には困って

いる。中華民国では逢機と訳しているし，故亀田豊治朗博士は等確と訳されたようである。母集団から単位体を選ぶ仕方が，どの単位体も選び出される確率が等しい場合に，random であるという。なるほど，これは抽出法に関するかぎり，かなりよく適合した訳ではあるけれども，等確だけではなお一面的であると思われる。たとえば1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4……というような場合の表われ方は等確ではあるが，全く規則的で，これは random とはいわない。Mises の不規則性公理に相当するものが抜けている。逢機という訳はさすがに文字の国の名訳とは思うが，日本語としては聞き慣れないのが遺憾である。

at random ということを実現しようとして，0から9までの数字をでたらめに書きならべてみる。主観的には random のつもりでも，客観的には，いいかえれば確率論的には，そうはなっていないことが多い。たとえば，でたらめに書こうと思って書きつづけるのだから，同じ数字が引きつづいてあらわれるということがほとんどなくなる。

これを人間的偏倚（human bias）という。一般に，主観的に random に行なったというのでは，客観的には human bias が大きいのであって，これを小さくするには，個人的な選択の余地を残したり，観測に判断を加えることを許してはいけないようである。それは意識的な努力，修練によっても除かれない。むしろこういう点に個性の存在をみとめるべきであるといわれている。

作物の検見等においても同様な事情にあるのである。ロザムステッド農事試験場である人の実験したところによると，コムギの穂高をはかるのにコムギ畠のなかから抽出をした6本を，機械的（at random）な方法で選び，あとの2本は熟練した人の勘で at random 引き抜いてもらった。するとたしかに偏倚が見いだされたということである（Yule-Kendell)。袋のなかから球をとり出すという操作を任意標本抽出の模型とすることは，確率論の常習手段ではあるけれども，実はこれはそれほど random でない。第1に球の数が多くなると始末がつかなくなるし，球の大きさを一様にするというようなこと，表面の滑らかさを一定にすること等により，均等化することも困難であるといわれてい

る。くじ抽出機械に関しても，混ぜて一様にすることが理想どおりにはいかないようである。サイコロ，トランプ，銭投げ，ルーレット等の方法もまた偏倚をまぬがれないのである。このようにして任意標本抽出を現実化することは，しかしながら，全然方法がないわけではない。現在では乱数表（または任意標本抽出表）があって，これを利用するのが心配がなくてよいとされている。

Fisher-Yates は各ページに横 40×縦 8 の空室をもつ 50 ページの表を考え，これら総数 (40×8)×50＝16,000 個の部室のおのおのに，0から9までの 10 個の数字のいずれかを，次のような任意標本抽出法によって定めて，16,000 個の数字列をつくった。これを印刷および使用上の便宜から各ページが 50×50 個の数字よりなる6ページに分けたのが有名な Fisher-Yates の乱数表 (Random Numbers) である。

この任意標本抽出法としては次のようにすればよい。A. J. Thompson の 20 桁の対数表をみると，9-1 表にその1ページを例示してあるように，各ページが左右に縦断され，そのおのおのの半ページにはそれぞれに対する対数の数値が 20 桁で与えられている。そこで，われわれは任意抽出法でどこかの半ページを選ぶ。次にその半ページに記載されている 50 個の対数のうち第 14～第 19 桁に現われる6個の数字のいずれかを選ぶ。その選び方も任意抽出法によるものとする。たとえばサイコロをなげて k の目が出たら，第 $(13+k)$ 桁の数字をとる。かくして，抽出された半ページから 50 個の数字が得られる。たとえばたまたま 9-1 表の左側半ページが選ばれた半ページになったとする。サイコロをもって順次，3, 4, 2, 1, 5, …, 6 と目があらわれたら，この表から 4, 6, 9, 0, 4 となるわけである。このようにして得た 50 個の数字を 50 個の表——おのおのが横40×縦8の部室をもつ——に1個ずつ記入して行く。その配当方法にも任意抽出法をほどこす。こうした処置を 320 回 (40×8) くり返せば，16,000 個の数字が全部えられる。Fisher-Yates は，このようにして得た数字例を，上述のように 50×50 の数字からなる 6ページに編入したのである。ところが，

9-1表 N, 66400—66500

N	log N				N	log N			
66400	82216	80793	68017	48947	66450	82249	49852	78750	80231
01	17	46198	98313	36767	51	50	15208	78691	46413
02	18	11603	30109	50872	52	50	80563	98280	56215
03	18	77006	63408	87938	53	51	45918	10521	05645
04	19	42408	98214	44624	54	52	11271	24415	90695
48	48	19137	65802	94643	98	80	85836	18509	76137
49	48	84495	71455	61652	99	81	51145	09911	99505
66450	82249	49852	78750	80231	66500	82282	16453	03104	59703

log N, 82216—82282

Tracts for Computers No. XVIII
Logarithmetica Britanica being a Standard Table of Logarithms to Twenty Decimal Places, Part VI. Numbers 60,000 to 70,000 Alexander John Thompson (1933年) による。

15,000個の数(a)字のうち各数字はほぼ同数回あらわれるべきはずであるのに，6が多すぎるということが——後述の χ^2-検定で有意性検定を行なったのち——指摘されたので，上のようにしてできあがった表のうちから，任意抽出で50個の6を選び，これ以外の9個の数字のいずれかをもって置き換えた。このようにしてできあがったのが有名な Fisher-Yates の表である。

これが乱数表と呼ばれるためには，それにふさわしい性質をもつことが示されていなければならない。それらの検定にも一応合格しているのである。

この乱数表を使用すること以外にも，いろいろの方法が考えられている。

任意標本抽出は，このように，自動的にとり行なわれるようになる。しかしとくに社会統計になると，これを実行するに当たって実は相当の困難の伴うことが覚悟されなければならない。第1に，母集団を具体的に確立しなければならない。標本抽出は，母集団があって，そこからの抽出なのである。ただ思いつきのままに，または機縁的にえらぶのとは違うのである。具体的にいえば，すでに述べたことから明らかなように，人口調査の場合，抽出単位の位置とかあるいはこれを形成する世帯ないし世帯の組の特性とかを示す名簿表なり地図

なりを必要とする。そうしてそれから抽出単位を，たとえばカードにして，これらのカードを抽出するということになる。これらの名簿表なり地図なりをつくるために費用がかさむのである。第2に，一旦抽出ときまったならば，それは，村はずれの一軒であってもいかなければならず，交通不便な村であっても旅費，時間，労力をいとわず出掛けなければならない。これを勝手に便宜なもので置き換えるということは許されない。なぜならば，そういうことを調査員が行なうようになると，偏倚を生ずるからである。また不在だからといって自分ひとりの判断で代用にどこかの家へいってそれですますということも許されないのである。以上のように考えてみると，任意標本抽出は，一見予想される程には手軽にできるものでなく，どうしてもその randomness を厳守しようとすると，経費もかさむのである。そこで一体信頼度はどれ程にして確保しなければならないかという点の検討，費用と信頼度との対立において標本設計が問題になる。したがって，上述のことにつけ加えて第3に，専門的な標本設計者（sample designer）の参加を必要とするということをつけ加えなければならないのである。

7.　抽出調査計画の例示

1943年アメリカの国勢調査局（Bureau of the Census）が労働力状況諸数を推定するため用いた方法は，国勢調査の抽出計画として，画期的なものであり，それは抽出理論の新分野の開拓を促進させるものであった。

アメリカでは1940年以来用いられていた抽出法があった。これは1939年度に，労働計画管理計画部（Division of Research of Work Projects Administration）によって初めて採用されて，大統領令により1942年9月以来上記国勢調査局で用いられたものである。この抽出法は失業問題が国家的な大問題として前面にあったとき，失業者数の推定を主眼としたものであって，全国失業者総数ならびにその変動状況を日々，しかも経費，時間も相当節約して，与えたものであるが，（i）第二次大戦の防衛および戦争計画の進行に伴い，標本

調査結果を利用する目的の重点が変わってきたこと，ならびに(ii)戦争の進行につれ，人口の分布状況に変化を生ずるような膨大な人口の移動があること，この2つの理由から，従来の抽出計画を更新する必要を生じたのである。

統計利用の重点は，(a)労働力の数量および構成の変化を計量すること，(b)農業，非農業別就業者数を求めること，(c)付加的労働供給源を調査することにおかれた。これは，戦時ゆえ当然である。

新抽出標本作成法を計画するに当たって要求された条件および制約は次のようであった。

(1°)　全国労働力統計として，毎月の失業者数，農業非農業別の就業状況を年齢別に与えること。

(2°)　一般の抽出調査としても役立つこと。

(3°)　既存の実地調査機関を利用すること。その組織は地方常勤監督者約60名を主体として，そのおのおのの監督者の指導のもとに5名ないし15名ずつの臨時調査員が働くというのであって，訓練は充分に受けており，調査の正確迅速な点で有能なことは証明ずみであった。

(4°)　実地調査機関を一度に新しい州に移すということを避けるため，既存の標本に含まれた郡の多くは，新標本でもなるべくこれを採用しなければならなかった。

(5°)　調査旅行を最少限にすること，迅速かつ連続的に行なうこと。

これらの事柄を前提において，この事態に当面してアメリカ調査局がいかに新標本作成法を計画したかをわれわれは Morris H. Hansen および William N. Hurwitz 両氏の報告から聞こう。けだし，他山の石として，わが国にとっても重要な指針を与えるものであろう。

【1】標本抽出法の全般計画　郡（county）どうしを比較してみると，産業の種類，雇傭活動状況，経済的水準等において，相当の差異のあることがまず注目される。上述の調査利用の重点(i)および(ii)からいえば，アメリカの各郡から必ず標本をとるというのが望ましい。しかし経費予算等の関係で，それが

実行できない。このため，採用した方針はすなわち**層別二段抽出方式**(Stratified Subsampling Method) である。すなわち第1段として，若干の地域（州または複州）を第一次抽出単位体(Primary Sampling Units)として抽出する。この抽出方式は，全国を州または複州を単位としていくつかの地域に分ける，複州（combined county）というのは後で述べる理由で，2州または3州を便宜上まとめたものである。これらの諸地域を分類して若干個の層にわける。各層から1個ずつの第一次抽出単位をとるというのである。第2段として，抽出された第一次抽出単位のなかから，それに属する居住単位若干個を抽出する。ここで問題になるのは，(A)第一次抽出単位は何にすべきか，(B)層別の基準の選び方，(C)第一次抽出単位の抽出方式，(D)居住単位の抽出方法，(E)標本調査結果からの推定方法いかんということである。

A．**第一次抽出単位体の設定**　アメリカには，約3,000の郡があるが，郡自体を第一次抽出単位体にとらず，場合によっては，2郡または3郡をいっしょにして複郡（combined counties）をつくり，単郡または複郡をもって，第一次抽出単位体としたのであって，その数約2,000であった。第一次抽出単位体というのは第一次抽出において抽出の単位体として考慮されるという意味で，候補というだけで，抽出されたという意味ではない。郡は，それ自身，貧富諸階級，種々の職業，農家非農家をふくむので，その内部は相当異質的なものであるが，郡どうしをくらべてみると，無論相当の差異はあるのであって，このため層別法（stratification）を用いなければならない。ところで，各層から1個ずつ，第一次抽出単位体をとるとなると，層別法の原理として，同一層に属する第一次抽出単位体は相互によく似ていること，すなわち等質性が確保されなければならない。しかもこの場合，層の個数としてはだいたい60以内にまとめなければならないという前述(3°)の制約があったわけである。このため1つの郡だけでは，これはまだ種々の差異点が多くて，60層内外にまとめることはできない。それで，必要に応じて複郡をつくり，単郡または複郡を第一次抽出単位体とすることによって，上述の2条件を指定することができたのであ

る。

B．**層別法の基準**　層別の目的はこのような点にあり，しかも層別に判断を利用することは，なんらの偏倚を導入することにもならないから，各地方についての知識は充分にこれを利用した。すでに述べたように，ある単位体を抽出標本のなかに入れるか否かに，判断利用を行なうならば，偏倚をひき入れ，理論の適用を不可能とすることはすでに述べたとおりである。層別における判断利用とは厳に区別すべきである。

層別法の基準としては，各層内の人口数が層ごとにほぼ同一になるよう，層別の境界をきめることに注意した。これは1つの層から1つずつ，第一次抽出単位体をとるためである。もちろん，このとき層内部の等質性を失うことは極力さけなければならないゆえ，層ごとに人口数ほぼ同一という条件の方は，それ程厳密には実行できないわけである。

層別の主要基準として，第一次抽出単位体をまず，次の4つの主要部類に分類した。

第1部類　12個の最大のメトロポリタン地区。これにはワシントンD. C. ならびにそのメトロポリタン地区を含む。

第2部類　ブロック調査市（block cities）の所在する第一次単位体にして第1部類に属しないもの全部。ブロック調査市というのは1940年の国勢調査において，市内部をブロックにわけて，市内の調査結果がブロックごとにまとめられてある市を指す。1930年の調査で人口5万以上の都市は全部ブロック調査市である。

第3部類　第1および第2部類に属するものを除いて次の条件をみたすもの。1940年の国勢調査で農業人口25％以下であった第一次単位体全部。なおこれに，1940年ないし1943年の間に人口の移入がきわめて多かったと思われる第一次単位体を加える。

第4部類　以上の3部類以外のすべての第一次抽出単位体をふくむ（1940年の国勢調査のうち3/4以上の農家および農村人口が，この部類に属する）。

次にこれら部類の層別について述べよう。

第1部類では，これにふくまれるもののうちニューヨーク，シカゴ等大小のメトロポリタン地区は人口が非常に多い関係上，なるべくはこれらの地区すべてを抽出したいのである。アメリカ全人口の1/5以上が第1部類に属する。各メトロポリタン地区は，それぞれ他の地区とは無関係に層にわける。

第2部類および第3部類を層別するに当たっては，これらは比較的都会的な部類である関係上，地理的位置，人口移出入の推定，工業労働力の比率等を層別の基準として採用したのである。とくに工業地区では，さらに精細に観察して，その都会の主とする工業が織物工業，製鋼業，航空工業，造船業等のいずれであるかによって層別した。また白人以外の人口の占める割合に関しての層別も考慮に入れた場合がある。しかし，これは地理的分類によって，大部分はコントロールできた。

第4部類は農業の型によって分類するだけで層別ができた。その方法は，アメリカ全体を農業地域として8地域に分類し，ついで各地域において，作物，収穫物の種類，人種その他によって第一次抽出単位体を層別したのである。

C．第一次抽出単位の抽出法　全国2,000個の第一次抽出単位体を以上のように層別したので，次には各層から1個ずつ第一次抽出単位を抽出する。それは任意抽出である。このとき，同一層内の抽出単位体が抽出される確率が相等しいという普通のやり方に対して，ここにも1つの進歩があった。それは，各抽出単位体の人口数に比例する確率をもって，抽出することにした点である。各第一次抽出単位体のなかの人口を比較すると，実際上かなりまちまちである。全集団についての平均については，人口数の多い第一次抽出単位ほど影響が多いわけであるから，この方がよいわけであり，これにより標本変動を小さくすることができるわけである。

Hansen および Hurwitz 両氏は，これを例解していう。

もし，第1，第2，第3の3つの第一次抽出単位体のなかから1つを均確的に抽出しようというのであれば，おのおのの抽出される確率は1/3であり，失

9-2表

第一次抽出単位体	人口数	失業率 %
第 1 番	60,000	8.0
第 2 番	30,000	6.0
第 3 番	10,000	5.0

業率%に対する答えとしては，したがって8.0，6.0，5.0のいずれしかないわけである。ところが人口数に比例して第一次抽出単位体をとるということになると，3単位体の人口総数10万で各単位体の人口数を割って，第1番，第2番および第3番おのおのの抽出される確率はそれぞれ0.60，0.30および0.1となる。したがって失業率%が8.0，6.0および5.0となって現われる確率はそれぞれ上述の確率にある。全人口について調査した結果としては，9-2表から7.1%となるべき失業率である。均確法では失業率%の平均値としては，8.0，6.0，5.0の単純相加平均として6.3であって，真値7.1との間に0.8の偏倚があるのに対して，人口比例法ではこのような偏倚は存在しない。

D．第一次抽出単位体内部における抽出法　ここでも新しい構想が採用された。それは，**地域抽出法**（Area Sampling Method）である。この方法は次のようである。

（i）抽出と決定された各第一次抽出単位体をきわめて小さい小地域に分割する（たとえばブロック調査市では，市をブロックに分ける）。

（ii）これらの小地域をいくつかの層に分類する。層別されたこれらの地域のなかから，若干個の小地域を抽出する。

（iii）抽出された小地域に対しては，その地域内全部の居住単位（dwelling units）を実地調査して，それのリストをつくる。

（iv）リストされた全居住単位のうちから，任意抽出法によって，若干個の居住単位を抽出する。ここに重要な点は，地域分割と地域抽出の外に抽出比率の採用ということである。これは各部分集団へ割当てる抽出体の個数を指摘するところの**按分割当数法**(Quota Method)に対して，各部分集団から抽出すべ

き比率を指摘するのである。たとえばある都市に適用される抽出率が2%ならば，次のようにする。まず10ブロックごとに1ブロックの割でブロックを抽出する。抽出されたブロックでは，ブロック内全部のリストのうちから5個の居住単位を抽出する。

按分割当数法においては，按分の割当数を決定するのには，以前の知識を援用しなければならない。ところが，上述(ii)という理由，すなわち戦時中の膨大急激な人口の移動を伴う社会事業情勢のもとにあっては，過去の知識による割当数は重大な偏倚をはらむ恐れがあるのである。

1943年以前の標本調査の場合の経験からみると，各第一次抽出単位体で1,000人ないし1,500人程度の人を毎月調査するのが，1人の監督者と数名の臨時調査員の仕事としてはちょうど手頃で，それでも相当の作業量である。この程度の調査ならば，新標本作成法のときにも可能であり，かつ資金もさしつかえなかったのである。

各第一次抽出単位体から特定数を抽出するように割当数をきめておかないで，ただ抽出比率だけを決定しておくという点が重要な点で，新しい構想である。たとえば1940年に全人口18万人あたり1,200人を抽出調査したとすると，抽出比率は150人に対して1名の割合であり，この抽出比率を1943年の調査でも採用するということになれば，人口数がその地区で増加しているか減少しているかによって抽出する人員数は自然1,200名より多く，あるいは少なくなるのである。これによりその地区における人口の移出入をも反映させることになるのであって，この点が当面の目的達成上きわめて重要である。もう1つの新しい点は，**副次層別法**（substratification）の仕方にある。従来一度ある第一次抽出単位体が抽出されると，それの内部からの抽出では，せいぜい抽出された当の単位体自体をよく代表させるという点に主眼をおいたようである。しかし抽出された当の単位体自体ではなくして，その単位体の所属した層自体をよく表現するようにくふうして，抽出された単位体内部の抽出を決定すべきであろう。

9-3表

第一次抽出単位体	総人口		副次層A人口		副次層B人口		副次層C人口	
	実数	比率	実数	比率	実数	比率	実数	比率
第1番	50,000	100	27,500	55	10,000	20	12,500	25
第2番	35,000	100	10,500	30	7,000	20	17,500	50
第3番	15,000	100	6,000	40	6,000	40	3,000	20
層全体	100,000	100	44,000	44	23,000	23	33,000	33

A＝1940年農業人口率10% 以下の国勢調査単位地域の全部。
B＝1940年農業人口率10～60% の国勢調査単位地域の全部。
C＝1940年農業人口率60% 以上の国勢調査単位地域の全部。

Hansen および Hurwitz は9-3表の模型例をかかげている。

さて層全体が上述のような構成の場合に，この層から第2番の第一次抽出単位体が抽出されるということになったとする。そうして1943年には1,000名を，この第2番単位体から抽出することになったとする。1940年にはその人口は3万5,000人であったから，抽出比率は1/35である。そこでA, B, C各層に対してこの比率を適用すると，Aから300人，Bから200人，Cから500人の割合で抽出することになるのであって，もちろん人口の移出入により自然的に，この人員数に動揺があるのは，配当数法でないから当然である。しかしそれにしても，層全体におけるA，B，Cの百分比率44，23，33とは相当の距離のあるのはまぬがれがたいところである。この百分比率は1940年のそれであって，1943年の百分比率ではないとはいえ，たまたま抽出された第2番第一次抽出単位体の忠実な描写をつくることが，われわれの本来の目的でないことを銘記しなければならない。

そこで新しい方法では次のように処置する。1943年標本においてだいたい1,000名からなる標本をつくることを目標にするのだから，1つの層から抽出される抽出比率は1%である。そこで1940年度の層全体の人口においてA, B, C各層に1,000人を割当てると，A, B, C から各440人，230人，330人，抽出すべきことになる。そこで第2番第一次抽出単位体についていうと，

$$\text{副次層A内部における抽出比率}\quad \frac{440}{10{,}500}=4.2\%$$

$$\text{副次層B内部における抽出比率}\quad \frac{230}{7{,}000}=3.2\%$$

$$\text{副次層C内部における抽出比率}\quad \frac{330}{17{,}500}=1.2\%$$

ということになるのである。これだけの比率で，各副次層から抽出した方がよい結果になるであろうと予想されるのである。

E．**推定方式**　これは当然次の公式を採用する。

$$\text{全国推定値}=\sum\frac{1}{\text{当該層における抽出比率}}\times\left(\begin{array}{l}\text{当該層における}\\\text{標本調査結果}\end{array}\right)$$

ここに和は，あらゆる層についての総和を意味する。

X_k＝第 k 層に対する標本における調査結果による労働者数

r_k＝第 k 層内部における抽出比率

$$W_k=\frac{1}{r_k}$$

とすれば

W_kX_k＝第 k 層全体における労働者数の推定値

$\Sigma_k W_kX_k$＝アメリカ全体の労働者数

これは，k に関する和にはすべての層にわたる和を意味する。

この推定において，総和自身よりも，比率または平均の方がより信頼度の高い推定値を与えるという事実を使用すれば，改良の余地がある。それには，標本から上述の方法で得られた労働者数と，同一の方法によって同一の標本から得られた人口数との比率を求める。一方，アメリカ全体の人口は，他の資料ですでに知られているとすれば，この比率を利用することによって全国労働者数の推定を行なう方がよいであろう。

実際に用いた推定方法は，男女別，10 歳別年齢階級のおのおのに関する人口総数を利用することで，これにより，これらの人口階級における労働者数の

推定値をもとめ，これを総和して全国の総労働者数を求めたのである。

このようにして得られた推定値の信頼度はどれほどであるか。標本分布に関する変動係数百分率をもって示すならば，全労働者数においては男子0.5，女子2.0；雇傭数においては男子0.8，女子2.2；農業労働者数に関しては男子2.8，女子10.9等として報告されている。

この労働力調査の標本は，さらに他の推定にも利用されている。すなわち消費物資の民間需要量，世帯の食料消費高，小売商業に関する諸数等がそれである。

8.　按分割当数法と地域抽出法（標本作成法の最近発展の一傾向）

従来，有目的的標本作成法として最も重要な役割をはたしてきたものは，比例法（Ratio Method）または按分割当数法といわれるべきものである。これは，調査の管理および実施上容易であること，とくに世論調査では他の標本抽出法に比較して顕著な成功を示したという事実等によって，現在では有目的的標本作成法といえば，すぐにこの方法を連想する人が多いことであろう。ところが，第二次大戦の経験は，標本について画期的な進歩をもたらした。その一端はすでに前節で紹介したとおりであるが，ここでは前節でも述べた地域法について比較しながら説明を加えておこう。

【1】按分割当数法（Quota Sampling Method）　まず按分割当数法の原則ともいうべきものを述べよう。それは標本作成法の線に沿うものであるが，次の(2)および(4)の点においては特殊化されている。

(1)　母集団のある若干の特性（因子）を選択し，これを以下に述べる意味で照準（control）として使用する。

(2)　母集団を上述の特性（因子）に関して分割してみるとき，その構成比率が決定されているものとして前提する。この構成比率は，過去の経験により既知とされる場合，推定による場合，あるいは単に仮定された場合等いずれであってもよい。

(3)　標本は，母集団の構成比率と一致するような比例関係において抽出することにする。

(4)　標本の大きさが前提される。したがって，母集団の各因子群からとるべき標本数が決定される。各調査員の分担すべき割当数（Quota）が決定されている。

有名な例をあげよう。それはアメリカの世論調査において発達したものである。アメリカ世論調査研究所（American Institute of Public Opinion）のGeorge Gallupはいう「2頭でひける馬車を50頭つけてひくことは無駄である」と。Gallupの考えによれば，人口層の研究や社会層の研究を土台として全人口を仔細に分析すると，層化法の因子となるべきものは，(1°)州による区別，(2°)性別，(3°)都市農村の分布，(4°)年齢，(5°)収入の大きさ，(6°)政党の勢力，なのである。たとえばGallupは，イリノイ州の社会構成を次のように因子群につき規定しておく。

1.　地理的なもの

　シカゴとその郊外住民 51%；農村人口 11%；小都市人口（2,500未満）10.5%；人口(2,500 以上—1万まで) 13%；人口（1万—10万まで）14.5%

2.　経済関係

　引退者 17%；養老年金受領者3%；貧者（年収600—1,100ドル）11%；中産階級（1,100—2,500ドル）55%；上層階級（2,500—6,000ドル）14%

3.　年齢

　(21歳—29歳) 23%；(30歳—49歳) 48%；(50歳以上) 29%

4.　性別　男57%；女43%

5.　人種　白人96%；黒人4%

6.　政党関係　(a)シカゴ市および郊外：民主党64%；共和党36%(b)その他の地域：民主党54.5%；共和党45.5%

最近まで近代的な世論調査はすべてこの種の按分割当数法にもとづくもので

あった。わずか2,000ないし5,000票の調査票をもとにして，3ないし4％の限度内の正確度で世論調査を，週に3回行ない，多種多様の国家的な大問題に対して世論の動向を把握し得る段階にまで，発達しているのがアメリカ等における現状である。1936年の大統領選挙予想で50万ドルの巨費を用い，全国に1,000万票を発送したといわれるLiterary Didgestの調査は，実際，選挙における票数の差20％にもおよんだのに対し，GallupはRoosebeltに得票率54％の予想を下し得た等々，多くの成功をもって有名である。

しかしながら，理論的な見地からすれば，この種の按分割当数法には2つの弱点が理論上あるわけである。第1に，按分割当数を決定する場合には，以前の国勢調査の結果，その他の統計資料をもとにした推定法を利用しなければならない。ところが，社会状態，経済状態に激しい変動の起こった時期，たとえば恐慌期，戦時中などの場合には，このような推定をもとにしての割当数の決定は，現状の切断面として不適当であって，現状の比例関係を示さず，そのため重大な偏倚を生ずる恐れがある。そのような割当数を押しつけるのは，標本にかえって悪い照準をつけることになる。第2に，調査の成否が実地調査員に依存することになる点がこの方法の欠点である。実地調査員が職務に忠実でない場合は論外として，いくら忠実であったとしても，割当数をみたしていく際に，幾分自分に都合よいような標本をとる傾向を生ずるのは，なかなか避けがたいことである。このような偏倚を減少させる方法もないわけではないが，全然のぞくわけにはいかない。つまりこの按分割当数法では判断利用が2回にわたって加わってくる。第1に，未知の精度をもつ推定値にもとづいて按分割当数が決定されること，第2に，面接調査員が応答者を選ぶ際に個人的な判断を加えること——すなわちこれである。

按分割当数法のた標本結果が，はたして全人口の縮図として代表的であるか否かを調べるのには，たとえば上述のような因子群についての割当数が按分されたとすれば，そこで考慮されていない他の因子についてみるのである。たとえば電話所有者数の全人口に対する比率と，この標本におけるこれの割合とを

比較してみるという方法があるわけで，両者が一致すれば，この因子に関するかぎり代表性は認められる。しかし，ここに注意すべきことは1つの因子について縮図として，代表性があっても，他の因子に関しては，かならずしも保証はされない。読書習慣の調査において，上述の因子のうち，年齢，性，人種，収入状態も重大な因子であるが，教育程度という因子に関して縮図性がよく保存されないとこの調査は不成功におわる。

アメリカは，第二次大戦初めは月別労働力調査にこの按分割当数法を用いていた。そこでは，最近の国勢調査を利用して，田舎と地方とにいかに調査票を割当てるかをきめてきた。どの世帯へ面談に行くかをきめるのには客観的な方法が用いられた。ところがこの過去の知識と判断とにもとづくこの方法が完全とはいくまいが，多分大した間違いをひきおこすこともなかろうとの予想に反して，実は意外なほどの失敗をした。この間，1か年ないし2か年の間，農業雇傭数は，依然としてほぼ一定の水準を保っているだろうと推定されていた。ところが偏倚のない，すなわち不偏な標本を新しく導入してみると，驚くなかれ，実は 20% も下がっていたのであったという。ここでも批判されるべき通念がある。ある種の問題においては，層別法がある種の比率の計算上どうしても必要であるという通念は間違っている。また層別法をほどこしさえすれば，信頼度の高い標本がえられるというのも間違っている。上述のように判断利用を調査単位の採否の最終段階において行なうものであるかぎり，按分割当数法は，ただ近似的な結果であればよいとか，多少推定の誤差があってもさしつかえないとかいうときに用いられるべきである。しかしこと国家的な，あるいは国際的な大問題に関する場合は，たとえ判断利用に依存する方法より経費がかさんでも，信頼度の高い方を利用しなければならない。

【2】地域抽出法(Area Sampling Method)　前節においてすでに具体例について説明した。この方法では，按分割当数法とは違って，人口集団の特性に関しての知識に，研究者は依存しないですむのである。これは社会的変動期には，きわめて必要なことであって，人口の移動などが，自然に反映されるとこ

ろに，この方法の利点がある。次に抽出単位として地域を用いるということは，個々の調査単位でなくして，いわば，1房の調査単位をいっしょに抽出することである。そこで利用できる知識，資料を活用するのは，この調査房ともいうべき地域を抽出するに当たって最も有効に用いるべきものである。これらは理論的にもいちじるしい発展がアメリカにおいてもたらされている。

これらの理論に比較的早く接することができたのは，先般来日されたアメリカ予算局 E. D. Deming 博士の好意によるものであるが，同氏はかつて，地域抽出法と按分割当数法とをきわめてわかりやすく説明されたことがある。これをさらにやさしく紹介しておこう。

9-1図のような小地域が10個所あって，その中に書き入れた数字はそこに住む住民数であるとしよう。総人口数は，10地域全部悉皆調査すれば，200人

20	15	25	20	20
15	20	20	25	20

9-1図

となる。ところで，10地域でなくして2地域だけ調べて，その2つの地域の人口数の和を，10/2すなわち5倍して，全地域の推定値としたらどうなるであろうか。このような場合には，一番少ない推定値は $(15+15)\times5=150$ 人と出るし，一番多い場合には $(25+25)\times5=250$ 人とも出るのである。しかし200人という答えが得られる場合もある。今2地域をでなくして地域を逢機的に抽出すればどうであろうか。$n=10$ ならばもちろん答えはただ1つしかない。n を大きくすればするほど，よい推定値，すなわち真の人口数200人との差の少ない推定値が得られる確率が多くなることも容易にわかる。一般に，総数N地域のうちから n 地域抽出した場合に，これにもとづく1地域あたり平均値の推定値は，いろいろの値になるが，その分散（標準偏差の自乗）はどうなるか。

これをVとかくと，

$$V=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

ただしここにσはこれらN地域の人口数相互間の標準偏差である。上例についていうと，N=10 であり，

$$\tilde{x}=\frac{1}{10}(2\times15+6\times20+2\times25)=20$$

$$\sigma^2=\frac{1}{10}(2\times(15-\tilde{x})^2+4\times(20-\tilde{x})^2+2\times(25-\tilde{x})^2)=10$$

したがって，9-4表が得られる。このVが小さいほど，標本の信頼度が高

n	V/σ^2	n	V/σ^2
1	1.0000	6	0.07474
2	0.4444	7	0.04762
3	0.2592	8	0.02727
4	0.1666	9	0.01234
5	0.1100	10	0.00000

9-4表

い。上式からみるように，Nとσ^2とが与えられる時には，nが大きいほど，Vは小さくなる。このことは，9-4表が数値的に示している。

この公式は従来から知られていた。ところで，Vそれ自身を小さくするにはnを大きくするのも1つの方法であるが，σを小さくするのもまたたいせつな方法であるといわなければならない。それは具体的にはどういうことになるかというに，けっきょくは，地域をわけて，ほぼ同一程度の人口にすることである。地域抽出法の1つの原理は，適当な地域分割法によりσ^2を小にすることであるといえる。

付記： Sample の訳語として，標本と試料とがある。本章の説明に即していえば，標本といえば，感じは典型的，代表的という点に重点があって確率原理からみるとふさわしくないし，他方，試料といえば，抽出操作を明示しているわけで，方法論

的に明快であり，確率原理からはこの方にしたいところである。ただ発音の上では，資料（data）と同一になるのが，試料の欠点であるし，官庁統計の Sampling survey を試料抽出調査と訳して一般の人びとを納得させるのには，なお相当の段階を経ていかなければならないのが現状であろう。したがって，現在ほとんどすべての場合，標本抽出調査といい，sample を標本という慣用に対して，私はとくに異を立てるつもりはない。実をいえば，数年以前この訳語の決定を討議したとき私も標本を主張した１人であった。しかし字面としては試料には捨てがたいものがあり，工業技術者の側では試料でなければピッタリしないかと思われる。そうしていつしか試料と書き慣れた自分を見いだした。今の場合，方法論的な見地を強調するためもあり，原稿のそのまま試料として置く。これだけの弁明から，とくに異を立てるものではないことをくみとっていただきたい。

付記：（1968年３月）新版では試料をやめて標本にした。

第4編　近代統計学の構造

第10章　確率論の公理

1.　数学的存在の意義

近代統計学の基盤を前編においてたずねてきたわれわれは，ここで立ちどまって，近代統計学の理論的構造を，素描にしても，描き出してみたいと思う。この理論的構造の支柱となるものは，1つは Kolmogorov 等の樹立した近代の確率論であり，他の1つは Fisher, Neyman, Pearson 等の建設した近代数理統計学である。しかもこの2つの部門の関係としては，後者の基本概念が前者により基礎づけられている関係にあると見なされることは本章および次の章で詳しく説くとおりである。それで，近代統計学の理解は何よりもまず，近代確率論のそれにもとづかなければならないという事情にある。

確率論はいうまでもなく数学の1つの部門である。したがって，統計学における確率論の意義を明らかにするためには，一般に数学的存在の意義，科学の研究における数学の援用，あるいは数学的方法というものの理解を前提とするであろう。とくに今の場合，その必要は切実であるといわなければならない。というのは，近代統計学の数学的方法を基礎づけるために，Kolmogorov 等の導入した確率論の公理体系が最も適切な体系であるとわれわれは考えるものであるけれども，この見解に対しては，かならずしもすべての人びとの同意があるわけではない。論理的に洗練された頻度説をもって確率の概念を基礎づけようとする Mises 等の主張を固持する学者も，一部にはなお存在するのである。また確率の直観的意義に重点をおく Keynes の流れもあるのである。そうした事情にあるから，統計学の現在の段階では，コルモゴーロフ確率論の公理体系が優秀である，と主張するためには，そもそも数学がどういう意味をもつもの

かを，反省しておくのがこの際必要であり，かつ便利である。

数学とは何か。これに関する代表的な論説を聞いてみよう。およそ，数学のいかなる分野も，それが数学であるかぎり，その形式的な論理構造は，次の点では一致している。すなわち，まず若干の公理の集まり，すなわち公理系を設定してこれを明示する。この公理系から，形式論理の助けによって，種々の命題，すなわち定理を演繹する。ある数学分野の内容というものは，この公理系と，これより論理的に演繹された諸定理の，多少とも組織化された命題集にほかならない。しかもこの諸定理は，証明を伴って初めてその存在が認められるものであり，証明は，より基本的な命題から演繹的に導き出すことによって定立されるものであるから，これを逆にさかのぼり，たどっていくならば，ついには証明されず，演繹されない根本命題に到達するのが必然である。この根本諸命題が，その体系における公理系にほかならないのである。このようにして公理は証明されないもの，あるいは証明を要しないものであるけれども，古代におけるユークリッド幾何学の公理系と，近代における Hilbert の「幾何学の基礎」の公理系とを代表にとってみれば明らかなように，近代と古代とでは，公理の理解において重要な相違があることは，周知のとおりである。すなわち，ユークリッド幾何学のそれにおいては，公理は，自明のものとして，その明証性のゆえに，その真理性が保証されるものと考えられた。これに反して，Hilbert の公理主義では，公理に対してはその証明性をもって存立のための必要条件とも充分条件とも考えないし，その真理性をも要求しない。ようするに，数学の体系は，もしかくかくの公理系が成り立つものとすれば，かくかくの諸定理が成り立つということを主張するところの，形式的仮言的な演繹体系であり，それはいわば可能的な形式的関係および性質の普遍的な理論である，と解釈される。数学的なものは，思惟一般の形式的な内的構造を対自的に形成するものともいわれる。それゆえ近代数学は，真理性を問題とせず，整合性を問うものであるといわれるにさえいたったのである。このようにみていくかぎり，この演繹体系の無矛盾性が，まず論理的には，第1の関心事となるのは当然であっ

て，矛盾的な演繹体系は，数学としては自己否定であり，その存在は許されないものとなることはもちろんである。数学内部における不抜の論証性こそ，その生命であるといわなければならない。このような理解が多くの人びとの間に行なわれている。

形式論理の立場から，数学の構成は以上のようであるのに相違はないけれども，ただこの立場からのみみるだけでは，数学の全面的な理解には達し得ないものとわれわれには思われる。それでは既存の数学の形式論理を追って数学の1つ1つの命題をためしてみるということしかできないのではなかろうか。数学の生成と発展とを理解し，実践しようとするとき，われわれにとって問題になるのは，数学において，いかなる公理系が選定され，定立されるのであるか，また選定された公理系からいかなる定理を導き出すことに意義を認めるか，これらの諸点の省察でなければならない。いいかえれば，公理系の設定という出発点のあり方と，定理群の導出という進行の道程とが，何を基準として意義づけられるかという問題である。それらは明らかに，無矛盾性だけからは与えられるものではないのである。

数学の基礎にふれるこの種の問題を考えるに当たって，徹底的に議論を進めるには，この問題に対する妥当な理解とはいかなる資格をもつものとして規定されるかを，まず明らかにする必要があると私は考える。ここに妥当な理解とは，単なる記述解釈をさすのではない。妥当な理解という意味は，数学の歩んできた進歩のあとから，進歩の要因を帰納し，したがってまた，将来の数学を発展させる方向を見定め，方針を指定し得るものでなければならない。ある見解に立って数学を解釈することが問題なのではない。数学を生産し，変革し得る見解を把握することが問題なのである。このような意味では，数学の発展を歴史的にあとづけるところの史的考察のための資料が充分に用意されなければならないであろうし，要因をつきとめるためには，数学の全分野の相互間の関連と，数学以外への応用と，さらに進んで数学を生み出した物質的社会的基盤，さらにはそのイデオロギーまでを究明しないかぎり，充分ではないであろう。

このようなことは，もちろん充分な用意によってのみ始められるものである。しかし今ここでは，おおよその見当をもとにして，若干の観点からの素描を示してみたいと思う。

まずわれわれは，数学と道具（ならびに機械）との関連を明らかにし得る立場に立たなければならないであろう。数学の意義は，人間生活を離れてはとらえられないのであって，根本的には人間を理解することのうちから，にじみ出てこなければならないであろう。そうしておよそ人間を理解するためには，他の動物と比較して，その相違点を根源的にきわめることが肝要であろう。この相違点を発生的に追いつめてゆくことにより，人間と動物とを永遠に分離する考え方から脱却し，人類の進んできた幾億年の進歩の歩みの歴史を跡づけ，過去の見失われた進歩の跡をおぎなうことによって，やがては，未来の進路が示される。それはすなわち変革の原理を示すものでなければならない。

人間を他の動物から根源的に区別するものは言語と道具との使用であり，知性の発達である。しかも，これら三者の発生間には，厳密な対応があることは，言語学，考古学ないしは社会学のおよそ一致した意見である。しかし，この事実は次の厳然たる真理を，一応前提とするかぎり怪しむにたりないであろう。いわく「人間の意識は，生産道具が本質的役割を演ずる人間社会の生産過程の反映である。」この命題の妥当性を，われわれは史的考証の裏づけによりさらに検討することを必要とし，今までの研究をもって充分とは考えないのである。けれども人類進歩の跡を一貫して引ける第1の傾向線として，この命題は動かしがたい真理をもっていることは何としても否定できないように思われる。

(1)　まず数学の媒介性を理解する必要があろう。道具はもと器官の，くわしくいえば労働器官の投射といわれる。投射であるがゆえに，道具は主体から離れた対象的存在となるのである。しかもそれは人間がある目的を実現させるためにつくったものである。道具をしてその目的を実現させるには，ひとは一定の仕方においてのみこれを外界と関係させなければならない。一度この仕方で外界と関係させるとき，道具はその目的を達成する。このようにして道具は客

観的世界における現象のうちから所要の現象関係を分離，抽出し，それを再構成する手段を提供する。簡単にいえば「人間は自然の直接的な変化からしりぞき，自然から抽象した関係を定立することによってまず自然を変化させる道具をつくり，そうして次にこの道具を用いて，自然の直接の目的に帰っていく」のである。

人間知性の認識においても，この道具が反映されているのであって，「自然の直接的な認識からしりぞいてまず概念をつくり，次にこれを用いて一層深く，一層完全に物の本質を把握する」のである。数学的方法のいわゆる経験科学における役割もまた，この関係と同様である。すなわちその特徴の1つは，生産における道具のように媒介的な点にある。これをかりに標語的に表現すれば次の比例式となるであろう。

生産：道具（機械）＝認識：概念＝経験科学：数学

「理性は権力的であるとともに狡智をもつ。この狡智は主として媒介的活動——諸対象をこれ自身の性質に従って作用し合ったり引き離し合ったりせしめて而してみずからはこの過程に介入せず，かくして己れの目的をのみ遂行するところのうちに存する。」(Hegel)

(2)　次に数学の論証性を機械と類比してながめてみよう。数学の論証性を強調するとき，われわれは，道具よりもむしろその発展形態としての機械と類比してみる方がより適切であろう。数学が今日公理主義の理解するような形式的仮言的論理体系として特徴づけられるまでには，歴史的にはこれに先行する幾多の段階を経たわけである。たとえばギリシア以前の数学のように，学の形成にまで結晶していなかった数学的認識もあったし，和算のように相当豊富な内容をもちながら論証を欠いたものもあった。それらは，たとえていえば道具ではあっても，機械ではなかったのであろう。しかし，今日の数学各分野の構成全体は，機械体系としてこれをみるときよくその本質をつかみ得るであろう。

機械は典型的には原動機，配力機，道具機の三部分より構成される。その原動力は，たとえば配電室の中心スイッチ1つによって起動され，この単純な一

個の動作が自動的機械体系の自己運動の全体を開始させ，継続させる。機械は生産的労働過程をより客観化し，かつより物質的な組織体へ転化させるものである。機械体系はそれ自身の機構により技術的な合法則性をもつ。

数学の近代的形態はまさに機械のもつこの自動性，組織性，客体性，合法則性を反映している。数学の体系の特徴には公理が与えられるかぎり，それに加わるべきものが論証により演繹されて，異物的な存在を加えないところにある。

数学のもつこの論証性こそ，認識における形式的モーメントをもっとも純粋にしたものである。認識はこの形式論理的なモーメントをとり去っては，成立不可能である。それと同様に数学の論証性こそ正にその生命である。

(3)　さらに進んで，数学の弁証法的発展を説かなければならないであろう。およそ目的のない道具，機械が存在しないように，数学の各部門の体系は，本来，それぞれ固有の認識目的をもつ。この認識目的は，その数学部門自身にとっては外から与えられたものであり，数学の各分野は各自の目的を達成しようとする手段である。一定の段階において，目的とする対象の新たな性質が数学以外の方面から発見され，それが数学内部では演繹されないものとして，既存の公理系の改変を要求するにいたっては，この数学の妥当性は破れざるを得ない。数学の既成分野と認識対象とは矛盾におちいる。このとき，われわれは数学のその分野の再編成，あるいは新分野の構成をもって対処しなければならない。それは，新たな公理の導入，もとの公理の改廃等の形をとる。このようにして矛盾は止揚され，数学と対象とは，より高い段階で総合されるのである。数学の各分野を発展の各段階について立ち止ってみるならば，それは形式論理により組織された演繹体系であることに相違はない。もしそうでなければ，それは数学ではない。しかし，数学の発展の道程そのものをたどるならば，それは形式論理により跡づけられないものである。数学以外より与えられるものが根源的に存立する。それは一度出発点をきめれば形式論理をもって，どこまでも限りなく進んでいけるもの，進んでいってよいものではない。進んではもど

り，もどっては出発点を改めて進みなおす，ということをくり返す。けれどもそれは単なる試行錯誤法ではない。ある進みなおしは，それより以前の経験を止揚しているのである。

しかもこの進行の過程は終結点をもたないのである。次第に深刻に，より完全に，目的対象に接近しつつ，しかも到達しきるときはないのである。

(4)　ここに数学的認識の段階性を指摘する必要があると思われる。数学的存在は多くの数学者にとって数学研究の動力となるものであって，この事実は，数学を機械と類比するような見方とは，およそ対称的に相いれないもののように，一見思われるであろう。数学的存在は，人間の思惟により構成されたものには相違ないけれども，民族をこえ，時間空間をこえた普遍性をもち，しかもそれが関係の理論以上のあるものをそなえる，との感じをいだき，それゆえに多くの数学者が生涯をささげて，先人の業績の上に学問的な所産を積み重ねて今日にいたっているともみられる。

この現実の事実を直視し，これを理解するには，われわれは，数学的認識の集積過程における段階性に注意することが必要であろう。泥状のようなものを積み重ね積み重ねて時日を経ていくならば，底部の方から化石化していき，それらは，上部とはおよそ似ても似つかぬ，たとえば黒ダイヤのような黒光りする「壮厳」なものとなるであろう。数学の世界においても，このような段階があるのであって，数学における１つの理論体系は，それをささえる既成の数学体系が背景にあって 初めて 存在の意義または 可能性をもつ。既成の数学体系は，ある新たに生まれようとする数学体系にとっては，相対的にいって客観的存在であって，研究のメスを加えるべき当の対象目的となり，新体系はこの対象を研究するための仮説の提出，ならびにその展開という意味になる場合もあるのである。

たとえば，実数は有理数の切断として定義される数学的存在であるが，近代の位相空間論は，この数学的存在を研究するために，種々の公理系により構成された種々の位相空間の型を提示し，すなわち種々の仮説を提出してみずから

を展開することによって，相対的にいって客観的存在たる実数を究明しつつあるともみられる一面をもつのである。実在に対しては，仮説的存在を対応させ，後者の論理的展開から，より一層深刻に実在を把握しようとするのであるが，数学の発達した今日においては，実在とは，かならずしも経験世界の対象のみを意味しないのであって，数学的存在自体が，より高度の研究のためには所与の対象であり，そのかぎりでは実在的存在である。またそのかぎりでは，数学的存在は，相対的には仮言的な存在ではないとして思惟にのぼるのである。数学の世界内部における数学的認識の相対的位置関係を理解することによってのみ，種々の奇怪な数学公理系の存在が，生理学の研究手段としての病理学的研究と類比される意味をもつことの意義が理解されるのである。

2.　古典確率論の論理構成

確率論を幾何学のように，公理論的に厳密に再建するための公理体系が，ソビエトの A. Kolmogorov によって提示されたのは，1933年のことである。それ以来，現代確率論は，この公理系の基礎のもとにその全理論を展開する方向に進み，古典確率論の全成果をそのうちに含むばかりでなく，さらに進んで，古典確率論の方法では論じられなかった問題の形式化，ならびに解明にまで論及している。確率論のこの近代化は，方法的には，何よりも，Kolmogorov等の設定したこの公理系の適切なことに依存しているのは見のがしがたい事実であって，ここに Kolmogorov 等の不朽の功績を認めなければならないであろう。

Kolmogorov の公理系では，確率論をその上にうち建てるべき公理を，徹底的に形式化し，抽象化している。それは一言でいえば，「確率とはルベグ測度である」ということである。やや詳しくいえば「確率とは抽象空間の上の完全加法族に関して定義された負にならない実数値完全加法的集合関数である。」これらの用語にもみられるように，この公理の表明には集合論，測度論の発達を反映しているのである。

しかし，数学では前節に述べたように，その抽象性，その形式性は，数学のもつ媒介性と弁証法的発展とを通じて初めて真相を理解されるべきものである。それゆえに，まず古典確率論の論理構成をここに再検討してその本質を摘出し，照明することが必要となる。

まず第1には，確率といわれるものの資格基準を反省してみよう。

さきに第2章では，事象即集合とみて，事象に関する論理的操作と集合に関する集合算とを対応させることにより，古典確率論が記号的に簡単に表現されるということについて注意した。しかし，古典確率論では，確率論の対象としての事象はどの範囲まで考えるべきか，すなわち事象の集団をどのように規定したらよいかという点について，明確に考えていなかった。そもそも事象を集団化するという理念が明瞭に自覚されていなかった。とすれば，集団はどのように規定すべきであるか，この点を明らかにするには，確率論自身の内容（成果）に立ち入ってみるよりほかはない。すると確率論という数学のになっている任務は，ようするにある種の事象の確率が確定したものとして与えられるとき，これらの事象に関連する事象についての確率を求める（演繹する）ことであるといえよう。この任務をはたすためには，所与の事象に関して論理的操作をほどこして得られる事象の確率は，少なくも原理的には当然決定されるものとしておかなければならないのは当然である。このような事象の集団を考えるならば，日常の論理を取り扱うかぎり，当然次の条件を満たすべきものとして要請されなければならない。すなわち，その集団に属する任意の2つの事象については，両事象の論理和である集合，論理積である集合は，いずれも集団に属するという要請がそれである。これが第1の観点である。

次に第2の観点から考えよう。確率というのは，いうまでもなく，ある事象の生起する確率である。上のように事象即集合とみるならば，上述の集団に属する事象に対応する集合については，値が決定されている集合関数であるべきである。ところでこの集合関数が確率をあらわすためには，当然その値は実数であって，負にはならず，1を越えない，という性質をもつべきである。この

要請のほかに，確率としては加法定理および乗法定理が成り立たなければならない。したがって，当面の集合関数はそれらを満足するようなものでなければならない。これが第2の観点から与えられる要請である。

第3の観点として，古典確率論の対象を，起こり得べき事象が有限個の場合とそうでない場合とに分けて考えよう。たとえば6個という有限個の起こり得べき場合しかもたないサイコロをn回という有限回数投げるという試行では，起こり得べき事象は $6\times 6\times\cdots\times 6$ （n回の積），すなわち6^n しかないわけであって，これは前者に属する。これに対してすでに述べたように幾何学的確率論は，一般に後者の場合に当たるのである。

前者，すなわち有限の場合に関しては，確率といわれるべきものがいかなる資格基準を満足しなければならないか。以上3つの観点からの要請を考慮に入れるとき，これに対する解答が，次のように形式化されても不思議ではないであろう。それは無用の具体化を捨てて，抽象空間において所要の要請を満足するものとして規定することにほかならないからである。これを公理化して述べよう：

公理Ⅰ. $\mathfrak{F}$はある抽象空間Ωに属する集合によって形成された集合族である。すなわち E_1, E_2 がともに $\mathfrak{F}$ に属すとすれば，和 E_1+E_2，積 E_1E_2，差 E_1-E_2 はいずれも $\mathfrak{F}$ に属する。

公理Ⅱ. Ω自身$\mathfrak{F}$に属する。

公理Ⅲ. $\mathfrak{F}$に属するいかなる集合Aに対しても，ある負にならない実数P(A)が対応する。この値を事象Aの確率という。

公理Ⅳ. $P(\Omega)=1$

公理Ⅴ. A，Bがともに$\mathfrak{F}$に属し，かつ両者の共通集合が空集合であるならば，

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{1}$$

この5つの公理から，ある集合が$\mathfrak{F}$に属すれば，その余集合も$\mathfrak{F}$に属するということになるし，また確率の値は1を越えないこともわかる。この5つの公

理により規定されるとき，これを確率空間であるといい（Ω，$\mathfrak{F}$，P）であらわす。公理Vは2つの集合の和に関してであるが，一般に，$A_1, A_2, \cdots$，A_n がいずれも$\mathfrak{F}$に属し，それらの任意の2つの共通集合が空集合であるとすると，

（2）　$$P(A_1+\cdots+A_n)+P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

が成り立つことも容易に示される。この意味で公理Vは有限加法性の公理という。

起こり得べき場合の数が有限個であるときに，特徴的なことは適当に有限個の事象（集合）を選ぶと，それらの事象（集合）の任意の2つは相排反（積が空集合）であって，しかもその体系において考えられるあらゆる事象はこれらの事象の有限個の和として表現されるという，基本事象系の存在することである。たとえば，サイコロを3回投げ，第1，第2，第3の各回に現われた目が i, j, k であるとき，この事象を $B(i, j, k)$ で表わす。i, j, k はいずれも1から6までとりうる。そういうものが $6\times6\times6$ 通り，すなわち216通りある。これによって起こる事象は，この216個の $B(i, j, k)$ のうちの適当なものを選んでそれらの和として表現できる。この場合，216個の $B(i, j, k)$ がすなわち基本事象系をつくる。

確率論の発生形態から進んで幾何学的確率論にいたるならば，もはや起こり得べき場合は有限個とはかぎらないことになる。そのような場合に，幾何学的確率論では積分の導入を必要としたことはすでに第2章でみたとおりである。そこでは極限操作の使用を必要とするものであるから，数学技術上

（3）　$$P(\lim_{n\to\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

というような操作が許されることが必要であろうと想像されるであろう。(3)を厳密に形式化してあげたのが，次の公理である。

公理VI.　A_i $(i=1, 2, \cdots)$ という集合の無限系列があって，各 A_i が$\mathfrak{F}$に属し，かつ A_i は A_{i+1} をふくむということがいかなる i についても成り立ち，しかも $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 全部に共通の集合は空集合であるとする。すなわち

(1°)　$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \cdots \supset$

(2°)　$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0$

とする。そうすると，

(4)　$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$

この公理 VI は，$\mathfrak{F}$ が有限集合であれば，公理 I—V から当然導かれるもので，したがって必ず成立するから新たにあげる必要はない。$\mathfrak{F}$ が無限集合となると，公理 VI は公理 I—V からは導かれない。公理 VI は次のようにいいかえても，内容は同じである。

公理VI′.　A_i $(i=1, 2, \cdots)$ という集合の無限系列があって，各 A_i は $\mathfrak{F}$ に属し，その任意の2つの共通集合は空集合であるとする。また

(5)　$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$

であり，かつAは $\mathfrak{F}$ に属するものと仮定する。すると，

(6)　$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$

公理 VI を**完全加法性の公理**という。この公理の条件において，“かつ A は $\mathfrak{F}$ に属するものと仮定する”という条件がただし書きについている。

もしも $\mathfrak{F}$ が単に集合族であるのみならず，実は完全加法族であるならば，この条件は必然的に満足されるから，ただし書きは不必要になる。ここに完全加法族というのは，各 A_i $(i=1, 2, \cdots,)$ がFに属すとすれば，その可付番無限和 $A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} A_3 \dot{+} \cdots$ もまた $\mathfrak{F}$ に属するという性質をもつ集合族をいう。

もしも $\mathfrak{F}$ が単に集合族であって，完全加法族でないときには，$\mathfrak{F}$ に属しないような $A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \cdots + A_n \dot{+} \cdots$ は，$\mathfrak{F}$ に新しく加えていくという方針をとって，$\mathfrak{F}$ を拡大し，この拡大したものが完全加法族になるようにすればよいが，これに関しては，「集合族があれば，これをふくむ最小の完全加法族がある」という定理が援用されるのである。そうしたあかつきには，上述の公理系 I—VI において $\mathfrak{F}$ は初めから完全加法族と規定してもなんらの制限にならないことがわ

かるのである。

こういうふうにみてくると，確率の資格基準に，上述のように「抽象空間の上の完全加法族に関して定義された完全加法的集合関数」として規定されることが，かならずしも不自然でないことがわかるであろう。起こる場合の数が有限個しかない場合は，このうちにふくまれる。そこでは，そもそも集合の無限系列はないのだから，集合族は必ず完全加法族であり，有限加法族は必ず完全加法族となるからである。

しかしながら，古典的な幾何学的確率論を受け入れるためということからは，$\mathfrak{F}$ が完全加法族であること，確率が完全加法的集合関数であることは，実は根拠づけられないのである。そこで必要であったものは，普通の微積分でいう積分，すなわちリーマン積分であるのに対して，上述の公理を満足する積分はルベグ式積分である。たとえば区間 (0, 1) における有理数全体の集合の測度で確率の値を求める，というような問題は，古典的な幾何学的確率論の問題にはなかったし，またリーマン積分に対応する測度論（ジョルダン式測度）ではその値は求められない。これに反して，上述の公理によればルベグ式積分として，その測度は 0 であるということができる。確率論がいかにしても完全加法的集合関数であることを要求されるのは，ほかに理由がある。われわれは，これを次の節で述べよう。

以上は確率の資格基準を示すものであったが，次には，確率空間を構成するという見地から確率論の公理をながめてみよう。

古典確率論の任務は，さきに述べたように，ある種の事象の確率が確定したものに与えられたとき，これらの事象に関連する事象の確率を求めることであるといえよう。ある事象の確率を求めるには，この事象を，確率のわかっている事象の論理的結合として表現できることが前提されていなければならない。そうして，事実その値を具体的に示すには，この結合を具体的に与えなければならない。

確率論の問題では，しかしながら，多くの場合，こうした関連なり結合なり

が，表現されている確率空間そのものは明示されているのではない。実情についていえば，基本的な確率事象の確率と，試行の関連性に関する仮定とが指示されているにとどまるのである。確率空間という同時的空間的存在が静的に規定されて与えられているのではなくて，各回の試行という行為に関する仮定，たとえば各回の試行は独立であるとか，すぐ前の試行の結果にのみ影響される（マルコフ連鎖）とかいうような仮定が与えられるのである。それゆえ，確率空間は，多くの場合，問題を解くためにわれわれ自身が構成しなければならないもので，このように構成したものが，確率の名に値するかどうかの資格審査は公理Ⅰ—Ⅵに照らしてみてきまるものである。それゆえに，確率論の公理主義で重要なことは，確率空間の構成方法を明示することであるといわなければならない。

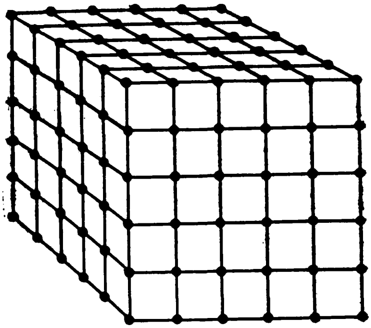
確率空間の構成ということも，古典確率論では，個々の問題において実質的にはすでに実践していることであるが，その点の自覚が形成されていなかったのである。実をいえば，そのような自覚なしにも一応問題は解けたのであった。

「サイコロを3度投げてその目の和が10になる場合の起こる確率を求めよ。」この最も身近な例によって古典確率論の論理構成をうかがってみよう。ここではいかに確率空間が形成されるかが問題である。この問題において普通仮定されていることを明示すると，

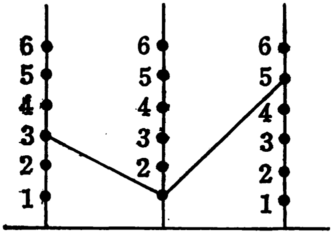
(1°)　各回の試行においてサイコロの各目のあらわれる確率はいずれも1/6である。

(2°)　3回の試行は相互に独立である。

そこで今，第1，第2，第3の各回の試行で (i, j, k) の目のあらわれるという事象をB(i, j, k)で表わすと，これらは216通りあって，それが基本事象系を形成することは，すでに述べたとおりである。ここに3通りの基本事象系の空間的表現を述べよう。この基本事象系の1つ1つを1点であらわして，立方体の表面および内部に，格子点状にその各点を配列することにより，10－1図の



10－1図



10－2図

ように表現できる。もし4回の試行であれば，この立方体でなくして，四次元空間における立方体，一般にn回試行であればn次元空間における立方体を用いて同様に表現できる。しかし四次元以上は直観しえないという欠点がある。これが1つの表現である。他の表現の仕方は，平面上に表現しようとするもので，直線上に試行の回数1，2，3をあらわす点をとり，各点において，この直線に垂直な線分をたてて，それぞれその上に1，2，3，…，6と点をとる。するとB(3，1，5)というような事象を10－2図のように，折線で表現できる。この方法では試行の回数nを増加しても，常に平面で表現できるわけで，直線上に試行の回数だけ1，2，3，…，n点をとり，上のようにその各点から直線をたてて以下同様に行なうことにする。こうすることによって，基本事象はそれぞれ折線となる。このような折線の数は6^n個あるわけである。

第3の表現の仕方は，B (i, j, k) という事象に対しては，次のような線分

$$\frac{i-1}{6}+\frac{j-1}{6^2}+\frac{k-1}{6^3}\leqq x<\frac{i-1}{6}+\frac{j-1}{6^2}+\frac{k}{6^3} \tag{5}$$

を対応させるのである。このときには，$0\leqq x<1$なる線分が216等分されて，216個の小線分，すなわち細区間より成り立ち，それらが字引式順序で並んでいる。すなわち右から左へ

B(111), B(112), …, B(116), B(121), …, B(126), B(131), …, B(166), B(211), B(212), …, B(666)

というふうに逐次配列されてあらわされるということになる。

これらの3つの表現は，それぞれの利点をもつものである。第1の表現では，試行の回数がnのときはn次元に入れなければならないが，低次元との立体的関係が明瞭である。第2の表現では，試行の各回数が過程の1つの切断であるという意味において，あとで述べる確率過程の理解に役立つであろう。第3の表現の利点は，試行の回数をましても常に一次元の線分によって表現されるところに特質があり，次節で述べる試行の無限系列を線分上の一点として捕えるところに利点がある。

さて確率構成の原理に立ち帰ろう。第1の表現に即してこの原理をいいあらわしてみよう。高次元における確率分布から，低次元のそれは，導き出される。たとえば第1回に5があらわれ，第2回に3があらわれるという事象をB(5, 3) としてあらわすとき，一方

(6)　$B(5,3,*)=B(5,3,1)+B(5,3,2)+\cdots+B(5,3,6)$

というふうに基本集合の和集合としてあらわされるから，三次元空間において，これら基本集合の確率が与えられるかぎり求められるわけである。すなわちそれは確率の有限加法性により

(7)　$P(B(5,3))=P(B(5,3,1))+\cdots+P(B(5,3,6))$

として与えられる。このように高次元からの低次元の射影には問題はない。

しかし確率論の問題は，低次元の確率をあたえて高次元の確率を求めることであるから，これを可能ならしめるところの試行相互間の関連という点においての仮定が利用されなければならない。上述（1°）は各一次元における確率を三組あたえたものであり，(2°)はこれら相互間の関係を規定したものである。第i回試行においてkの目のあらわれるという事象を$B_k^{(i)}$と書くことにすると

(1°) は$P(B_k^{(l)})$ を $l=1,2,3,\ k=1,2,\cdots,6$，総数18の各場合について与えたものである。

(2°) からは

(8)　$P(B(i,k,l))=P(B_i^{(1)})P(B_k^{(2)})P(B_l^{(3)})$

が得られる。この式の右辺の値をもって左辺の値なりと定義することによって，三次元に配置されたような事象の集合族についての確率が見いだされることになる。独立とはこうした低次元より高次元への構成の時役立つ１つの関連である。その他マルコフ連鎖としての関連もまた確率論で重要である。

確率論は，与えられた確率事象に対する確率空間を必ずや背景として，また基盤として構成しているのである。この構成において試行という概念と試行間の関連という概念が致命的に重大である。試行とはまさしく行為という概念であろう。したがって，静的存在としての確率空間（$\Omega, \mathfrak{F}$, P）を確率論の問題では，いかにして構成するかが問題なわけである。

3.　確率論の近代化の要因

古典的な幾何学的確率論では，起こり得べき場合の数は無限であるから，普通，これに関係する確率は，積分の概念をつうじて与えられる。積分の概念を媒介するということから，そこにいう確率に関しては，極限操作がなんらかの意味で許されるものであることが要請される。コルモゴーロフ公理系を設定すれば，こうした確率を含めて考えられることは示唆される。けれどもコルモゴーロフ公理系を導入しなければならないという理由は，それだけからはなお根拠づけられない。前節でそういうことを述べた。問題は公理VIの必要な理由であるが，それはようするに，ジョルダン測度では表現しえないで，ルベグ測度を必要とすること，すなわち，確率が完全加法性をもつ必要性をあげることができる。

1909年 H. Borel によって展開されていた可付番無限確率の理論でうち立てられた一定理，それは，現在大数の強法則と呼ばれるものの１つの特別の場合にあたるのであるが，これが，完全加法性をもつ確率の導入の必要を示すものである。それは確率論の近代化への道にとって歴史的に重要な意義をもつものである。以下でこれを述べよう。

可付番無限確率というのは試行の可付番無限の系列を定立し，これに関する確率を論題の対象とするものである。試行の無限のくり返しはけっして完結するものでないから，それは有限の立場を越える極限概念を媒介としてのみ理解される。しかし，ここで大切なことは，それが行為の無限過程という時間的なものにとどまらず，「このような無限の過程を見とおして，すべての過程を同時的空間的に直観する」見方が確立されるという点でなければならない。確率空間とは，こうした直観を空間化したものと解釈されるのである。実数論に関して末綱恕一氏「有限の立場と極限概念」(『科学』昭和19年) の所論はここにかえりみられるべきである。

試行の可付番無限系列を，適当な空間の一点として，位置づけるということに関しては，例をあげてこれを示そう。これは前節の第3の表現に関連するものである。

今，0と1との間のある任意の実数xを考えると，xは有理数にしても無理数にしてもとにかく，小数展開の形で書けるわけである。普通の小数展開は，つまり十進法による展開であって

$$(9) \qquad x = 0.c_1c_2\cdots c_n\cdots = \frac{c_1}{10^1} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots$$

となるわけである。ここに各c_iは0, 1, …, 9までのいずれかになるわけである。この十進法に対して二進法によって

$$(10) \qquad x = \frac{a_1}{2^1} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$$

としても書き表わせるわけで，そのとき各a_iは0か1かのいずれかである。以下論題の便宜上この二進法で，$0 \leqq x \leqq 1$なるすべての実数をあらわすものとして考えよう。このようにすると数xに対して0と1の無限列が定まり，逆にこのような0，1の任意の所与の無限列に対しては0と1との間の数xが定まるという関係が成り立つ。ただし，あるところからさき全部1となれるようなときには，次のように書き改めておく。

$$0.a_1a_2\cdots a_n1111\cdots=0.a_1a_2\cdots(a_n+1)00\cdots0\cdots$$

今ここに貨幣を投げるという試行を無限につづける場合を考え，各回の投貨の結果を次のように表わす。すなわち表が出れば1，裏が出れば0とする。すると投貨の無限系列が，たとえば表裏裏表裏表表……というふうに出てくるときは1001011……として表わされることになり，さらにこれを

$$\text{(11)}\qquad \frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\cdots$$

とおくと，上述の意味でこれに対応する数yがきまる。このようにして一般にn回投貨の結果を表現するものとなる。

今ここで，(1°)各a_iは0,1をいずれもそれぞれ確率1/2でとるものであること，(2°)試行の独立性として$a_1, a_2, \cdots, a_n$はいかなるnまでとってみても，相互に独立であるということを仮定しよう。すると，ある任意の特定の区間にある条件，たとえば

$$\text{(12)}\qquad \frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_n}{2^n}\leqq x<\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_n+1}{2^n}$$

となる確率は，独立という条件（2°）を援用して

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned}&p_r\{a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n\}\\&=p_r\{a_1=b_1\}p_r\{a_2=b_2\}\cdots\cdots p_r\{a_n=b_n\}\end{aligned}$$

ここに（13）すなわち $a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n$ という事象が同時に成り立つ確率は各事象の成り立つ確率の積だということである。（13）は，いいかえると，kを整数とするとき，$(k/2^n, (k+1)/2^n)$ という長さ $(1/2)^n$ の区間にxの落ちる確率が，ちょうどその区間の長さ $1/2^n$ に等しいことを示すのである。ここにkとnとは任意だから，けっきょくは$(0,1)$内に一様に分布している。

このようにして，独立試行の無限のくり返しは，$(0,1)$ という区間上の1点として，空間に位置づけられる。$(0,1)$ なる区間はあらゆる独立無限試行列を表現する，いわば媒体である。

またある種の区間，すなわち適当にnとkとを見いだして $(k/2^n, (k+1)/2^n)$

としてあらわされるような区間，という集合に対しては，xがそれに属する確率というものがあたえられる。(0,1) を分割する個数に関係するnをきめておいて，kを0から 2^n-1 まで変えるとき 2^{n+1} 個のこうした区間，すなわち基本区間系が得られ，これらの基本区間系のつくる集合族に関しては，確率が定義されるということになるのは，前節にのべた起こり得る場合が有限の場合にほかならないからである。試行の可付番無限系列は，分割の数nを限りなく増加させることによって理解されるのであって

(10)　　$x=0.\,a_1a_2\cdots a_n\cdots$

ということは

(14)
$$\left\{\begin{array}{l}
0.\,a_1 \leqq x \leqq 0.\,(a_1+1) \text{ すなわち } \dfrac{a_1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{a_1+1}{2} \\
0.\,a_1a_2 \leqq x \leqq 0.\,a_1(a_2+1) \text{ すなわち } \dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2} \leqq x \leqq \dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2+1}{2^2} \\
0.\,a_1a_2a_3 \leqq x \leqq 0.\,a_1a_2(a_3+1) \text{ すなわち } \\
\qquad \dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3} \leqq x \leqq \dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3+1}{2^3} \\
0.\,a_1a_2a_3\cdots a_n \leqq x \leqq 0.\,a_1a_2\cdots(a_n+1) \text{ すなわち } \\
\qquad \dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n} \leqq x \leqq \dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n+1}{2^n}
\end{array}\right.$$

というふうに，順次に細分されていく小区間のおのおのに属するということがいずれも成り立つという意味である。このような過程を見とおして，(10)という点を定立するのであるが，事象を規定するものは根本的には細分されていく区間であって，点ではないことを銘記すべきである。一方において，特定の空間に位置づけられる点であるとともに，それはある基本的な集合の無限系としてのみ把握されるという性格をもつのである。

ルベグ積分における測度0の集合というものも，この立場から理解される。一例をあげよう。区間 (0,1) の間にあるすべての有理数に番号をつけることはたとえば分母を1，2，3…とだんだん大きくとり，同一分母をもつものでは分

子をだんだん大きくするというふうに

$$(15)\qquad 0,1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\cdots$$

とならべ，分数の値が等しいものは，二度とかぞえないことにすればよい。有理数全体は区間 $(0,1)$ に，いたるところ密に並んでいるわけで，有理数全体の測度というものはジョルダン測度では与えられない。ところがルベグ測度の意味では0である。なぜなら $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ というふうにならべたものについては，各 x_n を長さ $\delta/2^{n+1}$ の小区間でおおうことができる。すると，上の集合全体がこれら小区間の和集合でおおいつくせることになる。さて

$$(16)\qquad \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2^2}+\frac{\delta}{2^3}+\cdots+\frac{\delta}{2^{n+1}}+\cdots=\delta$$

であり，δ はどれほど小さくとってもよい。このことがすなわち，上記の命題の意味である。$(0,1)$ に属する有理数全体の集合は測度0であり，無理数全体の集合は測度1である。

以上を準備として本論へはいろう。Borel によって証明された大数の強法則に関する一定理は，古典確率論におけるベルヌリの大数の法則と比較することによって，よく理解されるであろう。

まず前述のように，無限試行を空間化して，$(0,1)$ 上のある一点で表現し得たとしよう。この対応において，x に対応する無限試行列についてみたとき，第 n 回までの試行で1のあらわれた回数を $r_n(x)$ とする。x が (10) のように表われていると，$a_1, a_n, \cdots, a_n$ のうちで1になるものの個数がすなわち $r_n(x)$ である。これは x の関数であって，その値は x によって変わるのであるが，$r_n(x)/n$ なる比率をつくり，この値と $1/2$ との差の絶対値を考える。この絶対値が，ある指定された値 $\varepsilon>0$ よりも小さくなるような x の集合というものは考えられる。これは，$(0,1)$ に属する数の二進法展開において第 n 桁までによって規定されるものであるから，起こり得る場合の数が有限にすぎない事象

を取り扱うことにほかならないのである。今このようなxの集合を

$$(17)\qquad E_n(\varepsilon)\equiv\left[x\,;\,\left|\frac{r_n(x)}{n}-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon\right]$$

で表わすと，組み合わせ理論からそれに対する確率は求められて

$$(18)\qquad P\{E_n(\varepsilon)\}=\sum_k\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}<\frac{3}{16\varepsilon^4}\ \frac{1}{n^2}$$

という関係式が得られる。ここに和は，$|k/n-1/2|>\varepsilon$ というようなkについてのみ和をとるという意味である。この評価から，ベルヌリの定理：任意に与えられた$\varepsilon>0$に対して

$$(19)\qquad \lim_{n\to\infty}P\{E_n(\varepsilon)\}=0$$

が得られる。

この定理の内容は，しかしながら，上述の(17)から明らかなように，本質的には第n回までの試行よりなる有限系列についてのある事象の起こる確率の評価であって，個々の無限試行列，たとえばxに対する無限試行について

$$(20)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{r_n(x)}{n}=\frac{1}{2}$$

ということを主張するものではない。それゆえ，実をいえばxというようなものを思惟の表面に自覚的に定立することなしに，いいかえれば，確率空間の明確な設定なしに，論ずることも可能であったし，事実，確率空間の必要性の自覚は近年のことである。またここでは，確かにルベグ測度の概念を必要としないのであった。ところで(20)という命題は，$0\leqq x\leqq 1$なるすべてのxについてはかならずしも成立しない。たとえば

$$(21)\left\{\begin{aligned}&x_1=0.100100100100\cdots\cdots\\&x_2=0.1000100100100\cdots\cdots\end{aligned}\right.$$

等であれば

$$(22)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{r_n(x_1)}{n}=\frac{1}{3},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{r_n(x_2)}{n}=\frac{1}{4}$$

しかし，このように（20）の成り立たないものはあるにはあるし，しかも無限に多くのxについて（20）は成り立たないということもいえるのであるけれども，$0\leqq x\leqq$　のうちで（20）の成り立つようなxの方が圧倒的に多く，これに比べれば，（20）の成り立たないxは，ある意味でほとんど無視できるということが証明できるのである。これはルベグ測度を用いてのみ可能である。上述のある意味というのはルベグ積分の意味で，測度0の集合である。ここにいたって初めて測度論の概念を導入する必要がある。これがようするに大数の強法則の内容である。いいかえれば，

ボレルの定理：ほとんどすべてのxについて（20）が成り立つ。いいかえれば，（20）の成り立たないxの集合の確率は0である。

このことを証明するために，$n=1, 2, 3, \cdots$とするとき

$$(23)\qquad \left|\frac{r_n(x)}{n}-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon$$

が成り立つnの値が無限にあるxの集合を E(ε) とし，(20)の成り立たないxの集合をEとして表わしておく。Eは次式のような集合の無限列の和集合でおおうことができる。

$$E\subset E(1)\dot{+}E\left(\frac{1}{2}\right)\dot{+}\cdots\dot{+}E\left(\frac{1}{k}\right)\dot{+}\cdots$$

であるから，(22) の右辺の各項はルベグ測度（確率分布）を導入すれば，その測度0であるといえる。ところが，実はこれから証明するように，Eのルベグ測度自身は存在して0となる。それで証明が完了するというわけになる。ところで各項のルベグ測度が0になるということは，次のことから証明される。

$$(1^\circ)\qquad E(\varepsilon)<E_n(\varepsilon)\dot{+}E_{n+1}(\varepsilon)\dot{+}E_{n+2}(\varepsilon)\dot{+}\cdots$$

$$(2^\circ)\qquad P(E_n(\varepsilon))<\frac{3}{16\varepsilon^4}\;\frac{1}{n^2}$$

なる2つの関係から，E(ε)なる集合は，上式（1°）のように$E_n(\varepsilon)$以下の集合の和をもっておおうことができて，しかもこの和集合の確率は次の値を越えない。

$$\frac{3}{16\varepsilon^4}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)<\frac{3}{16\varepsilon^4 n}$$

となり，nは何でもよいからεをきめておくとき，nを限りなく大きくすると上式の右辺は0になる。すなわちE(ε)はルベグ式測度が0の集合であるということになる。ここにルベグ測度の概念を用いている。この事実をルベグ式測度論の用語をもってすれば，E(ε)のルベグ測度（ここでは確率分布といってよい）は0であるといい表わす。

以上の所論をまとめると，この例についてはベルヌリの大数の法則は，

$$(24)\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left[x;\left|\frac{r_n(x)}{n}-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon\right]\right)=0$$

であり，ボレルの大数の強法則は

$$(25)\qquad P\left(\left[x;\ \lim_{n\to\infty}\frac{r_n(x)}{n}=\frac{1}{2}\right]\right)=1$$

として表現できる。前者においては$\{r_n(x)/n\}$が$n\to\infty$において概収束するといわれるのである。一般に，ある値に概収束すれば，その値に必ず確率収束するのであるが，逆にある値に確率収束しても，かならずしも概収束しないという定理が成り立つのであって，したがって（25）の方が（24）を含み，ずっと精密な主張をしている。のみならず確率論の，実際問題への関連においても，たとえば投貨という試行を限りなくくり返すならば，表が出る相対的頻度がどれほどでも1/2に近くなるという事実を表現すれば，（25）に対応すべきことであるのであって，（25）は（24）の単なる精密化にとどまるものでなくて，確率論の構成上欠くことのできない致命的な定理にあったわけである。

このように，確率論の近代化は，大数の強法則の定立から誕生したのであるが，その定立は，無限試行列を同時的空間的に，空間の一点として直観する空間化の理念を前提とするものである。さらにまた，この空間に属する集合の測度を表わすのには，完全加法性をもつ確率を用いなければならないのである。

それは数学技術的には近代解析学である集合論，実関数論が前提されてのみ樹立されたものとみられる。しかし，数学技術的に可能になったということだけからは，確率論の近代化を根拠づけるのにはなお不充分であろう。人間の試行は，無限につづけられるものではないから，古典確率論の対象とした投貨，サイコロ等の試行の系列において，試行の回数を無限に多くするということは，事実に照応したものとはいいがたく，試行回数のきわめて多い場合の状態を，近似的に表現するための極限公式の存在でことはたりたのである。試行の無限系列そのものを対象とすることは，古典的な幾何学的確率論でも必要とはしなかった。かくして確率論の近代化の事情は，現実の客観的物質的存在として，ほとんど無限という概念によってのみ把握されるべき対象の研究，すなわち，気体論の分子論的研究から促進されたとみるべきである。数学者，物理学者がその点に関して明確な自覚をもって研究を進めていたとはいえないけれども，しかし，明確な自覚のみをもって，数学発達の要因を説明しようというのはある１つの立場を前提とするもので，私はこれをとらない。

確率論の近代化は，解析学の進歩によって数学技術的に可能になったものではあるけれども，近代化を必要とした事情は，むしろ統計力学の進歩によるとみるべきではあるまいか。すでに第４章４節と５節で説いたように，Gibbs の統計集団の理念は，まさしく，確率空間の設定に対応するものであり，近代確率論の基礎確立のためには先駆的意義をもつものである。また個別エルゴード定理は一種の大数の強法則にほかならないのである。物理現象においてわれわれが粗視的観測でみているものは何であろうか。もしも集団の多くのサンプルについて経過をとり，その平均をとっていうのであるならば，サンプルの組数を限りなく大きくした場合には，法則収束または確率収束が問題となるのである。しかし，事実はそれを問題にしているのではない。現に実験しつつある個別的な物理体系が時間とともにいかに経過していくかをみることであり，問題を理念的に表現すれば，あくまで統計集団の位相空間における概収束に関することである。このようにして物理現象の数学的模型を求めるとき，その形式化

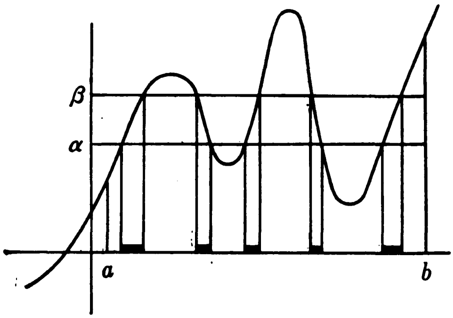
のためにルベグ測度のはいってくることは，統計力学にとって避けられないところであり，実は，この概念自身はなはだ物理的なものとみるべきなのである。たとえば観測の精度からいって，測度0ということは，当然除外して考えなければならないわけである。運動の初速をある値，たとえば$\sqrt{2}$ m/sec に指定するなどといっても，それは実験物理的にいえば厳密には意味はない。各物理的変数のとる値は純粋数学的な意味において精密に規定されるものではなくて実はある区間にあるということ以上には実現しえないことである。同様に量子力学におけるヒルベルト空間の援用に際しても，ルベグ測度は避けられない。

近代確率論は数学技術的には集合論および測度論を前提とするといったが，これらの近代解析学の理念が，その基盤とともに明らかにされる必要があるであろう。さらに立ち入って考えるならば，ひとり確率論の近代化のみでなく，集合論，実関数論の誕生および進歩自体に対して，考察が加えられなければならないであろう。力学的自然観が主導的地位をもっていた時代の微積分学の反映しようとした対象と，近代解析学の基盤となった近代物理学における対象を比較して，その相違をまず理解しなければならないであろう。

微積分学の必要とした関数の概念は，長い間にわたって，Euler の意味における関数の概念にとどまったのであって，その対象は，つまり後世のいわゆる解析関数の世界に属するものであった。解析関数は，任意の一点の近く（任意に小さい）におけるテーラー展開によって規定されるものであって，関数の全領域における行動は，すでに一点の近くの行動により，法則的に与えられているといわれよう。したがって，変数 x に対して勝手に y の値を指定するような対応，すなわち Dirichlet の意味の関数とはおよそ相違するものである。Dirichlet の意味における関数を必要とする事情は，もともと振動する絃の形態を論ずる問題から起こった。平均状態を脱した振動絃の初期形態には任意の曲線が想定される。また熱伝導の問題においても，初期の温度分布には場所の任意関数が想定されるのである。これらは任意に想定されるのではあるが，一度指定されるならば，それは後の各時刻における絃の形態，温度分布を規定す

るものである。なぜならば，これらは場所と時間とを独立変数として変位，または温度を従属変数とする関数である。ともかく変域のある点における関数の状態と，この点からある正の距離以上の間隔をもつ他の点におけるそれとは，一応独立無関係に規定されるものである。このような関数に対しては，変域の各点は，いわば相互の関連性を薄弱にしていくことになる。全変域にわたる関数の行動を任意の一点の近くにおいて規定し尽くす普遍的法則が存在する場合には，変域の各点は，個々の点ではあるけれども，具体的普遍ともいわれるべき一般者である。しかし，上のような任意の形態，任意の温度分布をあらわす関数に対しては，場所的に，このような具体的普遍性をもつ点がないのである。各点はいわば個物として相対することになる。かくして一点およびその近くにおける関数の規定から他点のそれを導びき出（演繹）しえないことになる。変域をあらわす線分が，このような関数表示のために相互に異質的な点から成り立つという思想がここに成り立つことになる。これが前提となり背景となって，線分は点をもって構成されるという集合論の理念が生まれてきたとみられるのではあるまいか。

このように見ていくと関数の概念の拡張が，関数定義域の点集合論をうみ出すもとになった事情はむしろ当然である。このとき Lebesgue の意味で測度の定義できる関数とは，いかなるものであるか。その意味の関数に対しては，変域のなかの x に対する関数 $f(x)$ の値をあたえる法則が直接に規定される



10-3図

必要はない。変域内の任意の小区間内において関数のとる値の，いわば割合が与えられているというだけである。すなわち α, β を任意の実数の組とするとき

$$m\{[x\,;\alpha<f(x)\leqq\beta]\cdot[x\,;a\leqq x\leqq b]\}$$

が与えられたものにほかならない。ここで m はルベグ測度をあらわし，$\alpha<f(x)\leqq\beta$ を満足するような x の集合と $a\leqq x\leqq b$ を満足する x の集合との共通集合のルベグ測度にほかならない。ある点 x における関数の値 $f(x)$ は決定されているわけであるが，それを確定的にあたえ，法則を指示することはルベグ可測関数であるための必要条件ではない。点 x のいかに小さな近傍 a, b をとっても，上式の値が与えられることによって，$f(x)$ の値を間接に規定するにとどまる。それは $f(x)$ の生成の法則をあたえるものとはいえない。記述的に，$f(x)$ のとる値の分布を集団的に規定するものにほかならない。この意味ではルベグ可測なる関数という概念は，各点の値が規則的に与えられることを要求しないといえるが，これと同時に，その関数に対しては，集団的に関数値の分布が規定されたものでなければならないといえる。これこそ，ストカスティックの理念を表現するものである（第2章参照)。「ルベグ測度は確率である」というべきであろう。

集合論は，フーリエ級数の収束点の点集合を論ずる問題から G. Cantor によって生まれたものである。フーリエ級数が任意のルベグ積分可能な関数に対して定義されること，ある点におけるフーリエ級数の収束が，その点の近傍（任意に小さな）における関数の状態にのみ依存すること，この二点が，点集合論との関連において決定的に重要であった。

近代確率論をながめてみると，問題の提出は統計力学に負うものであり，方法としては集合論によるものであった。統計力学は気体運動論に発し，集合論は三角級数論から生まれたのである。そうして，気体運動論と三角級数論とは，ともに熱現象の解析に目標をおいた。蒸気機関の普及，発達なしには，熱現象の解析に進むこともなく，熱の本質を解明する必要も可能性もなかったで

あろう。蒸気機関こそ，熱が物質の運動であることにほかならないことを示した。そこに示されたものは，いわば人間的には無限個ともいうべき分子の運動の世界であり，無限次の自由度をもつ力学系であった。それはまさにストカスティックの世界として模写反映されるべき客観的存在である。このような状態を表現する用語としてルベグ測度は理解されるべきものである。近代確率論の基盤は，まさにここにあるというべきであり，問題と方法とは，同一の源泉に由来することがわかるのではなかろうか。それは，世界に革命的な影響をあたえた蒸気機関という機械の導入につながるものであることを，歴史の事実としてわれわれは銘記すべきである。

ここにひとは，対象が方法を規定しつつある実際のありさまを例証し得るともいうべきではあるまいか。

4. 確　率　変　数

事象を，適当な抽象空間に属する集合と考えることによって，種々の事象の集まりについて論じようというのが，コルモゴーロフ確率論公理系の根本的な方針の1つであることはすでに述べたとおりである。そうして，事象の集団としては，事象に対応する集合が完全加法族を形成するという条件をもって規定することにした。

このように，公理系の表面に出ているのは，事象に対応する集合であり，その集合は，一般の抽象空間に属する集合であって，公理系に規定された以外の制限を課せられない。しかし，確率論を運用していくときには，事象自体よりもその標識に関して論ずる場合が多い。いいかえれば確率空間（Ω，$\mathfrak{F}$，P）それ自身ではなくして，簡単にいえば，その写像についての議論がたいせつな場合が多い。すなわち，（1°）抽象空間 Ω を Ω_1 へうつす写像 φ があり，（2°）Ω_1 の上の完全加法族 $\mathfrak{F}_1$ があって，（3°）この $\mathfrak{F}_1$ に属する任意の集合 E_1 に対しては，その逆写像 $\varphi^{-1}(E_1)$ が $\mathfrak{F}$ に属し，（4°）したがってそれに対するPの値が定義されているとする。こういう場合に（Ω，$\mathfrak{F}$，P）の上

の（Ω_1, $\mathfrak{F}_1$）確率変数といわれる。この（Ω_1, $\mathfrak{F}_1$, P）を論ずることが多いのである。たとえば Ω_1 としては有限次元のユークリッド空間をとる。これらは広義の意味で計量化された確率事象ということに相当する。

とくに実確率変数というのは，Ω_1 が一次元のユークリッド空間，すなわち実数全体の集合という場合である。この場合にはΩの事象（集合）Eに対しては，Ω_1 のある事象 E_1, すなわち実数直線上のある点集合が対応する。このことは，確率事象が実数という標識をもって表現されるということをさすのにほかならない。前節の例についていえば，a_iは第 i 回目の試行の結果を表現する実数値をとる変数であって，しかも各実数をとる確率が規定されているものである。すなわち 0, 1 なる 2 つの実数だけをそれぞれ確率 1/2 でとり，他の実数をとる確率は 0 である。一般に実確率変数は実数値をとる変数であって，実数値のとり方が確率的に規定されたものといえるわけである。

われわれは，このような場合には，確率事象というものを根源的に考えて，それの 1 つの標識として，したがって写像として，実確率変数を考えるのである。標識は，対象の側面であって，それはかならずしも全貌をつくさないであろう。そもそも確率論の対象となるものは，客観的存在のある側面についてであり，幾多の現象のある側面だけを模写反映させるものであるのに相違ない。貨幣を投げるという 1 つの試行にしても，それを記述すれば，無限の事項をふくむ。上例では机上に静止した場合，貨幣の表か裏かがあらわれるという事柄しか注意していないのであって，貨幣の運動自体の様子を問わない。n 回までの試行の結果については，（$a_1, a_2, \cdots, a_n$）という n 個の実確率変数の組をもって表現できる。これ自身はもはや実確率変数ではないが，n 次元ユークリッド空間 R_n がすなわちこの場合の Ω_1 であると考えるならば，上の定義により確率変数と見なせるわけである。これに反して，n 回までに表のあらわれた回数というものを s_n とすれば，s_n は $0, 1, 2, \cdots, n$ となり得るわけで，しかも，試行の独立性を仮定するならば s_n が r に等しくなる確率は，初等確率論より，

(26)　　$P(s_n=r)=\binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-r}$　$(r=0,1,2,\cdots,n)$

としてあたえられる。s_n 自身は実確率変数である。また $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ となることもいうまでもないであろう。

試行の無限系列をあらわす前節の方法については，どうであろうか。$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ という前述のような確率変数列により x が (10) で規定されるとするとき，x は，無限次元空間の一点 $\omega=(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ に対応し，この ω に対して実数が定まり，$x(\omega)=x$ であると考えられよう。x はそれゆえ，実確率変数である。

一般に実確率変数については，その確率分布を，実数を独立変数とする関数とみるのが便利である。それには次のように考える，$-\infty<\xi\leqq t$ という ξ 全体の集合を $E_1(t)$ とし，すべての t について $E_1(t)\in\mathfrak{F}_1$ とする。写像 φ によって，この集合にうつされるべき原像 $\varphi^{-1}(E_1(t))$ を考えると，実確率変数の定義によって，この原像は $\mathfrak{F}$ に属し，したがってその確率が定義される。すなわち

(27)　　$P(\varphi^{-1}(E_1(t)))=F(t)$

とおく。これは t とともに変わる。簡単にいえば，$F(t)$ は実確率変数が実数 t を越えない確率であって，これを t の関数とみるとき，**分布関数**という。

(28)　(1°)　$\lim_{t\to-\infty} F(t)=0$

　　(2°)　$\lim_{t\to\infty} F(t)=1$

　　(3°) $F(t)$ は非減少である。すなわち $t_2>t_1$ ならば $F(t_2)\geqq F(t_1)$

　　(4°) $F(t)$ は右に半連続である。すなわち $\lim_{h\to+0} F(t+h)=F(t)$

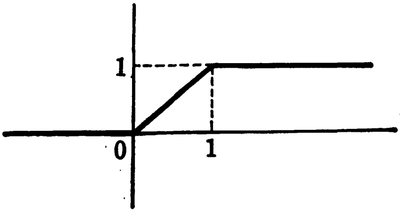
上例について分布関数をもとめてみよう。$x(\omega)$ が与えられた実数の組 α, β $(\alpha<\beta)$ に対して，$\alpha<x\leqq\beta$ となる確率，$x\leqq 0$ となる確率，$x>1$ となる確率を求めてみよう。後二者は明らかに 0 である。

(29)　　$P(\alpha<x\leqq\beta)=P([\omega;\alpha<x(\omega)\leqq\beta])$

$$=P([\omega;x(\omega)\leqq\beta]-[\omega;x(\omega)\leqq\alpha])$$

$$=\mathrm{P}([\omega\,;x(\omega)\leqq\beta])-\mathrm{P}([\omega\,;x(\omega)\leqq\alpha])$$

$$=\mathrm{F}(\beta)-\mathrm{F}(\alpha)=\beta-\alpha$$ （証明は次節参照）



10－4図

10－4図ならびに以上の所論から，

(30)　　$$\mathrm{F}(t)=0(-\infty<t<0)$$

$$=t(0\leqq t\leqq 1)$$

$$=1(t>1)$$

$\omega=(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ に対して各 a_k が定まるゆえに，$a_k=a_k(\omega)$ としてあらわせるわけで，それは，1つの実確率変数である。したがって，

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1(\omega)+a_2(\omega)+\cdots+a_n(\omega)=s_n(\omega)$$

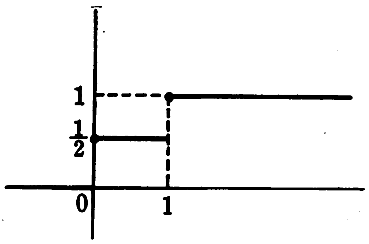
とみれば s_n も同様であって，それぞれ分布関数は 10－5，10－6 図ならびに次のようにあたえられるであろう。

(31)　　$$\mathrm{P}(a_k\leqq t)=\mathrm{P}([\omega\,;a_k(\omega)\leqq t])$$

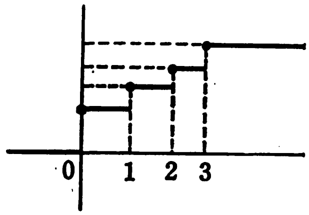
$$=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ \dfrac{1}{2} & (0\leqq t<1) \\ 1 & (1\leqq t<\infty) \end{cases}$$

(32)　　$$\mathrm{P}(s_n\leqq t)=\mathrm{P}([\omega\,;s_n(\omega)\leqq t])$$

$$=\begin{cases} 0\ (t<0) & \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^k & (s\leqq t<s+1) \\ & (s=0, 1, 2, \cdots, n-1) \\ 1 & (n\leqq t<\infty) \end{cases}$$



10-5図



10-6図

次に多次元確率分布関数について述べよう。$\omega=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して，n 次元のユークリッド空間の一点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を対応させることができる。実確率変数に対して，一次元分布である。分布関数 $F(t)$ が定義されたように，確率空間 $(\Omega_1,\ \mathfrak{F},\ P)$ に対して n 次元ユークリッド空間 R_n を Ω_1 として，$(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P)$ をとるときには，次のようにして，n 次元分布たる分布関数 $F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ を導入することができる。

まず n 次元空間の座標を $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ であらわすとき，点集合 $E_1(t_1, t_2, \cdots, t_n)$:

(33)　　$-\infty<\xi_1\leqq t_1, \cdots, -\infty<\xi_2\leqq t_2, \cdots, -\infty<\xi_n\leqq t_n$

が $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ のいかなる組についても $\mathfrak{F}_1$ に属することが前提されるものとする。すると，これから逆写像によって，Ωにおける原像が求められるわけで，その確率が

(34)　　$P(\varphi^{-1}(E_1(t_1, t_2, \cdots, t_n)))$

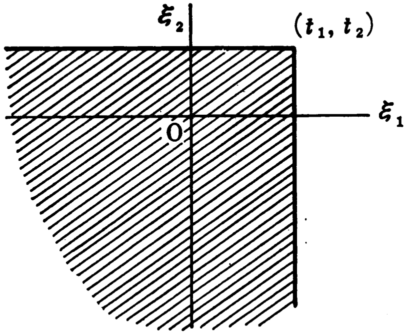
として与えられる。これは $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ の関数であるから，n 次元分布である。

上の例において，簡単のため $n=2$ として示してみよう。

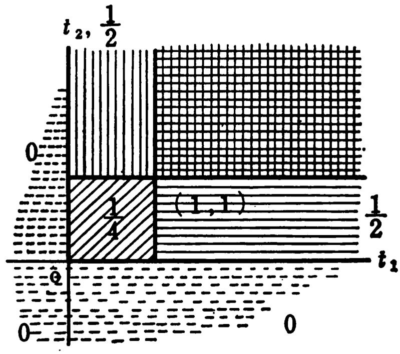
$E_1(t_1, t_2)$ は 10-7 図の斜線部のような集合である。

(35)　　$P([\omega; a_1(\omega)\leqq t_1, a_2(\omega)\leqq t_2])=F(t_1, t_2)$

を求めてみると，その値の分布は10-8図のとおりである。



10-7 図



10-8 図

近代確率論と近代統計学において，正規分布の重要性はいわば復活した形である。正規分布に従う確率変数というのは，

(36)　　$$P([\omega\,;x(\omega)<t])=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}du$$

ということであり，一般に n 次元正規分布に従う確率変数というのは，

(37)　　$$P([\omega\,;(x_1(\omega)<t_1,\cdots,x_n(\omega)<t_n)])$$
$$=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{t_n}exp\{-\sum_{i,j}a_{ij}(\xi_i-m_i)(\xi_j-m_j)\}d\xi_1\cdots d\xi_n$$

ここに，a_{ij}, m_i はいずれも実数であって，指数肩の中

(38)　　$$\sum_{i,j}a_{ij}(\xi_i-m_i)(\xi_j-m_j)$$

は正の定符号対称次形式である。

本節をおわるにあたって，次の注意をしておこう。一次元はもちろん一般に有限次元確率変数に対しては，このように確率分布関数がきまるわけであるが，逆はどうであろうか。簡単のために，一次元について説明しよう。(28)で与えられた条件で規定された F(t) が与えられたとき，分布関数にする確率変数ははたして存在するだろうか。これに対しては肯定的な答えが与えられる。

最後に実際の例について説明しよう。日本人の満 20 歳の男子の身長はある分布を示すであろう。これを総人口数で割れば，比率として，分布の割合が示

される。しかし，このことをもって，日本人の満20歳男子の身長がこの分布に従う確率変数であるとはいえないのである。

そのような集団から，任意抽出を行なうときに得られる数値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関していえることなのである。分布そのものは，比率の表示である。これに対しての操作が前提され，その操作にあらわれる数値を変数とみることによってのみ規定されるものである。その比率分布を分布関数とする確率変数として規定されるためには，たとえば任意抽出という実践が介入しなければならない。

5.　確率空間の構成

確率論のコルモゴーロフ公理系は，それだけでは，確率の資格基準であり，確率空間の定義でしかない。確率空間をいかにして構成するかという点に関しては，別に方法が与えられなければならない。そしてそこにこそ，確率論の固有の問題がある。確率の問題を解くためには，与えられた条件をもとにして，適当な確率空間をつくることが，論理的には先行しなければならない。しかし事象の数が有限個しかあり得ない場合には，このことは明確に意識されなかった。Borel の可付番確率論において初めてその必要を自覚するための契機が与えられたことは前述のとおりである。

確率論にとってこのように致命的に重要である確率空間の構成において，支柱となるのは，2つの拡張定理である。その1つは有限加法的な集合関数を完全加法的集合関数に拡張するための条件を規定するものであり，他の1つは，確率空間の高次元化を完成する方法を提示するものである。以下多少詳しくそれを解説しよう。

【1】 **第一の拡張定理**　これはすでに1節の所論に実質的には述べておいたが，さらに念のために明確に述べよう。

Ωを任意の空間とし，Ω の上の有限加法族 $\mathfrak{F}'$ と，$\mathfrak{F}'$ に関して有限加法的な確率分布 P' が与えられたとする。今この $\mathfrak{F}'$ をふくむ完全加法族のうち

最小のものを$\mathfrak{F}$とする。このとき次の条件 (1°), (2°) を満足する集合関数P を定義できるための必要かつ充分な条件は，P′ が$\mathfrak{F}'$ において完全加法的であることである。

(39)　(1°) E′ が $\mathfrak{F}'$ にふくまれるならば，P′(E′)=P(E′)

(2°) P は (Ω, $\mathfrak{F}$) の上の確率分布である。

この定理の例を示そう。前節において，$x(\omega)$ の分布関数を求めて F(t) を (30) 式によって与えた。ここのところは厳密には次のように証明されるべきことである。区間 $E^n_k(k/2^n, (k+1)/2^n)$ に属する確率は，前々節に述べたように $1/2^n$ に等しい。このことは，一般にいかなる n といかなる $k(0\leqq x\leqq 2^n)$ についてもいえるから，$\mathfrak{F}_1$ としてこのような E^k_n の有限加法族，すなわち，

$$\{E^k_n\}\quad (k=1, 2, \cdots, 2^n ; n=1, 2, \cdots)$$

をとる。このような $\mathfrak{F}_1$ に属する集合 E とは

(40)
$$E=E^{k_1}_{n_1}+E^{k_2}_{n_2}+\cdots+E^{k_m}_{n_m}\quad (m=1, 2, \cdots)$$

として表わされるものの全体である。このような場合は，つまり端点が無限小数でなくて，ある桁で切れているような区間の和からなる。任意の実数 α, β に対して (α, β) という区間は $\mathfrak{F}_1$ にはまだはいっていない。(40) 式の右辺にともどもの集合があってもよいが，もしなければ，有限加法性によってその確率は次のように計算される。

(41)
$$\begin{aligned}P'(E)&=P'(E^{k_1}_{n_1})+P'(E^{k_2}_{n_2})+\cdots+P'(E^{k_m}_{n_m})\\&=\frac{1}{2_{n_1}}+\frac{1}{2_{n_2}}+\cdots+\frac{1}{2_{nm}}\end{aligned}$$

しかもこの P′ は $\mathfrak{F}_1$ では完全加法的であるというのは，$\mathfrak{F}_1$ に属する集合 Eは適当にすれば必ず (40) のような有限個の和で表わされるのであるが，表わし方によっては，相互に共通集合のない $\mathfrak{F}_1$ の集合の無限系列の和としても表わされる。

(42)
$$E=E^{k_1}_{n_1}+E^{k_2}_{n_2}+\cdots+E^{k_n}_{n_m}+\cdots$$

上の定理の条件は，このようなときには，

(43)　$$P(E)=P(E_{n_1}^{k_1})+P(E_{n_2}^{k_2})+\cdots+P(E_{n_m}^{k_m})+\cdots$$

と書けるということである。この条件が満足されるということは，$\mathfrak{F}_1$ をふくむ最小な完全加法族 $\mathfrak{F}$ をつくるとき，そこに上述の拡張定理を応用するための必要かつ充分な条件となる。(43)は今の場合満たされている。したがって，前節 (29) が任意の実数 α, β に対して，成り立つといいうるのである。

【2】 第二の拡張定理　コルモゴーロフ公理系によって規定された確率の概念には，確率の基本定理の1つである加法定理は，公理として規定されているが，組み合わせ確率論において，同じく基本的な定理であるところの乗法定理は，その公理系には要請されていない。ところで乗法定理そのものは，組み合わせ確率論以外では，定理というよりはむしろ条件付確率を定義する関係式とみるべきであろう。しかるに条件付確率を正確に定義するのには，確率空間が構成されなければならない。乗法定理の意義を知るのには，本章1節で述べた第2の表現という初等的な例示を思い出すとよろしいであろう。そこでは，第1の表現は三次元空間で表現されるべきものを平面上の道で表わした。

今少し事柄を一般にして，試行の回数がNであって，各回の試行においてサイコロの各自の表われる確率をそれぞれ 1/6 としよう。第1回に i_1，第2回に $i_2, \cdots$，第N回に i_N 目が表われるということのことごとく起こる事象を B $(i_1, i_2, \cdots, i_N)$ と書くことにしよう。こうした事象は $i_1, i_2, \cdots, i_N$ のいろいろな取り方に対応して総数 6^N 通り可能である。これら事象系はN次元の空間でも表わされるけれども，また平面上の道としても表象できる。ある特定のN回試行は1つの道をきめるが，試行の度ごとにその道は，いろいろに変わり得るわけで，可能な道の個数は総数 6^N 個に達する。しかし，以上の仮定だけからでは，各道の起こる確率というものは与えられない。それは各時点の分布は与えられても，それらの時点をいっしょにした場合の分布がいまだ規定されてないからである。

低次元確率分布を高次元のそれへ拡張する場合には，確率論的な連関関係が

与えられなければならない。この点にこそ一般の測度論と確率論とを分けるべき契機が見いだされなければならない。

上例をなお一般化して，次のような場合を考えよう

(1°)　各試行の結果には有限個の可能な場合があって，これを $1, 2, \cdots, m$ で標識づける。

(2°)　第一の試行の結果が $1, 2, 3, \cdots, m$ となる確率はそれぞれ $p_1, p_2, \cdots, p_m$ である。

(3°)　$(n=1, 2, \cdots, \mathrm{N}-1)$ に対して第 n 回までの試行の結果が $i_1, i_2, \cdots, i_n$ のとき第 $(n+1)$ 回までが i となる条件は確率を $p(i_{n+1}/i_1, i_2, \cdots, i_n)$ とする。このような条件のもとには

(44)　$$\mathrm{P}(\mathrm{B}(i_1, i_2, \cdots, i_{\mathrm{N}}))=p(i_1)p(i_2/i_1)p(i_3/i_1, i_2)\cdots p(i_{\mathrm{N}}/i_1, i_2, \cdots, i_{\mathrm{N}-1})$$

として規定されることによって，上述の意味での N 次元空間が構成される。また N 時点において，$i_1, i_2, \cdots, i_{\mathrm{N}}$ をとる道の出現する確率が規定される。

独立とは，前回までの試行の結果に無関係なことであり，マルコフ鎖とはただ直前回の試行の結果以外には無関係ということである。すなわち次のようにいい表わせる。

(a)　独立：$p(i_k/i_1, i_2, \cdots, i_{k-1})=p(i_k)$　$(k=1, 2, \cdots, \mathrm{N})$

(b)　マルコフ鎖：$p(i_k/i_1, i_2, \cdots, i_{k-1})=p(i_k/i_{k-1})$　$(k=1, 2, \cdots, \mathrm{N})$

条件付確率をいいかえたのにすぎないこの構成において，上述の $p(i, i_k)$ $(k=1, 2, \cdots, \mathrm{N})$ はもちろん負にならず実数であるほかに

(45)　$$\sum_{i_n=1}^{m} p(i_n/i_1, i_2, \cdots, i_{n-1})=1$$

が，あらゆる $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots, \mathrm{N}$ のすべて) について成り立つことが要請されなければならない。そうして (45) が充分条件でもある。

第二拡張定理の内容とするところは，上の事柄を一般化したものに相当するのである。一般化は，2つの点にかかわる。第1に，上の場合においては，起こり得る場合は，有限個数であったけれども，これを一般に確率変数にするこ

とである。第2は，上例の次元数N（すなわちわかりやすくいえば時点数N）は有限であった。つまり，N個の時点よりなる集合に関したものであるが，これをわかりやすくいえば，時点の任意の集合Aにすることである。

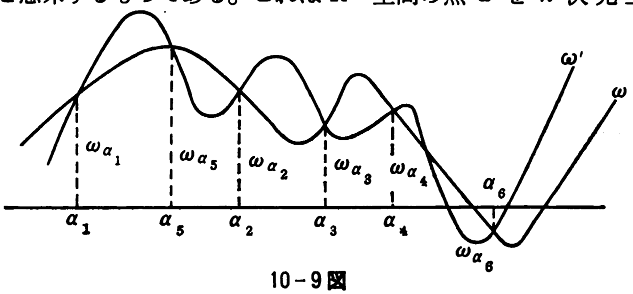
今Aを任意の集合とするとき，任意に選んだある1つの実数をAの各元αにそれぞれ対応させるとき，このような対応の全体をR^Aで表わす。たとえばAは，$1,2,\cdots,n$ なる点から成り立つ集合であるとすると，その場合には，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ を任意に選んで対応させればよいから，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ としてn次元ユークリッド空間R_nの一点がこれで表わされ，R^A はR_nであるともみられる。Aが直線全体の点の集合Rであると，R^Aはこのとき，すなわちR^Rであって，これに属する元すなわち対応というのは，実数値をとる Dirichlet の意味の任意の関数にほかならない。こうなれば有限次元のユークリッド空間ではありえない。しかし，一般にR^Aを有限次元のR_nへ写像することができる。それには次のように考えればよい。R^Aの各元ωは，Aに属する各αに対応して定められた値ω_αの全体によって規定されるゆえ，$\omega=(\omega_\alpha\,;\alpha\varepsilon A)$ とかく。するとAに属する任意のn個の $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ については，ここでとるωの値をみると，ω_αが各α_i，とる値ω_{α_i}がきまるから，ω_nに対して$(\omega_{\alpha_1},\omega_{\alpha_2},\cdots,\omega_{\alpha_n})$がきまるわけである。したがってこの関係を，

(46)　$\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,}(\omega)=(\omega_{\alpha_1,\alpha_2,}\cdots,\omega_{\alpha_n})$

として表わすことにすれば，これはすなわち

(47)　$\omega\to(\omega_{\alpha_1},\omega_{\alpha_2},\cdots\omega_{\alpha_n})$

なる写像を意味するものである。これはR^A空間の点ωをn次元空間の一



10-9図

点に対応させるものである。

今 $\omega' \neq \omega$ なる ω' についても $\omega' = (\omega_\alpha' ; \alpha \varepsilon \mathrm{A})$ とするとき，たまたま $\omega_{\alpha_1} = \omega_{\alpha_1}', \omega_{\alpha_2} = \omega_{\alpha_2}', \cdots, \omega_{\alpha_n} = \omega_{\alpha_n}'$ が成り立てば，

(48)　　$\varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}(\omega') = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}(\omega) = (\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \cdots, \omega_{\alpha_n})$

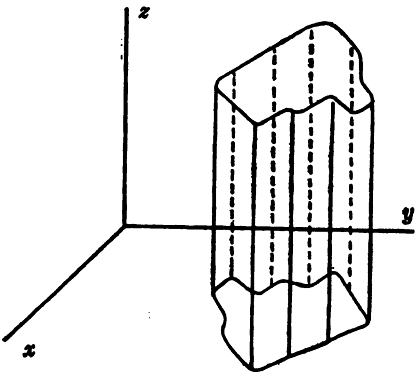
となり，同一の点に写像されることを注意すべきである。そこでこの写像の逆写像により R_n から R^A へ写像されるものを考えよう。

E' を R^n のボレル集合として，

(49)　　$\varphi^{-1}{}_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}(\mathrm{E}')$

となるような R^A の元を考える。これを $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 上のボレル筒集合 (Borel cylinder set) とい。

筒集合というわけは，R^A の各元は A の各点における実数によって規定されるのであるが，この集合においては，Aのうちの $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, という各点においてとる値のみに関して集合が規定され $\alpha' \neq \alpha_i\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ であれば，α'によってとる値に関しては無制限であり，$(-\infty, \infty)$ に属するいかなる点でもよいからである。これはちょうど三次元の集合において，(x, y, z) のうち，(x, y) だけに関しての規定しか設けていないと，$z=0$ の平面に，この規定による集合をつくり，その集合の各点から，z 軸に平行な無限直線を引いてでき



10－10 図

る筒状集合が求めるものになるという事情に相当する（10－10図）。$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ をきめておいて E' を R_n のボレル集合系の任意のものをとってみれば，$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$上のボレル筒集合の全体は R^A 上の完全加法族をなすことがわかる。これを $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 上のボレル集合系といい，$\mathfrak{F}_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}$ で表わすのであるが，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の取り方により種々の $\mathfrak{F}_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}$ が得られる。これらすべてをふくむ最小の完全加法族を $\mathfrak{F}$ とする。$\mathfrak{F}$ に属する集合を R^A のボレル集合といい，$\mathfrak{F}$ の R^A ボレル集合系という。

第二拡張定理の主張しようということは，「R^A の上の集合関数 P があってAの任意の有限部分集合 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ に関してみれば，この集合関数 P が，R^A を抽象空間，$\mathfrak{F}_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}$ をその上の完全加法族として，$(R^A, \mathfrak{F}_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}, P)$ という確率空間をつくっているとする。すると，P を拡張して $(R^A, \mathfrak{F}_1)$ の上の確率空間をつくることができる」ということである。この定理は，Aが無限集合であるときにのみ存在価値をもつ。

第11章　近代統計数学の展開

1.　近代確率論の展開

コルモゴーロフの公理系の上にうち立てられた近代確率論の主な成果は，もちろん相互に深い関連に結ばれたものであるけれど，一応2つの見地からながめることも可能であろう。その1つは，確率が目標とするストカスティックの概念を，この体系の中に，いかに把握し，描き出すかという課題に関するものであって，広い意味で極限定理の開拓をもって，これに答えようとするものである。もう1つは，すでに述べたように確率論の公理は確率の資格基準をあたえるものにすぎないから，第10章5節に述べた構成原理をもとにして，それぞれの確率事象に対して確率空間を構成することが，近代確率論の構成上根本的な課題でなければならないということである。この見地からみれば，確率過程論の建設がこの課題に関する代表的な理論を与えるものといえよう。

【1】 近代確率論における極限定理

(1°) 非決定論的であること，(2°) 集団的規則性の存在すること，この2つの性質をもって，ストカスティックのおよその特質と考え得ることはすでに第2章で述べたところである。Mises 等は，この特質を極限公理ならびに不規則性公理によって規定し，これを確率の公理としてあげて出発点をここにおいている。

コルモゴーロフの公理系の上に立つ確率論では，これらの特質をよく表現する結果をその体系のなかで定理として与えなければならない。近代確率論はその構成上当然はたさなければならないこの義務を一応はたしている。それのみではない。近代確率論において樹立された極限定理は，ストカスティックに関

する上記の2つの性質を，より精確な形式化のもとに，より精細な規定をもって与えることにも，輝かしい成功を示している。これらの成果はストカスティックの2性質に対応して，別々にわけて2方向からみることができるであろう。その1つは，偶然現象の変動，動揺の個別相をつうじて自己を貫徹するところの規則性の摘出であり，もう1つは，個別相にあらわれる不規則性の様相を描象しようとするものといえよう。以下，この2つに分けて述べるのが便利であろう。

(a)　極限的な規則性の摘出として，われわれはまず古典的なベルヌリの大数の法則とラプラス等の中心極限定理とを思い起こすであろう。近代確率論は，これらの定理を，種々の見地から拡張し，精細化した。第1には，確率現象の関連性の点からである。これらの古典的な成果は，もっぱら独立試行に関するものであったが，近代確率論は単に独立という1つの特別な関連性に立つ確率現象のためでなく，マルコフ連鎖等をもふくむ，より広範な関連性のもとにこれら定理の拡張を考える。第2に，ベルヌリの大数の法則は，2つの値しかとらないという特別な確率変数に関するものである。ラプラスの定理でも，その対象とする確率変数はまだ一般的ではない。これを一般の確率変数列について論ずる。第3に，ベルヌリの定理は，すでに3節で述べたように，確率収束に関するものである。またラプラス等の中心極限定理は法則収束に関するものである。これをもっと一般に種々の収束形式，とくに概収束，平均収束において論ずる。第4には，極限定理の誤差評価を精細にする。これは確率過程論の建設上必要欠くことのできないものである（反復対数の法則)。これらの諸点を念頭におきながら，近年における研究の成果をながめてみよう。

(1°)　**独立確率変数の理論**　誤差論における正規分布の導出法の方針についてはすでに第2章に述べたのであるが，この方針を完成し得たのは，ようやく近年のことであって Lévy, Feller, Doeblin 等の努力の結果に負うものである。個々には無視し得られるような小さな誤差が相互に独立なものとして規定され，これらが和の形で累加されるとき，これらの和のある意味での極限が，

誤差法則たる正規分布になるであろうとの見とおしは，すでに18世紀末には得られておったし，ある制限のもとでは，事実これを証明し得たといえる。近代確率論の成功は，本質的でない制限をとり去り，この問題をもっと一般の形で徹底的に解決した点にある。独立確率変数列に関するかぎり，そもそも極限確率分布法則（ある意味での）とはいかなるものであるかを問題として，その解答をも与えた。すなわちその特徴を無限に分解可能な確率分布法則として規定することができた。無限に分解可能な確率分布法則では，正規分布（ガウス分布）とポアソン分布とが，基本的な分布であって，一般の極限確率分布，すなわち無限に分解可能な確率分布法則は，これら 2 つの基本的分布のある意味での結合（すなわち convolution）として特徴づけられることを示した。二項分布の極限の場合として，極限へもっていくときの条件のとり方いかんにより，極限分布法則は正規分布となり，またポアソン分布ともなることは，初等確率論で周知のことであろう。極限確率分布法則は無限に分解可能な確率法則であり，逆もまた真であるという上述の結果は，一般の極限確率分布法則への極限移行において，この 2 種の極限移行がそのなかに織り込まれていることを示すものといえよう。

独立確率変数の理論は，ただこのような極限の確率分布法則を研究対象とする法則収束の問題のみでなく，その他諸種の収束問題を論じている。たとえば独立確率変数の級数に関する概収束の問題などがそれである。3 節のボレルの大数の強法則はその一例である。こうした問題を論ずるに当たっては，コルモゴーロフ公理系をもとにして確率空間を設定することが論理的に必要で，欠くことができない前提となる。

(2°)　**エルゴードの問題**　もと統計力学から生まれたことは，第 4 章ですでに述べたとおりである。Boltzmann が，気体論の分子論的建設において導入した仮説は，エルゴード仮説といわれるものであったが，これを表現するために適当な数学，すなわちルベグ測度論が当時まだ存在しなかった。近代確率論は，この問題に対しては，その主張しようとする内容の本質を正確に表現し，

かつこれを証明することに成功している。

統計力学が，Maxwell, Boltzmann をへて Gibbs の段階に達したときには，相空間の概念を本格的に援用するという見地に到達していたわけで，その立場からみるときには，気体の個々の状態そのものを相空間の一点をもってあらわし，その気体の移り行く状態の変遷を，相空間内における位相点の運動として把握するものである。ところでこの運動は3つの性質をもっている。第1に，この運動は一定のエネルギーEという条件のもとに行なわれるから相空間上で，エネルギーEであるという条件により定義される相超曲面上——エネルギー面Eともいう——に必ず存在し，いわばこの超曲面上を動きまわるわけである。第2に，初め位相点Pにあった E 点が t 時刻にうつりゆく状態を位相点 P_t であらわし，$T_tP=P_t$ と書くならば，$\{T_t\}$ なる変換の集合をつくってみると T_t なる変換は1対1であり，かつ，Liouvilleの定理により，体積不変（保存）なる変換である。第3に，この流れが定常的であるということから

$$(1)\qquad T_{s+t}P=T_sP_t=T_s(T_tP)=T_{t+s}P$$
$$=T_tP_s=T_t(T_sP),\ (-\infty<t<\infty)$$

の関係が成り立ち，明らかに変換群をつくる。これをようするに相空間における不可圧縮な定常的な流れである。

Boltzmann の導入したエルゴード仮説は，上の表現に即していえば，位相点は，この運動において，エネルギー面E上のすべての点を通るということである。これをいいかえると，運動が定常的であることを考えに入れると，エネルギー面E上のすべての点は，位相点の同一軌道の上にのっているということである。しかし，この仮定は，ことばどおりに解釈すれば，数学的に成立不可能な事実を主張するものである。しかも仔細に検討してみれば，統計力学の建設のためにエルゴード仮説をどうしても必要とするというわけではない。位相点が経過していく道について，ある物理量の長期時間平均をつくれば，平均する時間が無限に大きくなる極限においては，その値は相空間における集団平均と一致するということで充分である。Boltzmann のエルゴード仮説が成り立

てば，もちろんこれはいえることである。しかし，Boltzmann のエルゴード仮説が成り立たなくとも，上のことは成り立ちうる。軌道がすべての点を通る必要はないが，エネルギー面E上のどの点のいくらでも近くを通るという性質は必要である。

このような意味でのエルゴード性は次のような形で表現されよう。相空間をΩとし，Ω上の完全加法族についての測度をmで表わし，Ωで定義された任意の関数を φ とすると，ほとんどすべての点 P について次の関係が成り立つ。

（2）　$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty}\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\varphi(\mathrm{T}_t\mathrm{P})dt=\int_{\Omega}\varphi(\mathrm{P})dm(\mathrm{P})$$

長期時間平均（の極限）＝集団平均

くわしくいうと，φ はp乗（$\infty>p>1$）が Ω 上で，測度 m に関して可積分であるという条件がつく。たとえば，Aを Ω に属する任意の集合とし，$\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{P})$は集合Aの特性関数とする。すなわちPがAに属すとすれば，その関数の値は1，そうでなければ0とする。すると，$\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}_t\mathrm{P})$は，$\mathrm{T}_t\mathrm{P}$ が集合Aに属すとすれば1，そうでなければ0であるから，上式左辺の lim のうちは，0からTまでの時間のうちで，集合Aに滞在した時間をTで割ったものであるから，Aにおける平均訪問（滞留）時間ともいうべきものである。これに関連してなお，次の2つの概念をあげておこう。

その1つは**測定可遷性**ということである。それは上述の流れに対して不変な集合は，測度0の集合かそうでなければ Ω 自身以外にはないということであり，いいかえれば，流れ（力学系）が2つの別々な流れ（力学系）に分割されないということである。もう1つの概念は，**一様混合性**ともいうべきもので，出発点にある任意の集合Bに属する位相点が，t 時間後には B_t となったとすると，任意の集合Aに対して，次の関係が成り立つことを意味するのである。

（3）　$$\lim_{t\to\infty} m(\mathrm{AB}_t)=m(\mathrm{A})m(\mathrm{B})$$

たとえば，カップの水のなかに赤インキを落とした場合を考えてみるとよい。初めBの部分をつくった赤インキは，t 時間後には B_t となる。ところで

今Aをカップの水の任意の部分とすると，$m(AB_t)$ は，t という瞬間にこのAという部分にふくまれる赤インキの測度である。したがって，上式は充分長い時間——といっても実際はこの例ではすでに短い時間でも成り立つことは，われわれは体験しているが——をとりさえすれば，この測度は，$m(A)$ と $m(B)$ との積になるというのであるから，カップの水の中の各部分に，B_t がある意味で一様に混ざるということを意味する。

エルゴード性と測度可遷性とは，同等の内容をもつことが証明されている。一様混合性が成り立つならば，必ずエルゴード性をもつ。しかし，逆はかならずしも成立しないことも示されている。

さらに次のことが証明される。

正方形内に任意の領域 A（ルベグ可測集合）をとる。

(4)　　$f_A(x, y)=1$　　点 (x, y) がAに属する時，

　　　　　$=0$　　点 (x, y) がAに属しない時，

とおくならば，

(5)　　$$\int_0^T f_A(x_t, y_t)dt$$

というものは，Tまでの時間のうちで軌道が，領域Aに滞留した時間である。さて個別エルゴード定理の主張によるならば，

(6)　　$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f_A(x_t, y_t)dt=\int_0^1\int_0^1 f_A(x, y)dx\,dy=\iint_A dx\,dy=m(A)$$

すなわち，任意の領域における滞留時間の長期平均は，その領域の面積（測度）に等しい。これは，軌道が，いわば正方形のいたるところを平等に訪問するとでもいえることである。

以上に述べたところは個別エルゴード定理に関するものであり，ただこれに対して，平均エルゴード定理というのもあることをつけ加えておかなければならない。また流れが決定論的にかつ可逆的に P_t なる位置を規定する遷移過程であるのに対して，マルコフ連鎖による確率過程は，非可逆的であり非決定論的である。これに関するエルゴードの問題を線型作用素の反復の定理として論

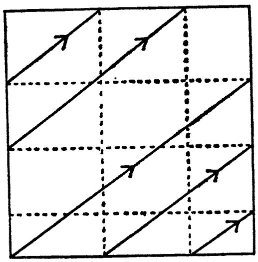
じて，みごとな結果が得られていることもつけ加えておくべきであろう。

これらいっさいをふくめて，近代確率論においてエルゴードの定理のもとに理解されるものは何であるか。エルゴード定理の形はいろいろであるけれども，一般的な性格として共通な点は，時間的（系列的）に経過過程として現われる個別相を，長期にわたってみるならば，長時間（長系列）平均は，時間（系列）を限りなく大きくした極限において，ある意味で極限状態に近づくということ，しかもこの極限状態が，過程の出発の状態に依存しない普遍的状態であるということであろう。ここに過程としては，決定論的かつ可逆的な定常的な変換群として規定されることもあれば，上に述べたように，マルコフ連鎖の場合もある。ある意味で近づくというのは，種々の収束方式を意味する。普遍的状態という意味は普遍的量の存在をも含めるが，なお一般に，マルコフ連鎖のように，空間全体が確率過程に即してみるときエルゴード部分と，離散的な部分に分かれるというような結果をもふくめて意味する。以上のような広い解釈のもとで，エルゴード定理を理解するとき，エルゴード問題は，統計力学から誕生をうながされたとはいえ，その発生地をはなれてひろく確率論の基本的問題として理解されるべきものといわなければならない。大数の諸法則も一種のエルゴード定理であることはいうまでもない。

この意味で，多くの primitive な確率論の例題をここにあげておくのも無駄ではないであろう。トランプをきっていくと，初めどんな順にトランプが重ねられていても，何回もきっていくうちにはだんだん混ぜ合わされていくこと，この事実は正確に形式化されるとき，マルコフ連鎖におけるエルゴード定理の一特例ともみられる。2つのツボに，それぞれ紅白の球いくつかずつが，混合してはいっているとして，この2つのツボのなかから任意に2つずつ球をとり出して，出たものを交換して，各ツボへかえす。するとこの操作のため，ツボの成分は変わらないこともあるが，変わることもある。このような操作を多数回くり返したならば，各ツボのなかの紅白の割合はどうなるか。1つのツボのなかの紅球の数と白球の数の差が0に近づく傾向をもつこと，すなわち極限分布

として，初めの状態のいかんにかかわらず，一様分布に近づく。このことは，少しの条件はつくが，古くは Laplace の頃から知られていた。Poincaré の任意関数の方法といわれるものとともに，これらは広くエルゴード定理の一特例である。ルーレットは，回転する水平円盤の縁に赤と黒との多数の縞をつけたものである。遊戯の仕方は，ルーレットを回転して止まった時，これに固定した（回転しない）釘の指す方向にあたるルーレットの縁の部分が赤か黒かによって勝負をきめる。このルーレットをまわすとき，回転の角が $(\theta, \theta+d\theta)$ にとまる確率を $f(\theta)d\theta$ とする。$f(\theta)$ が Riemann の意味で積分可能であるかぎり，任意の関数 $f(\theta)$ について次のように主張できる。$f(\theta)$ がどんな関数であっても，赤が勝つ確率，黒が勝つ確率は，赤黒の縞が限りなくせまくなった極限では，それぞれ赤または黒に染めた部分をそれぞれ合計した長さの割合になる。これが Poincaré の任意関数の方法といわれるものであるが，$f(\theta)$が任意であるにもかかわらず，極限として普遍的にただ赤黒の部分の長さの割合になるというところにエルゴード定理をみるのである。E. Hopf (1934年) は，このような見地から，先験的確率 (a priori probability) を基礎づけようとした。

エルゴード性の性質を，相空間のどの点のいくらでも近い近傍までも，軌道がくるという性質や，あるいは長時間平均と相平均とが一致するという性質において把握する例として，Weyl の撞球の問題をあげよう。正方形 $0 \leq x, y \leq 1$ の内部において直線運動 $x=t, y=\alpha t$ を考えよう。t が増大して x および y の少なくとも一方が1を越えるにいたるときには，いつでも，その整数すなわち



11－1図

$[x]$, $[y]$ をひいたところの $x-[x]$, $y-[y]$ をもって座標点にする。すると，11-1 図のような運動軌道がえられる。これに関して一般に，次のことがみられよう。

(1°) α が有理数の時には，運動軌道は必ず出発点へもどり，それからは今また描いた同じ道の上をくり返し運動するだけである。したがって軌道に乗っている点では，正方形内の有限個の平行線分の上の点だけしかない。

(2°) α が無理数の時には，一度通った点にはけっしてふたたびもどらない。もどらない代わりに，どれほどでも近い点を通ることが必ずある。ひとり軌道上の点に対してのみでなく一般にこのことはいえる。すなわちこの正方形の内部のいかなる点を考えても，運動の軌道は，その点のどれほどでも近くにくる。

α が有理数であることは，α が無理数であることに比べてずっとまれなことである。$0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$ のうちで，有理数全体の集合のルベグ測度は 0 であり，無理数全体の測度は $\pi/2$ である。したがって，ほとんどすべての場合に，上述のエルゴード性がとられる。

「……極限定理であるから始めから無限であるのではなく，唯他の事情に較べて甚だ長期であることで十分である。比較の問題であるから我々人間にとつて有限の時間であつても，撞球の速さが気体分子の程度（10^5 cm/sec）のものであれば，既に十分であろう。かやうな高速な球が，例へば場所 (x, y) で $f(x, y)$に比例する強さを放ちつゝ飛行するとしよう。人間の眼は 1/16 sec の間像を保存するから，球の出発点に於ける像が消えかかる頃は球は既に何万回か往復してゐる。従つて上の定理が適用されて我々は唯面全体が本来の光輝 $f(x, y)$ を同時に放つてゐるとしか感ぜられない。」（伏見康治，エルゴードの問題，岩波講座『物理学』）一様に混合性という見地からいえば，なお次の例が直観的であろう。第 4 章の気体論における分子の衝突の例を，われわれはここに思い起こしてみよう（第 4 章参照）。 これを図で作図してみることによって，体積不変，すなわち，測度不変であるけれども，その形がいかに広がっていくかが

みられるであろう。

【2】 **確率過程**　前節に述べた第二の拡張定理は，R^A なる空間に，確率を導入するための必要かつ充分な条件を与えるものであるが，Aが有限集合のときには，確率空間の構成ということだけであるならば，本質的な困難はない。この定理がその存在価値をもつのは，いうまでもなく，Aが無限集合の場合である。とくに応用上基本になるのはAが一次元集合であって，しかも無限集合である場合である。この場合にもAが離散的な集合であるが，Aが連続的な集合（常識的な用語で）——たとえば線分全体ないし直線全体——であるかによって区別される。前者を確率系列，後者を確率過程ということにしよう。系列とか過程とかいうのは，Aを時間の集合として象徴するものである。

確率系列といわれるものは，すでに独立試行の無限の系列を考えるところに現われているのであって，事新しいことではない。これに反して，上述の意味での確率過程は，近代確率論を特徴づける重要な部門である。これこそ，最も明瞭に，数学外の世界から問題は生まれてきた。それはすでに第4章6節に述べたブラウン運動の理論である。その解説において，われわれは，先走りではあるが，現代確率論の立場からの解説を与えた。そこでは確率空間を構成したものとしての解説を与えた。問題は確率空間を構成することにあるといわなければならない。ここでは前節に述べた第一および第二の拡張定理と反復対数の定理が確率空間構成上の支柱となる。一般の確率過程論は，Doob, Slutzuky, Feller 等によって開拓されたものである。

ブラウン運動は正規分布と関連するものであるが，確率過程であってポアソン分布に従うものが重要である。

確率現象の個別相にあらわれる不規則性の描出について述べよう。これもまた，コルモゴーロフ流の確率論が，その体系のなかの定理として示されなければならないところのストカスティックの一側面である。それでは不規則性とは何であるか。不規則性の本質をついたものとして，Mises の統計集団コレクティーフにおける不規則性公理をあげることができよう。

Mises らはコレクティーフを次の 2 つの公理によって規定する。

試行のくり返しの観察によって生じた標識系列を $m_1, m_2, \cdots, m_n, \cdots$ とする。標識内の点の任意の集合をAとする。

（I） **極限公理**　$m_1, m_2, \cdots, m_n$ のうち，Aなる標識を示すものの個数を n_A とするとき，この相対頻度 n_A/n は，n が限りなく大きくなるとき一定の極限値をもつ。

$$\lim \frac{n_A}{n} = p_A$$

（II） **不規則性公理**　$m_1, m_2, \cdots$ からある任意の項位選出により得られた無限部分系列において，標識Aを示すものの相対頻度の極限値は不変である，すなわち p_A に等しい。

ここに**項位選出** (Stellenauswahl) というのは，当初，およそ次のような意味であった。$m_1, m_2, \cdots, m_n, \cdots$ から部分系列を選び出すに当たって，まず m_1 を選出するか否かは，m_1 の標識を使用することなしに決定されなければならない。$m_1, m_2, \cdots, m_i$ までの選出いかんが決定されたとき，m_{i+1} の選出か否かは，m_{i+1}の標識を使用することなく，利用するにしても，$(m_1, m_2, \cdots, m_i)$までの観測結果に限られている。

この項位選出の概念は，さらに精密な数学的な解明を必要とするし，また任意の項位選出とは何であるかが規定されなければならない。

項位選出に関しては，Wald によって数学的には一応の規定は与えられた。原無限系列から分無限系列を項位選出によりつくることは，次のような 1 つの関数列 $\{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}$ をあたえることと同等である，と考えようというのである。

(1°)　関数 f_i は $m_1, m_2, \cdots, m_n$ だけの関数である。すなわち $f_i = f_i(m_1, m_2, \cdots, m_i)$

(2°)　m_{i+1} が選出されるときには $f_{i+1}=1$，選出されないときには $f_{i+1}=0$ のような選出関数列の組が動く可付番無限個指定された場合，これらの選出行為のいずれに対しても，上の不規則性公理のコレクティーフの存在証明はWald

によってあたえられている。さらに進んで Kolmogorov の立場から，すなわち(a) と同じく測度論的定式化においてコレクティーフの存在証明を与えることは Doob, Halmos, Feller 等によってなされている。賭けの概念を用いてのコレクティーフの拡張も Ville によって考えられている。不規則性の把握，個別相の追求といっても，確率論の対象としては，あくまでも集団的見地からの立言でなければならない。確率空間が，したがって測度論が前提されるときには，不規則性が明確な表現のもとに証明されるというのが，これらの結果の主張するところである。

2. 確率論の公理

前節で，コルモゴーロフの公理系をもとにして，近代確率論のうち立てた建築をながめてきた。ひとしく，確率論の名でよばれるけれども，たしかに，古典確率論の論じ得なかった違った様相を示すものである。それは，その上に立てられた近代確率論の成功のゆえに，コルモゴーロフ公理系の優秀性を事実において一応立証するともいえるであろう。果実によってその木の種を判断してよい段階に達しているともいえよう。

それにもかかわらず，コルモゴーロフ公理系の内容が，われわれが漠然と描いている確からしさを表現するものとしては，はなはだしく釈然としないものであることも，またいなめないといえよう。この点に関連していうと，この公理系と対立的な Mises の方法——統計集団を基本公理において規定する——に，より多くの親しみをおぼえるのはある意味で自然的であるとさえいえるであろう。しかし，Mises の方法がこういう点ですぐれているようであっても，近代確率論の大勢は，コルモゴーロフ公理系をもって正統的な基礎づけとしてこれを採用している。それは，なぜであろうか。この点の理解を深めておくことが肝要と思われる。

公理に関するわれわれの見解についてはすでに第1節で説明した。ここで確率論という数学の特殊部門における認識を通じて，その公理の意義に関する理

解を深めておく必要があると思われる。およそ公理は特定の体系については固定的なものであるけれども，数学の歴史的発展を通じてこれをみなければ，公理の意義はとらえがたいものである。ある公理体系から出発して，ある程度まで数学のある分野が建設され，発展していく。しかしこの発展は，一度出発したならばその出発点へもどることのない，ただ前進あるのみというものではない。やがては出発点へ立ち帰る必要にせまられるのが常である。それにはおよそ内外 2 通りの原因がある。1 つには，その部門の内的な動機と理由とからくることがある。既成の豊かな数学的事実相互間の関連を見とおしよくするために，基本原理ともいうべきものを発見しようとする。その原理に立ってこれらの既存の公理に，それぞれの位置と相互間の関連をあたえる。それは再構成である。しかしそれは，「大掃除」をしてきれいなお座敷にただおさまるためではない。本来は，あくまで前進のための準備でなければならない。出発点に立ちかえることの必要を生ずる第 2 の原因として，今までの進展において包含されなかった外的存在の強制にもとづく場合が指摘されなければならない。ここに外的存在というのは，いろいろの場合がある。その部門には属さないが，やはり数学の世界に属する数学的事実，数学的概念，数学的原理という場合もあろう。しかしもっとも根本的に重要なものは，数学の世界の背景となり，数学の基盤となっている経験世界からの強制である。これを契機として数学の変革，本質的な進歩がおしすすめられる。既成の理論よりも，はるかに演繹的な公理がうち立てられ，それから導かれる新しい成果の獲得に多忙となる。数学のこのような回帰運動は，単なる円運動ではなく，らせん的に進められていく。

ラプラスの古典確率論と近代確率論との関係がまさにそれである。この場合，外的存在としては端的にいって，統計力学の発達とのその数学的形式化の必要があげられるのである。再構成は，かくして，既存理論をさらにより鳥瞰的に見渡しよくするのみならず，かつてはみえなかった領域をも包含しようとするものである。このような意味では，公理は，既存の数学的事実を系統づけるための手段を提供するとともに，そこから出発した具体的な数学的事実を，

その豊かさ，複雑さにおいて確実にとらえるものでなければならない。しかし，公理再建の意義は，ただ既成事実の整理だけにあるのではなくして，新たな定理の発見でなければならない。「およそみごとな一般概念は生のままでわれわれの脚下に落ちころがっているのではない。実際明確な具体的な問題は，まず分離されない合成物のままで征服されてきたのである。それは無手で暴力によってといってよいであろう。公理主義者はこの後にやってきたのだ。そうして，『そんなに力まかせに戸をこわさないで下さい。そうして手を傷つけないで下さい。上手に鍵をこしらえられたら，わけはなかったのです。そうすれば，これで，こんなに静かに戸を開けることができたでしょうに』というのである。しかし公理定義者が鍵をつくり得たのは，戸がすでに開け放されて，内からも外からも錠前を調べられたからである。それゆえ拡張したりまとめたり，また公理化する以前に数学の実体がなければならない。」(H. Weyl, 1931年)

Weyl のこのことばは，数学の道具性と，公理に関する上述の所説とをよく表現し得ているというべきであろう。ただこれに加えて強調されなければならないことは，適切に選ばれた公理は，ただ既存の数学事実の解明のみにとどまるものではないことである。

数学における抽象化の傾向は，この意味で多くの輝かしい成功を事実において示したものである。しかし一方において，「まとめるべき数学の実体が漸次種切れしつつある」現状をなげくのはひとり Weyl のみではないのも，また実状であった。それは，しかし数学の抽象化が不毛なのでなくして，基盤の忘却軽視が原因であるといわれるべきであろう。少なくとも統計数学の分野には，そのような種切れをなげくよりも前に，問題のおびただしさに手をこまねくのみであるという現状に当面している。あらゆる混乱と動揺とを貫いて，社会が鉄の必然性をもって進み行く方向を見きわめることは，もとより至難である。しかし，数学の発展を規定するものは，けっきょくは社会の進展を規定するものにほかならないことは，歴史の示すところである。この線に沿うか否かは致

命的に大事なことである。ここに数学と基盤との関係，数学の弁証法的発展を理解することは，何よりも肝要である。数学の公理を，平面的に解釈し，固定的な形式理論の体系として解釈するならば，あらゆる誤謬をまぬがれ得ないのである。

数学のように，次第に専門化されて，しかも不断にいちじるしい進歩と変革とをとげつつある学問に対しての外部的な批判には，往々にして，はなはだしい見当違いのあるのは，けだしまぬがれがたいところではあろうが，数学者は努めてこのような誤解をとくべきであろう。Lenin は，物理学的観念論の第1の原因として，数学の精神による物理学の征服を指示していう。

「反動的傾向は科学の進歩そのものによって産み出されたものである。自然科学の偉大な進歩，物質の運動法則を数学的計算に服せしめるほどに，一様にして単純な物資の要素への接近，これが数学者による物質の忘失を産み出したのである。物質が消失すれば，後に残るものは，方程式のみである。」（唯物論と経験批判論）しかしながら，この責任は，一部の数学者の負うものであるかもしれないが，あえて数学それ自身の責任ではない。数学の形式性のゆえに，もし数学がすべて必ず「物質を忘失する」かのように思うならば，大きなあやまちである。数学は「物質」を忘失しない。「物質」を忘失せず，これを対象とするがゆえに，進歩してきたし，また進歩されなければならず，進歩され得る。ただ数学と「物質」との関係は，直接的でない。数学は開けなければならない戸を前にして，一歩しりぞいてつくった鍵という道具である。

今日の物理学が，工業技術なしには考えられないと同様に，数学なしには考えられない。道具としての実験設備にのみ気をとられて，道具としての数学を忘れるのは遺憾である。ここに大切なことは，あくまでも道具であることである。「物質を忘失する」ならば，道具の役をはたさず，みずからの生命をも失うであろう。

コルモゴーロの公理系は，確からしさの理論として充分の成功を得たものではあるけれども，これは確からしさの全貌をあますところなくとらえたものと

はいえない。端的にその本質をいえば，古典統計力学を基盤とし，その形式化に成功し，これを原型として形づくられた数学理論であると規定されるものであろう。統計数理の基礎づけとして，現在の数理統計学はコルモゴーロフ流確率論を援用するのであるけれども，なおよく fit していない感じは否み得ないのである。また統計力学が量子論の上に立つとき，確率の概念は重大な変革を必要とするであろう。そこではコルモゴーロフ流の公理系に対しては，根本的な批判が加えられなければならないであろう。

コルモゴーロフ公理系に立つ根拠には，事象即集合とみて，集合の演算をもって，事象間の操作を表現するということが存在する。完全加法族の上に定義された完全加法的な非負の集合関数として規定される確率は，近年発達した束論によれば，ブール代数の上の完全加法的汎関数としてみられる。論理的な見地からいえば，古典論理がそうであるように，ブール代数として，事象間には操作が規定されている。これに関しては第12章で述べることにしよう。

3.　理論統計学の基礎

現代統計学の建設者， Ronald Aylmer Fisher は， 1922 年その有名な論文『理論統計学の数学的基礎について』（Mathematical Foundation of the Theoretical Statistics） において， 理論統計学の当時までの状況を指摘して次のような意味のことをいっている。

「統計学の研究において，その理論的方面の研究は長い間閑却されていたが，これに関しては，幾多の理由が指摘されている。統計の実際的な応用面では，非常に大きな，そして有効な努力がなされてきたが，この科学の根本原理は依然不明瞭な状態のままである。一般に統計的方法の理論的基礎につきまとう不明瞭さは， 2つのことに帰着されるようである。第1には，すべての結論に過誤を伴うような対象に関しては，理念（idea）または概念（concepts）に正確な定義を与えうることは，たとえできるとしても，それは少なくも実際上は必要でないという考え方である。第2には，統計学では用語上の単なる混同

が，統計的諸問題の明確な形式化をさまたげているという事実である。たとえば，平均値，標準偏差，相関係数等の用語を，われわれが知ろうと欲するが，しかし単に推定することしかできないところの真の値の意味に解釈することもあれば，またわれわれがたまたま採用したそれらの真の値の推定値と解釈することもあるのである。そこで，確率誤差（中央誤差，probable error）ということばを使う場合に，推定値の確率誤差（中央誤差）という意味ならよいが，真値にもまた中央誤差が伴うような感じを抱くようになる。私のみるところでは，この混同こそ，現状のような逆確率（inverse probability）という根本的なパラドックスへわれわれをひき入れたものである。そしてそれは抜けがたい草ヤブのように統計的概念を正確にすることをさまたげるものである。

Boole, Venn ならびに Crystal の批判は，少なくとも初等代数学の教科書からは，この方法（逆確率の方法）を駆逐するために，幾分かの貢献があった。逆確率はようするに１つの過誤（mistake)——これほど深刻な mistake を数学界がなしたことはない——であるという点で，われわれは Crystal と同意見である。しかし，単なる過誤であるならば Laplace や Poisson の心をあれほどまでにとらえなかっただろうという感じは禁じえないのである。」

とすれば R. A. Fisher はどのようにして統計学を建てなおしするのであるか。Fisher はいう。「統計的問題の正しい形式化に到達し得るためには，統計家の任務を規定することが必要である。簡単に，かつ最も具体的にいうならば資料の簡約（reduction of data）が統計的方法の目標であるといえよう。資料はその素材のままではとらえがたい。それゆえ，適切に全体を表現するような比較的少数の量によってこれをおきかえようとするのである。いいかえれば，原資料に含まれる適切な知識（relevant information）の全体を表わす量を求めようとするものである。」

とすれば，これはいかにして可能であるか，R. A. Fisher は続けていう。「仮説的な無限母集団（hypothetical infinite population）をつくることによって，この目的は達せられる。仮説的無限母集団とは何であるか，それは現実

の資料がそれの任意標本（random sample）と見なされるようなものである。」

この仮説的な無限母集団が比較的少数のパラメーターによってそれの分布法則が与えられるとしよう。標本によって与えられる知識のうち，これらのパラメーターの値を推定するのに役立つような知識は，適切な知識である。資料によって与えられる独立な事実の数は，求めようとする事実の数よりもはるかに大きいから，実際の標本から与えられる知識の多くは不適切（irrelevant）なものである。資料の簡約において採用される統計的処理の目的は，この不適切な知識をなるべく除外して，資料のなかにふくまれる適切な知識の全体をとり出すことなのである。」

R. A. Fisher のいう意味は次のようである。たとえば正規分布密度関数

$$(7)\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

をもつ仮説的母集団を考えよう。資料として $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が与えられ，これがこの仮説的母集団よりの標本とみよう。（7）は m と σ とだけによって規定されている。しかし $x_1, x_2, \cdots, x_n$ という**大きさ n の標本**（a sample of size n）には n 個の独立な事実がふくまれている。資料を計量化するという統計学的手続きは m と λ とに関するあらゆる適切な知識を，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ のなかから摘出（extant）し，かつ不適切な他のすべての知識をすて去ることである。」

R. A. Fisher は確率との関係について述べている。

「あるものがある特定の条件を満足するかいなかによって，2つの組にわかれる。われわれが認識しうるのはこの性質だけである。この理由により，確率は統計的概念のうちで最も基本的なものである。確率は仮説的無限母集団において，simple dichotomy を特徴づけるパラメーターにほかならないからである。それは，母集団のあらわす度数比にほかならない。不連続な度数分布は simple dichotomy にすぎない。度数曲線という概念には――仮説的無限集団というとき一度無限の概念を入れたが――第2の無限が導入されている。」

R. A. Fisher の以上の所説を少し整理してみよう。

(1°)　統計資料を標本とみる：標本とみることは，母集団を想定することである。そうして現実の資料は，この母集団という可能性の世界が現実化した現象形態であるとみるとき，すなわちこの母集団からの標本となる。

(2°)　統計的認識の目的は母集団を知ることである：そうしてそれには標本を利用する。すなわち標本のもつ適切な知識だけを摘出し，適切でない知識はすてる。

この二点が，近代統計学出発の礎石となった最も基本的なところである。R. A. Fisher の上述の論説にはなお多くの主張がある。たとえば (a)逆確率の排撃がそれである。しかし，この点では現代統計学は，かならずしも R. A. Fisher と一致しない。以上の(1°)，(2°)とは一応切り離して考えられる。(b)観念と定義の不明瞭さを責めている。この点は (1°) の見地をとるかぎり一応の解決はつく。(c) R. A. Fisher は，仮説的無限母集団という用語を用いている。この無限というのは何か。それは実際の資料は常に有限であるけれども，これの極限としての理想状態として資料の大きさが無限になった場合を考えるというわけである。これは確率論の合理化がいまだ不徹底な時代に制約されたためとみるべきで，われわれはこの制約をとって考えるべきである。すると，それはコルモゴーロフ流の確率論でいうところの確率変数にほかならない。(d)任意標本という制約がある。しかしここに任意というのは，かならずしも厳密に確率論のいわゆる独立の意味でなければならないことはない。この制約もとるべきである。

R. A. Fisher のこの見解は，近代の統計数理の根幹をなしている。しかしながら，われわれはここに多くの注意をつけ加えることによって誤解を避けておかなければならない。

第1に，統計資料を母集団からの任意標本とみるということは，第9章4節で述べたように集団化，標識化，層別化，等質化を経た後の段階にほどこしてのみ有効であるということである。もしそうでなかったならば，質的相違を捨

象し，「物質を忘失した」ものになり下がらざるを得ないのである。この点に関しては前の諸章ですでに詳述したとおりである。

第2に母集団の仮説性は明確に把握しなければならない。けっきょく，母集団の設定ということは仮説の提示であり，資料はこの仮説を検定すべき実験に相当することである。

以上のように整理した上で，われわれは，近代統計学の理念をコルモゴーロフ流の確率論の立場から，基礎づけてみよう。

4.　確率論と近代統計学

近代統計学の特徴は，それが推測統計学であるということである。推測の論理を提示するところに統計学の主要目的をおくことである。そこにおいて基本的な考え方は，母集団と標本とを明確に区別することである。われわれが実験を行ない，調査をほどこして，現実に得たものは，実験資料とか調査資料とかいわれる資料である。しかしわれわれの知りたいとするのは，当面の場面という個別的相それ自身ではなくして，これをふくむ一般的なものである。われわれがもつ資料がある固定的な一定不変の等質な集団からの任意抽出であると見なされるとき，資料 (data) はこの集団を母集団 (parent population) とする標本 (sample) ——くわしくいえばこの場合，任意標本 (random sample) であるという。固定不変な等質集団の定立，この集団からの任意抽出，この2つの条件を満たすときには，標本のあらわす様相はストカスティックになる。第1に，その示す様相は種々あって，しかもそのいずれが起こるかは非決定論的形式で考えなければならない。第2に，しかしながら，各様相のあらわれる頻度の恒常性というものが，保証されている。それゆえ，この実践行為のあらわす事象の様相は，確率事象系のそれとして把握されるのである。事象の様相が標識として与えられ，それが数量化されているとき，この確率事象系は確率変数として表現されるということになる。

近代統計学は，母集団を想定して，資料を，この母集団より抽出した標本と

見なすところにその特徴がある。母集団の想定ということが明確に定立されなかったところに，前節で述べたような，概念の混乱が統計理論において起こったのである。

しかしながら，ここに母集団の想定ということは，母集団を想像すること，そしてそれを定立し，そこから出発すること，の三段階を意味する。ここに二重の性格とその機能とが指摘されなければならない。第1に，それは人間が想像して概念として構成したものであり，そのかぎりにおいては人間の思惟にもとづく抽象的存在である。第2に，しかしながら，それは現実のある近似度における模写反映であることにより，現実の資料分析のための存在意義をもつ。この2つの性格から導かれるように，母集団のはたす機能は仮説の提示ということである。

第1の性格を忘失するとき，実在の世界に固定的な不変なものを導入して，これを実在と考えるようになる。しかし，それは抽象的な概念を実在的な存在とすりかえ，模型を実物とはき違えることであり，そこに物質の忘失が始まる。一定不変の秩序の世界を現出しようとする思想体系へまき込まれる。母集団は実在そのものではない。しかしながら，第2の性格によって，母集団はその客観性を保証されなければならない。人間の恣意により種々の母集団を想像し，定立し，これを現実におしつけることは可能である。しかし，こうして出発しても，第2の性格をもつという条件に適合しないかぎり，現実は手きびしい反発により，その架空なことを指摘するだけである。母集団はわれわれの考えたものである。しかしそれは実在のある写しであるがゆえに意味がある。そこには，客観的な実在があり，われわれがそれを把握しようとすること，しかもわれわれのとどまる段階がただ近似性しかもたないこと，この2つを理解しなければならない。そうして母集団が実在に対する近似度を高め客観性をますことは，実践を通じてその基準が示されるのである。

任意抽出ということも，母集団の想定と同じく，上に述べた二重の性格をもつ。こうしてそれ自身は1つの仮説として，実践を通じて批判されるべきもの

である。

それゆえに，母集団の想定と任意抽出とにより，確率事象系を対応させて考えるとき，第1に，それは思惟の抽象的構成であること，第2に，しかしそれは実在の模写反映であること，この二重の性格をもち，それ自身は仮説の提示にあり，真理の客観性は実践を通じて得られることを銘記しなければならない。

Quetelet の古典統計学は，第1の点を忘失し，思惟の抽象的構成をもって実在と同一視した。その根底に機械的唯物論が横たわり，力学的自然観が支配的であった。物体の測定誤差理論のモデルをもって社会現象をみるとき，不変なる真実の大きさを社会現象において実証する方面へ主力を注ぎ，社会の歴史性，社会現象のメカニズムへの究明をいっさい忘失するにいたったところに，Quetelet の社会物理学の失敗があった。統計学的には母集団の第1の性格と，仮説の提示という使命を忘れているところに欠陥を露呈している。これに反して，Pearson の記述統計学では，第1の点は強調されている。しかし，第2の点が無視されているために，Mach の経験批判論のわくの外には出ることができなかった。仮説の検定の役目は，ようやく意識されているけれども，母集団のもつ第2の性格を無視したところに大標本論をぬけきれない原因がひそんでいるのである。なぜならば，Pearson のことばを借りれば，自然法則は実在するのでなく，物質も実在しないのである。われわれのもつものは本源的には感官印象のみであり，真理は思惟経済のための速記的記述だからである。実在の姿を，実践を通じての操作により，諸種の変動因より洗いきよめて，客観的存在そのものと，われわれの思惟構成との対応の近似度を高めるという考え方がないのは，母集団の第2の性格に対する無視に由来するものであり，さらに根本的には，彼の記述哲学までさかのぼって指摘されなければならない。このことは，同時に，Pearson の統計学を観察の論理にとどめ，記述の文法にとどめた。そうしてそれは，大標本論によらざるを得ないように限定させたのである。なぜならば，客観対象が種々の変動因から洗いきよめられ，突き止めうる

変動因を管理しておいて，後に対象は次第に個物から典型的存在へ昇進する。もはや変動因の突き止められないと見なされるとき，このような個物の集団は，確率集団のモデルをもって近似的に模写反映させうる。一度，その段階に達すれば確率論の適用の示すような小標本は，充分大標本に匹敵する。この逆をいえば，小標本ですまされなければならないときには，確率集団のモデルをもって近似的に模写反映させうるよう実在の世界に働きかけて，そういう場合を実現させようとするのである。もし，この操作が行なわれてなければ，小標本はなんらの明確な立言をもあたえ得ないであろう。第2の点を閑却したところに，Pearson の記述統計学が大標本にならざるを得ない原因がひそむ。そうして大標本論にたよらざるを得ないかぎり，変動因を分析的に検出するという方向へは進まないで，大標本にあらわれた現象の記述にとどまらざるを得なかったのである。そうしてまた実践を通じて真理の客観性を保証するということは，Quetelet と同じく，Pearson にあっても正しくは理解されていないのである。

母集団の設定はあくまで仮説の提示であり，それは実践をもって批判されなければならない。近代統計学における仮説検定の方法は，実践による批判の論理を示すものというべきであることは次節に詳述しよう。

概念が実在の近似的な模写であり，それは，人間の実践を通じて次第に深刻的確に対象を認識していくための道具であることは，すでにしばしば強調したところである。この点からみるならば，統計学でいうところの母集団が，袋のなかの球の任意抽出とか，測定の偶然誤差の理論とかにモデルの原型をもつことが指摘されなければならない。前者は商業資本の勃興とともに社会に盛んになった「一六勝負」を代表し，後者は天文学が，したがって天体力学が航海用に要求された時代の産物である。われわれは，これを，人類が先験的にもつ概念のように思ったら大変な間違いであろう。

5.　推測統計学の構成

母集団から標本抽出法によって標本をつくるという操作としては，いろいろある。そのうちで最も基本的に重要な1つの場合を述べると，それは通常次のような意味である。

(1°)　1つの集団 Π なるものを想定する。これはここでは母集団といわれるものであるが，その構成要素の個数は無限個であっても有限個であってもよい。Π は概念的な存在であっても，あるいは実在するものであってもよい。

(2°)　集団 Π は等質化，標識化，数量化されているとする。

(3°)　集団 Π から，任意抽出法により，無作為 (at random) に1つの構成要素をとり出す（たとえば集団 Π の各構成要素を同型同質の球によって代表させて，これらの球を袋に入れて，袋から球を無作為にとり出すという操作がこれに対応する)。こうして抽出された構成要素について，その標識たる数値を読みとる。これを x_1 と書くことにしよう。

(4°)　一度抽出された構成要素を，もとの集団 Π に返却する場合 (with replacement) と，一度抽出された構成要素は，集団へ返却しない場合 (without replacement) との 2 通りの場合が重要である。以下返却の場合について考える。すると x_1 が抽出され，記録されてまたもとの集団 Π へ返却されたとき，Π は初めの状態と全く同じ状態にあると考える。さて次に，第1回と同様にして，無作為に，また1つの構成要素をとり出し，その標識の数値 x_2 を読みとる。この抽出は前に x_1 を得たということにはなんら影響されていないものとする。

一般にこのようにして $x_1, x_2, \cdots, x_k$ なる数値を得たとき，第 $(k+1)$ 回の抽出を行なうに当たっては，抽出の各回ごとに返却が行なわれてきているから，初めの母集団となんら変化はないわけである。そうして，第 $(k+1)$ 回の抽出は，既往の結果 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ には無関係に，しかも任意抽出として行なわれるものとするのである。

このようにして n 回の抽出により，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を得るとき，これを大きさ (size) n の**任意標本** (random sample) といい，Π を**母集団** (parent population) という。

以上の (1°)—(4°) の性質をもつ抽出法を確率変数をもって表現すれば，次のようになるのである。

(I)　n 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を想定する。

(II)　各 X_k の分布関数 $F_k(x)$ はみな同一である。

$$F_1(x)=F_2(x)=\cdots=F_n(x)$$

(III)　これら n 個の確率変数は相互に独立である。

(IV)　これら n 個の確率変数をもって構成された複確率事象系 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ において各 X_k がそれぞれある特定の値 x_k として実現したのが標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ である。

例をあげよう。昭和 22 年における年齢満 20 歳の日本男子の身長というものを考えると，過去の統計から知れているように，それはある平均値 m と標準偏差 σ とをもつ正規分布をしていると認められよう。ある方法で，今そのうちより 10 人を任意抽出して，$x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ の数値を得たという場合，上式の確率変数 X_k はいずれも平均値 m, 標準偏差 σ の同一の正規分布関数に従うということがわかる。測定誤差が誤差理論により正規分布に従うと見なせる場合も，その数学的表現はこれと同じ形式になる。

われわれは，取り出した球を袋へ返す場合について述べた。各回返却しない場合になると，各回の試行結果を表現する確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ はもはや独立ではない。このような場合は，母集団を構成する要素の数が有限個の場合にはとくに重要な場合であって，見のがすわけにはいかないものである。

以上の事柄を一般化して考えると，各回試行の結果起こり得べき可能性の世界を確率変数で表現する。第 k 回試行の結果については確率変数 X_k で示す。第 k 回試行で得られた現実の数値 x_k は，ようするにこの可能性の世界である確率変数 X_k の 1 つの現実化，現実値としてみるべきものである。以下その点

だけが本質的に重要であって，各回試行の独立性は，返却的な任意抽出の場合に必要であるということにとどまる。

(8)　$$P(X_1 \leqq x_1, X_2 \leqq x_2, \cdots, X_n \leqq x_n) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

とおく。

この $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は一般には未知の分布関数である。この未知の分布関数が分布関数のある集合 w に属するということが仮説 Hw となる。たとえばある特定の平均値 m および標準偏差 σ をもつ母集団からの任意抽出ということであれば

(9)　$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x_k} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} du$$

となるわけである。任意抽出のとき平均値 m および標準偏差 σ を指定してしまえば，分布関数は一定してしまうから，m を横軸，σ を縦軸にとった空間で w は一点として表わされる。母集団に対応する確率変数の分布関数を特徴づけるところの母数（上例では m と σ）に対しての可能な変動範囲は，母数が k 個あれば，k 次元ユークリッド空間をもって表現しうる。これを母数空間（parameter space）という，w が母数空間の一点であるとき，仮説 Hw は**単純仮説**（simple hypothesis）であるといい，そうでないときを**複合仮説**（composite hypothesis）という。標本の値 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は n 次元ユークリッド空間の一点と見なされる。それは各標本により異なった点となって表われる。これを標本空間（sample space）という。

ここにおいて，仮説検定の問題は，次のように形式化し得るであろう。すなわち資料 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は確率変数 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の現実値であるとの想定のもとに，確率変数 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の分布関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が，母数空間の集合 w に属するという仮説 Hw を受諾するか，あるいは棄却するか，あるいは保留するかということを決定することである，と規定し得られるであろう。そして，これを判定する方法として，標本空間に R という領域を適当につくり，現実の標本点 $E = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ がこの R の内部に落ちているときに

は，仮説を棄却 (reject) する。Rの内部に落ちないときには，仮説を保留 (maintain) するという論理をもって対処しようとするものである。ここに大切なことは，このような全員域Rをいかにして選ぶかということである。Rを有意域 (critical region) という。

分布関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に関しては，実際の場合にはそれぞれ多かれ少なかれ若干の知識がすでにあるものと前提されてよい。たとえば上述の返却的な任意抽出法による標本であることが前提されてよいときには，

(10) $$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = G(x_1)G(x_2)\cdots G(x_n)$$

とみてよいわけであり，さらにある場合には，Gは正規分布であると前提してもよい。その時には，その上なおその平均値，標準偏差の双方の値がわかれば，もはや，Fは決定的にきまってしまうのであるが，これら2つの値のうち少なくも一方が現資料獲得以前には，わかっていないということが多い。このように現資料以外の知識によって得られる知識は，分布関数Fがある分布関数の集合 Ω に属するという知識をもって表現し得るとしよう。以下そういう場合だけを考える。

この前提が成り立つかぎりにおいては仮説検定の問題は，ようするに次のように形式化し得るのである。すなわち未知の分布関数Fが，分布関数の集合 Ω に属するということは前提しておいて，Ω のある部分集合 w に属するか否かを検定することが**仮説検定の問題**になるのである。それは有意域を標本空間においていかにしてつくるかという問題に帰着する。

たとえば，(i) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は相互に独立な確率変数で，(ii) みな同一の正規分布に従う，というときには，Fは，前述の (10) により表わされる。したがって Ω とは，このようなFの全体である。そこでは，$-\infty < m < \infty, \sigma \geqq 0$ という条件のもとで m と σ は任意である。これに対して，w をば $m=0, \sigma \geqq 0$ にとれば，w は Ω の部分集合である。このとき H_w を仮説とすればこれを検定するには，たとえば t-分布を用いて，有意域がきまるのである。すなわち

$$(11) \qquad \bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad \text{(標本平均値)}$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \quad \text{(標本標準偏差)}$$

$$t=\frac{\bar{x}\sqrt{n-1}}{s}$$

とおくとき，有意域Rは，適当に選んだ常数cに対して，

$$|t|\geqq c$$

を満足するような $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の点集合である。

ここに以上の形式化によって，数学的形式が統計学的表現（解釈）といかに対応するかをもう一度振りかえってみよう。

統計学的表現	数学的形式
n 個の観測値の可能なすべての結果	標本空間 E_n（n 次元ユークリッド空間）
可能な確率分布の集合	E_nにおいて定義された分布関数のある集合Ω
真の確率分布は w に属するという統計的仮説 Hw	Ωの部分集合としての w 定立
	E_nの部分集合として有意域R
統計的仮説 Hw を棄却するための判定条件	Ωと w とに対してRの選定

以上においてわれわれは，統計仮説検定論の数学的形式化をみてきた。このほか重大な問題として，**統計的推定論** (theory of statistical estimation) をあげなければならない。今 A. Wald に従って，この問題は一般的に次のように表現し得ることに注意しよう。未知の関数Fが，分布関数の集合Ωに属するということが前提された場合，標本Eにもとづいて決定される関数 φ(E) を適当に選ぶことによって，次の条件を満足させることを問題にするのが統計的推定

論というものの根本性格である。その条件は，$\varphi(E)$ は当然Ωに属すること，次に，$\varphi(E)$ が未知の分布関数Ｆの良好な統計的推定（good statistical estimate）であるということである。ここに good statistical estimate ということは，一般的には次のように規定されよう。すなわち，ある小区域に $\varphi(E)$ が存在する確率をできるだけ大きくしたものである。

たとえば，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ に関して，(10) 式の成立が前提され，しかも標準偏差 $\sigma=1$ として前提されたとする。このとき，標本 $E=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をもととして，母集団平均値mを推定しようという問題が起こるであろう。従来のやり方は，

$$\varphi_1(E)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \tag{12}$$

という方法であった。しかしこれだけがただ一つの方法ではない。たとえば

$$\varphi_2(E)=\text{Median of }(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{13}$$

とすることも可能である。そこで，$\varphi_1(E)$ と $\varphi_2(E)$ とはいずれがよいかという問題もおこる。

6.　推測統計学の諸問題

R. A. Fisher 以来，近代統計学の根本的な問題は，次の４つに要約される。

〔Ｉ〕 特徴づけの問題（Problems of specification）

〔II〕 統計的仮説検定の問題（Problems of testing statistical hypotheses）

〔III〕 統計的推定の問題（Problems of statistical estimation）

〔IV〕 標本分布の問題（Problems of sampling distribution）

ところでこのうち〔II〕と〔III〕とについては，その数学的構成を述べた。〔Ｉ〕は，前節の記号を用いれば，分布関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の関数型をいかに選ぶべきかという問題を意味すると，R. A. Fisher は規定している。たとえば，任意抽出標本であるとき各標本分布が正規分布に従うか否かというような問題は，正規分布を規定する２つの母数mとσとに関する仮説の検定あるいは推定

の問題と切離して，それよりもさきに論じておかなければならないというふうに解釈するのが，R. A. Fisher のいき方であり，したがって，〔II〕および〔III〕においては，ある有限個のパラメーターに関する仮説検定，あるいは推定の問題として取り扱おうというのが，R. A. Fisher 以来ネーマン－ピアソンのいき方であった。この研究方針に対しては，おそらく反省を要するものがあり，この分離の妥当性の検討は，統計推理の発展の鍵ともなろう。〔IV〕は，以上の問題を取り扱うための手段ともなるべきもので，内容的には，諸々の確率変数に関する四則，一次形式，一般にいうと，確率変数（$X_1, X_2, \cdots, X_n$）の分布関数を知って，それら確率変数の関数 $G(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の分布関数を求める問題であるといえる。$x_1, x_2, \cdots, x_n$ の関数 $G(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を**統計量**（statistic）というのであるが，この統計量に対する確率変数にほかならない。たとえば $x_1, x_2, \cdots, x_n$ なる標本に対して，標本平均値 $\bar{x}$，標本標準偏差 s，あるいは t はいずれも統計量である。ところでよく知られているように，$\bar{x}$ および s はそれぞれ母集団平均値 m および母集団標準偏差の**推定**(estimate)である。〔I〕,〔II〕および〔III〕を論ずるに当たって，われわれは，これらの統計量あるいはその特別の場合として推定量の確率分布を用いなければならない。この確率分布を求める問題が〔IV〕にほかならない。

ここでは，〔II〕および〔III〕に関して，重要な成果を紹介するにとどめよう。

A. **仮説検定に関するネーマン－ピアソンの理論**　この理論は，前節の用語を用いると，Ωが k 個の母数をもつ分布関数の集合にとった場合である。すなわち，母集団よりの標本抽出に関しては，未知ではあるが，ある一定の関数型をもつ分布関数を想定し，しかもそこにおける未知の母数はたかだか k 個とするのである。k 次元ユークリッド空間に，この k 個の母数の座標をもとめることにより，Ω の要素との間に一対一の対応をつけるのである。かくして Ω すなわち母数空間とみるのである。

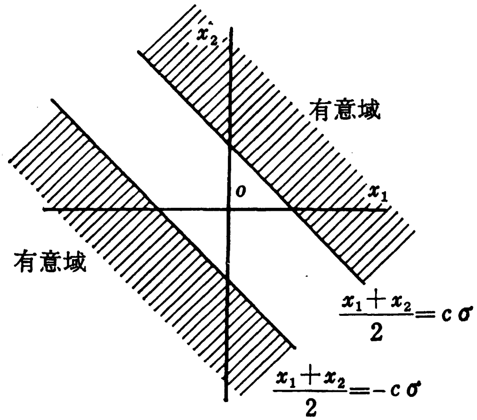
簡単な例として，任意標本抽出であって，標準偏差 σ は既知の正規分布を前

提し，平均値θのみを問題にする場合を考えよう。このとき

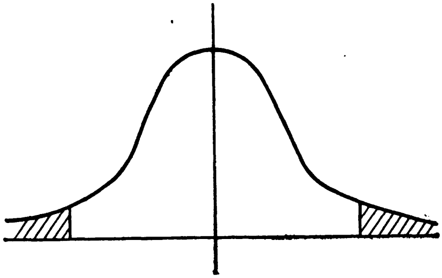
$$(14)\qquad F(x_1, x_2, \cdots, x_n ; \theta)=\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})_n}\prod_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{x_k} e^{-\frac{(u_k-\theta)^2}{2\sigma^2}}du_k$$

となっている。このとき $\theta=0$ かどうかを検定しようとする。

古典論においても，すでに記述統計学の項で述べたように，$|\bar{x}|\geqq c\sigma$であるとき，かつそのときにかぎり，$\theta=0$ という仮説は棄却していたのである。ここに常数 c の選び方は，次の原理によっていた。すなわち，$\theta=0$ という仮説のもとに $|\bar{X}|\geqq c\sigma$ ということの起こる確率が小さいときには，この仮説をすてる気になり得るように c をとる。このことは，ある小さな確率αをあたえて



11－2図

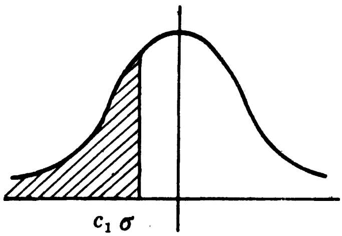


11－3図

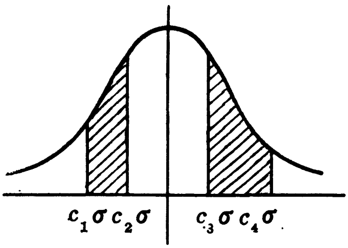
(15)　　$P(|\overline{X}| \geqq c\sigma)=\alpha$

これを満足するようなcをきめるのである。たとえば $\alpha=0.05$ とすれば $c=1.96$ である。

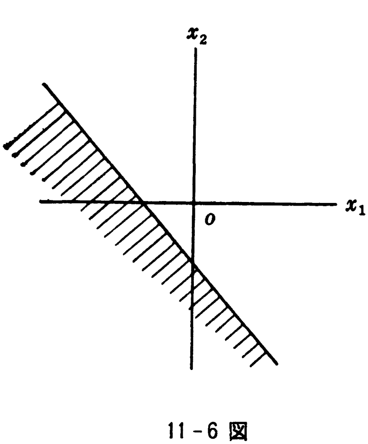
しかし，ここで重要なことは，古典理論にあっては，11－2 図のように，なぜこのような有意域を用いなければならないかの理由を明らかにしえなかった。上述の $\overline{X}$ は1つの統計域量に対する確率変数である。この論法は，次のことに同一である。$\overline{X}$ の分布関数を求めてみると，$\theta=0$ という仮説のもとにあっては，それは標準偏差$\sigma/\sqrt{n}$ の正規分布である。上述の有意域の作り方は，この分布において，11－3 図のように，$|\overline{X}|$ がcより大きくなる「すそ」の方の面積を 0.05 にとってある。しかし，今まで述べた論法でいくと，何も「すそ」の方に対応に切り捨てる部分をつくらなくとも，ほかにいくらも



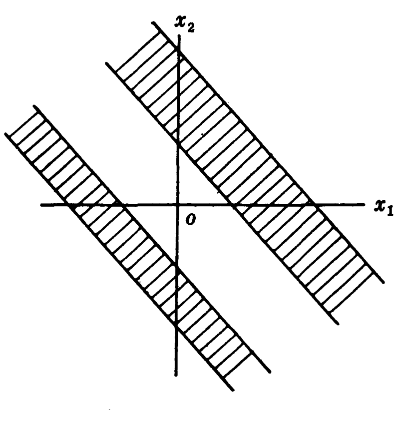
11－4 図



11－5 図



11－6 図



11－7 図

方法はある。それは 11－4〜7 図によってみられるとおりである。

とにかく次のようにとればよい。

(16)　$$P(\overline{X} \leqq c'\sigma)=0.05$$
$$P(c_1\sigma \leqq \overline{X} \leqq c_2\sigma)+P(c_3\sigma \leqq \overline{X} \leqq c_4\sigma)=0.05$$

このように，有意域のとり方には，いろいろ可能であるから，われわれはこのうちいかなるものを選ぶべきかの基準をもたなければならない。この点を明確に意識して形式化した点に，ネーマン－ピアソンの理論の画期的な意義を認めなければならない。仮説が真なるにもかかわらずこれを偽りなりとして仮説を棄却する過誤を**第Ⅰ種の過誤**といい，仮説が偽なるにもかかわらず，これを真なりとして採択する過誤を**第Ⅱ種の過誤**という。標本空間においてつくられた有意域Rに，標本が落ちる確率を**有意域Rの大きさ** (size) という。上例ではRの大きさは $\alpha=0.05$ であった。有意域の大きさとは，第Ⅰ種過誤の起こる確率にほかならないのである。

ネーマン－ピアソンの理論の骨子は，第Ⅰ種過誤を一定の指定値 σ 以下にしたもののうちで，第Ⅱ種過誤を最小にするような有意域Rを求めることにあるといえる。未知の母数が1個の場合についていえば，仮説 $\theta=\theta_0$ のときに，Rに落ちる確率を α にとる。このようなRのうちで θ が他の値 θ_1 のとき，Rに落ちる確率が最小になるようにRを選ぶということである。すなわち原則的には

(17)　$$\begin{cases} P(R/\theta_0) \equiv \int_R dF(x_1, x_2, \cdots, x_n ; \theta=\theta_0)=\alpha \\ P(R/\theta_1) \equiv \int_R dF(x_1, x_2, \cdots, x_n ; \theta=\theta_1)=\cancel{\text{Min}} \quad \text{Max} \end{cases}$$

$P(R/\theta_1)$ を $\theta=\theta_1$ に関する有意域Rの**検定力** (Power) という。Rを一定にしておいて，検定力を θ の関数とみるとき，**検定力関数** (Power function) という。

上例にかえって述べよう。今有意域の大きさ $\alpha=0.05$ としよう。そうして次の二種類の有意域RおよびR′をとる。すなわちRは $|\bar{x}| \geqq c\sigma$ によりR′

は $\bar{x} \geqq c'\sigma$ により，標本空間内に規定される領域であるとする。$c=1.96/\sqrt{n}$, $c'=1.64/\sqrt{n}$ となることは正規分布関数表から容易にわかる。

$$(18)\qquad P(R/\theta)=P(|\overline{X}|\geqq c\sigma/\theta)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\int_{|u|\geqq c\sigma} e^{-\frac{n(u-\theta)^2}{2\sigma^2}}du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{-1.96+\sqrt{n}\frac{\theta}{\sigma}}+\int_{1.96+\sqrt{n}\frac{\theta}{\sigma}}^{\infty}\right\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

となり，同様にして

$$(19)\qquad P(R'/\theta)=P(\overline{X}\geqq c'\sigma/\theta)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1.64+\sqrt{n}\frac{\theta}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

そこで，これを図示するのには，$\sqrt{n}\theta/\sigma$ を便宜上 1 つの母数φとしてとることにして，

$$(20)\qquad P(R/\theta)=P(R/\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{\infty}^{-1.96+\varphi}+\int_{1.96+\varphi}^{\infty}\right\}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\equiv P_1(\varphi)$$

$$P(R'/\theta)=P(R'/\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1.64+\varphi}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}d\varphi\equiv P_2(\varphi)$$

一般に同じ大きさの 2 つの有意域 R および R′ が存在するとき，θ のある値 $\theta=\theta_1$ において，R′の検定力曲線が R の検定力曲線の上にあるならば，θ の真値が θ_0 である場合に，第II種の過誤をおかす確率は，R′ の方が R よりもより小になる。したがって，R と R′ は第 I 種過誤をおかす確率は等しいが，第II種過誤をおかす確率は R′ の方がより小である。$\theta=\theta_1$ に対して R′ が R よりもより**有力** (more powerful) であるという。$\theta=\theta_0$ 以外のすべての θ の値に対して，R′ に対する検定力曲線がRのそれよりも上にあるならば，**一様に** R′ はRよりも**より有力** (uniformly more powerful) というべきものとなる。もしそういう事情が現出したとすると，Rをえらぶ理由は，一応ないので，R′

を当然選ぶべきである。もしも幸いにして，Rの検定力曲線が同じ大きさをもつほかのいかなる有意域 R′ の検定力曲線の下になることがないならば，Rは**一様に最有力**（uniformly most powerful）といわれる。しかし多くの場合，一様に最有力な有意域というものはないのである。

上例についてみても，R と R′ とは，一方が他方より一様にはより有力となっていない。しかし，次のことは見得られるであろう。θ は必ず負にはならないということが a priori に知られているならば，$\theta \geqq 0$ だけを考えればよいから R′ は R よりも一様により有力であるといえるし，同様にして，$\theta \leqq 0$だけを考えてよい場合には，標本空間において $x \leqq c'\sigma$ で定義される有意域 R″ の方が，R あるいは R′ よりも，一様により有力であるということはいえる。このように当の資料以外の知識が充分に活用されなければならない。とくにこれらの知識がなければ R は R′ と R″ との何よりも，より妥当であると考えられる。それらがもっと一般に考えて次の点からも考えられよう。

このことは，ネーマン－ピアソンの導入した原理として**不偏性の原理**ということを，有意域選定の基準条件にとることによって明らかになるであろう。ある検定法，すなわちある有意域が不偏であるというのは，その検定力関数が，検定しようとする母数値 $\theta=\theta_0$ の付近において局部的に極小になっていることである。この原理を基礎づけるのには，もしかりに，この不偏性原理が満足されてない有意域を考える（たとえば上例のR′）。すると，仮説を却棄する確率が $\theta=\theta_0$ のときよりも，θ_0 でないある θ_1 のときにおいて，より大きいということになる。これは望ましい状態ではないといわなければならない。ところでこの不偏性を満足し，しかも同一の大きさをもつ有意域をもつ諸検定法のうちで，他の対立仮説のすべてに関して他のいかなる検定法にもまさるとも劣ることのない検定法，いえかえれば少なくとも同等またはより以上に有力な有意域をもつ検定法を，**一様最有力不偏検定**（uniformly most powerful unbiassed test）という。このような検定法に対応する有意域をネーマン－ピアソンは**A_1型有意域**と称したのである。

上例についていえば，R は A_1 型有意域であることが証明できる。A_1 型有意域は，重要な場合に見いだされるのではあるけれども，他方，多くの場合にそういうものが存在しないということもいえるのであって，ネーマン－ピアソンがさらに進んで第3の型を導入したのが，すなわち**A型有意域**というものであって，ある有意域RがA型であるというのは，それの検定力関数が次の性質を有することである。

$$(21)\qquad (1^\circ)\quad \left(\frac{\partial P(R/\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=\theta_0}=0$$

$$(2^\circ)\quad \left(\frac{\partial^2 P(R/\theta)}{\partial\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0}\geqq\left(\frac{\partial^2 P(R'/\theta)}{\partial\theta^2}\right)_{\theta=\theta_0}$$

ここに R′ は (1°) の条件を満足し，R と同じ大きさをもつ任意の有意域である。

条件 (2°) は，簡単にいえば，θ_0 の付近では R が最も有力であると主張するものと，だいたいみてよいであろう。A型有意域は，多くの場合に存在し，実用上重宝である。ただ，これは検定しようとする値 $\theta=\theta_0$ の付近だけの検定力の比較で最有力というだけであるが，実際問題となるのは相当離れた θ の値である，という非難もあったわけである。しかしこれらの非難は最近の研究によれば，かならずしも当たらないようである。

B. **R. A. Fisher の推定論**　標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の適当な関数 $T_n=t_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を選び，これをもって母集団の未知母数 θ の推定値としようとするとき，いかなる関数をとるのがよいか，あるいは最良かという問題がおこる。われわれの立場は，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ をもって確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の実現値とみるのであるから，問題は，確率変数 $t(X_1, X_2, \cdots X_n)$ を規定する関数 t の決定にあるといわなければならない。すなわち，関数 t を適当にとることによって，未知母数の真の値の近くにある確率をできるだけ大きくすることであると，概括していうことができよう。

推定の方法とは，この場合関数 t の選定法に帰着するのであるが，これに関

して，まず第1に常識的にあげられるであろうことは，標本の大きさを限りなく大きくして全集団にいたるようになるならば，その推定は真の値をあたえなければならないということであろう。数学的にいえば，T_n がなんらかの意味において θ へ収束しなければならない。この条件を満足する統計量を**一致統計量** (consistent statistic) という。R. A. Fisher の推定論の出るまで，Markov 等の研究を別とすると，この一致性のみが推定法選定のただ一つの基準であった。しかし，ここに多くの問題がある。

マルコフの基準というのは次のようなものである。Markov は次の条件を満足するとき，この統計量を最良推定 (best estimate) といった。

(1°) 第1に確率変数 $t(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は不偏である。すなわち

(22) $$E_0\{t(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=\theta$$

ここに左辺は，未知母数の真の値が θ あるという条件のもとにおける，確率変数 $T=t(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の平均値を意味する。

(2°) 上の条件 (1°) を満足するあらゆる統計量のうちで，とくに t は他の t' に対して次の関係を満足する。

(23) $$E_0\{(t(X_1, X_2, \cdots, X_n)-\theta)^2\} \leqq E_0\{(t'(X_1, X_2, \cdots, X_n)-\theta)^2\}$$

この基準は一応は合理的である。チェビチェフの定理を用いるならば，標準偏差が小さいこと，θ の付近に統計量の値がより多く集中するということは，一応緊密に相関することであるのはわかる。しかしながら，これは，絶対的にいえることでないから，標準偏差だけで片づけようとするのは無理である。また，(1°) および (2°) を満足するような推定は多くの場合存在しないのである。

しかし，これは，標本の大きさ n に関してなんらの制限も設けなかった場合の議論であった。とくに n を限りなく大きくするということであれば，事情はかえって簡単になる。

たとえば，正規分布の母集団の任意標本から，その母集団標準偏差 σ を推定するに当たって，次のいずれかの推定を用いることが多い。

$$(24)\qquad \sigma_1(E_1)=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum|x_i-x| \quad \text{（標本平均誤差）}$$

$$\sigma_2(E_2)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2} \quad \text{（標本標準誤差）}$$

これらは，いずれも一致統計量である。したがって，一致性だけを推定法の基準にとれば，計算のより容易な標本平均誤差を用いるのが当然である。ところが，他の基準を入れて考えると両者には大きな相違がある。

R. A. Fisher は，**有効統計量** (efficient statistic) の概念を導入した。すなわち n が大きくなるにつれ，平均値 θ の正規分布に近づく一致統計量のうちで，最小の標準偏差を有するものを意味するのである。場合によっては，そういうものは存在しないかもしれない。また幾通りも存在し得るかもしれない。とにかくこのように平均値 θ の正規分布に近づく統計量どうしにおいては，標準偏差が n とともにどれほど小さくなるかが問題なのであって，有効統計量の標準偏差との比較において，**統計量の効率**(efficiency)というものが導入される。

少し厳密に表現しよう。次の条件を満足するとき統計量の系列 $\{t_n\}$ に対応する確率変数列 $\{T_n\}$ は有効であるという。

(1°)　$\sqrt{n}(T_n-\theta)$ は，n が限りなく大きくなるとき，平均値0，有限な標準偏差 σ をもつ正規分布に近づく。

(2°)　条件 (1°) を満足する他のいかなる $\{T'_n\}$ に関しても，次の関係をみたす。

$$(25)\qquad \sigma^2/\sigma'^2 \leqq 1$$

ただし

$$(26)\qquad \sigma^2=\lim_{n\to\infty} E_0[(\sqrt{n}(T_n-\theta))^2]$$

$$\sigma'^2=\lim_{n\to\infty} E_0[(\sqrt{n}(T_n'-\theta))^2]$$

σ^2/σ'^2 を $\{T_n'\}$ の効率という。

それには，標本の大きさ n が大きくなるとき，一致統計量 T_n が推定しようとする θ へ近づく模様を問題にする。もちろんそれは確率論的な意味において

であるが，θ への収束する速さというものが問題になるのである。たとえば T_n の分布状態を考える。多くの実際上の場合において，T_n の関数型からして，大数の法則が適用されるから，一致統計量の分布関数は，平均値 θ で，標準偏差が n とともに小さくなる正規分布関数に近づくのである。そういうときには，標準偏差が n とともに早く 0 になるものの方が，θ を推定する統計量として有効であるといえる。

たとえば，標準偏差 σ が既知で，平均値 m が未知の正規母集団からの任意標本抽出にあって，m を推定するのに，

(27) $$t_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

(28) $$t_n'=(t_1, t_2, \cdots, t_n \text{ の中央値})$$

というふうに統計量をとる。すると両者はともに一致統計量ではあるが

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^2(T_n)=\sigma^2,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma^2(T_n')=\frac{\pi}{2}\sigma^2$$

それゆえに，大きさ 100 の標本から求めた標本平均値を用いることと，大きさ $100\times\pi/2=157$ の標本から求めた標本の中央値を用いることが同程度の精確さをもつことになる。標本が与えられたとき，中央値で母集団平均値を推定しようとするのは，標本平均値の場合に比べると，全標本の $2/\pi$ だけしか使ってないという意味にもなる。しかしながら，もし母集団分布がラプラスの分布 $e^{-|x-m|}/2$ になると，今度は目標の計算で事情は反対に，$\sigma^2(T_n')/\sigma^2(T_n)$ の比は 1/2になるから，大きさ 100 の標本よりの標本平均値は，大きさ 50 の標本からの標本中央値にしか精確さが当たらないということになる。

以上の一致統計量および有効統計量という概念は，標本の大きさ n が充分大きな場合に使用されるべき概念である。n がそれほど大きくない場合に対しても，統計量の適否を規定する概念があって欲しい。R. A. Fisher は，このために**本源的精確度** (intrinsic accuracy) という概念を導入した。これは標本の大きさが何であっても定義できるものである。本源的精確度は必ず 0 より小

さくはなく1より大きくもないものであって，その値が1に近いほど，統計量としての精確度は高い。とくにこれが1に等しいときには**充足統計量**（sufficient statistic）といわれる。充足統計量 $t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ というのは次のような性質をもつものであると定義してもよい。すなわち

(29)　$$t(x_1, x_2, \cdots, x_n)=t(x_1', x_2', \cdots, x_n')$$

となる場合には

(30)　$$\frac{F(x_1, x_2, \cdots, x_n/\theta)}{F(x_1', x_2', \cdots, x_n'/\theta)}$$

は θ に無関係である。すなわち $F(x_1, x_2, \cdots, x_n/\theta)=G(t/\theta)H(t)$ という形で書けることである。このことを換言すれば，$t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，次の条件を満足するとき，θ を推定するための充足統計量であるといえる。すなわち他の任意の統計量 $t'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して，これらに対応する確率変数 $t(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ と $t'(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ とに関して次のことが成り立つことである。すなわちそれは

(31)　$$P\{s<t'(X_1, X_2, \cdots, X_n)<s+ds/t(X_1, X_2, \cdots, X_n)=t\}=f(s/t)\,ds$$

と書くとき $f(s/t)$ が θ に無関係であるということである。すなわち $t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を知れば，θ を推定するのに $t'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を追加しても，さらに知識はふえはしないという意味になる。θ を推定するために $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ からくみとれる知識はことごとく $t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のなかにはいっている（exhaust information）という意味にもなるのである。

たとえば，標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が平均値 m，標準偏差 σ の正規母集団からの任意抽出標本であるとすると，$F(x_1, x_2, \cdots, x_n/m, \sigma)$ に対する確率密度は

(32)　$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n/m, \sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}$$

となり，しかもこれは右辺をかきかえることによって

(33)　$$(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\bar{x}-m)^2/\sigma^2}e^{-\frac{S}{2\sigma^2}}$$

となる。ただしここに $\bar{x}$ は標本平均値，S は平方和であって

$$(34)\qquad S=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

式から，統計量 $\bar{x}$ は m に対しての充足統計量であることがわかる。

以上，推定の良否を判定する基準ともいうべきものとして，一致性，有効性および充足性を導入したのは R. A. Fisher の業績である。この3つの性質をあわせもった統計量を，**最適統計量** (optimum statistic) という。Fisher はこの最適統計量を求めることを目標とした。これを見いだすためには R. A. Fisher は**最尤法の原理** (principle of maximum likelihood) という方法を導入したのである。これを利用するためには $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ に対応する確率分布 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n/\theta)$ の微分可能性を仮定する。すなわち

$$(35)\qquad F(x_1, x_2, \cdots, x_n/\theta)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1}f(u_1, u_2, \cdots, u_n/\theta)\,du_1, du_2, \cdots du_m$$

と書けるものとする。このとき標本点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対する尤度(likelihood)というのは，この点に対する確率密度のことであって

$$(36)\qquad L=f(x_1, x_2, \cdots, x_n/\theta)$$

としてあらわされるものを意味する。L は θ の関数でもあるが，この L を最大にするような θ の値を $\theta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とするとき，この値をもって，θ の推定とするのを，最尤法による推定というのである。R. A. Fisher の推定論における主要結果は，次のようにいいあらわせるであろう。

$\{x_n\}$ を同一母集団からの（返却的な）任意抽出標本であるとすれば，この母集団の従う分布関数が若干の条件を満足するとき最尤法推定 $\theta_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は前述の意味における有効統計量となる。

充足統計量をもつための母集団分布関数を特徴づける問題は，R. A. Fisher, Hotelling, Doob 等によって完成されている。上述の最尤法解は，充分大なる n に対しては，近似的に最適統計量となる。

C.　**Neyman の信頼区間の理論**　上述の R. A. Fisher の理論では母集団

の母数は未知ではあるが，ある確立したものであると前提して論じた。ここでも，この前提を設けることという点においては，なんら変わりはない。ところで R. A. Fisher の前述の理論では，とにかくこの未知の母数を，これこれの値であるとしてある1つの値として，なんらかの方法で推定しようとするものである。これに対して，この未知の母数は，たいていの場合は，これこれの範囲内にあるとみてよいという区間を指示する推定方法が Neyman によって展開されている。前者が**点推定** (point estimation) といわれるのに対して，後者は**区間推定** (interval estimation) といわれるものである。後者の方がより実際的であることはいうまでもない。

区間推定法にあっては，標本点 $e=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の関数として，$\bar{\theta}(e)$ および $\underline{\theta}(e)$ なる2つの関数を導入して，真値 θ を区間 $\delta(e)=(\underline{\theta}(e), \bar{\theta}(e))$ のなかに含むようにすることが問題なのである。

ところで，標本点 e に対して確率変数 $\mathrm{E}=(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_n)$ を対応させて考えると，$\underline{\theta}(\mathrm{E}), \bar{\theta}(\mathrm{E})$ もまた確率変数であるからして，当然

(37)　$\underline{\theta}(\mathrm{E}) \leqq \theta \leqq \bar{\theta}(\mathrm{E})$

という事象の確率ということは考えられる。

$\underline{\theta}(\mathrm{E}), \bar{\theta}(\mathrm{E})$ なる2つの確率変数は次の条件を満足するとき未知母数 θ の**信頼区間** (confidence interval) であるという。

(1°)　すべての $\mathrm{E}=(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_n)$ に対して $\underline{\theta}(\mathrm{E}) \leqq \bar{\theta}(\mathrm{E})$

(2°)　θ のすべての値に対して，次の等式が成り立つ。

(38)　$\mathrm{P}(\underline{\theta}(\mathrm{E}) \leqq \theta \leqq \bar{\theta}(\mathrm{E}) / \theta)=\alpha$

ここに α は一定数である。左辺は未知母数が θ であるとき，この θ が，$\underline{\theta}(\mathrm{E}) \leqq \theta \leqq \bar{\theta}(\mathrm{E})$ を満足する確率をあらわす。α は**信頼係数** (confidence coefficient) といわれる。

信頼区間の実際的な意義は，つぎのようである。大きさ n の標本を，幾組も多数回にわたってつくったとしよう。標本の各組に対して，未知数 θ は区間 $[\underline{\theta}(\mathrm{E}), \bar{\theta}(\mathrm{E})]$ に属するという判断を下すならば，ある時は正しくて成功し，

ある時は誤りであって失敗するということになるから，その成功率は α に等しいということになる。

一般にいうと，α が大であればあるほど，信頼区間は長くなり，α が小になればなるほど信頼区間は短くなる。信頼区間の短いということはつまり鋭い推定であるということであり，信頼係数の大きいことは信用のおける推定であるということになる。鋭いということと，信頼のおけるということは当然，いわば相補的なものであることをみるであろう。信頼区間の選び方の問題というのは，信頼係数の方は指定しておいての議論が多い。

信頼係数 α が与えられたとき，上述の信頼区間の選び方は一般に無限に多くあるわけであるが，一般的にいうと，この区間の長さが短いほどよいと考えられる。このためには，最短信頼区間と，不偏信頼区間等の諸概念を導入するのであるが，最短信頼区間というのは，次のような信頼区間 $(\underline{\theta}(\mathrm{E}), \bar{\theta}(\mathrm{E}))$ を意味する。すなわち上述の (1°)，(2°) を満足する他のいかなる信頼区間 $(\underline{\theta}'(\mathrm{E}), \bar{\theta}'(\mathrm{E}))$ と，母数のいかなる値 θ' と θ'' とに対しても

$$(39)\qquad \mathrm{P}(\underline{\theta}(\mathrm{E}) \leqq \theta \leqq \bar{\theta}(\mathrm{E}) \mid \theta'') \leqq \mathrm{P}(\underline{\theta}'(\mathrm{E}) \leqq \theta \leqq \bar{\theta}'(\mathrm{E}) \mid \theta'')$$

このような最短信頼区間がもし存在すれば，推定としては最も有利なものである。しかし実際には存在するのがむしろ例外的なことで，一般には存在しない。このために Neyman の上述の仮説検定法と同じく不偏性原則 (principle of unbiasedness) を導入する。

信頼区間 $\delta(\mathrm{E})$ が上述の (1°)，(2°) のほかに，なお次の条件を満足するとき，これを信頼係数 α に対する**不偏信頼区間** (unbiasedness confidence interval) であるという。すなわちそれは母数のすべての値 θ', θ'' に対して，

$$(40)\qquad \mathrm{P}(\underline{\theta}(\mathrm{E}) \leqq \theta' \leqq \bar{\theta}(\mathrm{E}) \mid \theta'') \leqq \alpha$$

という条件を意味する。同じ信頼係数 α に対する不偏信頼区間のうちで，上述の意味で最短信頼区間でもあるものを**最短不偏信頼区間** (shortest unbiased confidence interval) という。もしこういうものが存在すれば，これは，不偏性原則という資格基準を必要とするかぎり，最も有利な推定といわなければな

らないわけであるが，不幸にして，これもごく制限された場合にしか存在しないものである。このために Neyman は，short unbiased confidence interval という概念を導入した。これは**局所最短不偏信頼区間**とも訳すべきものであって，一定の信頼係数に対する不偏信頼区間のなかで，いかなる θ' に対しても，また他の同様な性質をもついかなる $(\underline{\theta}'(\mathrm{E}), \bar{\theta}'(\mathrm{E}))$ に対しても

$$(41)\quad \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta''^2}\mathrm{P}(\underline{\theta}(\mathrm{E}) \leqq \theta' \leqq \bar{\theta}(\mathrm{E})\,|\,\theta'')\right]_{\theta''=\theta'} \leqq \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta''^2}\mathrm{P}(\underline{\theta}'(\mathrm{E}) \leqq \theta' \leqq \theta'(\mathrm{E})\,|\,\theta'')\right]_{\theta''=\theta'}$$

を満足するものを意味する。

Fisher にしても，Neyman にしても，これらの推定理論においてベイズの定理が用いられていないことに注目すべきであろう。ことに Fisher の理論は常にベイズの定理の排撃ということを1つの目標においてあったことは，すでに述べたとおりであった。ベイズの定理の正しい使用法にあっては，推定しようとする θ は未知ではあるが，とにかく一定の値をもつという R. A. Fisher の前提とはことなり，θ はそれ自身1つの確率変数 Θ の現実値とみなければならないのである。この Θ が $(\theta, \theta+d\theta)$ の間にある確率を $g(\theta)d\theta$ とし，$\Theta=\theta$ のときの標本に対応する確率変数Eの分布密度を $f(x_1, x_2, \cdots, x_n\,|\,\theta)$ とすれば，ベイズの定理により $\mathrm{E}=(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_n)$ の実現値 $e=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を知って，Θ が $(\theta, \theta+d\theta)$ の間にあった確率は

$$(42)\quad \frac{g(\theta)f(x_1, x_2, \cdots, x_n/\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\theta)f(x_1, x_2, \cdots, x_n/\theta)d\theta}$$

で表わされる。

しかしこの考え方には2つの欠点がある。第1に真の値 θ というものを確率変数の実現値とみることが，一般にはかならずしも妥当でない。これを認めるには，母集団の母集団ともいうべきものを導入しなければならない。もちろんそういう必要のある場合もあり，確かにそう考えられる場合もあるけれども，一般には，これは無用の前提をつけ加えるものである。第2に，またかりに，第1の点は容認するとしても，関数 $g(\theta)$ が一般には不明であるという欠点が

ある。漠然とした根拠からこれに種々の関数を想定することは正確な統計推理のためにとらないというのが，R. A. Fisher の意見である。たとえば事前確率といわれる $g(\theta)$ について，無知を理由として一様分布を仮定する。すなわち，$a \leqq \theta \leqq b$ において $g(\theta)=$一定 とすればよいようである。しかし，Θ の分布が一様分布であると考えられると同様に，Θ の他の関数，たとえば Θ^2，Θ^3 等もまた一様分布であるとも考えられる。そうして，Θ が一様分布であることと，たとえば Θ^2 が一様分布であることとは矛盾するのである。

ベイズの定理の排撃という点では Fisher が最も徹底的であった。Fisher は現実の資料以外の知識，これを a priori な知識というが，それに依存しないことを目標にした理論構成を理想にしている。しかしながらベイズの定理を用いることは，上述のような欠点はあるけれども，さらに仔細に考えるならば，なお再検討の余地はあることをつけ加えておきたい。

D.　**A. Wald の推定論**　推定理論の顕著な1つの進展は 1940—1941 年の間において A. Wald によって与えられた。

上述のように一様最有力（不偏）検定（uniformly most powerful <unbiased> test）もこれに対応する最短（不偏）信頼区間（shortest <unbiased> confidence interval）も，いずれも概念としては適切なものであり，これにより一応最良の検定，最良の推定が得られるわけではあるけれども，遺憾ながら，それの存在するのはごく限られた特殊の場合にすぎないのである。これに代わるものとして Neyman のいわゆるA型検定や最短信頼区間もあるけれども，これらは，問題の未知母数の値として特殊の値の付近だけしか考慮していない。ところが実際には，問題の値の近くだけでなく，むしろ相当離れた値との比較こそ問題なのであるから，基準を局所的に解釈する点に実際上不便があると考えられていた。ところが上述の研究によって，A. Wald は，以上の困難は，いわば外見的なものであることと，推定理論としては，もっと突っ込んで主張できることを示したのである。一様最有力検定，最短信頼区間は一般の確率分布に対しては存在しないのであるけれども，これらは，存在しなくてさ

しつかえない，なぜなら，これに代わるものとして，漸近的最有力不偏検定（asymptotically unbiased most powerful tests）と漸近的最短不偏信頼区間（asymptotically shortest unbiased confidence interval）とは，nが充分大きくなるにつれ，それぞれこれらの代わりになるものであり，しかもこれらは，実際上ではほとんどすべての場合について存在するといえることを，A. Wald は示したのである。しかし，本書においてはその内容には立ち入らないことにする。

7. 推測統計学の最近の進歩

この方面の最近の進歩は，ネーマン－ピアソンの到達した段階をこえて進出しつつある。今この方面に最も貢献しつつある A. Wald による On the Principles of Statistical Inference（1943年）の所説を紹介しよう。

A. Wald の指摘するように，Fisher およびネーマン－ピアソンの理論は2つの点において制限されたものである。第1に，彼らの取り扱った問題が，仮説検定論と，推定論という2つの問題に局限されたことである。第2に，問題の対象たる分布関数の世界を，ある有限次元の母数で表現される分布関数の集合に局限したことである。

事実，実際上必要な問題であって，しかもこれらの理論において取り扱い得なかったものとして，A. Wald は次のような例をあげている。

(1°)　回帰曲線として多項式を採用してよいということは前提されているとしよう。このとき問題は資料に当てはめるべき多項式の次数いかんということである。今 H_n をもって関数関係がn次多項式であらわされる母集団からの標本であるという仮説をあらわす。このとき問題は，資料をもとにして判断した場合，$H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots$ の仮説のうちいずれをとるかを決定するかということである。この問題は，ネーマン－ピアソンの仮説検定論にはいらないと，A. Wald はいうのである。

(2°)　k 個の母数をもって表現される分布関数の集合としてΩが解釈されな

い場合も問題である。たとえばn組の独立な資料$(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$が与えられているとき，これに対する確率変数 $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ について

$$(43) \qquad P(X_1 \leqq x_1, Y_1 \leqq y_1, X_2 \leqq x_2, Y_2 \leqq y_2, \cdots, X_n \leqq x_n, Y_n \leqq y_n)$$
$$= G(x_1, y_1)\, G(x_2, y_2), \cdots, G(x_n, y_n)$$

として書けるけれども，Gはただ二次元分布関数であるということ以外には規定されないという場合もある。しかも，検定しようという問題が，$\{X_k\}$と$\{Y_k\}$とが独立であること，すなわち，上式がある一次元分布関数Hによって

$$(44) \qquad H(x_1)H(y_1)\cdots H(x_n)H(y_n)$$

とあらわされるかという問題も可能である。

A. Wald は統計推理の理論を次のように形式化した。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はn個の確率変数であって，$(X_1, X_2, \cdots X_n)$ の従う確率分布関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，確率分布関数のある集合 Ω に属することは既知であるとする。そうして，S は Ω の部分集合wのつくる１つの集合系であるとする。Sに属する各w(Ω の部分集合）に対しては，仮説 Hw がそれぞれ対応するとする。ここに仮説 Hw とは，分布関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ がwに属することということを意味する。wがSを動くとき w に対応する Hw の全体を Hs であらわす。統計推理の問題は各確率変数 X_i の現実値 x_i を得た場合，$e_n = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をもとにして，仮説の集合 Hs のうちどの仮説 Hw を採択すべきかを決定することでなければならない。それには各仮説 Hw に対して，n次元標本空間において**採択域** Mw(region of acceptance) をつくり，標本点 e_n が Mw に属するとき，またそのときにかぎり，Hw を採択する。ここに次の条件が採択域について満足されていなければならない。

(1°) $w \neq w'$ ならば Mw と Mw' とは共通集合がない。

(2°) wが S を動くとき，$\{Mw\}$の全体の和集合は全標本空間に等しい。

うこして，A. Wald はいう，“統計的問題とは採択域の集合 Ms を適当に選ぶ問題にほかならない。” このように一般的に規定するとき，採択域の領域系 Msを選ぶ問題は，標本空間のすべての点 e_n において定義された次のような

関数 $w(e_n)$ を選ぶ問題にほかならない。まず仮定により標本空間の任意の点 e_n を指定するとき，この e_n を含むような Mw は，Ms のなかに1つ，そしてただ1つしか存在しない。そこで $w(e_n)=w$ と定義するのである。すなわち問題はこのような関数wをどう定義するかということにある。なぜなら，このように関数を定義することにより，Ms の代わりに関数 $w(e_n)$ を用いればよいわけだからである。標本点 e_n を得たならば，$w(e_n)$ をみればよい。それがwに属するならば，われわれは仮説 Hw を採択する。関数 $w(e_n)$ を**統計的判定関数**（statistical decision function）という。A. Wald はいう，"統計的問題とは，統計的判定関数を選定する問題である。"

この形式化から，従来の理論をふり返ってみよう。Ωの部分集合Sがとくにただ2つのΩの部分集合から成り立つ場合を考えてみるに，その一方をwとすれば，当然他方はΩにおけるwの補集合$\Omega-w$であらわされる。すると統計仮説検定の問題は，wか$\Omega-w$のいずれかを採択する問題となるわけである。A. Wald の解釈によれば，これがネーマン-ピアソンの仮説検定論の取り扱うところである。次にΩの部分集合SはΩに属する各要素wの全体であるとすると，標本点（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）からみていうことは，（点）推定論にほかならないのである。すでに述べた2例において，おのおのは，これらの2つの理論にはいらない統計数理の問題を述べた。なお，さらに具体的でかつ簡単な例を加えるならば，SがΩの3つの部分集合 w_1, w_2, w_3 から成り立っていて，しかもこれら3つの部分集合には共通集合がなく，これらの集合の和集合はすなわちΩになっているという場合がそれである。たとえば，大量生産管理等においてある部品の寸法について規格に上限と下限とを設けたとする。品質検査の目標は，そのとき3つの仮説を検定することである。すなわち当該の仕切（lot）は上限より大きいか，規格の裕度のなかにあるか，あるいは下限よりも小さいか，のいずれであるということである。

Wald は，このように統計推理の問題を一般的に形式化したところで，このように形式化された問題を処理するに当たって重要な1つの観点を与えた。そ

れはわれわれが $w(e_n)$ を選択することによって過誤をおかす可能性が生ずるのであるが，このような可能な過誤の相対的重要性という概念を導入するものである。過誤とは何か。つまりわれわれは，仮説 Hw を採決する。しかるに実は真の分布関数は w に属さないという事情の場合を意味する。真の分布関数がFであるとき，仮説 Hw を採択することによって生じたこの過誤の相対的重要度を，$W(F, w)$ で表わす。さてこのW，**重要度関数** (weight function) は，Ω に属するすべての F，S の属するすべての w に対して定義されたものとする。F が w に属するならば，過誤はないわけであるから，$W=0$ となるべきであり，F が w に属しなければこれは過誤に違いないのであるから，$W>0$ となるべきである。A. Wald の思想では，統計家がある仮説を検定しようというときには，あらゆる可能な過誤の相対的重要度を決定しなければならない。しかもこの決定は研究目標によって定まるものであるとした。統計的判定関数を決定するに当たっては，この相対的重要度が重大な影響をもつものである。

元来このような相対的重要度の考えは，少なくとも暗黙のうちにわれわれの統計推理には前提されていたともいえる。たとえば θ がある区間 I に属するというような仮説が偽りであるとしても，θ が区間からずっと遠く離れるときと，I には属さないがごく近くにあるというのとでは，間違いは間違いでも重要度は違うというべきである。Wald は例をあげていう。たとえば銀行から発行されたばかりの新貨幣と，社会に久しく流通されて使い古された貨幣とをつかって，それぞれ 100 回ずつ投げ上げて表か裏かをみる試行を行なって，ともに 40 回ずつ表を得たとする。表を得る確率を p としよう。古い貨幣のときには，この貨幣についてはたしかに $p=1/2$ ということを保証するところの他に実験的な根拠がなければ，$p=1/2$ という仮説は棄却するにたるものである。しかし新貨幣については $p=1/2$ という点に関してはかなりの信念をもちうるのであって，この仮説を棄却する以前に何か変わったことがあったという疑念がもたれるべきである。このようにして，仮説検定の理論において，有意域はこの 2 つの場合，おのおの別のものにとるのがむしろ妥当であると考えられる。

相対的重要度という概念をさらに具体的に把握することも必要であろう。近代統計学の応用分野として，大量生産管理の統計的方法による検査の問題として，仕切の合格不合格を決定するようなときに，規格外であったにしても，少し大きくつくられた部品は，あとで削ればよいが，小さすぎたならば，手の下しようもないというときには，相対的重要度は違うものとみるべきであろう。重要度を，過誤を生じたことによる損失金額というふうに意味づけることも，ある場合には可能である。

Wald は，次に，**危険関数** (risk function) を導入する。今，統計的判定関数 $\omega(e_n)$ に従って，判定を下すものとしよう。そうして真の確率分布は Ω に属する $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ であるとしよう。そうすると，今標本として，$e_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を得たとすると，統計的判定関数に従って，仮説として $\omega(e_n)$ を採択することになる。真の分布はFだから，そのときおかす過誤の相対的重要度は $W(F, \omega(e_n))$ となり，これは過誤のところの $e_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の関数である。これは $e_n=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対応する確率変数 $E_n=(X_1, X_2, \cdots X_n)$ とすると，過誤の相対的重要度 $W(F, \omega(E_n))$ は確立変数となり，その平均値は当然次のようにして与えられるのである。

$$(45)\qquad \int_{R_n} W(F, \omega(e_n))dF(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv r(F)$$

ここに R_n は標本空間全域を示す。$r(F)$ は真の確率分布がFであるときに虚偽の仮説を採択することによる危険といわれる。そうしてFそれ自身は，わからないのである。これはFの関数とみるのである。Ωに属するすべてのFに対して $r(F)$ は定義されている。ところで危険関数は F の関数ではあるけれども，これは判定関数と相対的重要度関数とに依存するものであるから，

$$(46)\qquad r(F)=r\{F/\omega(E_n), W(F, \omega)\}$$

で示される。

A. Wald は，この危険関数を比較するための概念を導入する。それは同等，一様により良好，許容の三概念である。

定義 1. 同一の $\omega(E_n)$ および $\omega'(E_n)$ は，仮説の集合系 Hs に対する2つの統計的判定関数であるとする。これら2つの判定関数がある与えられた重要度関数 $W(F,\omega)$ に関して**同等** (equivalent) であるというのは，両者の危険関数が一致することである。すなわちΩに属する任意のFについて

$$r\{F/\omega(E_n), W(F,\omega)\}=r\{F/\omega'(E_n), W(F,\omega)\} \tag{47}$$

定義 2. もしも定義1と同一の前提のもとにおいて，ω と ω' とは与えられた重要度関数に関して同等でなくして，Ωに属する任意のFについて

$$r\{F/\omega(E_n), W(F,\omega)\}\leqq r\{F/\omega'(E_n), W(F,\omega)\} \tag{48}$$

が成り立つならば，$\omega(E_n)$ は $\omega'(E_n)$ よりも $W(F,\omega)$ に関して**一様により良好** (uniformly better) であるといわれる。

定義 3. 統計的判定関数 $\omega(E_n)$ に対しては，ある与えられた重要度関数 $W(F,\omega)$ に関して，これよりも一様により良好な統計的判定関数がないならば，ω をこの重要度関数に関して**許容的** (admissible) であるといえよう。

A. Wald は，これらの準備より，当面の問題にはいる。すなわち，統計的判定関数の選定に関する原則を論ずるのである。

その第1原則ともいうべきものは，選定の範囲にはいり得るものは，まず許容的なものでなければならないということである。ところでこの原則にはまず異議はないであろうけれども，しかし，この原則だけではいまだもって，一意的に統計的判定関数を選定できない。許容的資格をもつ統計的判定関数はいくらもあるからである。

ここにおいて A. Wald は，さらに第2の原則の導入を必要と考えた。第2の原則としては，いろいろのものが考えられるであろう。第1の試案として，Ωのいろいろな要素（すなわち分布関数）の真偽に関してわれわれが先験的に（資料より先立って）もっている知識による信用程度を考慮して，統計的判定関数の選定を行なうということも考えられる。今，2つの統計的判定関数 ω と ω' とを比較するに，次のようであったとしよう。

$$r\{F_1/\omega(E_n), W(F_1,\omega)\}<r\{F_1/\omega'(E), W(F_1,\omega)\} \tag{1°}$$

(2°)　$r\{F_2/\omega(E_n), W(F,\omega)\} > r\{F_2/\omega'(E_n), W(F,\omega)\}$

(3°)　$r\{F/\omega(E_n), W(E,\omega)\} = r\{F/\omega'(E_n), W(F,\omega)\}$

($F \neq F_1, F_2$ のとき）すなわち真の分布が F_1 ならば ω は ω' に勝ち，F_2ならば ω は ω' に劣り，F_1, F_2 のいずれでもない F のときには同等であるという場合である。このとき ω と ω' とはいずれをとるべきか。こういうとき考えられることは，問題点になる F_1 と F_2 との真実性が，いずれがより信用がおけるかということでなければならない。もしも F_2 の方が F_1 よりもあり得べき可能性が大きければ，ω よりも ω' の方をとるべきであろう。

このような考え方からして，Ωの上のある集合族の上に定義された非負な加法的な集合関数 $p(n)$ によって，先験的な信頼度をあらわしておくとする。（ただし $p(\Omega)=1$）そして，

(49)　$$\int_\Omega r\{n/\omega(E_n), W(F,\omega)\}\, dp(n)$$

を最小にする統計的判定関数ωをもって最良と考える。このような方針も考えられるわけである。しかしながら，先験的な信頼度をあらわすpを決定することに問題があるのはもちろんである。A. Wald は，この定義を採用せず，次の方針をとった。それは，FがΩを走るとき，$r\{F/\omega(E_n), W(F,\omega)\}$ は種々の値をとるわけであるが，Fに関しての，この値の上限 (least upper bound) をもって比較の基準にしようというのである。今この上限を $r\{\omega, W(F,\omega)\}$ と書くことにし，次の定義を採用した。

定義 4. 重要度関数$W(F,\omega)$は与えられたものとする。もし $r\{\omega, W(F,\omega)\}$ が $\omega=\omega'$ のとき，最小になるならば，統計的判定関数 ω を最良であるという。

この定義による最良という概念は，それ自身としては，きわめてもっともらしいものではあるが，しかし，これだけがただ一つの方法ともいえないことは，もちろんである。たとえば，Fの関数としての危険関数を，Fにある加重を与えて，加重平均をつくり，ここに1つの計量を導く。その計量は，もちろ

ん統計的判定関数に依存する汎関数であるが，これを最小にする統計的判定関数をもって最良であるといってもよいわけである。ところが，ここに上述の定義を正当づけるような事情がある。それは，A. Wald の定義による統計的最良判定関数には次のようないちじるしい性質があることである。それはこの意味での統計的最良判定関数を用いると，危険関数は，Ωに属するすべてのFについて，同一の値をもつということである。このことは，Ωが有限個の数をもつ分布関数の集合であり，重要度関数および分布関数Fに，若干の制限が設けられた場合には，証明されている。この性質，すなわち危険関数の値が一定であるという事実は，応用上きわめて大切なことであって，この性質があれば，統計的判定を行なうことによって伴われる危険の精度，確からしさの大きさを推定し得ることになる。Neyman の信頼係数の理論において，信頼区間は，いつでもある一定の信頼係数 α に対するものとしてつくられた。α は，ときによりもちろん 0.99 であり，0.95 であり，その他いろいろの値をとってもよいが，とにかくある問題に対しては，係数の値のいかんには関係せずに一定にとったのである。この事実が信頼区間の理論で基本的に重要な役割を演じた。同様なことが，A. Wald の理論における危険関数の値が一定という統計的最良判定関数の性質に対応するのである。ただしこのとき，危険ということは，Neymanの場合の $1-\alpha$ に相当するものである。（正確にいえば，重要度関数が0か1のいずれかの値しかとらないという特別の場合にあっては，$1-\alpha$ がちょうどA. Wald のいう危険関数の値になる。）

A. Wald は，以上のようにして，統計推理論の進歩のための形式化を提供したのである。今，A. Wald の意見に従い，従来の理論が，この見地からいかに解釈されるかをみよう。

(1°)　ネーマン-ピアソンの仮説検定論では，単純仮説の検定にあっては，仮説は，未知の分布関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ がある特定の分布関数$F_0(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に等しいということである。そこで，Ωとしては，ただ2つの要素 ω_1 と ω_2 とから成り立つわけであって，ω_1 は F_0 という1つの要素分布関数から成

り立ち，ω_2 は Ω における ω_1 の補集合，すなわち $\Omega-\omega_1$ にほかならない。したがって，統計的判定関数のとり得る値というものは，ω_1 と ω_2 とのただ2つしかない。$M\omega_1$ は $\omega(E_n)=\omega_1$ となるような e_n の全体，$M\omega_2$ は $\omega(e_n)=\omega_2$ となるような e_n の全体と定義されている。$M\omega_2$ は標本空間において $M\omega_1$ の補集合にほかならない。A. Wald の解釈によれば，$M\omega_2$ が，とりもなおさず，ネーマン-ピアソンのいわゆる有意域（危険域 critical region）にほかならない。そうして，次のことも容易にみられるところである。すなわち，もしも $0<\alpha<1$ なる任意の α に対して，仮説 $F=F_0$ を検定するための大きさ α をもつ一様最有力有意域が，ネーマン-ピアソンの意味で存在したならば，いかなる重要度関数といかなる許容的判定関数とをもってしても，$M\omega_2$が一様最良有意域になることは変わりない。

したがって，とくに A. Wald のいわゆる最良判定関数を用いても，あるいは一様最良判定関数を用いても，これは，一様最良な有意域である。それゆえ，重要度関数を導入することにより，この場合に生ずることは，ただ有意域の大きさの定義が変わってくることであって，最良判定関数に関連する領域 $M\omega$ がネーマン-ピアソンのいう意味での一様最有意域であるのには変わりない。

(2°)　A. Wald の導入した漸近的最有力検定に関しても同様である。今，仮説 $F=F_0$ を検定するための有意域の系列を，$\{W_n\}$ $(n=1, 2, 3\cdots)$ としよう。すると，充分大きな n に対しては，実際上，ネーマン-ピアソンの意味で一様最良有意域である。したがってまた A. Wald の意味においても，重要度関数の形式のいかんにかかわらず，最良なる領域となるのである。

A. Wald は，以上の議論を総括して次のようにいう。統計推理の一般理論を形成するに当たって，そのたきり採った手順を振りかえってみるに，3つの順序をふんでいる。

(1°)　統計推理の問題を一般的に形式化すること。

(2°)　統計的最良判断の定義，すなわち統計的最良判定関数の定義を導入す

ること。

(3°)　最良の統計的決定関数の計算（数学的問題の解答）

このように形式化された統計推理の問題が，これだけではたして実際上の応用諸問題に充当され得るものであるか否かは，なお問題であろうし，第 2 の問題に関しては相当の恣意的要素が含まれることも否定できない。もちろん，A. Wald の与えた解答が重要な性質をとらえていることは，これを認めるべきであるが，しかしこれが唯一の解答でないこともいうまでもない。

第12章　実験統計学の方法

1.　統計的仮説検定理論の論理解説

R. A. Fisher はその著『実験計画論』(The Design of Experiments, 1935年) において，1つの例題をあげて，仮説検定の統計理論の論理を説明している。われわれは，これをさらにわかりやすく解説するため，すっかり解体して，この骨子を1つの戯曲として脚色して示そう。

「ある日の須戸加家」

第1場　須戸加家の食堂

母：　今日のお茶の時間には，アメリカの叔父さんからもらった紅茶にミルクを入れてご馳走しようかしら。お父様の誕生日だから。

A子：　しめしめ，というところね。じゃお母さんのお手伝いをして，上手にいれましょうかしら。

B子：　ところでお姉さん，ミルクをカップに入れておいてから，紅茶を入れるものか，紅茶を入れてからミルクを入れるものか知ってて？

母：　どちらでも同じじゃないの。

B子：　断然違うのよ。私にはわかるの。うそだと思ったら，試験してちょうだい。1つも間違わずに当ててご覧に入れますから。

C子：　私もB子さんと同じに区別はつくと思うのよ。1つも間違わずにとはいえないけれど。

D太郎：　お母さん，B子姉さんやC子にだまされちゃいけませんよ。じょうだんじゃない。いくらお料理自慢の家政科のB子姉さんだって，いわんやC

子だって，特別の味覚が発達して，そんな能力があるなんて考えられない。

母：　まあ，まあ，例によってD太郎はやかましいのね。しかし，今日はお父さんのお祝い日だから，お見合いでだまされたついでに，だまされたつもりで試験してみましょうね。

父：　なかなかお母さんも手きびしい。ところで試験ということになると，これは問題だね。回数が少なくては，うまく当たっても偶然というし，失敗してもいいのがれはあるしね。よく考えてみないとわからないが，まあ1人8回くらいに分けてやる程度かな。

B子：　いいです，試験をうけます。

C子：　私もよ。

父：　ところでD太郎は否定派だから飲まないでよいだろうね。

D太郎：　お父さん，それはいけませんよ。物資の節約を説くところの正義派を冷遇するのは。僕もちょうだいします。僕は能力を否定するので，紅茶を飲むことは否定していません。まぐれにだって，いい当てられるかもしれないことをご覧に入れましょう。

父：　これは大変なことになった。じゃ，B子とC子とD太郎には8回ずつ飲んでもらうことにしようね。4回は α 型，4回は β 型ということにしよう。紅茶を入れてから，ミルクを入れたのが α 型，ミルクを先にそれから紅茶を入れたのが β 型というわけ。そこで，試験をうけるものは，これは α 型，今度は β 型といちいち答えること。

母：　大変なことになったのね。コーヒー茶碗がずいぶんたくさんいるのね。ずいぶんのんきな実験だけど，A子さん，じゃ用意してちょうだい。

（A子退場。台所へ行く。）

A子：　お母さん用意はできました。お父さんが試験官になって下さい。さあ，α 型と β 型とを少しずつ，こんなたくさんのコーヒー茶碗にわけるのは大変ですが，お父さん大丈夫？　どんな順に出せばよいのですか。

父：　まあ，たまにはいいよ。じゃ，台所で分けてくるよ。（父退場，しばらく

して多数のコーヒー茶碗に少しずつ紅茶を入れたのを持って登場。各茶碗には札がついている。）

父：　じゃD太郎から始めよう。

D太郎：　お父さんちょっとお待ち下さい。この間，何とかいう統計の先生——そうM先生がいっていたぞ。お父さん，randomization をしなければいけません。

父：　何です，D太郎，その randomization とかいうのは。

D太郎：　お父さんの頃の統計学の術語にはなかったかもしれませんが。まさにドイツ国勢学派と同一の歴史的制約の下にあったというわけですか。——いつもクジ引きに使う乱数表で，どの茶碗を α 型，β 型かにするかをきめること，これをどの順に出すかをきめること。

父：　また例の得意の乱数表をかつぎ出すのか。D太郎のいうことは，よくわからんが，まあいうとおり，早くしましょう。さめてはまずい，初期の目的は達しないだろうからなあ。

（D太郎は乱数表をみながらカップに番号をつけた札をつける。）

父：　じゃその番号の順にB子もC子もお飲みなさい。α 型に当たるのは4杯あるわけですから，α 型の4杯をいいあてればよいわけ。そうそう，D太郎のも，つくってやらなければいかん。

母：　私もD太郎のまねをしてみようかしら。でも，私は4回くらいでけっこう。お紅茶はあまり好かないから。

A子：　私は6回で願います。場賃という意味よ。

父：　お母さんの場合，α 型は2杯，β 型は2杯，A子の場合は，α 型は4杯，β 型は2杯。いいね，それは忘れないで。——今晩みんな勉強がすんでから採点の発表としよう。

第2場　須戸加家の座敷

（この夜，秋の月が窓べにかかり，庭には虫のなき声がやかましい。家族一同テーブルのまわりに集まっている。）

父：　皆集まったね。3時のお茶のときの試験結果の発表をしよう。B子は3杯正しく1杯間違い。C子は2杯正しく2杯間違い。D太郎は3杯正しく1杯間違い。お母さんはすごいぞ，全部当たった。A子だって大したものさ，2杯も当たっている。

C子：　するとお母さんが2分の2で100点，次がB子姉さんと兄さんは4分の3で75点，私は4分の2で50点，それからA子姉さんは50点でしょうかしら？

D太郎：　しかし家政科専攻B子嬢の完全予言力は否定されたといわなければならない。

B子：　たまには失敗することもあるのよ。だけれどいい成績でしょう。たいてい大丈夫なのよ。少し回数がたりないと思うわ。

D太郎：　だってお姉さん，僕と同じ成績じゃない？　でも僕は，当てる力があるなどとはいい張りませんよ。

A子：　そうはいかないかもしれないわ。試験回数が違うもの。

母：　とにかく私が一番成績のよいのは，やはり，不断の心がけがよいからよ。

A子：　すると私はどうなるのです。お母さんのだって偶然よ。第一，お母さんのはとくに，4杯なんでしょう。少し，すくなすぎるのよ。私のだってそうよ。

D太郎：　「百情騒げども益なし，ただ一理のたのむべきを思う」というところかな。

B子：　何を偉そうなことをいうのよ。そんなのお経みたいで，天くだり的で非科学的よ。

D太郎：　いや，あれは，お父さんのために申し上げたのです。近代女性のためならば，数学でご説明申し上げましょうか。

B子：　私たちだって，微積分くらい知っているから，その手には乗らないよ。

父：　お父さんも，英語でトドハンターだったがなあ，プロバビリティはならったからね。昔は公算といったね。確率というのはむかし東京帝大の数学教室できめたとか，まあ，D太郎，日頃のうんちくを拝聴しましょうかね。

D太郎：　いやこんなのは初歩ですよ。初め，B姉さんと私とC子の場合から申し上げます。そこでは3つの仮説があったわけです。

B子：　今は実験しているのよ。Newton いわく，「我は仮説をつくらず」って……。

C太郎：　お姉さん，そうじゃない。実験というのは，すべて仮説を立てる。そうして実験をする。実験結果が仮説と一致するか否かをみるというのです。

B子：　でも実験はあくまでも特殊の例でしかないでしょう。一致するかどうかというのは何なのよ？　そこをはっきりさせなくちゃだめよ。

D太郎：　じゃしっかり申しましょう。厳密にいいますよ。仮説が真なりとして得られる結果と，実験結果が一致するかどうかというのです。今の場合B子姉さんは，完全な判別力ありとの仮説を提出されたのです。ところで実験結果は，1つ間違いがあった。この仮説は実験の結果，1つでも間違いがあれば，成り立ちません。しかし，いくら実験回数を多くしても，間違いがなかったからといって，完全能力の存在は証明されません。とにかくB子姉さんは，自分もあとで認められたように，実はC子と同じような主張，つまり仮説しか出せないわけです。

B子：　でも私が無能力であるとはいえないわよ。4つのうち3つまでもいい当てたのですから。

D太郎：　B子姉さんは4回のうち3回まで正しく当たったのだから，それは若干の判断力ありというのでしょう。その論理を分析すると，もし全然判別力がないとするならば，4回のうち3回も当たるというのはめったにない。だから全然判別力なしというのは間違いである。こういう論理が裏にあるわけ。

B子：　そう，そういう論理にはなるでしょう。けれども「めったにない」

ではハッキリしないわよ。

D太郎：　だから，お姉さんの得意の数学を使うのです。お姉さんの数学で，この確率が計算できますか。

父：　いやいや，その程度ならお父さんだってまだ忘れていない。確率は同様に確からしい場合の計算でできるとならったね。すると，すべての場合の数をまず考えてみる。ちょっと紙に書いてみよう。（父紙に書く）

E_0：4 枚正で誤り皆無の場合 ${}_4C_4 \times {}_4C_0 = 1$ 通り

E_1：3 枚正 1 枚誤りの場合　${}_4C_3 \times {}_4C_1 = 16$ 通り

E_2：2 枚正 2 枚誤りの場合　${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 36$ 通り

E_3：1 枚正 3 枚誤りの場合　${}_4C_1 \times {}_4C_3 = 16$ 通り

E_4：4 枚共に誤りの場合　${}_4C_0 \times {}_4C_4 = 1$ 通り

合計 70 通りもの場合があるわけか。実験計画が出されたら，その実験から起こり得るあらゆる可能性を考慮しなければならんのかなあ。

D太郎：　そうです。それで及第。お父さんの計算されたのはつまり，8 個のもののうちから 4 個選出する方法は 70 通りあるということです。ところで全然判別能力なしということを仮説にとってみましょう。これを仮説Hといいます。仮説Hを立てるのです。Hが真の場合に，たとえば，E_iの起こる確率を（D太郎紙に書きながら）$P(E_i/H)$とするとしましょう。お姉さん，この値計算できますか。

C子：　そんなのわけないわ。私だってできてよ。書いてみましょうか。（C子紙に書く）

$$P(E_0/H)=\frac{1}{70},\ P(E_1/H)=\frac{16}{70},\ P(E_2/H)=\frac{36}{70},$$

$$P(E_3/H)=\frac{16}{70},\ P(E_4/H)=\frac{1}{70}$$

D太郎：　C子も案外だね。ところでB子姉さんの論理というのを正確に数量的にいうと，「Hが真なりという条件のもとで E_0 の起こる確率は 1/70 で

ある。これは小さい値である。これは無視できるほど小さい。だから，Hという仮説を棄てる。」

B子：　D太郎さんにかかっては大変ね。第1に $P(E_i/H)$ を計算する。第2にその値の大きいか小さいかをみる。第3に小さければHを棄てる。というわけね。でも小さいか大きいかは何できめるのよ。それから，もし小さくなければ，どうなるの。

D太郎：　小さいか大きいかは，あらかじめ基準をきめておく。普通1％とか5％とかにとる。その値はいわば勝手なのだけれども，普通100回に1回ないし5回程度のくい違いはしかたないというわけなのです。その意味は，同様な試行を充分大きな回数N回行なったとすると，N/70 回位は，全然判別能力がなくとも，E_0 すなわち1つも間違いなくいい当てるということは，可能なのであるというふうに，実はこの間ならったばかり。

母：　D太郎，棄てないというのは，採用するということなの。

D太郎：　お母さん，それは採用という意味ではないのです。採用の候補であり得るというだけです。積極的に採用するという論理にはならないのです。

父：　お母さん，それはきらいだといわないことは，好きだということにはならないと同じわけですよ。いつかお前さんから聞いたことだが。

B子：　Dちゃん，それでは，私とDちゃんの場合はどうなの，確率は，

（紙にかく）

$$P(E_1/H)=\frac{16}{70}>0.05$$

でしょう。だから，仮説は棄てられないというわけ。

D太郎：　いや姉さん。ここはもう少しデリケートなのですよ。Hが真なるとき，3回までも正しく判断するというのが今は問題なのです。ちょうど3回正しくということではなくて。ですから，（紙に書く）

$$P(E_0+E_1/H)=P(E_0/H)+P(E_1/H)=\frac{1}{70}+\frac{16}{70}=\frac{17}{70}>0.05$$

とすべきです。だから，B子姉さんと僕の場合でも仮説Hは棄てられないということになります。C子のときには

$$P(E_0+E_1+E_2/H)=\frac{1}{70}+\frac{16}{70}+\frac{36}{70}=\frac{53}{70}>0.05$$

ですからもちろん棄てられないです。

C子：　お兄さん，でも，お兄さんはHとかいって，「判別能力なし」という仮説ばかりいっていますけれど，私は，「判別能力若干あり」ということを主張したのですから，それを検定して下さるのが本当でないでしょうか。

D太郎：　Cちゃんにもわかったようだね。しかし，それはできないね。なぜかというと，C子のいうような仮説では，確率論の世界へもってこれない。仮説というからには，正確であって，一義的にきまり，これにより分布の問題がとけなければいけない，つまり確率がこれに関連して計算されなければ，今までの論法は使用できないわけ。少しC子にはむずかしかったかな。

母：　でもD太郎のいうようではこの試験は，ずいぶん変な試験ね。棄てるか棄てないか，きめるだけで，いつまでも採用とはいわないのね。そんな試験をしてはずいぶん失礼ね。よくても棄てられないだけ。では，何だか，棄てることを目的としているのね。

D太郎：　ですから，証明も確認もできない，ただ反証によって否認されることはありうるというわけ。お母さん，こういう仮説を帰無仮説（null hypothesis）というのです。

B子：　せっかく，物資を消費してからいうのは，お母さんや姉さんに悪いけれど，帰無仮説などといわれると，やったことが全部無駄なような気がしますよ。

D太郎：　実験というのは帰無仮説の検定ですよ。あに，須戸加家の紅茶実験のみならんや。

B子：　Dちゃん，それにまだ変なところがあると思うの。なぜかというと，さっきあんたは，0.05 とか 0.01 とかの値をとって，それより小さければ，

仮説を棄てるとおっしゃったでしょう。それでは棄てていけない場合，つまり仮説が正しいのに棄てることもあるわけね。それじゃ試験官が間違っている場合がちゃんと予定している。

D太郎： そうです，お姉さん，0.05 とか 0.01 とかを有意水準 (level of significance というのです。これより小なるとき，Hは有意的 (significant) といい，仮説は棄てる。棄てることによって，Hが真なるにもかかわらず，棄てるという間違いはおかしているけれども，それは確率が 0.05 または 0.01 という一定の値を越えないから，無視しようというわけです。こういう間違いをおかすことなしには，検定はどうしてもできない。

父： お母さんやA子のときも計算しておかないと，お母さんがいばったり，おとなしいA子姉さんが意気消沈しても困るが。

D太郎： それはたやすいことです。(紙に書く)

$$\text{母さん；}\quad P(E_0+E_1/H)=\frac{{}_2C_2\times{}_2C_0}{{}_4C_2}+\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{5}{6}$$

$$\text{A子；}\ P(E_0+E_1+E_2/H)=\frac{{}_4C_4\times{}_2C_0}{{}_6C_4}+\frac{{}_4C_3\times{}_2C_1}{6\times4}+\frac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{{}_6C_4}=1$$

父： するとお母さんとA子の場合は初めから判断のつかない実験だったわけか。大部むずかしいことになったが，D太郎もB子も，近代統計学とかいうものを全然知らないという仮説は棄ててよいようだということだけはわかったのが，今夜の実験結果かなあ。じゃD太郎，お父さんが問題を出しておこう。今夜はもう遅くなったから，明日聞こう。

問題 (1°) α 型を6個，β 型を6個使用するときは，今までの議論はどうなるか。

問題 (2°) 上述の実験を何回もくり返す。8個を8個とも正しく分類した場合を成功というと，そういうのを反復したらどうなるか。

問題 (3°) α 型を4個，β 型を同じく4個として，さらにこれからに randomization をほどこしたわけであるが，おのおのカップが α 型の処理をうけ

るかβ型となるべきかをきめるために，それ自身を偶然的になるように randomization をほどこしたらどうなるか。

問題（4°）なぜ，D太郎は，乱数表をつかって，提出順序をきめなければならなかったか。

戯曲は，これで終わっている。終わりの問題は，しかし，D太郎に代わってここで解いておくのがよいであろう。

問題（1°）について：上述の試験に対してB子が不服を唱えるかもしれないことは，すべてのカップを正しく分類したときだけ有意と判定されるということである。ただ一度でも失敗すれば，その成績は有意水準に達しないとされた。これに対して，B子は“自分はいつでも正しく分けることができるというのではない，ときどき間違うには間違うけれど，正しい場合の方が多い，だから実験を充分拡大するか，充分多数回反復してもらいたい，そうすればときどき間違うけれど，正しく分類した場合の方が断然多いということを実際ご覧に入れよう”と主張してよいわけである。

そこで，α型を4杯，β型を4杯でなくして，おのおの6杯，合計12杯のカップについて実験しようということになる。上述の場合と同じように帰無仮説を立てる。すなわち，「全然判別力なし」という仮説を立てる。起こり得べき場合は，問題は12杯のうちから6杯を正しく分類し出すことであるから，上述と同様にして，起こり得べきすべての場合は ${}_{12}C_6=924$ 通り存在する。そのうち，完全に成功する場合は1回，5杯正1杯誤りの判断を下すのは ${}_6C_5\times{}_6C_1=36$通り，ということになるから，多くとも1杯までしか間違いをしないという場合の起こる確率は，この帰無仮説のもとでは，$(1+36)/924$ であって，その値は，1/20 すなわち 0.05 より小さいから，0.05 を有意水準とすれば，これは有意である。すなわち，今度の実験では，間違いが1杯にとどまるならば，「全然判別力なし」という仮説は棄てられる。

使用するカップの個数をさらにますならば，ますほど，過誤の場合が多くあ

っても，その結果は有意的とみられることになる。すなわち「実験の規模を増大させることにより，実験感度を高めることが可能である。つまり低度の感覚的判別力，すなわち帰無仮説からのいっそう少量のくい違いも検出できるのである。実験は帰無仮説に反証を与えこそすれ，けっしてこれを立証するものではないのは，あらゆる場合を通じて，いい得ることである。だから実験によって帰無仮説に対する反証をあげることがいっそう容易になれば，実験の価値はそれだけ高まったといってさしつかえない。」(R. A. Fisher)

問題 (2°) について：初めに計画したままの実験でも，多数回にわたってこれを反復し，8個を8個とも正しく分類した場合を成功とし，他の場合を失敗として記録してみる。すると，実験をN回反復したとすると，「全然判別力なし」という帰無仮説のもとでは，何回まで成功したら，有意として，この仮説を棄却し得るか。1回の試行のとき成功する確率は 1/70 であるから，

$$\sum_{k=i}^{N}\binom{N}{k}\left(\frac{1}{70}\right)^k\left(1-\frac{1}{70}\right)^{N-k}<0.05$$

となるような i を求めればよい。N＝10 とすれば $i=2$ である。すなわち，B子やD太郎のうけたような試験で8カップを1つも間違わずに分類したのを成功，そうでないのを不成功といえば，こういうふうな試験をたとえば10回くり返し，そのうち2回成功することがあれば，あと8回が不成功であっても，「判別力なし」との仮説は棄てられることになる。

問題 (3°) について：α 型，β 型いずれになるかも全然偶然的にきめると，8回共 α 型になることもあり，β 型になることもあり，種々の場合が生ずる。その総数は 2^8 通り，すなわち256通りあるわけである。このとき正しい場合は1通り：7個正1個誤りの場合は8通りというわけである。それで，ここに「判別力なし」との仮説を設けると，その仮説のもとでは，正しく分類する確率は 1/256；たかだか1個誤りの確率は 9/256 であって，この値は 0.04 より小である。有意水準を 0.05 にとれば，これは有意な結果である。それで1個しか誤っていない場合でも有意な結果として，上の仮説は否定される。同じく，

8回の喫茶でありながら，実験の論理的構造が違うと，このように有意な結論が得られることは銘記されなければならない。——けれども実際問題としてはこの方法によると，たとえばα型だけ，またはβ型だけとなって比較の便を被験者に与えないこともあり得るゆえ，この方法の採用はまず見あわすべきである。

問題（4°）について：実験においてなぜ randomization が必要であったのであろうか。これに関しては，R. A. Fisher の解説を聞こう（上例にあわせるよう変える）。

「この場合，帰無仮説は，被験者には本人自身の主張するような判別力は全然ないということであり，そうしてこの仮説を検定するのがすなわち前述の実験である，とわれわれはいった。またこの帰無仮説に付随するものとして，ある特定の頻度分布のあることを示した。この頻度分布は8個のものを4個ずつ2組に分ける 70 通りの可能な仕方が，いずれも相等しい確率をもつということに立脚したものである。つまり，それは，全くの偶然によって（つまりでたらめに）分類した場合に生ずる頻度分布なのである。さて試験しようとする判別力が欠けている場合には，偶然の法則によって実験結果が完全に支配されるという仮説がここにあるわけで，この仮説を正当づけるために必要な実験技術の具体的条件からまず検討してからでなければならない。もちろん，仕方が悪ければこの仮説が成り立たないことも，あり得るのはわかりきったことで，たとえば初めにミルクを入れたカップには砂糖を入れ，初めに紅茶を入れたカップには砂糖を入れないことにすれば，双方の風味はいうまでもなく非常に違うので，ミルクのはいったもの全体は似たものどうしで1組にされやすい。このようにして組分けすれば，全部正しくなるか全部誤りになるかである。ところが，このような場合，すべてのカップが正しく分類されるという問題の事柄の起こり得る頻度は70回に1回ではなくて，70回に35回である。これでは有意性検定は全然無効である。これと原理上全く同様な誤謬が，他の点では正当に計画された実験のなかにまぎれ込んでいることは，きわめて多いのである。

試験すべき点は別として，それ以外のすべての点において，“すべてのカッ

プは正確に同一でなければならない”ということを主張しても，それは充分な救済案とはならない。なぜなら，この実例ではそれは到底できない相談だからである。他のどんな形式の実験を考えたところで，やはり実現できないことである。実際にはカップをつくる材料の厚さとか滑らかさがカップごとに感覚で判別できる程度にまで違うということもあるし，入れたミルクの量もカップによって正確には等しくないこともあろうし，1番目のカップと最後のカップでは，茶の出方が違うこともあろうし，喫茶中の温度も，実験中変わらないともいえない。こうはあげてみても，それらはただ起こり得べき相違を示したにすぎないのであって，ある実験に付随して生ずる可能性のある相違を残りなくあげつくすことは不可能である。実験結果に影響をおよぼす未管理の原因は，どんな場合でも厳密にいうと，無限に多いからである。ところが，何かこういう原因をあげてみせると，世間一般のならわしとして，それは労力と費用をましさえすれば大部分取り除かれるだろうと片づけてしまわれる。くふうをこらせば，実験も改良されるだろうときめてかかることが，遺憾ながらあまりにもその例が多い。……われわれの見解をいえば，かぎられた手段をもって遂行するところにこそ実験の生命はある。実験計画そのものの主要な役目は，このような手段を最も有効に利用する方法が何であるか，そうしてとくに，攪乱をおよぼす原因のうち，どれに注意を払うべきであるか，どれをわざと無視すべきであるか，というような点を確かめることである，と私は信ずるものである。なおまた確かめるべきことは，無視できない攪乱原因については，どの程度までこれを減少させることが骨を折るのに値するかということである。しかし，それはそれとして，今の場合，肝心なことは，次のことを認識すればことたりるのである。つまり検定の対象になっている条件以外のもので，実験結果に影響をあたえる諸条件を，できるだけ平等化しようということである。

どれほどの注意と技倆をもってしても，そのような平等化は，程度の差異こそあれ，けっきょくのところ，不完全をまぬがれないものであって，大事な実際の場合には相当大きな欠陥をもつことが多いということである。こういうふ

うにみてくると，ようするに大事なことは，大なり小なり，このような不平等のために，頻度分布の正確性に異議が差しはさまれることのないよう用心することである。というのは，実験結果を評価するための基礎は，一にかかって，この頻度分布にあるからなのである。」

「この実験で本当に安全装置となるのは，試験標本の2通りの様式の提出の順が無作為的だということである。われわれの，頻度分布を完全に支配するものは，偶然の法則であるが，偶然の法則が，あからさまに導入されていたというのが，この実験の要点なのである。ところで，提出の順序が無作為的（random order）というのは，実は，不完全な表示であって，それは，無作為的（randomization）の完全方式をかりに標語的に手短にいいあらわしたものである。確率化こそ，いまだ除去されていない撹乱原因によって，有意性検定の妥当性がそこなわれないよう，保証をあたえるものである。充分な確率化をほどこすならば，有意性検定の妥当性が完全に，無傷ですむということを証明すること，それにはあらゆる撹乱原因というもの，たとえば紅茶の煎じ方の強さ，ミルクの量，飲むときの温度等が各カップごとにそれぞれあらかじめきまっているものと想像してみよう。そうすると，これらのあらゆる撹乱原因は，帰無仮説のもとでは，分類に影響する唯一の原因であって，被験者が行ない得るところの可能な選択あるいは分類のそれぞれに対して，それに対する選択なり分類なりが起こる確率があらかじめきまっていることになる。しかしながら，撹乱原因がすでにきまったあとで，8カップのうち4つを，実験処理のそれぞれに全然無作為的に割り当てるならば，これらの4つのいかなる特定の組み合わせに対しても，それがいかなる分類の確率をもつにしても，とにかく，ミルクを先に入れたものであるという確率は正に 70 分の1であろう。だから撹乱原因がきわめて重大であって，そのため，はなはだしきにいたっては，これら撹乱原因のため，4杯のある特定の1組は，確定的に，そういうふうに分類されると，きまってしまうほどであったとしても，このように分類された4と，そういうふうに当然分類されるべき4とが一致するという確率は，上述の有意性検定に厳

密に一致しなければならない。

このようにして，相異なる処理をうける実験対象を無作為的にひき出して順をつけるということが，有意性検定の妥当性を完全に保証するものであることは，明らかとなったであろう。ただし，これらの相異なる処理というものを，実験反応に影響あるかもしれないところの，実験対象の物質的経歴の最終段階に加えるものと前提してであった。

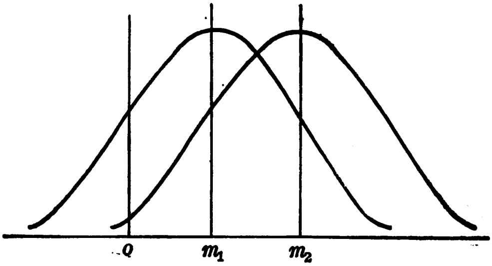
ところで，実験処理を，最後に加えるという事情はかならずしも常には成り立たないところで，ときには，その経歴のうち初期にあらわれるという事情も起こるのであるが，問題の処理を受けたあとで加わってきた差異の諸原因というものも，実験家が管理できることであれば，これは実際上はなんら都合が悪いことではない。というのは，たとえばフラスコが違うごとに，ピペットをえらび変えるというような場合，処理が確率化される以前にあらかじめ決定しておけるか，あるいはそうでなければ，そのこと自身を確率化できるのである。そうして，差異を生ずる原因としては，なおそのほかに，(a) すでに確率化した差異から生ずる結果か，あるいは (b) 帰無仮説では定義上認めないことになるが，試験の目的である実験処理に，実は差異があるために当然起こる結果か，あるいは (c) 加えた実験処理とは独立に偶然に併発した影響かのいずれかである。このようにして，試験処理を取り扱うときに実験家自身がひき入れるところの，避けられない誤差とか，あるいは処理上の他の相違で，その効果が実験で別に調査しようと心構えていないようなもの，そういうものを論外とすれば，単に確率化を行なう用意がありさえすれば，実験結果の判定基準になるところの有意性検定の妥当性を，これによって保証するにたる，といってよいのである。」

2.　近代統計学的方法の前提（比較法と確率化法）

近代統計学の方法は，前章に述べたように，確率論との対応において，母集団と標本との区別に立脚している。しかしここに肝要なことは，この対応を確

保する前提を物質的に形成する点にある。数学の援用は，数学がよく現実の客観的条件を反映しているとき，そうしてそのかぎりにおいてのみ意味があるからである。さて確率論との対応が確保されるためには，統計の性格に対して多くの制約を加えなければならない。

ある2つの薬品，たとえば睡眠剤A, Bの効果を比較するというとき，平素に比較しての睡眠時間の延長あるいは短縮を測定してこれを標識とすることにしよう。そのとき，2つの薬品をそれぞれ相互に関係なしに，多数の人びとに飲用させて，睡眠時間の延長を正数，短縮を負数として記録する。すると，12－1図のような頻度分布が多数の人びとについての実験を集計してえられる。



12－1図

古典統計学または記述統計学のあるものにおいては，次のような論法をもって，A, B の薬効を比較する。A, B に関する頻度分布での平均値をそれぞれ m_1，および m_2，標準偏差をそれぞれ σ_1 および σ_2 とすれば，

$$d=|m_1-m_2|/\sqrt{(\sigma_1{}^2/N1)+(\sigma_2{}^2/N2)}$$

を計算し，平均値0，標準偏差1の正規分布においてこの d 以上の絶対値をもつ偏差の起こる確率

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_d^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

がある指定値よりも小さければ，m_1 と m_2 とは異なるとし，d が3より大ならば有意とすることなどは，古い統計学の本に書いてあるとおりである。

この論法についてはすでに記述統計学の項のところで述べた。そこで指摘し

たとおり，母集団平均値と標本平均値との混同があり，母集団標準偏差と標本標準偏差との混同がそこにみられる。

この混同は，形式的には t-分布 の援用により避けられる。しかしながら形式的な演算よりもまず考えてみなければならないのは，この検定が適用されるべきこの統計のつくり方自身でなければならない。Aの方がBより効くというのは，はたして，このような意味であろうか。薬剤は，対象にほどこしてのみ比較されるものであり，それは同一の対象にほどこしての比較でなければならない。薬剤の効果に対しては実験の対象たる各個人を比較すれば，個人差も相当あるものと一応考えなければならない。それゆえ A は $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ に対してほどこし，B はこれとは独立に $a, b, c, \cdots$ に対してほどこすというのでは，上述の意味では比較にならないことは明らかである。このために大標本論をとる統計学では，$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ という事例をなるべく多くする。$a, b, c, \cdots$ に関してもそうである。そうすることによって大数の法則を援用して，事例をますことによって，現われてくる規則性を把握しようとしたのである。

しかし，これは一般には，次の2点において警戒を要し，多くの場合において誤謬におちいっている。第1に，事例をますことによって大数の法則のあらわれることを想定するけれども，大数の法則は確率化された集団を前提とするものである。これに反して，現実の世界は種々の因子により階層別にいちじるしい相違をもつことがあるから，この想定を保証するのには一般には非常に多くの資料を予想しなければならない。第2に，われわれの欲している知識は，多数の事例について平均値がA，Bどちらが大きいかということよりも，同一個人について比較したであろうならばA，Bどちらが有効か，すなわちA，Bいずれに対して睡眠時間が多くなるといえるか，それを統計的にみることである。

それゆえ，たとえば個人差が問題であれば，同一人についての実験を比較すべきであり，その他の突きとめられる因子に層別して効果を比較すべきである。もし同一人について実験できなければ，なるべくそれに近い条件のもとで比較すべきである。自然科学および社会科学において差異比較法という，帰納

的研究方法の原則がある。これを利用する点において近代統計学は，帰納論理の定石をふむものであり，大標本論のように比較法の原則を軽視することはむしろ，定石はずれである。事例を集めて数にものをいわせようというのは，大数の法則の正しい援用ではない。比較法の統計学への応用において，顕著なのは，Student の最大類似法（maximum contingency）の原理である。これを一例をもって標語的にのべてみよう。変量 X, Y の差の標準偏差に関して

（1）　$\sigma^2_{X-Y}=\sigma_X{}^2+\sigma_Y{}^2-2\rho\sigma_X\sigma_Y$

という公式がある。ただしここに σ_X, σ_Y はそれぞれ X および Y の標準偏差，ρ は X と Y との相関係数である。σ_{X-Y} が小さければ小さいほど，X の平均値と Y の平均値との比較がより精細にできるから，σ_{X-Y} を小さくすることが実験計画の目標でなければならない。 Student の根本思想は従来の σ_X, σ_Y を小さくするやり方に対して，ρ を大きくすることによって，σ_{X-Y} を小さくしようとするものであることは，すでに第7章で述べた。この原則が変量分析法，実験計画法のすべてをつうじての1つの根本原則となっている点に，現代統計学の1つの特徴がある。

近代統計学の性格を理解するためのもう1つの考えは確率化(逢機化）(randomization）の原理である。これは R. A. Fisher に主としておうものである。前節で説明したように，仮説の検定において用いる確率分布の妥当性を保証するもの，したがって実験誤差の推定値の妥当性を保証するものは，この確率化（逢機化）にかかっているのである。

比較法と逢機化法とは，かくしてそれぞれ Student および R. A. Fisher により，最も明確な形において統計学に導入されたものである。統計調査についていえば，前者は層別法判断利用に相当するものであり，後者は最終調査単位抽出に任意標本を用いることに相当するものである。われわれは，有名な一例をもって，これらの原則を説明しよう。

Charles Darwin がその著『植物界における他花および自花受精の影響』(The effect of cross and self-fertilization in the vegetable kingdom) の

序言で，生物実験について次のように述べている。

「個々の植物は測定するだけの価値があるか，私は多年疑問に思っていたが，とにかく測定することに決心した。雑種植物が自花受精のものより優秀なのは，前者の方に例外的に優秀な植物が2,3あり，後者にごく貧弱な植物が少数個あるという事実によるものでないことを調べてみようとしたのであった。……他花受精および自花受精の植物についての測定個数はやっとどうにかとれるという程度でしかないから，平均値にどれだけの信用がおけるか，その点を知ることは私にとってきわめて重大なことであった。そこで私は，統計的な研究ですでに多くの経験を積まれている Galton 氏に依頼して，私の測定数値表のうち若干のものを検討してもらうことにした。依頼したものは，Ipomoea, Digitalis, Reseda Iuta, Vida, Limnanthes, Petunia および Zea についてであった。あらかじめ断わっておくが，もしもたまたま2つの民族から 12 名ないし 20 名だけをとってきて，この少数例をもって両民族の平均身長をうんぬんしようというのであれば，私も，これをもってあまりにも早計であろうといいたいところである。ところが，この自花および他花受精の植物に関しては，いささか事情は違っている。というのは，これらの植物は正確に同一年齢であったし，始終同一条件のもとであったし，なおまた同一系統のものであったからである。2対ないし6対しか植物を測定しないで得られた結果は，他種の植物についてのより大規模な実験によって相互的に確認されるものでなければ，まずほとんど，あるいは全然無価値といってよいのは明らかである。ともかく7個の測定表を御覧に入れよう，これは Galton 氏が親切にも私のためにつくってくれたものである。」

これに対する Galton の解釈，Darwin の感想，そうして Fisher の批判——これらは現代統計学と記述統計学の方法論的相違をはっきりと示すものである。

【1】 Galton の統計的処理　まず Galton の説くところを聞こう。“私は注意深く植物の測定値を調べてみた，いろいろな統計学的方法によって数個の

12-1表　Zea mays (R. A. Fisher による)

Darwin の記録			長さの順の配列				
			プロット別		全体総合		
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	他花受精	自花受精	他花受精	自花受精	他花受精	自花受精	差
	インチ	インチ	インチ	インチ	インチ	インチ	インチ
プロット　I	$23\frac{4}{8}$	$17\frac{3}{8}$	$23\frac{4}{8}$	$20\frac{3}{8}$	$23\frac{4}{8}$	$20\frac{3}{8}$	$-3\frac{1}{8}$
	12	$20\frac{3}{8}$	21	20	$23\frac{2}{8}$	20	$-3\frac{2}{8}$
	21	20	12	$17\frac{3}{8}$	23	20	-3
					$22\frac{1}{8}$	$18\frac{5}{8}$	$-3\frac{4}{8}$
プロット　II	22	20	22	20	$22\frac{1}{8}$	$18\frac{5}{8}$	$-3\frac{4}{8}$
	$19\frac{1}{8}$	$18\frac{3}{8}$	$21\frac{4}{8}$	$18\frac{5}{8}$	22	$18\frac{3}{8}$	$-3\frac{5}{8}$
	$21\frac{4}{8}$	$18\frac{5}{8}$	$19\frac{1}{8}$	$18\frac{3}{8}$	$21\frac{5}{8}$	18	$-3\frac{5}{8}$
					$21\frac{4}{8}$	18	$-3\frac{4}{8}$
プロット　III	$22\frac{1}{8}$	$18\frac{5}{8}$	$23\frac{2}{8}$	$18\frac{5}{8}$	21	18	-3
	$20\frac{3}{8}$	$15\frac{2}{8}$	$22\frac{1}{8}$	18	21	$17\frac{8}{8}$	$-3\frac{5}{8}$
	$18\frac{2}{8}$	$16\frac{4}{8}$	$21\frac{5}{8}$	$16\frac{4}{8}$	$20\frac{3}{8}$	$16\frac{4}{8}$	$-3\frac{7}{8}$
	$21\frac{5}{8}$	18	$20\frac{3}{8}$	$16\frac{2}{8}$	$19\frac{1}{8}$	$16\frac{2}{8}$	$-2\frac{7}{8}$
	$23\frac{2}{8}$	$16\frac{2}{8}$	$18\frac{2}{8}$	$15\frac{2}{8}$	$18\frac{2}{8}$	$15\frac{4}{8}$	$-2\frac{6}{8}$
					12	$15\frac{2}{8}$	$+3\frac{2}{8}$
プロット　IV	21	18	23	18	12	$12\frac{6}{8}$	$+0\frac{6}{8}$
	$22\frac{1}{8}$	$12\frac{6}{8}$	$22\frac{1}{8}$	18	…	…	…
	23	$15\frac{4}{8}$	21	$15\frac{4}{8}$	…	…	…
	12	18	12	$12\frac{6}{8}$	…	…	…

組の平均がどの程度まで恒常的な現実を，たとえば，生長の一般条件が変わらないかぎり必ず出現するようなものをあらわしているか見いだそうとした。私の受け取った測定値は 12-1 表の第IIおよび第III列に示されている。一見したところ，何の規則性もなさそうである。しかしこれらを，第IVおよび第V列のように大きさの順にならべてみると，事情はたちまち一変する。すぐ気づくところは，どの鉢についてもほとんど例外なしに他花受精の方で最大の植物は，自花受精の方で最大の植物より大きいし，第2位どうしを比べてもそうであり，第3位どうしもそうであって，以下同様に，同じ順位どうし比べると他花受精の方が自花受精より大きくなっている。表において 15 通りの場合のうちわず

か2通りの場合だけが，この規則の例外であるにすぎない。”そこでGaltonは結論にいう。“この実験がなされた条件の範囲内では，他花受精の系列の方が常に自花受精の系列にまさっていることは，確信をもって断言できよう。”

次に数量的な問題にはいって Galton はいう。鉢ごとに組をつくって平均値をつくってみると，表にあるように非常に不ぞろいである。これでは正確な数字をもって推定することが不可能なように思われる。しかしここで考えてみるべきことは，鉢と鉢相互間の相違が，植物の生長に影響をおよぼした他の諸条件のそれと同一程度のものであるか，そうでなかろうか，ということである。もし同じ程度だとすれば，——そうしてその条件のもとにおいてのみいえることであるが，——他花受精も自花受精もすべての測定値をいっしょにして1つの系列にまとめても，その系列は統計的に正則であるということになる。これは実際には第VIIおよび第VIII列でためしてみたが，そこでは規則性がきわめて明瞭にあらわれてくるのであって，その平均を完全に信用できるものと考えていいということを正当づける。”

“私はこれらの測定値を図に表わし，それらの点を通る曲線をフリーハンドで描いて，普通行なうように修正をほどこしたのであるが，もとの測定値から導かれた平均値はこの修正によってもほとんど変わらない。今の場合において，そしてほとんどすべての他の場合において，もとの平均値と修正された平均値との差異はそれらの値の2％以下である。私が検査した測定値をもつ7種の植物において，他花受精の方の高さと自花受精の方の高さとの比は，5個の場合においても，きわめてせまい限界内に分布していることは，きわめていちじるしい一致である。Zea mays では，100 対 84 であり，その他では100対76 と 100 対 86 との間に分布している。変異の決定（専門的に“確率誤差”と呼ばれるもので測られる）は平均値の決定よりも，もっと慎重を要する問題であって，多くの試みをなした結果，これらの少数個の観測値から有用な結論を導き得るかどうかは自分は疑問に思う。はっきりした結果を推論する位置にあるためには，おのおのの場合において少なくとも 50 個の植物の測定値をも

たなければならない。……”

【2】 **Darwin の感想** “Galton 氏は自分に，同時に，測定値によって氏の作成された図的表示をも送られた。これを見ると見事な規則正しい曲線をなしているのは明らかである。氏は，Zea と Limnanthes との図については，きわめて良好（very good）ということばを添えられた。氏はまた，私が用いた方法よりも一層正確な方法で，7個の表における他花および自花受精植物の平均の高さを計算された。つまり，測定以前に死滅した少数個の植物についても，統計学的規則に従って推定されるとおりに，その高さを加算されたのである。これに反し，自分は生残したものの高さを総計してその和をそれらの個数で割ったにすぎなかった。われわれ2人の結果の相違はある見地からすれば，きわめて満足なものである。というのは Galton 氏によって論断されたところでは，自花受精植物のどの平均の高さも，ただ一つの場合を除いたすべての場合において，私のよりも小であり，その取り除かれた場合においてもわれわれ両者の平均値は相等しいからである。これによってみると雑種植物の方が，自花受精植物よりも優秀であることを，私が誇張しすぎてはいないわけである。”

【3】 **R. A. Fisher による批判** 近代統計学の定礎者 R. A. Fisher は Galton のいわゆる統計学的方法をもって，統計学の誤用なりとしてこういうのである。

“Darwin に採用された方法は，できるだけ等しい条件のもとにおいて自花受精植物の1つを，それぞれ他花受精植物の1つと組み合わせたものであることがわかる。比較のためにこのようにして選ばれた各対は，同時に発芽したものであり，それが生長する土壌条件は，同一鉢に植えることによって，大部分ひとしくされていた。……こうした用心の目的は，観察の目標であった生長率の相違が，できるだけ環境には依存しないように，したがってできるだけ受精が自花か他花かという発生の様式にもとづく本源的な相違によるようにし，これによって実験の感度を向上させるのにあったのは明らかである。” “対比法（method of pairing）は，近代生物学の諸業績において広く採用されたもの

であるが，これは，往々にして一見相矛盾するようにもみえる2つの要求を適切な実験計画によって調和させ得ることを示している。一方においておのおのの観測の感度を高めるため，実験対象となる生物学的材料に対して最高度の均斉性を要求するとともに，他方，結果の信頼性と恒常性とをできるだけ広く証明するため，観測数の増加を要求する。” しかしこの2つの要求は実は矛盾しないのである。なぜならば，均斉性は反応が比較されるべき対象（すなわち相異なる処理をうけるもの）の相互間に要求されるべきものだからである。それゆえ，もし二種類の処理だけを調査しようというような上の例でいえば，比較の対象となり得るものどうしは，問題の処理（すなわち自花受精か他花受精）以外の条件は，できるだけ一致するようにすることが必要であるとともに，対を異にするものどうしは別にこういう条件は必要でない。

12-2 表　(R. A. Fisher による)

プ ロ ッ ト	他 花 受 精	自 花 受 精	差
	インチ	インチ	インチ
I ………………	$18\frac{7}{8}$	$19\frac{2}{8}$	$-0\frac{3}{8}$
II ………………	$20\frac{7}{8}$	19	$-1\frac{7}{8}$
III ………………	$21\frac{1}{8}$	$16\frac{7}{8}$	$-4\frac{2}{8}$
IV ………………	$19\frac{6}{8}$	16	$-3\frac{6}{8}$

(a)　Student の t-分布の適用

Darwin のこの問題に対して，近代統計学の提供する方法は Student の t 検査法である。本書においてしばしば説いたように，数学は道具であって，これに反映模写されたところの物質を忘失するとき，限りない迷宮におちいらざるを得ないであろう。数理統計学においても，このような危険は必ずつきまとっている。実験の解釈にあたっても，実験の物質的処理それ自身が，これに適用されるべき統計学的方法を支配するのである。実験誤差を推定することは，以下で述べるように Student の t-分布において最も大切な点であるが，下手な計画ではこのような推定値が得られないのである。さて，Darwin の実験

では，対比法を採用している。"この対比法によってすでに土壌条件，採光，通風その他，個々の各対において違うかもしれないと思われる差異はいずれも平等化してしまっている。これが対比法の目標とするところであった。" 15 対のこれらの差異を 1/8 インチ（約3.2ミリ）を単位にして表わすと 12-3 表のようになる。

12-3 表
同一対の自花ならびに他花受精
植物間における高さの差

49	23	56
−67	28	24
8	41	75
16	14	60
6	29	−48

これに対して，われわれは帰無仮説を設定する：

「上述の差異は，正規分布に従う同一母集団からの任意標本である。ただしこの母集団の平均値は 0 である。」 この仮説がはたして有意なりやいなやを検定するため，われわれは統計量を利用するのである。

（2）　$$\bar{x}=\frac{1}{15}(49-67+8+16+6+\cdots+75+60-48)=\frac{314}{15}=20\frac{14}{15}$$

$$S^2=\sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{15}x_i^2-15\bar{x}^2$$

$$=(49^2+67^2+8^2+\cdots+60^2+48^2)-15\left(\frac{314}{15}\right)^2=19945$$

$$s^2=\frac{1}{15-1}\sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2=\frac{S^2}{14}=1431.79$$

$$t=\frac{x\sqrt{n}}{s}=\frac{\bar{x}\sqrt{15}}{s}=\frac{20.933}{9.746}=2.148$$

しかし t-分布表をみると，自由度 14（=15−1）における 5 ％の有意水準は 2.145 としてあたえられる。ちょうど 5 ％ の近くであるが，有意ということになるのである。

(b) 統計学の誤用とデータの偽造

Darwin が次のようにいったとき，彼は完全に正しかった。“結果の信頼性はいずれの場合をも一貫して雑種植物が自花植物よりも優秀であるということによって判断すべきであって，一方の側に2,3の特別な植物があったり，あるいは他の側に少数個のきわめて貧弱な植物があったりすることによるべきではない。”

したがって，また平均値の差のみによっては判断されない。実験的証拠の提供は，本質的に個々に独立な植物の測定値を与えることに依存したものであり，単に平均値から確かめられるものではない。

Galton が標準誤差の計算について危惧の念を表明したのももちろん正しい。このような少数個の標本ではいちじるしい不確実性を伴わざるを得ないのも明らかである。Student が 1908 年 t-分布を発表するまで，この不確実がどの程度まで，有意性の検査を無効にするかがわからなかった。Student のこの業績により，心配の種は思ったほどではなかったのである。ここに問題になるのは，差異の有意性を検定する際の物指ともなるべき t-分布における s が，標本それ自身から得られるもので，なんら先験的にある数値を予想するものでないことである。

統計学の誤用としてもっと問題になるのは，比較すべきものを並べ換えることによって，意図された目的に対するデータの価値を高め得る，という Galton の仮定のなかにある。

Galton の方法に対しては，Student の t-分布を用いることはできない。なぜならば，標準誤差の推定には，この誤差を生ぜしめた変異の原因にもとづかなければならないのが，統計学適用の前提条件でなければならないからである。ところが両系列における最高の植物どうしの比較，第二位どうしの比較というのであっては，両植物の平均値間の真の変異の原因は大部分除去されてしまう。

“より正確な方法によって……測定以前に死滅したような少数個の植物につ

いては，統計学的方法に従って推定した値のとおりの高さとして，これに加算する”という点にいたっては，正当な推論の限界をはるかに越えている。このことは，R. A. Fisher の指摘するとおり“正確な実験技術がすでにいちじるしく発達していた時代においてもなお，統計学的推理の論理はまだ揺籃期にあった”ことを表わす。

(c)　妥当性と無作為化 (Validity and Randomization)

Student の t-分布が得られた数学的前提をくわしく反省することによって，誤った少数例の取り扱いを避けることができるであろう。理論の基礎に存在する仮定が，現実の世界でいかにして保証されているかということがなおざりにされるとき，大きな誤りの原因がそこに存在する。

t-分布において用いられた誤差の推定値は上述の 15 個の構成要素にしか関係していないことは容易にみられるところである。置き場所の選択法のために資料に加わってきた上述の一組の偶然性に対して，適当な推定値を提供できるように，これら15個の構成要素に対して，四則の演算をほどこすことが計画できるわけで，事実それが t -分布によって与えられたわけである。この置き場所の選択法で注意すべきことは，15個の対を，対どうしはお互いに独立無関係に，置き場所をきめた点である。単に実験が，雑種と自花受精の双方に不偏であるというだけならば，1度貨幣を投げて鉢の東側には表が出たら，雑種植物全部，自花受精植物全部をというふうにしてもよい。しかしこれではわれわれの推定値の妥当性を保証するのには，不充分である。なぜなら，すぐわかるように，未知の事情，たとえば日中の各時刻において採光状態が違うとか，温室内の通風の乾燥作用が他方の側の植物に比べて一方の側の植物に対して系統的に有利である，とかいうこともあり得るだろうからである。そして無作為化の機能は，こうした原因による影響を誤差の推定値から取り除く点にある。“われわれの誤差の推定値は生長率に影響するこれらのすべての原因に対して，適当に注意を払っていることを保証している。実験者に対しては，彼の資料に攪乱をおよぼす恐れのある無数の原因の数量を考えたり推定したりする心配から救う

のが，この無作為化の方法にほかならない”ということを，R. A. Fisherは指摘している。

3. 変量分析法

分散分析法（Analysis of Variance）および相関量分析法（Analysis of Covariance)を総合して，変量分析法という。変量分析法は1923年R. A. Fisherによって初めて導入されたものである。すなわち資料の組が若干個あって，それらの組が互いに比較できるような場合，これらの組のなかから，特定の源泉（原因）に起因すると断定できるような変動を分離するための１つの技術である。原因のわかっている変動から成り立つ部分を取り除くことによって，実験誤差の推定値が得られる。この方法に付随する有意性検定をここで用いるならば，これら数組の資料が，はたしてある単一の均質な母集団から抽出された任意標本と見なされ得るかいなか，という判断に対する根拠を与え得ることになる。自由度という概念が使用される。この方法は標本の大きさに対して制限をつけない。すなわち，大標本のみならず，小標本に対しても使用できるし，有効適切な実験方式の設計という問題，実験技術の検定にただちに役立つのである。以上述べたのは分散の分析である。これを分散分析法という。これに対して相関量分析法は，２個以上の相関連した変量に対して相関量の分析にこの方法を拡張するものである。

われわれは，前節において比較法と無作為化法との明確な使用に近代統計学の根本的性格を認めてきた。それは，統計調査における判断利用と確率化とに相当することであることをも示した。そうして２集団の平均値の比較という問題において，これらの原理がいかに具現されるかをみてきた。われわれがここに取り扱うところの変量分析法においても，近代統計学のこの根本的性格ははっきりと指摘できるのである。そのためには，上述の２集団の平均値の比較という問題と，変量分析法との関連を明らかにすることが必要であろう。前者は，すなわち後者の特別の場合であると同時に，変量分析法全般を通じての指

導原理というべきものは，比較法と無作為化法であり，これをさらに精細巧妙に利用するところにあることが読み取れよう。

以下われわれは，分散分析法についてその大綱をうかがうことにしよう。

【1】 **分散分析法の構造**　変動因が2通りある場合を例にとって説明しよう。第1および第2変動因の起こり得べき様相をそれぞれ r 通り，s 通りとする。便宜上，第1の変動因による分類を群（行）といい，第2の変動因による分類を級（列）という。すると，資料は群と級との2つの因子によって，$r\times s$ 個の細胞に分類されることになる。これは，まさに層別化の段階である。第 i 群第 j 級に属する統計変量の数値を x_{ij} で表わす。これら全体を12－4表のように配列してみる。そうして，まず群平均，級平均および総平均を次のように定義する。

12－4表

行(群)＼列(級)	1	2	…	s	群平均
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1s}	$\bar{x}_{1\cdot}$
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2s}	$\bar{x}_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	x_{r1}	x_{r2}	…	x_{rs}	$\bar{x}_{r\cdot}$
級平均	$\bar{x}_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$	…	$\bar{x}_{\cdot s}$	総平均 $\bar{x}_{\cdot\cdot}$

（3）　群平均　$\bar{x}_{i\cdot}=\dfrac{1}{s}(x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{is})$，$(i=1,2,\cdots,r)$

級平均　$\bar{x}_{\cdot j}=\dfrac{1}{r}(x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{rj})$，$(j=1,2,\cdots,s)$

総平均　$$\bar{x}_{\cdot\cdot}=\frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}$$
$$=\frac{1}{r}(\bar{x}_{1\cdot}+\bar{x}_{2\cdot}+\cdots+\bar{x}_{r\cdot})=\frac{1}{s}(\bar{x}_{\cdot 1}+\bar{x}_{\cdot 2}+\cdots+\bar{x}_{\cdot 3})$$

次に，変動状態については，分散の考えでゆく。ここに種々の平方和（sum of squares）を導入する。

（4）　$$総平方和=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot\cdot})^2=\mathrm{S}$$

$$群間平方和=s\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2=S_C$$

$$級間平方和=r\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2=S_R$$

総平方和は，rs 個の変量に関して，因子を設けず，すなわちこれらを分類せずに，その総平均のまわりにどのように分散しているかをみたものである。群間平方和は，群平均値の比較という見地から，級間平方和は，級平均値の比較という見地から，それぞれつくられたものである。

変動状態を表現するのには，平均値のまわりに偏差をとって，それを自乗して加えるという，この平方和だけがただ一つの方法ではない。しかし平方和をとることにより，数学的にいえば二次形式の理論を援用することにより，非常に簡明な関係式が得られる。分散分析法あるいは広く変量分析法の数学技術的な特徴は二次形式論の援用にあるといえる。

第１にわれわれは次の恒等式をもつ：

（５）
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2$$
$$=s\sum_{i=1}^{s}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2+r\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{.j}+\bar{x}_{..})^2$$

右辺の第３項を S_E で表わし，群級間平方和ともいう。

分散分析法に用いられる統計数理を明らかにしよう。以上の各号についていえば，各観測値 x_{ij} を

（６）　$x_{ij}=M+C_i+R_j+y_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$

と書き，

（７）　$\sum_{i=1}^{r}C_i=0,\qquad\sum_{j=1}^{s}R_j=0$

とおくことは，それ自身なんら一般性を失わない。ところで問題になるのはこれからで，y_{ij} なるものについて次のような前提をおくことである。

（i）　y_{ij} は確率変数 Y_{ij} の現実値である。

（ii）　Y_{ij} は平均値 0，標準偏差 σ の正規分布に従う。

(iii)　Y_{ij} $(i=1, 2, \cdots, r\,; j=1, 2, \cdots, s)$ は相互に独立な確率変数である。

ここに C_i は第 i 群因子，R_j は第 j 級因子の作用を表現するもの，M は全資料にわたっての影響を示すもの，と解すべきものとなる。この前提が確かめられたとするならば，われわれは進んで次の仮説を検定し得るのである。

仮説 $H(C): C_i=0\quad(i=1, 2, \cdots, r)$

仮説 $H(R): R_j=0\quad(j=1, 2, \cdots, s)$

仮説 $H(C)$ および $H(R): C_i=0,\ R_j=0\ (j=1, 2, \cdots, r\,;\ j=1, 2, \cdots, s)$

仮説（C）あるいは（R）を単独に調べることもできるし，（C）および（R）をいっしょに検定することもできる。たとえば仮説 H(C) というものは群という因子は存在しないという帰無仮説になり，仮説 H(R) は級という因子は存在しないという帰無仮説である。

分散分析法では，これらの仮説のもとで，確率変数 S_C, S_R および S_E の確率分布を利用して有意検定を行なおうとするものである。これらの確率変数はいずれも平方和であり，平方和の各項は，たしかに正規分布に従う確率変数の平方になっている。したがっておのおのが正規分布に従う確率変数の平方の和というものが統計数学上，重要な位置を占める問題となるのである。ここに注意すべきことは，これらの平方和の各項にあたる確率変数が独立でないことである。このために自由度という概念がはいってくる。標語的にいえば，このような平方和の諸項において，相互に独立な項の数ともいうべきものである。それは二次形式の階数であるというとき，数学的には最も明瞭であろう。

分散分析法において重要な役を演ずるものに，2つの基本的な分布がある。

χ^2-分布：確率変数 X_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ は相互に独立であって，いずれも平均値 m，標準偏差 σ の正規分布に従うものとする。すると

$$(8)\qquad \chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

なる確率変数の従う分布関数は次のとおりである。

(9)　$$P(x^2 \leqq x_0^2) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{x_0^2}(u^2)^{\frac{n-3}{2}}e^{-\frac{u^2}{2}}d(u^2)$$

これを自由度 $n-1$ の χ^2–分布であるという。

F–分布：確率変数 U および V は相互に独立であって，おのおのは，それぞれ自由度 m, n の χ^2–分布に従うものとする。すると，

(10)　$$F = \frac{U}{V}$$

なる確率変数の従う分布法則の密度関数が次の式で与えられる。

(11)　$$P(x < F < x+dx) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)P\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}dx$$

これを〔m, n〕型 F–分布であるという。

分散分析法の数学的構造は次のとおりである。

(1°)　$S = S_C + S_R + S_E$

(2°)　仮説 H(C) および H(R) がともに真である場合，すなわちすべてのR_i および C_j がことごとく 0 であるならば，S_R/σ^2, S_C/σ^2, S_E/σ^2 はそれぞれ自由度 $r-1$, $s-1$, $(r-)(s-1)$ の χ^2–分布に従い，これら 3 つは相互に独立である。

(3°)　仮説 H(R) が真なりとすれば，

$$F = \frac{(r-1)S_R}{S_E}$$ は，〔$r-1, (r-1)(s-1)$〕型 F–分布に従う。

(4°)　仮説 H(C) が真なりとすれば，

$$F = \frac{(r-1)S_C}{S_E}$$ は，〔$s-1, (r-1)(s-1)$〕型 F–分布に従う。

(5°)　R_i, C_j の値のいかんにかかわらず S_E/σ^2 は，自由度 $(r-1)(s-1)$ の χ^2-分布に従う。

(6°)　仮説 H(C) および H(R) がことごとく成り立つとき，すなわちすべての R_i および C_r がことごとく 0 である場合，S/σ^2 は自由度 $rs-1$ の χ^2-分布に従う。

12-5表　分散分析表

変動因	平方和	自由度	平均平方
群（行）間	S_C	$r-1$	$S_C/(r-1)$
級（列）間	S_R	$s-1$	$S_R/(s-1)$
剰余	S_E	$(r-1)(s-1)$	$S_E/(r-1)(s-1)$
総	S	$rs-1$	

F-分布に関する 5％または 1％有意水準を設けることにより，以上の帰無仮説が検定されることになる。

〔m, n〕型 F-分布において，α有意水準は $F^n_m(\alpha)$で表わすことにする。

【2】 例題 Schultz および Snedecor は，1930 年ないし 1931 年間の期間にアイオワ州におけるブタの生産価格の地理的分布を調査したことがあった。資料はアメリカ農務省作物通報局によって収集されたものであって，価格通報者は，毎月，担当している地方で各月 15 日におけるブタの価格（生体重 100 ポンド＜約45キロ＞当たり）を報告することになっている。通報者は，アイオワ州内にひろく分布されていた。地域と月とを独立な因子にとり，この 2 つによって分類したのが 12-6 表である。この表の 1 つ 1 つの方眼に記入されている価格は，各地域各月に報告されたブタの諸価格の平均価格である。この表を見てすぐわかることは，価格の季節的な傾向が変動の最も主要な原因であることである。次にこれより小さいがあげられるべき原因は，地理的分布である。問題は，これら 4 地域の生産者に支払われる価格相互間に有意的な差異があるかどうかということである。それには，まず季節的な影響というものの地域的な影響とを一応分離しなければならない。分散分析法は，その論理と技術とを

12－6表　アイオワ州ブタ生産者価格表　(Snedecor)

地域＼月次	地域別月次価格				月次和	月平均	
	I	II	III	IV			
1 月	8.84	8.83	8.80	8.86	35.33	8.83	312.054
2 月	8.04	8.23	8.17	8.45	32.89	8.22	270.526
3 月	7.39	7.31	7.32	7.34	29.36	7.34	215.506
4 月	7.06	7.10	7.11	7.17	28.44	7.11	202.215
5 月	6.44	6.62	6.63	6.65	26.34	6.58	173.477
6 月	6.80	6.87	6.84	6.88	27.39	6.85	187.557
7 月	6.78	6.86	6.92	6.92	27.48	6.87	188.801
8 月	6.03	6.10	6.06	6.30	24.49	6.12	149.984
9 月	5.40	5.39	5.57	5.60	21.96	5.49	120.597
10 月	6.00	5.85	6.16	6.24	24.25	6.06	147.106
11 月	5.91	5.66	6.24	6.36	24.17	6.04	146.351
12 月	5.07	5.20	5.26	5.38	20.91	5.23	109.357
地域和	79.76	80.02	81.08	82.15	323.01	……	……
地域平均	6.65	6.67	6.76	6.85	……	6.73	……
	543.079	547.189	559.252	574.011	……	……	2,223.531

用意するものである。

つぎに12－7表の平均平方の欄を見ると，月平均相互間の平均平方が目立って大きい。これは当然そうあるべきことである。というのは，これは季節的傾向のために起こった変動のためにほかならないからである。ところで問題は，地域的変動の有無を見ることである。そこで，帰無仮説として地域的差異がないという仮説を設ける。それは $R_j=0$ $(j=1,2,3,4)$ ということにほかならない。この仮説は，上述の（3）に従って検定できる。すなわち〔3,33〕型の F

12－7表　アイオワ州ブタ生産者生産価格の分散分析表

変動因	自由度	平方和	平均平方
地域平均間	3	0.299	0.100
月次平均間	11	49.205	4.473
剰余(相互作用)	33	0.372	0.011
総変動	47	49.876	——

分布表において，あらかじめ定められた有意水準，たとえば，0.05 に対するFの値と，現資料にもとづくFの値とを比較するに，

$$(12)\qquad F=\frac{0.100}{0.011}=9.1>F_{33}{}^{3}(0.01)=4.4$$

であるから，地域平均間（各地域別の平均値相互間）の差異は有意である。いいかえれば，各地域別の価格には，地域的差異は存在しないで，ただ偶然的に変動したものであるという仮説は棄却しなければならない。この検定にあたって，仮説 H(C) の方には全然ふれないで議論ができるところに注意しなければならない。

とすれば，季節的変動自体はどうであろうか。これも同じ論法で，検定することができる。今度は，次の関係により有意であることがわかる。

$$(13)\qquad F=\frac{4.473}{0.011}>3.17>=F_{30}{}^{8}(0.01)>F_{33}{}^{11}(0.01)$$

ここに，分散分析法が前節に述べたt-分布と同じく比較法と無作為化法との上に立脚していることをみておくのがよいであろう。無作為化法に関しては，上述のところで，y_{ij} が独立な確率変数であると規定したところですでに判明している。比較法がいかに用いられているかをみるためには，問題の 4 つの地方のうち 2 つの地方の比較ということになると，分散分析法は，すなわち前節で述べた t-分布の方法になることを示すことにしよう。

前節の方法で分析するときには，各月相対応する地域別価格相互間の差異をまずつくるべきである。これによって，季節的な変動をまず取り除く点に，比較法の原則が適用されているわけである。この地域別価格相互間の差異の平均は 0.199 である。これを t-検定法によって検定すると有意となる。

次に同一資料に対して，変量分析法を適用してみる。その計算の結果は12－8表である。これによると，地域平均間の平均平方は剰余項の 20 倍よりも大である。したがって有意性は，この場合当然なことといわなければならない。ここで地域平均値の差の標準誤差を求めると，

12-8表　アイオワ州内2地域におけるブタの生産者価格（1930～31年）の分散分析表

月次	州内の地域		差	和
	北西（I）	南東（IV）		
1	8.84	8.86	−0.02	17.70
2	8.04	8.45	−0.41	16.49
3	7.39	7.34	+0.05	14.73
4	7.06	7.17	−0.11	14.23
5	6.44	6.65	−0.21	13.09
6	6.80	6.88	−0.08	13.68
7	6.78	6.92	−0.14	13.70
8	6.03	6.30	−0.27	12.33
9	5.40	5.60	−0.20	11.00
10	6.00	6.24	−0.24	12.24
11	5.91	6.36	−0.45	12.27
12	5.07	5.38	−0.31	10.45
和	79.76	82.15	2.39	161.91
平方和	543.079	574.011	0.7223	1,117.090

$$\sqrt{\frac{0.0112}{12}+\frac{0.0112}{12}}=0.043$$

となって，t-分布利用の場合と同一の結果になるのである。かくして変量分析法はこの特別の場合にあっては，比較法の原則にもとづく前節の方法と一致する。

次にわれわれが剰余と称したものについて吟味したい。同一地域内における変動のよってきたるところとしては，Snedecor 等の指摘するように，(i) 運賃，(ii) 養豚の種類および体重，(iii) 取り引きの時，(iv) 営農形態，等々あげられるのであって，研究目的によっては，これらこそ因子となるべきものである。それゆえ，因子と見なすか否かは，何を研究しようとするかの目標によってきまるとみるべきである。しかしながら，ここで問題とすべきことは，価格に対する月次的な影響と地域的な影響との相互の間に相関がありはしないかということである。もしそれが存在するならば，数式の関係から明らかなよう

に，それは剰余というべき項にふくまれる。したがってその場合には，剰余を実験誤差と見なすことはできない。そうして，上述の前提となるものが当を得ていないということになる。すなわち，y_{ij} を独立な確率変数とは認められないことになる。このためには無作為化が必要なのであるけれども，この場合，月および地方に関しては逢機的な要素があり得ない。価格の傾向トレンドが，地方が異なるに従い異なっていたという証拠があるならば，その場合においてもまた上述の前提は成立していない。

4.　要因配列実験

変量分析法というものは，変動因について，統計量の変動を分析する 1 つの計算処理であり，それは論理的には仮説の検定を意味するものであった。今述べたところでは，それはすでに与えられた資料に対して事後的に適用される方法であった。しかし，与えられた変動の様相を原因別に見分けるという受動的な立場から進んで，変動因の幾組かを前提し，はたしてその変動因は有意的なものであるか，あるいは進んで，その程度はどれほどであるかを知り得るような，実験を設計しようとする積極的な立場にいたるべきであろう。

この立場にあるのが，広く実験計画といわれるべきものである。実験計画といっても，ここでは実験に関する技術的考慮を意味するものであり，実験のもつ論理的構造をいかに設計するか，いいかえれば，その実験においていかなる仮説を検定しようとするのか，これに対する設計を指すものである。この仮説の検定に対して統計学的方法の提供するものは，偶然誤差と見なされるべき実験誤差を，資料のなかから分析することであり，そしてこれをいわば物指として，変動因の有意性，変動因相互間の関連性の検定におよぼうとするものである。したがって，実験計画においては，まず仮説を明確に定立しなければならない。そうして，この仮説を検定するために問題となるところの因子を列挙する。これらの因子のおのおのを，それぞれ適当の幾水準かにおいて実現することを計画する。これらの因子の各段階の組み合わせとして，実験条件を規定す

る。ところで同一の実験条件においても変量は若干の変動をもつであろう。したがって，一般に同一実験条件のもとにおいても幾通りかのくり返し，すなわち，反復（replicate）が必要となるのである。

【1】 要因配列実験法　実験計画の一例として，最も簡単な一種の要因配列実験法について述べよう。今，因子としてあげられるものがk個あって，第一因子は n_1 通り，第二因子は n_2 通りというふうに，一般に第 i 因子は n_i 通りの様相（水準）において与えられるものとする。すると，全体としては，$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ 通りの変動の仕方があるのである。たとえば，硫安，カリ，ウマゴエの肥料三要素について，肥料試験を考えるのに，ここに因子は３つあるわけである。ところで因子は与え方の水準にそれぞれ多量と少量との２通りあるとする。すなわち，硫安の施肥量を A, a の２通り，カリの施肥量を B, b の２通り，ウマゴエに関しても C, c の２通りあるとすると，$k=3, n_1=n_2=n_3=2$ であって，すべての場合は $2\times2\times2=8$ 通りあるわけである。要因配列実験の原理は，圃場で，適当な配列においてこの２通りの場合のすべての場面を平等に所要の反復回数だけ現出せしめることである。１つの試験区に対しては，ある特定の１つの施肥量方式を用いることにすると，たとえば総数 $8n$ 個の試験区を１つ用いるならば，同一の施肥方式なるものは，n 通りある。すなわち，n 反復となっている。これに対して従来のやり方をみると，こうした８通りの場面を現出するという方針はとっていない例が多い。なんらかの根拠から，カリ，ウマゴエのおのおのの与え方はある特定の組み合わせをとって，たとえばカリは B，ウマゴエは C として，ABC と aBC との２通りの場合をある回数m回反復して，この実験から，A と a との比較を行なう。同様にして，硫安とウマゴエとの組み合わせを一定にして，たとえばそれぞれAとcとしてABcとAbcとをm回反復して，これからBとbとを比較する。ウマゴエに関しても同様のことを行なうのである。従来の方法と，この要因配列法との優劣比較は後まわしにして，まず要因配列実験法の特徴ともいうべきものを上述の例に即しながら述べてみよう。

(1°) 特定の因子，たとえば硫安に関していえば，使用量の多い場合，すなわち，Aの場合が $4n$ 通りあり，少量の場合，すなわち a の場合も $4n$ 通りあって，これらが相互に比較もできる。さらにこれら $4n$ 通りの比較は，4通りの組に分かれ，同一組が n 回反復になっている。

(A—a)

A B C	n 回反復 ……	a B C	n 回反復
A B c	〃 ……	a B c	〃
A b C	〃 ……	a b C	〃
A b c	〃 ……	a b c	〃
	$4n$ 通り		$4n$ 通り

これからみられるように，Aと a との比較は，第二および第三因子の考慮すべきすべての場合について，実行されているのである。起こり得べき場合のうちのある特定の組についてのみAと a との比較を行なおうとするものではない。あるいはまた，第二および第三因子の点に関してはなんら制限を設けずに，漫然と硫安を多量にふくむ実験と硫安を少量にふくむ実験とを比較しているのでもない。Aの起こり得る場合は，上述の4通りしかない。その各場合に対して，第二および第三因子に対して同一条件のもとにある a を比較する。ABC は aBC と比較するのであり，他の場合 aBc, abC, abc のいずれとも比較するのではない。ここに比較法の原則が最も厳密に適用されているのをみるべきである。このことは，ただ第一因子硫安に関してだけでなく，第二因子カリに関してBと b との比較，第三因子ウマゴエに関してのCと c との比較に関しても全く対称的にできている。

(B—b)

A B C	n 回反復 ……	A b C	n 回反復
a B C	〃 ……	a b C	〃
A B c	〃 ……	A b c	〃
a B c	〃 ……	a b c	〃
	$4n$ 通り		$4n$ 通り

（C—c）

ABC	n回反復	……	ABc	n回反復
AbC	〃	……	Abc	〃
aBC	〃	……	aBc	〃
abC	〃	……	abc	〃
	4n 通り			4n 通り

因子，文字の配列によって，その配列による収量をも同様に意味するとすれば，Aとaとの比較は次記の配列となる。すなわち

$$(\mathrm{ABC}-a\mathrm{BC})+(\mathrm{AB}c-a\mathrm{B}c)+(\mathrm{A}b\mathrm{C}-abc)+(\mathrm{A}bc-abc)$$

によって与えられる。Bとbに関しても，Cとcに関しても同様に対応する項の差を相加して得られる。

(2°)　要因実験法における因子配列法は，それぞれ単一因子を検定しようとして計画されるものであるけれども，なおここに見のがし得ない利点がある。それは，因子相互間の交互作用を，各単一因子と同様に，この実験において検定し得るということである。硫安の成分をaよりAへ増加させることが，カリがBの場合には収量の増大上有利であるが，カリが少量，すなわちbの場合には有効でないとか，あるいはかえって不利であるかもしれないということが問題になるとすれば，これを検定するのには，Aとaとの比較を，Bの場合とbの場合との双方について実験するほかに方法がないわけである。これを実験計画のなかに遂行すること，しかも，起こり得べきあらゆる交互作用をその全般にわたって探究するという点に，要因分析法の計画される所以があるわけである。さて，これを上述の実験から読み取れるには，次のようである。

（A——a）

B……………………………………… b

ABC	……	aBC	AbC	……	abC
ABc	……	aBc	Abc	……	abc
2n通り	……	2n通り	2n通り	……	2n通り

ここに比較方程式を適用して行なうべきである。上述のようにこれらの因子文字の配列により，同時にその配列による収量を意味するものとすれば，

$$\{(\mathrm{ABC}-a\mathrm{BC})+(\mathrm{AB}c-a\mathrm{B}c)\}-\{(\mathrm{A}b\mathrm{C}-ab\mathrm{C})+(\mathrm{A}bc-abc)\}$$

という方式により，硫安とカリとの交互作用を検定し得るのである。この式は項の順序を入れ替えると次の式に等しい。

$$\{(\mathrm{ABC}-\mathrm{A}b\mathrm{C})+(\mathrm{AB}c-\mathrm{A}bc)\}-\{(a\mathrm{BC}-ab\mathrm{C})+(a\mathrm{B}c-abc)\}$$

これは，カリと硫安との交互作用と定義すべきものである。このことから，硫安とカリとの交互作用は，カリと硫安との交互作用である。このような交互作用は硫安とカリ，硫安とウマゴエ，カリとウマゴエというふうに3組あるわけであるが，要因計画では，これらが同様に比較されるように配列されている。

交互作用というとき，二因子間の交互作用のほかに，なお，高度の交互作用というものが考えられる。それは第一因子と第二因子との交互作用を，第三因子の多量の場合と，第三因子少量の場合とに分けて比較するという問題も起こることである。それには第三因子の多い場合だけの組み合わせにおいて上述のようにして，第一因子と第二因との交互作用をもとめる。

(14)　　$(\mathrm{ABC}-a\mathrm{BC})-(\mathrm{A}b\mathrm{C}-ab\mathrm{C})$

次に第三因子の少ない場合だけの組み合わせにおいて，同様にして，第一因子と第二因子との交互作用をもとめる。

(15)　　$(\mathrm{AB}c-a\mathrm{B}c)-(\mathrm{A}bc-abc)$

そうして，硫安，カリ，ウマゴエの三者の交互作用は，これらの差，

$$\{(\mathrm{ABC}-a\mathrm{BC})-(\mathrm{A}b\mathrm{C}-ab\mathrm{C})\}-\{(\mathrm{AB}c-a\mathrm{B}c)-(\mathrm{A}bc-abc)\}$$

にて与えられる。この式は硫安，カリ，ウマゴエの三者に関して対称であることにも注意すべきである。

今われわれは例題として3つの因子の場合につてい述べている。したがって，これ以上の交互作用というものはこの場合には存在しない。

われわれが要因計画で与え得る比較は

(16)	一因子の効果	3通り
	二因子の交互作用	3通り
	三因子の交互作用	1通り
		7通り

となる。四因子の場合であれば，そのうちの任意の三因子の交互作用というものがあるから全部で4通りあり，したがって四因子相互間の交互作用というものを考えなければならない。各因子のことについて，その起こり得べき水準が2通りであって，n 因子からなっているとき，要因実験計画は $2\times2\times\cdots\times2$ の型，あるいは 2^n の型あるという。k 因子相互間の交互作用を k 重交互作用という。2^n 型の要因分析では，k 重交互作用は ${}_nC_k$ 通りあるということは見やすいことである $(k\geqq2)$。単一因子の効果はいわば一重交互作用であって，${}_nC_1=n$ 通りある。

以上を要約すれば，要因配列実験法において注目すべき第2の利点は，可能なあらゆる交互作用を単一因子の比較と同一の精度をもって測定できるということである。

(3°)　要因実験計画における検定には，変量分析法を用い得るということである。これに関しては，以下に述べる実例についてみられたい。F. Yates : The Design and Analysis of Factorial Experiments, 1937 年によるものである。

【2】 **例題**　ジャガイモに関する $2\times2\times2$ 要因試験として，硫安（n），硫酸カリ（b），ウマゴエ（d）について，各水準を次のようにとる。

$$\begin{array}{ccccc} \text{硫安}(n) & & \text{硫酸カリ}(b) & & \text{ウマゴエ}(d) \\ \begin{Bmatrix} a=\text{無} \\ A=0.45\ \text{hwt} \end{Bmatrix} & \times & \begin{Bmatrix} b=\text{無} \\ B=1.12\ \text{hwt} \end{Bmatrix} & \times & \begin{Bmatrix} c=\text{無} \\ C=8\ \text{トン} \end{Bmatrix} \end{array}$$

ここに各肥量は1エーカー（約 4,046 m^2）当たりである。hwt=hundred weight=約 50.8 キロである。1試験区としては，1/60 エーカー(約 67 m^2)をとり，以上の処理因子の組み合わせ8通りを4回反復とした実験計画を Yates

19－9 表　実験配置図および収量（単位 hwt）

集区 I				集区 II			
nk 291	*kd* 398	*d* 312	*nd* 373	*kd* 407	*d* 324	*k* 272	*nk* 306
(1) 101	*k* 265	*n* 106	*nkd* 450	*n* 89	*nkd* 449	*nd* 338	(1) 106
d 323	(1) 87	*nd* 324	*kd* 423	*nd* 361	*nk* 272	*n* 103	*d* 324
nk 334	*k* 279	*n* 128	*nkd* 471	*k* 302	(1) 131	*ukd* 437	*kd* 445
集区 III				集区 IV			

各集区収量合計

I	2296 (hwt)
II	2291
III	2369
IV	2375
計	9331 hwt

はあげている。実験計画と各区収量とは，19－9 表のとおりである。

ここでは記法を改めた。A＝n，B＝k，C＝d とするとき，a, b, c はいずれも 1 と書くことにする。たとえば ABC は nkd，aBc は kd，abC は d，abc は (1)というふうにする。

三要素の単一因子というものの効果を主効といい，硫安，硫酸カリ，ウマゴエそれぞれの主効を N, K, D であらわす。これら因子の二因子交互作用をN×K，N×D，K×Dであらわし，三因子の三因子交互作用をN×K×Dで示すことにしよう。問題はこれらの処理効果を検定することである。まず12－10表を作成する。

次に集区間，処理間，実験誤差の三変動因に全平方和を分析しよう。さて便宜上次のような記号を用いることにする。

12-10表　収　量　表

処理＼集区	I	II	III	IV	T_i
(1)	101	106	87	131	425
n	106	89	128	103	426
k	265	272	279	302	1118
nk	291	306	334	272	1203
d	312	324	323	324	1283
nd	373	338	324	361	1396
kd	398	407	423	445	1673
nkd	450	449	471	437	1807
T_j	2296	2291	2369	2375	9331

(17)　x_{ij}＝第 j 集区において処理 i を受けるものの収量

$$T_{i.}=x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}$$

$$T_{.j}=x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}+x_{5j}+x_{6j}+x_{7j}+x_{8j}$$

$$T=T_{1.}+T_{2.}+T_{3.}+T_{4.}$$

$$=T_{.1}+T_{.2}+T_{.3}+T_{.4}+\cdots+T_{.8}=(\text{総収量})$$

(18)　$$\text{処理平均}=\bar{x}_{i0}=\frac{T_{i.}}{4}=\frac{1}{4}(x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4})$$

$$\text{集区平均}=\bar{x}_{0j}=\frac{T_{.j}}{8}=\frac{1}{8}(x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+\cdots+x_{8j})$$

$$\text{総平均}=\bar{x}_{..}=\frac{T}{32}$$

$$\text{総平方和}=\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{4}(x_{ij}-\bar{x}_{..})^2=\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{4}x_{ij}^2-\frac{T^2}{32}$$

$$\text{集区間和}=8\sum_{j=1}^{4}(\bar{x}_{.j}-\bar{x}_{..})^2=8\sum_{j=1}^{4}\bar{x}_{.j}^2-\frac{T^2}{32}=\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{4}T_{.j}^2-\frac{T^2}{32}$$

$$\text{処理間平方和}=4\sum_{i=1}^{8}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})^2=4\sum_{i=1}^{8}\bar{x}_{i.}^2-\frac{T^2}{32}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}T_{i.}^2-\frac{T^2}{32}$$

すると，前節に述べたところの分散分析法の適用によって，12-11 表の結果が得られる。

12－11 表 分散分析表（Yates による）

変動因	平方和	自由度	平均平方
集区間	774.1	3	258.0
処理間	458,718.0	7	65,531.1
実験誤差	7,287.6	21	347.0
総	466,779.7	31	

要因分析法における仮説検定の理論は，上述の分散分析法における誤差の推定値に利用されるものである。その論理と数理とは，前節に述べたところの分散分析法のそれにほかならない。集区間変動をあらわす平均平方 258.0 は実験誤差 347.0 よりも小であるから，一応問題にならない。（F-分布では便宜上必ず分子は分母よりも大ととるのであるが，347.0/258.0 を〔21, 3〕型F-分布で検定してみれば，明らかにこれは有意ではない。）これに反して，処理間変動は，これまた計算するまでもなく有意である。ここでわれわれの問題にするのは，この有意性が何に関するか，主効，交互作用にわけて考えたとき，そのうち何が有意であるかを分析するのである。すでに述べたように，これらの主効，交互作用は 12－12 表の処理組み合わせの数値の加減演算の結果とにあらわされる。すなわち，符号は12－12表によって与えられる。それに従って代数和をつくり，後に因子数が 3 であるから，2 の（3—1）乗べきで，すなわち，$2^2=4$ で割る。

12－12 表（Yates による）

効果＼処理組み合わせ	(1)	*n*	*k*	*nk*	*d*	*nd*	*kd*	*nkd*
N	−	+	−	+	−	+	−	+
K	−	−	+	+	−	−	+	+
N×K	+	−	−	+	+	−	−	+
D	−	−	−	−	+	+	+	+
N×D	+	−	+	−	−	+	−	+
K×D	+	+	−	−	−	−	+	+
N×K×D	−	+	+	−	+	−	−	+

この符号のつけ方は，次のように記号的に書くのもよいであろう。たとえば

(19)　$$N=\frac{1}{4}(n-1)(k+1)(d+1),$$

$$N\times K=\frac{1}{4}(n-1)(k-1)(d+1),$$

$$N\times K\times D=\frac{1}{4}(n-1)(k-1)(d-1)$$

と書いて，右辺を代数式のように展開すればよい。

分散分析法の問題とするところは，さらに進んで前述の処理間平方和をそれぞれ主効および交互作用を表示すべき平方和に分けることである。処理間の平方和が7であるのに対して，この自由度7の平方和を分解して，3個の主効，3個の二因子交互作用，1個の三因子交互作用，すなわち，合計同じく7個の平方和として再構成しようとするものである。このようなことの可能なことは，二次形式のなかに秘められている。

(20)　$$処理間平方和=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{8}T_{i\cdot}^2-\frac{1}{32}(T_{1\cdot}+T_{2\cdot}+T_{3\cdot}+\cdots+T_{8\cdot})^2$$

$$=\frac{1}{32}\sum_{k=1}^{7}(l_{k1}T_{1\cdot}+l_{k2}T_{2\cdot}+l_{k3}T_{3\cdot}+l_{k4}T_{4\cdot}+\cdots+l_{k8}T_{8\cdot})^2$$

として書きあらわすために，係数 l_{kj} の満足すべき条件いかんということである。補正項にあたる上式を右辺に移しかえて，

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}T_{i\cdot}^4=\frac{1}{32}\sum_{k=0}^{7}(l_{k1}T_{1\cdot}+l_{k2}T_{2\cdot}+l_{k3}T_{3\cdot}+l_{k4}T_{4\cdot}+\cdots+l_{k8}T_{8\cdot})^2$$

とおいて考える。ただし，$l_{\cdot1}=l_{\cdot2}=l_{\cdot3}\cdots=l_{\cdot8}=1$ とおいて考えるのである。すると，次の条件が満足されるならば，$T_{1\cdot}, T_{2\cdot}, T_{3\cdot}, T_{4\cdot}$ の値のいかんにかかわらず，上式の成り立つことがわかる。

(21)　$$l_{i1}^2+l_{i2}^2+l_{i3}^2+\cdots+l_{i8}^2=8 \quad (i=0,1,2,\cdots,7)$$

$$l_{i1}l_{j1}+l_{i2}l_{j2}+l_{i3}l_{j3}+\cdots+l_{i8}l_{j8}=0 \quad (i\neq j)$$

この条件は，12－12 表では満足されている。よって，われわれは 12－13 表の分散分析法を得る。

12-13 表　処理間平方和の分解

変　動　因	平　方　和	自　由　度
N	3,465.3	1
K	161,170.0	1
N×K	344.5	1
D	278,817.8	1
N×D	810.0	1
K×D	13,986.3	1
N×K×D	124.0	1
処理間平方和	458,717.9	7

たとえば，変動因Nに関して平方和を求めてみよう。12-12 表の係数表から符号をもとめて，

$$\frac{1}{32}(-(1)+n-k+nk-d+nd-kd+nkd)^2 \tag{22}$$

$$=\frac{1}{32}(-425+426-1118+1203-1283+1396-1673+1807)^2$$

$$=\frac{(333)^2}{32}=3465.3$$

主効および交互作用はいずれも自由度 1 である。上掲の実験誤差をもって，これを推定しようとすると，〔1, 21〕型 F-分布によって調べなければならない。

$$F=\frac{v_2}{347.0}\gtreqless F_{21}{}^1(\alpha)=\begin{Bmatrix}8.02 & (\alpha=0.01)\\ 4.32 & (\alpha=0.05)\end{Bmatrix} \tag{23}$$

よって

$\alpha=0.05$ 水準では，$347.0\times4.32=1499.0$

$\alpha=0.01$ 水準では，$347.0\times8.02=2845.4$

が判定条件となっているのである。0.01 水準で有意なるものは，N×K×DおよびK×Dであって，他は有意ではない。他は 0.05 水準でも有意ではない。

〔3〕 要因配列計画法に対する批判　　まず単一因子の試験に比して要因配列計画法の利点といわれるものをあげよう。

(1°)　効果がより大である：その理由は，要因配列実験法にあっては，いずれの試験区も各因子の効果を推定するために何回も用いられるからである。たとえば，各因子の水準が2つずつであるような4因子から成り立っている場合は，$2\times2\times2\times2=16$処理があるわけである。これをたとえば5回反復したとする。すると，要因配列ならばある1つの因子の推定には，その因子の高水準をもつ40区と，その低い水準をもつ因子の40区とを比較できる。ところで，要因配列でないと，この80区を4因子あるから，40等分して20区ずつを各因子の比較のために使用する。そこである因子の高水準と低水準とを比較するのには，20区のうち10区をその因子の高水準，他の10区を低水準にとることになる。そこで，要因計画に比して，効果は1/4であるとなる。（ただし1区1区の標準誤差は両者同一であるとする。）

(2°)　包括性がより大である：単一因子の効果以外に，交互作用をも推定評価できる。ここに交互作用とは前述のように因子群の一部あるいはすべてが，他の因子の変化するに従って現われるとすれば，これらの因子は交互作用をすると称せられるのである。

(3°)　帰納的推定の基底がより広い：要因分析法において，あるいは成分をます方が有利であるという結論を得た場合には，この結論は，他の因子成分をいろいろに変えた場合の実験を通じて推論されたものであるから，いわゆる定準法よりも帰納法推論の基底が広いものである。したがって応用上の用途も多い。実験上の所定条件を厳密に規定の標準にはめ込む場合には，その定準化によって限定された状態に対してのみ明確な知識をあたえる。ところで，この定準化された場合にないときには，一般に発言力は弱まる。

(4°)　補助因子を包括できること：実験的操作に関して種々の改変が可能であり，それらの影響を組織的に実験しておきたいという場合がある。しかもそれは実験の主目的とする事柄としてでなく，いわば補助的因子として調べ上げたいということがある。こういう場合にはとくに要因配列実験計画が有効である。要因実験計画で検定しようという主目的の主要因子のほかに，これらの補

助因子をもからみ合わせて検定しうるところにこの方法の利点がある。補助因子ともいわれるものは，実験操作ではどうにでも定義できるような，疑わしい，いわば恣意的な性質をもつものがある。ある1つの単一因子を分離抽象して比較しようというような従来の個別試験では，これらの補助因子をその場合場合に臨機応変的に規約して，ある様式に一定してしまう。ところが実はそこに問題がある。これに関して R. A. Fisher は例をあげていう。たとえば米穀類数品種の品種の収量比較試験を企てるとき，収量に一様に影響する他の因子は，いずれも比較品種に対して同一に取り扱うべきである。そこでたとえば反当たり播種量を一定にすることが必要である。ところでこれを容積でもって表現すると，品種が異なるから，反当たり播種量の容積は同一にできても，重量は違うだろうし，種子の粒になるともっと違うということになって，種子の平等性はかなり規約的なものであることがわかる。品種試験では，各品種はそれぞれの最適な播種量によって比較するのが実際的であり望ましいともいえる。それゆえ，けっきょくのところ，品種を検定しようとすると，同様に反当たり播種量をも，いわば補助的因子として充分に変化させ，これに最適値を包含させるような要因配列計画の方がすぐれている。この問題についていえば，反当たり播種量とあぜ幅とは関連する。したがって，これらの耕作上の諸項目の対立的研究を，実験計画に付随させることが望ましい。そうしてこれを復制圃において実現させるのである。R. A. Fisher はいう。“正確な結果を獲得しようとするならば，広範な復制圃にわたって播種されたものが，とにかく必要である。反復圃は比較の精度を増進しようというものであるが，しかしこれを単なる反復用としないで，当面の研究の主目的に結びつけられそうな条件に関しては，研究者の望む変化を与えた処理を同時に試験するために使用してもよろしいのである。”

(5°) 反復回数を少なくできる：試行数（たとえば試験区の区数）が局限されているとき，以上のように試験すべき変因が増加すれば，したがって反復回数の絶対数は当然減少する。しかしながらこの心配に対しては次のように対処

できる。第1に要因配列計画では反復の絶対数は減少しても，それに独特な潜伏制ともいうべきものがあって，各因子の検定は，互いに組み合わせの組織にかくれて何回か反復されている。たとえば試験区総数をnとし，因子組み合わせは $2\times2\times\cdots\times2=2^k$（すなわち，各因子2水準のもの$k$因子配列）とし，$r$回反復とする。すると $n=2^k\times r$ であって，集区制の場合と集区の区画のない場合とでは違うが，自由度の分配は次のようになる。

たとえば，試行後 $n=64$ のとき $k=3$ ならば $r=8$，すなわち8回反復，つまり8区制であり，$k=5$ ならば $r=2$ すなわち2回反復，つまり2区制である。それで後者は反復回数がきわめて少ないので一見不安であるが，12-14, 15表から明らかなるように，$k=5, r=2$ の場合でも実験誤差の自由度は$2^5(2-1)=32$（無集区のとき）あるいは $(2^k-1)(r-1)=(32-1)(2-1)=31$（集区制のとき）であって，$k=3, r=8$ の場合の実験誤差の自由度は，$2^3(8-1)=56$

12-14表　無集区制

変動因	自由度
処理間	2^k-1
実験誤差	$2^k(r-1)$
総	2^kr-1

12-15表　集区制

変動因	自由度
処理間	2^k-1
集区間	$r-1$
実験誤差	$(2^k-1)(r-1)$
総	2^kr-1

（無集区）あるいは $(2^3-1)(8-1)=49$（集区）に比較して少ないけれども，とにかく相当である。しかも第2にいいたいことは，すでに要因を分離して，実験誤差の推定のために等質化の無作為化客観的条件をそなえ得るように計画されている場合，すなわち等質母集団からの任意標本として見なし得る条件をそなえるようになっている場合には，F-分布は，χ^2-分布等よりみても明らかなように，自由度30台のものと50台，100台のものとの間にはそれほどの相違はないのである。ここに小標本活用の要点を読み取らなければならない。大した相違の起こらないようなところに無駄に自由度を多く分配せずに，突き止めるべき原因間の変動をみるために用いるべきである。

この考え方を徹底させていくと，複制実験，すなわち同一の因子組み合わせはただ1回しかあらわれない実験というものも考えられる。これは大多数の組み合わせを同時に検査しようというときに，そのために膨大な試験となるので，各組み合わせの反復試験のためにさらに増大することは避けなければならないという場合である。こういう場合には，多くは三因子以上の交互作用は，大部分真の効果がないか，あっても小さすぎて有意的にならないことが多い。この点を利用して，これらの交互作用は，より重要視される比較の精度の測定器として用いられるのである。

要因配列実験法に関して批判としてあげられるものを列挙し，これを検討してみよう，第1に，要因配列では，ある一因子の効果というものが，平均的にしか求められない，それは他因子のあらゆる組み合わせについて平均して当の因子の効果を評価しているのである。ところが実際に求めるものは，実際において起こる場面について当該因子の効果を，個別的にみることである。この批判に対して答えておこう。他因子の状態を定準的にきめるということは，実際には案外まれであって，かりに標準化されていても，それは要因配列をしてはいけないというほどの理由にはならない。また要因配列実験のために比較の精度が劣るということは，それほどでないことはすでに示したとおりである。

第2の批判として，要因配列実験であらわれるある種の因子組み合わせは，実際上使用することがない。それにもかかわらず，そのための試験区を設けるところの要因配列法は無駄なことをしているという意見がある。これに対してまず注意すべきことは，このような先入観が案外不確実な証拠の上に立つことも多いということである。そういうときは，要因実験法で研究すべきである。もし，次第に経験が積まれてきていたのならば，同じく要因配列であっても，探究の分野はせばめられるのである。たとえば窒素肥料の若干の施用は確かに必要であるが，最適水準はいまだ疑問であるというとき，窒素の最低水準を0とせずに最極少施用量とすればよい。しかし，そういうときでも，無窒素区を無作為集区に用いるということは対照用として無駄ではないのである。

第3の批判として，因子の複合性を変えて，処理組み合わせ数を大きくすると，たとえば，農事試験のようなときには，地力相違の除去が困難になるという事情を生ずる。この点を詳論することは，ここでは技術的に困難であるが，この批判に対しては，Fisher, Yates の主張するラテン方格法，無作為集区法（乱塊法）等をあげるべきである。

第4に，要因配列法では，次第に多くの因子組み合わせが形式上考えられる。しかるに試験区の方は数に制限があるから，あらゆる因子組み合わせの反復さえできない場合がある。この困難に対しては，要因配列実験法では混同法（Confounding）または部分混合法（Partial Confounding）の方法を利用するということを付言しておく。それは，多くは三重以上の交互作用に対して，実験者が，それを計量するに値せず，あるいはかりに計量できても利用し得ずと見なし得る場合に，用いられる方法である。

第5に，交互作用の定義が人為的であるということである。これは何ともいたし方ない。それは相関係数，標準偏差等々と同じく，ただ統計学的用語でしかない。本来それに対応する意味はかならずしも明確でない。

以上のような批判とこれに対する再批判とは，すでに学界において経験ずみである。しかし，ここに注意すべきことは，なお根本的にいえば要因配列法は，要因の所在を発見していく方法としてはなお不充分をまぬがれないことである。発見的方法としても，さらに別種の統計理論をもつ必要があろう。また与えられたデータのなかから未知の因子を析出してくるという方法としても，不充分であろう。これは心理学における因子分析法（factor analysis）の方の将来の全面的な拡張を期待すべきであろう。

第5編　統計学の過去・現在・未来

第13章　統計学の過去

1.　歴史的方法の意義

以上4編12章にわたって，統計学の過去および現在をたどってきたわれわれは，本編において，総括的に統計学の回顧と展望とを与えておこうと思う。

統計学の認識理論を主要目標とした本書において，著者のとった方針は，統計学の史的発展をたどりつつ，統計学の基本諸概念の認識論的な意義を明らかにすることであった。すでに具体的に示したように，確率という同一用語でも，歴史的変遷があったのである。統計と一口にいっても，ドイツ国勢学派のそれと，アメリカやソビエトが現在行なっている国家統計とは，同一に論ずべきものではない。統計学の基本概念，範疇からその歴史的制約を捨象していくことは，やがては統計学の妥当な理解をさまたげるものといわなければならない。すでに述べたところから明らかなように，妥当な理解をもとめることこそ本書の目標であった。ここに妥当な理解とは，単に過去および現状を解釈するにとどまる見解であっては不充分である。それはきたるべき将来の発展を的確に示し得る見解でなければならない。それは統計学の変革の原理をも提供し，指示し得るものでなければならない。そうしてそれを把握することは，統計学の諸段階に対してそれらを産み出し，育て上げた基盤に立ち入って究明し，統計学発達の弁証法を具体的に示すことなしには，不可能であるといわなければならない。なぜならば，もし，このような基盤と運動とを捨象し去るならば，統計学発展の契機は，偶然的な原因に帰せられざるを得ず，したがって将来の見とおしにおいてもまた偶然性にのみ依存しなければならず，そのかぎりにおいて，われわれは，統計学の変革の原理を示し得ないことになるからである。それは統計学の認識として不充分なものといわなければならない。本書におい

ては，統計学はかくかくあるべきものというような先験的な規定を与えなかった。統計学が実質科学であるか形式的な方法の学問であるかという周知の問題に対しても，いまだ答えてこなかった。答えてこなかったけれども，すでにわれわれの態度は，以上の所説により明らかであろう。統計学が実質科学であるか方法学であるかという問い自身に対して，われわれは批判をもたなければならない。統計学に対しては個々の実質科学の対象とは別に，これらと相並び，またはこれらの上に存在するある抽象的な客体が存在して，それのみが統計学本来の研究対象であるとの見解は，すでに述べたような意味で，妥当な見解ではあり得ない。いいかえれば，単なる形式的方法学としては，統計学の発展を指示することはできない。しかし，もしもある特定の実質科学にのみ伴い，その科学の内部において尽くされるものであるならば，そもそも統計学というものは存在しない。しかしわれわれは，ここに，個々の実質科学の認識を越えて，全体としての統一的過程が，人間にとって重要であることを銘記すべきである。統計学の基本概念と諸範疇は，ただ具体的な実質科学のうちにのみ存在し，そのうちにのみ現われるが，それが統計学によって理解されるかぎり，その実質科学とは別の統一的見地が与えられている。統計学は，単なる方法学でもなければ，また単なる実質科学でもない。そもそも単なる方法学というものは存在し得るであろうか，われわれは事実を直視すべきであろう。論理学が世界認識の歴史の総決算であるように，統計学は統計的認識の歴史の総決算である。

このようにして，われわれは統計学の本質を，その歴史的発展においてとらえることを，必須な研究方針と考えたのである。しかしながら，歴史には，外面的偶然性と歴史的形態とが伴う。統計学の諸段階の外面的な記述は，ここでわれわれの深く問うところではなかった。次第にこれらの歴史的偶然性を捨象していくことによって，われわれは，各段階の統計学に対してこれを産み育てるべき制約ないし与件を類型として指摘し得るにいたるであろう。すなわち，過去にこういう統計学があったという記述にとどまらず，もしこのような制約があるならば，統計学はかくかくの段階にとどまるであろうとまで指摘できる

にいたるであろう。たとえばドイツ国勢学派の統計学が生まれて育てられた基盤を分析することにより，どのような条件のもとにおいて，統計学は，ドイツ国勢学派的段階にとどまるかを，検討し得るにいたるであろう。われわれは歴史的なものから出発する。しかし，歴史のもつ偶然性を洗いきよめることによって，歴史的現実を抽象しなければならない。しかしながら抽象に関しては，ある限界がある。そうしてその限界を越えた抽象は，対象そのものの忘失である。もちろん，あらゆる学問は孤立化と抽象化との方法を採用する。それには間違いない。しかし，対象そのものの消失を伴うような抽象であることは許されないのである。なぜならばそのようになっては，一度抽象によって分析されたものを組み合わせることによって，歴史的現実の具体相の本質を近似的に再構成することができないからである。われわれは抽象を必要とする。しかしその抽象は，第1に基盤を忘失することを許さない。第2に経験から出発しなければならない。第3に現実を再成しなければならない。なぜなら，第4に，このようにしてのみ変革の原理をあたえ得るからである。統計学の認識理論は，歴史的なものの分析が始められなければならない。そうして，それより，論理的なものへ進まなければならない。しかしその論理的なものであっても，決定因としての基盤を突きとめ得ない抽象は，現実分析の使命をはたし得ていないのである。

このようにして，われわれはまず歴史的なものから出発した。明らかに統計学には多くの段階がある。いわゆる発達した統計学からみれば，ものの数にもはいらないような統計学もある。しかしこの事実は，その最も発達した形態の統計学の研究のみが，現在においては必要であるという意味ではない。第1の理由として，現実の姿は，これらの諸段階が混合して併存しているからである。たとえば，現在の経済形態は，根本的には流通経済的要素によって構成されているとはいえ，なお自然経済的要素をもっている部門も多い。それと同じく，推測統計学とともに記述統計学も，あるいは古典統計学も，それぞれ適用されるべき範囲がある。数量の概念を用いないドイツ国勢学派の段階も，ある

客観的条件のもとでは必要であり，またそれを越えることができない。記述統計学の欠点を知ることは必要である。しかし，認識のある段階では記述的にならざるを得ないのであって，この段階を経ないで推測統計学へいくことはできないのである。ある対象に実験の論理が利用できる前に，人類は何万回となく観察の論理を適用してみるという段階を経てきているとみるべきではあるまいか。

第2の理由として，統計学の本質は統計学の諸段階の変遷を跡づけること，いいかえれば，統計的認識の歴史的発展の運動の法則を明らかにすることによってのみ把握できるからである。われわれの仕事が，平面上にいくつかの点を与えられているとき，これらの散布した点に対して，関数的関係を規定するところの，曲線当てはめの仕事に類比していることが自覚されるであろう。この関数を決定するに当たっては，これらの諸点の相互関係が問題であろう。曲線の当てはめは，free hand でもできれば，最小自乗法によっても可能である。しかし，それらの方法に共通する欠点は無理論ということである。それは記述であっても，妥当な理解を与え得ないからである。なぜならば，既往はそれで近似させるであろうが，補外する能力はそれでは一般に与えられないからである。歴史的現実として与えられたものを貫徹し得るところの発展の法則を求めることが，われわれの仕事の目標でなければならなかったのである。

以上のような理由から，本書はこれまでの4編において，歴史的叙述を採用した。統計学の歴史を書いた文献は，それほど数多くはないが，とにかく若干はある。これらの統計学の歴史において，われわれのみるのは平板な事実の羅列である。しかしわれわれの見解によれば，そこをつらぬいて自己を貫徹するところの必然性を把握すること，まさにそのことが，統計学の本質を明らかにすることにほかならなかったのである。統計学の歴史を説くとき，ある人は Quetelet をもって終わり，ある人は，19世紀末までをもって終わりとしている。しかし，統計学の将来を把握しようとするわれわれにとっては，19世紀末より，本世紀にはいってからが重大であり，そのなかでも1920年以来の20

年がとくに大切である。本書は，そこまで立ち入って一応の究明を試みたのである。本章においては，古典統計学と記述統計学，そうして推測統計学と，この3つの段階についてすでに述べたところを要約しておこう。

2. 古典統計学の限界

ドイツ国勢学派，イギリス政治算術学派，そしてフランスを中心とする古典確率論，これら3つの統計学のあけぼのより Quetelet の時代までを，われわれは古典統計学の時代と名づけた。そこでは，まず統計学における数量化の問題があり，次には統計的法則の定立という問題があった。大観すれば，この2つの問題に，この時代の統計学の歩みきたり，たどり得た段階はあったとみられるのである。

数量化の問題の観点からみるとき，ドイツ国勢学派と政治算術学派とはまことに模型的なほどに対照的である。前者の主流は数量的考察を拒否したのに対して，後者は初めから，数量的観察をもって探究の要具とした。

われわれは第9章「社会統計の認識」において，統計的認識における集団化，標識化，層別化，等質化，数量化という諸段階をあげ，そうして，これが確率化の前提となることを明らかにした。この見地からみるとき，ドイツ国勢学派と政治算術学派の両者についても，それぞれの立場が，何に立脚しているかというその基盤とともに，明らかに把握され得るであろう。前者にあっては，数量化に立ちいたるべき社会が，認識の前提としていまだ提供されていなかった。ただそれは集団化，標識化の初期段階にあったというわけである。これに反して，資本主義の母国であるイギリスでは，さらに進んで等質化，数量化の段階を適用し得られる基盤があったのである。

統計的法則定立の問題は，この数量化に伴うものであって，統計的法則の定立は数量化の段階を経ずして，そこまで立ちいたることはできないのである。Süssmilch より Quetelet までに統計学が歩みきたった道は，大局において統計的法則の定立ということであった。ただここに，大きな時代的な相違が

Süssmilch と Quetelet の間にあることも同時に指摘されなければならない。Süssmilch の神学的世界観と Quetelet の機械論的世界観との相違がこれである。この世界観の推移は，Newton, Euler の時代と，Laplace の時代との距離をあらわすものである。Newton, Euler の場合には，仔細にみるならば，これら力学の創建者自身たちの思想にも神学的要素がなお払いがたいことをみる。ところが Laplace にあっては，すでに機械論的な力学的自然観の完全な表現をみるのである。実に Quetelet の統計学は，Laplace の確率論の応用であり，天体力学における力学的自然観の成功を移して，もって類似的に社会現象の解明にいたろうとするものである。このとき Goethe の原型の思想が深く Quetelet に影響し，そうしてそれは Spinoza の観照の哲学に連結していることもすでに第3章で述べたとおりである。

古典統計学の限界性として指摘できることは，第1に歴史性の無視である。第2に機械論的なせまさ。第3に静観的なことである。第4に機械論的世界観に伴うことである。そうして，これら全体を制約したものこそ，イデオロギーとしての機械的な唯物論であることをみるべきである。

法則の定立という，統計学の進みきたった道は，このような歴史的な制約のもとにおいてであった。それは進化論以前であり，細胞学の発達以前であり，エネルギー恒存則以前の世界観に制約されたものである。法則というものを，客観的存在そのものと同一視するところに，根本的な誤りがあり，人間の実践を捨象して考えたところに，この世界観のせまさがあった。しかしながら，人間認識の歴史において，この段階は必ずふんでいかなければならない段階であったのではなかろうか。ひとは，統計学においても，Graunt の仕事をコロンブスの卵にたとえた Süssmilch の賛辞をみるのである。いまだその存在があるかないかを知らないとき，この存在を指摘することがまず第1になされるべきことであろう。それゆえ，法則の定立は，統計学のふむべき1階段の一段であった。しかし，このように存在するといわれたものの本体が何であるかについての批判が次にこなければならなかった。われわれは，これを観念論的な経

験批判論に見いだすであろう。統計学においてはそれは，記述統計学の段階にほかならない。

古典統計学の時代には確率論も，またその制約の下に働かざるを得なかった。この時代のイデオロギーの下にあっては，数学の仮言的性格は問われず，数学の公理は直観的明証性のゆえにその存在を絶対視されていた。De Moivre とともに，Bernoulli の大数の法則に，宇宙を支配する神の法則をみるか，あるいは Laplace とともに，確率とは無知の表明であるとみるかするほかはなかったであろう。神学的自然観と機械的自然観とは，人間の実践を忘失した点において共通の欠点をもち，したがって前者は後者へ移る必然的な動機をもつものと思われるのである。

3. 記述統計学の文法

古典統計学と記述統計学との間には，産業革命が横たわっている。熱機関の効率の問題から熱力学へ，さらに熱力学から統計力学への進展が確率論の近代化の要因を用意したことは，すでにわれわれが第 10 章において示したとおりである。一方畜産技術の発達はとくにイギリスにおいて，Charles Darwin の進化論の誕生をうながすところの基盤を形成しつつあった。そして，それは Galton の優生学，Weldon, Pearson の生物統計学を経て，Pearson 等により記述統計学として大成されるにいたったのである。

この時代においては古典的な機械論的唯物論，力学的自然観はもはや指導原理としての力量をもち得ない段階に突き当たっていた。このとき，March, Ostwald とともに，経験批判論が起こったのは周知の事実である。そうして彼らとの間に，分子論的な気体運動論を守って苦闘したのが Boltzmann である。Boltzmann, Gibbs の線は現代の確率論へつながるのである。これに対して記述統計学の創立者である Karl Pearson は，まさにマッハ主義者である。彼の哲学をたずねることなしには，記述統計学の本質はとらえがたいものといわなければならない。

われわれは，第5章において Pearson 自身の史伝に立ち入ってまで，その思想をたずねざるを得なかった。個人の生涯にまで立ち入るような研究方針に対しては，歴史の偶然性ということを捨象する点で，不徹底ではないかとの反問があるかもしれない。Quetelet の場合においても，われわれはやや詳しく生涯をのべた。しかしわれわれの観点は，代表的な学者としての彼らであって，あくまでも，個人を問題にしているのではなく，いわば典型調査をしたわけであったのである。歴史の研究も社会調査と同じく，ときに典型調査によらざるを得ないであろう。

Karl Pearson の記述統計学を Quetelet までの古典統計学と比較するとき重要な相違は，法則に対する解釈の進歩である。法則は人間が構成したものであるとの認識は，経験批判論の明確にあたえるところである。だがすぐその次に，それは客観的な存在の（近似的な，したがって相対的で歴史的な）模写反映であることを付言しなければ妥当ではない。経験批判論がこの付言を拒否するかぎり，そこに重大な欠陥をもつといわなければならない。なぜならば，この拒否によって，法則の人間的構成の指導原理を求めるとき，思惟の経済におかざるを得ないことになる。かくして，自然の法則は便宜的な速記であり，そうでありさえすればいいということになる。便宜的な速記は，正当な認識の多くに伴う1つの性質ではあるけれども，いまだもって真理の充分条件とはなり得ない。したがって，思惟の経済，心的速記というような一側面をもって，可能な法則に対しての選択原理とするのは，認識の全面を把握しているとはいえないのである。このようなことは，人間が実践を通じて逐次近似的に正しい認識を獲得しつつ進んでいくという認識の実践性を忘失したところに基因する。Karl Pearson に対してもまさしくこの点が指摘されるであろう。

Karl Pearson の哲学を構成する上で特徴的なのは，Charles Darwin の進化論と Spinoza の観想の哲学であったというとき，われわれは少なくとも第1近似において，記述統計学の性格をつかまえ得るであろう。記述統計学には古典統計学と同じく実践の無視があった。そうしてそれゆえに，それは観察の

論理ではあったけれども実験の論理たり得なかった。かくして，一面において古典統計学と同じく大標本論の段階にとどまらざるを得なかったのである。もっと精確にいうならば，標本と母集団との概念的区別は，記述統計学ではまだ明確に意識されていなかったのである。記述統計学は，古典統計学の機械論的唯物論を経験批判論において克服した。その点に進歩はあったけれども，上述のように両者には共通する限界もあったのである。他方において記述統計学は，歴史的発展の必然として推測統計学へ連続する。記述統計学と推測統計学との相違とともにその連続を尋ねることは，統計学の認識上重要な点であるといわなければならない。われわれはすでにこのことを，第6章において記述統計学の文法批判として与えた。その要点をわれわれは次のところに見いだした。記述統計学は一面において観想の方法論ではあるけれども，それは Quetelet と違って，進化論の洗練をうけた社会に生まれたものである。そもそもそれは，変異と進化，遺伝の諸現象を記述するための文法でなければならないという使命をもっていた。すでに固定的な一定不変の世界が対象ではなくなっていた。記述統計学の提供した集団の比較において用いられる統計的方法は，このための論理を提供するものであった。それは正に量より質へと変換の論理を用意するものである。統計学の初期における数量化の問題は，質より量への論理であった。これに対して，統計学の発達は逆に量より質への変換の論理を次第に用意しつつあったのである。そうしてこのとき，論理的には集団の確率化が前提されていなければならない。確率集団が現実の集団の近似度の高い模写反映であるためには，現実集団がこの物質的な構成においてこの条件をみたすものでなければならない。それは与えられたままの自然ではなくして，作られた自然として多く得られるものである。しかし Pearson の記述統計学は，対象への人間の働きかけを無視したために，大標本にたよらざるを得なかった。このようにしてそれは，近代統計学たる推測統計学の精密標本論の批判をうけなければならなかったのである。

このような限界にもかかわらず，記述統計学が，ある制約の下では，統計的

認識のたどるべき 1 つの段階であることを忘れてはならないのである。同時に，そこにとどまるべき段階でもないことも銘記しなければならない。記述統計学を必要とし，それによらざるを得ない段階にしかないところの認識を，われわれはあまりにも多くもつ。経済現象の統計において，人はまず，この記述的方法に訴えてきた。景気予測の問題は，20 世紀初めは経済統計学の中心課題であった。そうしてそこに用いられた統計的方法では，時系列の分析とはいっても，時系列に適用された無理論的な曲線当てはめとか相関理論まであって，いずれも記述論的なものであった。しかしこの方法が景気予測の問題において成功をみなかった理由は，まさにその記述統計学的方法によるというべきであろう。本来の分野である生物学においてもメンデリズムとの戦いにおいて生物統計学的方法の限界性は，明らかにされてきた。かくして Karl Pearson の記述統計学の完成は，同時に観察の論理から実験の論理に進展しなければならない必然性を用意しつつあったわけである。

4. 近代統計学の方法と基盤

Karl Pearson の統計学が記述統計学として特徴づけられるのに対して，1920 年前後より発達した近代統計学の主流は，推測統計学として特徴づけられる。その対照を一言にしていうならば，記述統計学が観察の論理であり記述の方法を与えるものであるのに対して，近代統計学は実験の論理であり推測の方法を提供するものであるといえよう。前者が大標本論であり，しかも母集団と標本との区別を明確にしていないのに対して，後者は，母集団と標本との区別を明確な自覚のもとに把握している，そしてそれゆえに，精密標本論として特徴づけられる。

われわれはこのような推測統計学を生み出した基盤を探究してきたし，またこのような推測統計学の理論構成をも検討してきた。それゆえここでは，それを要約しておこう。

近代統計学が上述のような特徴をもつ推測統計学として生成されるために

は，まずその前提として数学的方法を正しい自覚と反省とのもとにおいて使用し得る段階にいたっていなければならなかったのである。公理の直観的な自証性は，近代数学のとらないところである。数学の学問的性格を規定する最も基本的なものとして，仮言的な演繹体系であることを明確にした点において公理主義は，推測統計学に用いられる数学の理解のためにも，また必要な見地の若干を提供することは確かである。しかしながらそれだけではまだもって充分とはいえないのである。いわゆる公理主義は，ひとり統計数学との関連においてのみならず，広く数学一般について，既成の数学の内部構造を整理する原理としては充分の意義をもつけれども，数学の各部門の発生と進展との運動，法則をとらえるのには，不満足であることをまぬがれがたいといわなければならない，と思われる。かくして，われわれは1節をさいて，数学的存在の意義を探究しなければならなかった（第10章第1節）。近代統計学のよって立つところの方法論的基礎は近代確率論にあるのであるが，この近代確率論の基礎をなすコルモゴーロフの公理体系を理解するために，われわれは，数学的存在の意義に関するわれわれの見解を採用しなければならなかったのである。

コルモゴーロフ流の確率論は，測度論的なものとして特徴づけられるであろう。この測度論的考察の前提になるものは，このような測度（実は確率）の定義された場所としての確率空間である。しかも，明確な自覚のもとに定立する形式化をあたえることである。この確率空間の定立ということは，統計力学における Gibbs のいわゆる統計集団の理念に対応するものである。そうして，これこそ近代確率論を古典確率論から分ける分水嶺であり，われわれがしばしばくり返すように，古典確率論と近代統計学との間には，古典統計力学が横たわるというのは，このような意味においてである。内容に即していえば，近代確率論を，古典確率論より分ける点は，近代確率論が無限試行の系列そのものを，空間化して把握するところにあるといえよう。要約すれば，無限試行の系列という時間的なものを同時的存在として直観する目的のために，確率空間の定立を必要としたのである。古典確率論においても大数の法則はあったし，無

限試行列も問題とするところではあった。しかし，それは確率収束あるいは法則収束の問題としてであって，概収束ではないから，われわれはこれをもって無限系列そのものの定立とは認めがたいと考えるのである。事実，古典確率論の対象は無限系列そのものの定立に空間化を必要とはしなかったのである。これを必要とするにいたったのは，数学的な概念としての無限試行が，それの模写反映の要具として適切なものとなるところの現実が要求されなければならなかった。そうしてそれは，気体分子論の世界であった。これは前節に述べたように，熱機関につらなる一連の認識の進展に関連するものである。

近代確率論は，このような基盤を背後にもって，確率空間を構成することによって数学的存在として定立されるにいたった。ここに2つの点が同時に指摘されなければならない。第1に，それは単に観念論的に形成されたものではない。なぜなら，それは，統計力学という基盤をもち，気体の分子運動という実在の模写反映として生まれたものであるからである。けれども第2に，それは気体運動にのみ拘束された存在ではない。単にそういうものであるならば，それは数学的存在であり得ないし，したがってまた気体運動論を解明するものともなり得ないであろう。この2つの性格のゆえに，確率空間は他の実在の模写反映としても役立つのである。

確率空間の定立こそ，近代統計学の建設のための論理的な前提をなすものである。近代統計学の特徴は，母集団と標本との明確な区別にあるといわれる。標本に対してこの母集団の設立ということが，確率空間の定立ということにおいてその表現を見いだすということを，われわれはしばしば述べてきた。そうして確率空間の定立ということが，仮言的演繹体系の設定ということであるように，母集団の設定ということも，それは仮説の提出であり，実在に対して，一定不変な恒常的な存在としての母集団を押しつけようとするものでない。母集団の設定が仮説の提出であることを理解するのには，これに利用される確率空間の仮言的演繹性が理解されなければならないのである。

しかし，これと同時に，あわせて主張しなければならないことは，このよう

な母集団の設定，すなわち仮説の提出は，単に観念論的に恣意的に行なわれると考えてはいけないことである。母集団の設定は，これによって，現実の客観的存在を模写反映することができることによって初めて意味をもつものである。それは物質的な基盤を確保することを必要とするのである。このようにして，近代統計学の方法は，他のすべての方法と同じく，基盤を確保してのみ有効であるのである。

このことは，また歴史の事実のあきらかに示すところである。われわれはこれを実験遺伝学に，農事試験に，そうして大量生産の管理にたずねてきて，そこにそれぞれ明瞭に指摘し得ることを示してきた。Mendel の実験遺伝学における統計的方法と Galton, Pearson の生物測定学における統計的方法の対比は，正に近代統計学と記述統計学との比較のよき範例をあたえるものである。このことに関してもすでにわれわれはくわしく述べてきた。

母集団の設定のための物質的条件を実践において整えること，そうして研究の目標は仮説の検定にあること，あるいは統計的推測の判定にあること，ここに近代統計学の特徴がある。そしてそれゆえに，近代統計学が推測の方法を提供するものであり，実験の論理をあたえるものであるといわれる理由がある。実践を離れては実践は理解されないし，実験の論理という性格を見落としては，近代統計学の理念を理解する方法はないのである。実験に関する統計推理の根本的な方法は，比較法と無作為化法にあることを，われわれは第12章で指摘した。そうしてこれは，単に受動的に観察資料の集積するのをまつところの記述統計学では理解されず，実践を通じて対象に働きかけ，対象を変革して，自己の計画と管理とに従わせる実験を前提とするものである。農事試験における実験の計画といい，大量生産における管理というように計画ないし管理という概念は記述統計学にはなかったのである。比較法と無作為化法とによって実験の論理を構成するとき，偶然はもはや Laplace の時代とは異なった意味で理解されなければならないであろう。それは単に無知の表明ではあり得ないし，また，できれば避けたいところの厄介物という意味でもないであろう。

偶然性は，必然性をうながすための尺度として利用されるのである。

有意性の検定に関する論理は，まさしく量より質への弁証法を用意するものであるといえるであろう。

統計学の近代化においてわれわれは基盤として遺伝学，農事試験，大量生産管理をあげてきた。これらの基盤は，また正しく社会の生産関係の反映であることをあわせてここに指摘しておかなければならないであろう。近代の農事試験における統計的方法の援用は，すでに第8章で述べたロザムステッドの範例のように，資本主義経営の大農場が前提されている。近代統計学の創建者の1人である Gosset (Student) はオオムギの大規模な栽培に関係するビール会社の技師であった。わが国のように極端な小農経営に分割され，農事技師が単位面積当たり収量のみを追求し，小面積基準の技術にとどまるとき，近代統計学応用の基盤はアメリカやイギリスと同じような形態においては与えられないであろう。同様なことは，大量生産の管理においても見いだされるのである。資材，製造工程，労働力配置等において近似的にも均一性を確保し，製造工程がくり返し作業となっているという大量生産の生産組織体でなくしては，統計的管理の方法は適用しがたいのである。たとえば部品抜き取り検査にしても，部品の仕切が，等質化され数量化され，これからの任意抽出が，確率化されていてのみ，諸種の方式が有効に適用されるであろう。大量生産の統計的管理が独占的な資本の集中の顕著な電気会社関係において発達したのは，まことに当然のことである。

5. 近代統計数学の批判

近代確率論と推測統計学の数理論とを総括して近代統計数学と呼ぶことにしよう。われわれはこれら2つの部門の内部的な関連についてはすでに詳しく述べてきた。ここでは，むしろ近代統計学の批判が必要であろう。

近代確率論の中心課題は，現在は確率過程論に集中しているように思われる。確率論的な関連として従来発展してきたものは，第1に独立確率変数の理

論であり，第2にマルコフ連鎖のそれである。ほかにもなお伝播 (contagion) とか，あるいは，マルコフ連鎖を一般にしたコルモゴーロフ－チャップマンの過程のように，相当に研究はされている。しかし全般的にみると，確率論において取り扱っている確率論的な関連の形式はそう多種類はないし，そのおのおのもいまだ充分に研究されていない。この方面の状態はむしろ貧困というべきであろう。確率過程論において重要なのは，とくに連続変数に依存する確率過程であるといえるであろう。しかしこれに関して指摘されるであろうことは，近時その研究が記述論的な傾向のものを対象として，これに止まりすぎていないかという懸念である。定常的確率過程として，相関係数の関数をもって規定されるものを考えるとき，その問題提出はすでに記述論的な様相をとらざるを得ない。この点を反省すべきである。現在確率論の中心課題となっている確率過程が，この本質において記述論的な時系列解析にとどまるならば，確率論の前途は局限されたものといわなければならない。

近代確率論がこのように一時的に貧困になる恐れがあるとすれば，それは最近の傾向として，それが基盤から遊離した傾向に起因することもあわせて指摘されるべきであろう。そうしてその貧困を克服する道は，ただ1つしかないであろう。それは現実の世界に立ち帰ることである。

次に第2の論点に移ろう。近代確率論は，測度論的なものである。そうしてその測度は，完全加法的な集合関数として限定される。完全加法族に属する各集合はすでに述べたように，それぞれの命題に対応して与えることもできる。集合を命題に翻訳しなおしてみるならば，近代確率論のよって立つところの命題算は，ブール代数のそれである。この命題算に関する論理は，いわゆる古典論理 (classical logic)である。近代確率論に対する1つの批判は，この古典論理の適否に対する批判に帰着する。この批判は，統計推理の理論においても深く考察されるべきものでなければならない。たとえば A. Wald はネーマン－ピアソンの統計推理の理論の一般化を試みているけれども，あらゆる仮説の集合を定立することにはなお多くの疑問が残されてよいであろう。たとえば，あ

らゆる仮説の集合をΩとし，ある仮説をwとして，wと$\Omega-w$との二者選択的な関係において仮説検定を論ずるのは，かならずしも事態を忠実に模写反映しているとはいえないであろう。Fisher 等の帰無仮説の理解には，ある仮説wとともに，$\Omega-w$を定立することはそもそも必要としなかった。かくして仮説wの棄却は$\Omega-w$の採択を意味しないのであって，この点において A. Wald の理論は，R. A. Fisher の形式を一般化したものともいいがたいように思われるのである。もちろん A. Wald の形式のもとにおいて論ぜられる場合もあるであろう。たとえば，そのような例として大量生産管理において，部品の検査で一定規格を設けて，合格か不合格かというような二者択一の関係があればよいであろう。しかし，一般の事態は，かならずしもそのような関係にあるとはいえず，仮説の集合に関しては，なお検討すべき多くのものを残しているとみるべきであろう。統計数理としてなお指摘されるべきことは，従来の理論に対して，時系列論としての統計推理の理論の展開が要求されることであろう。それは run の理論として相当に開拓されてはいるけれども，将来の問題として残されているとみるべきであろう。実験計画論としての例示として要因配列計画法の基本的な一例は述べたのであるが，実際には混同法等を用いて対處し，したがって，きわめて精巧な方法が展開されていることをここにつけ加えておかなければならない。しかしいずれにしても，それらはあらかじめ想定された要因を実験において計画的に配列して，各要因の効果を統計資料において探究しようとする点においては変わりはない。これらの実験計画の重要なことはいうまでもない。しかし，それと同時に，与えられた資料のなかから未知の要因を探し出してくるところの因子分析法（factor analysis）と呼ばれる方法が，さらに一段と積極的に，かつ一段高い見地から展開される必要があるであろう。因子分析法の理論も，たしかに近代統計学の範疇において考えられるべきものである。

近代統計学のいっそう根本にふれる問題は，確率の概念の変革を考慮するとき，発生するものである。現在われわれは，確率は必ず数値としてこれを理解

している。しかし，確からしさというとき，われわれはかならずしもそれの数値的表現を必要ともしなければ，またいうまでもなく可能ともしない。しかし，それにもかかわらず確からしさの程度というものに対して，数量的には漠然としていて，明確に順序はつけられるということは，事実においてこれを体験しているといえよう。この点を鋭くついたものとして経済学者 Keynes の功績を見落としてはならないであろう。Koopman 等によってそれは直観確率（intuitive probability）と名づけられている。それの発展は将来の問題として残されているのである。

第14章　統計的認識の論理

1.　統計的認識の現段階

歴史的なものを研究対象としながら，われわれの求めてきたものは論理的なものであった。古典統計学，記述統計学，推測統計学の歴史的形態と外面的偶然性とを次第に洗いきよめることによって，統計的認識の構造が次第に明らかにされてきた。統計的認識の構造については，第9章「社会統計の認識」において論じた。集団化，標識化，層別化，等質化，数量化，そうして確率化――これらの諸段階をもって完成される統計的認識に，社会統計の範例をみたのである。しかし，――これらの操作過程は，ときには明確に自覚されていないこともあるけれども――ひとり社会統計のみならず生物統計を初め，一般の自然科学的な統計においても，ふむべき順序であり，事実，正しい統計的認識では忠実に従っている手順である。近代統計学もまたこの見地からみられるであろう。近代統計学の方法的特徴を，われわれは比較法と無作為化法とに見いだしたのであるが，比較法は集団化より数量化までの過程にほかならず，無作為化は確率化と同一内容のことである。社会統計における統計調査の原理となる判断原理と確率原理もまた，同様な見地から解釈されるものといえる。この理念を最も徹底的に追究していくとき，変量分析法となり，さらに進んで要因分析法となることも，すでに例示によってわれわれの詳述したところである。統計的認識の本質的な点は，確率化にあるわけであり，これによって一般の帰納的判断のなかにその独自の位置を占めるというべきであろう。統計的認識に関する上述の過程は，明らかに異質的なものを同質的なものの集団に分割し，同質的なものに対しては数量的表現を与えようとする過程を含む。これが質より量

への過程である。ところがこの過程の終極において，確率化の段階に達すると，今度は，進行方向は逆向きになって，量より質への過程が始まる。詳しくいえば，偶然的な変動に対する計量が獲得されると，これを物指として用いることにより，要因ありとの前提のもとに異質的なものと見なしてきたものが，はたしてそうであるか否かを検定することができるのである。統計学的認識は，このようにして質より量へ，そして量より質への運動を現出せざるを得ない。

この運動は，その本質上無限のくり返しにおいてのみ完成さるべきものであり，現実に与えられるものは不完全なものにとどまるであろう。要因として前提されたもの自身が検定される対象となるのであるから，統計的認識はある先験的なものを，経験的なものに押しつける演繹体系の論理ではない。要因として前提されるものは，ようするに仮説にほかならない。この仮説を，偶然量の変動を物指として，検定しようとするものである。このようにして，統計推理は広い意味では仮説検定の論理を提供するものである。それは，それゆえに，まさに実験の論理でなければならない。

現在統計学の到達し得たところを大観すれば，このような段階である。ここに立って古典統計学と記述統計学とを振りかえってみるならば，両者の特徴が明瞭に見いだされるであろう。このことについてもすでにわれわれは多くを説いてきた。われわれはここではむしろ現代統計学の本質の解明がすなわちその限界を明示し，したがってまた統計学の将来を示唆する点にこそ意義を認めるべきであろう。なぜならば，すでにくり返し述べたように，統計学の過去および現在を解釈するだけでは，われわれの目的には不充分であり，われわれはさらに進んで，統計学の進展の道を求めなければならないからである。近代統計数学のもつ数学的方面に関しては，すでに前章の5節でこれを試みた。それゆえ，ここでは，論理的な性格の上から統計学の現段階が批判され，将来が見とおされるべきであろう。

2. 帰納論理と統計的認識

Bacon の新機関が統計学の歴史において演じた役割については，政治算術学派の誕生に関連してすでに述べてきた。Aristoteles の演繹論理に対して，それは帰納論理といわれている。これを体系づけたのは周知のように後世のJ. S. Mill である。

帰納論理が，統計学のための一般的な認識の原理であったのは，古典統計学と記述統計学の段階において最も明瞭であった。このように統計学が，観察の論理であった時代には，帰納論理のなかでも一致法がとくに重要な役割をはたしてきて，これがいわば1つの指導原理であった。ところが統計学の進歩が，観察の論理から進んで実験の論理になるにおよんで，差異法または一致差異法に大きな役割をみとめなければならなくなった。統計学は数量的考察にもとづくものであるから，共変法，剰余法の採用も当然であろう。J. S. Mill の提唱した帰納論理のこれらの諸方法が，いかに統計的認識においてその役割をはたしているか。これを検討してみることによって，帰納法論理と統計的認識との関係をうかがうことにしよう。

【1】 一致法 (**The Method of Agreement**) Hibben の記号によってこの方法を表現すれば，次のようになる。Cは原因と仮定されるもの，Sはこれに伴う事情の全体，e はCに相当する結果，s はSに伴う結果の全体として，14-1表のような関係があったとする。このように数多くの事例をあげて，前件はいろいろに変わるものとするけれども，しかし常にCは不変であり，また後件も種々に変わるけれども e をふくむ。このときCと e との並存を帰結するのが一致法である。

この記号を用いて，Mill の表現をもっていうならば，次のようになるであろう。研究しようとする現象 e の存在する2個以上の事例が単に1個の事情Cのみを共有するときには，この事情Cは恐らく与えられた現象 e の原因（または結果）であるか，もしくはこれとなんらかの因果関係をもつ。

14－1表

$S_1+C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots s_1+e$

$S_2+C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots s_2'+e$

$S_3+C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots s_3''+e$

$\vdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$S_n+C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots s_n^{(n)}+e$

$C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots e$

この論理を少し詳細に考えてみよう。Mill は明らかにＣを原因とかぎらずＣと e との共存を問題にしているのであるが，便宜上ここでは「Ｃならば e である」という命題 $C\to e$ の妥当性が問題になったとしよう。Ｃというものも，e というものも，概念的存在であって，Ｃも e もそれ自身が実在として存在するものではないとするならば，この命題の妥当性をみるためには，Ｃのあらわれる現象面の個々のすべての場合について，したがってそれは――S＋Cの形であらわれるのであるが――あらゆるＳについて，S＋Cを前件として，後件に $s+e$ がみられるか否かを実証することによって，この命題の妥当性が確保されるであろう。しかしながら，Ｃをふくむすべての場合について，これを実証することはもとより不可能であり，$C\to e$ という命題は，特殊の若干の事例についての確証から，飛躍によって推測された普遍的な命題にとどまるのである。もしもＣの外延を有限個に分割して，Ｃのあらわれる相は，$C+S_1$，$C+S_2, \cdots, C+S_n$ によってそのすべての場合が尽くされており，そうして各 $C+S_i$ について $C+S_i\to e+S_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ が確認される場合であるならば，$C\to e$ は，単にこれら n 個の命題の総合であるから，それは完全に妥当するのは当然である。しかしこのようなことは概念の世界においてのみ可能である。このようにして一致法が多くの欠点をもつことはいうまでもなく明らかである。第1に，一致法により主張されるところの命題は，一部分の確証をもって，全体に押し広げようとする飛躍をふくむ。それゆえに，それは絶体的には妥当しないところの危険をもつ。第2に，上述のような対応を多くの事例についてあげてきた場合に，前件は $S_{(k)}+C$ であり，後件は $s_{(k)}+e$ であるというふうに，条

件の分析が常に可能であるとはいえないのである。14－1 表のような式から，もしも前件 $S_1+C, \cdots, S_n+C$ に共通するものがCのみではなくしてC＋Dであり，後件に共通するものが e のみではなくして $e+d$ であるならば，$C \to e$ を帰納し得ないで，$C+D \to e+d$ を帰納しなければならない。この2つの欠点を克服するために一致法の論理では，多数の事例を集めることによって，帰納の確実性を高めようとしたのである。詳しくいえば，事例数を多くすることによって，第1に，特殊より一般への飛躍に伴う危険を少なくし，第2に，前件の純粋化を実現しようとするものである。第2の点，すなわち前件の純粋化とは事例を多く集めることそのことによって，前件としてあげられる数多くの事例において共通するものはただCだけに止めようとすることにほかならないのである。しかしながら，それは種々な段階があり，全く受動的に集まるのをまつ場合もあれば，無計画ではあるが進んで収集する段階もある。計画的に事例を収集するという段階もある。このことを偶然性の除去ということがある。というのは $C \to e$ という命題に対して，それが $C+S_k \to s_k+e$ として現象にみられるということは――$C \to e$ なる関連においてみるかぎりでは――外面的な現象形態としてみられるものであり，必然的でない要素であるという意味である。

このようにして一致法の採用にとどまるとき，そのかぎりでは帰納法の論理の意味するところは観察の論理にほかならない。統計的認識が古典統計学と記述統計学の段階にあったとき，事例の多いことをもって，立論の根拠をもつとしなければならなかったのは，それが観察の論理にとどまったからにほかならないのである。

【2】 差異法 (**The Method of Difference**)　$C \to e$ という命題からは，Non $C \to$ Non e が得られるわけではない。$C \to e$ でもあり，Non $C \to e$ でもあり得るならば，$C \to e$ という命題はおよそ存在価値をもたない命題であろう。それゆえに，$C \to e$ がたとえば一致法等によっておおよそ想像されるとき，Non C であってかつ Non e である例をただ1つでもよいから提供することが望ましい。それは $C \to e$ の主張の妥当性を保証しない。けれども，前件として，C

14-2表

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{S}+\mathrm{C}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots s+e \\
\mathrm{S}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots s \\
\hline
\qquad\mathrm{C}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots e
\end{array}
$$

を消去することはできないということを示す。差異法といわれるものの本質はそこにあると思われる。ところが普通差異法といわれる理由は，14-2表において考えられるからである。ただ1回のある特定の事情Sについてで充分である。とにかく，Cが伴っていれば，すなわちS＋Cであれば，$s+e$ となり，もしCがなくSだけであるならば e はないというときは，Cならば e を結論しようというのである。

この結論自身は，これまた飛躍であって，絶対的には妥当しない。われわれは差異性の本質をどのように説明すべきであろうか。Mill は差異法を次のように表明している。すなわち，研究しようとする現象 e の存在した一事例と存在しない一事例とが，前者のみ起こる一個の事情Cを除いてはいっさいの事情が共通であって，これがSであらわされるとすると，Cはその現象 e の結果あるいは原因，もしくは原因の必要な一部分であるというのである。

差異法は，多くの事例を集めて，受動的に観察するという立場ではない。事例は1通りであってもよい。しかしその代わりに，S＋Cとともに同じSをCと切り離して実現させなければならない。対象に働きかけ，いわば positive case と negative case とを，現象として出現させなければならないという積極面があることは否定されない事実である。一般にはこのように解釈され，それゆえに，実験の論理といわれるようである。しかし，この対象への働きかけという積極面自身は，実験の論理そのものを意味するものではない。実験の論理といわれる理由は，仮説の検定という性格にあるといわなければならない。この場合についていえば，Non C→Non e という仮説を提出して，これを実験によって検定しようとするものであるといえよう。実験の論理の特徴は，すでに述べたように仮説の検定であり，しかもそれは帰無仮説の検定である。帰

無仮説とは，実験によってけっして肯定されることはない。常にそれは否定されるか，あるいは否定されず，ただ保留されるものとなるところの仮説をいう。ただ一事例においても Non C→Non e が得られるならば，Non C→e という一般命題は否定されるのである。しかし，どれほど多くの事例についてこのことを実験しても，論理的には証明されてはいない。差異法の特徴はまさにこの帰無仮説の検定にあるといえるであろう。そしてそれゆえに，実験の論理といえるのである。Mill のいう意味においては，C の伴う場合とそうでない場合とを併存させるものであるからして，比較法として特徴づけられないこともない。今は伝統的な分類に従って述べているのであるけれども，論理的には，実験論理の性格をもつと強調することが必要であると考えられる。

【3】 一致差異併用法（The Joint Method of Agreement and Difference）
Mill の説明によれば，この方法は次のようなものである。

ある現象 e の併存する数多くの場合が，単にある一個の事情 e のみを共有しているとする。他方，この現象 e の存在しない数多くの場合には，共通しないのはCだけであるとする。このような場合にはCは，e の結果もしくは原因，もしくは原因の必要な部分，である（14－3表）。図式的に書くならば，ここに注意すべき点は，$S_1, S_2, \cdots, S_n$ はかならずしも $S^1, S^2, \cdots, S^n$ と一致することを要しない。

これに反して，$S_1=S^1$，$S_2=S^2, \cdots, S_n=S^n$ ということを成立させようとするならば，それは，比較法の原理ともいうべきものになるのである。近代統計学は比較法の原則というものを最も有効に利用しようとするのに対して，古典統

14－3表

$$
\mathrm{I}\left\{\begin{array}{ll}
S_1+C\cdots\cdots s_1+e & S^1\cdots\cdots s^1 \\
S_2+C\cdots\cdots s_2+e & S^2\cdots\cdots s^2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_n+C\cdots\cdots s_n+e & S^n\cdots\cdots s^n
\end{array}\right\}\mathrm{II}
$$

$$C\ \cdots\cdots\cdots\ e$$

計学も記述統計学もその用意が不充分であったことはすでにしばしば指摘したとおりである。比較法の原則を用いるならば，それは一方において一致法であるときに，他方においてはそれはいわゆる差異法である。比較法に対してこそ一致差異法の名を与えるのが適当であったというべきであろう。

以上においてわれわれは主として C→e を問題にしてきたのであるが，同一の論法がCとeとの共存に関しての帰納論理に関していえるであろう。いずれにしても，そこではCとeとが一義的に対応させたものと，とりあげられてきた。ところで帰納の論理を適用するにあたっての根本問題は，このような対応が可能でない場合の探究の論理をもつことである。たとえばサイコロを空中に投げ上げる。その結果としてiの目が出るという現象をe_iとすれば，$e_1, e_2, \cdots, e_6$によって現象の起こり得べきすべての場合はつくされるけれども，e_iを生ずべきC_iという事情を規定することは不可能である。この不可能な世界の存在が現実の姿である。ここに確率論と，したがって統計推理すなわち統計認識の世界が登場してくる。しかもこれこそ帰納論理の客観性を保証する根拠を与えるものであることをわれわれは知らなければならない。それは，すでに述べたように，要因分析のあとに残る確率化の操作の利用である。帰納論理と統計的認識との関係については，なお詳述すべきであろうけれども，ともかくも，Mill のあげた主要方法が統計学の諸段階とどのように関連しているかは，上述によりいくらか明らかにされたことと思う。

Mill のあげたものは，なお共変法（The Method of Concomitant Variation）と剰余法（The Method of Residues）とがある。これらは，前掲の3つの方法が質的方法ともいうべきものであるのに対して，いわば量的な方法であるといえる。しかし質的方法と量的方法との間には当然ふむべき順序がある。前掲の三方法の適用と，これらの量的方法の適用との間には，要因分析が行なわれなければならない。前掲の記号でいえば，前件 S_1, S_2, …等に対して集団化，機械化，層別化，等質化の諸操作過程がほどこされる必要がある。Mill はこの点を充分に説いていない。単に並別的にならべている。これは Mill の

帰納論理の重大な欠点であるといわなければならないであろう。共変法と剰余法とは，このような段階を経て到達した統計集団に対して適用されるところの方法である。

統計的方法との関係が問題であるが，統計的方法は，すでに述べたように，集団化，機械化より等質化までの四過程を経て数量化の段階に達しているものである。前掲の一方法，差異法はいまだかならずしも数量の世界へ下りてきていない。これらの方法を数量の世界へもちきたらすならば，いっそう緊密に，同じく数量の世界へきているところの統計的認識と比較できるであろう。

3. 形式論理学と近代統計学

近代統計学の基礎づけは，ルベグ測度論的な近代確率論によって与えられる。近代確率論においては，事象即集合の見地から確率空間の定立にいたるまでが根本的な要請である。事象に関する論理操作は，つまり命題算であるが，命題算を集合算へ翻訳しかえている。近代確率論において，この命題算がいかなる集合算に翻訳されているかを突き止めることによって，近代確率論の，したがって近代統計学の理論的性格を明らかにできるであろう。これはいいかえれば，近代確率論のよって立つところの形式論理学を明らかにすることにほかならない。

われわれは，このことを直観論理，量子論理，様態論理等種々の論理学の様式との対比において成しとげることができるであろう。

人間思惟の根底をなす論理学の諸様式を論ずるに当たって，われわれはまず分析的に最も単純な概念から始める。

次第にこれに多数の規定および諸関係を加えて，諸種の論理様式に到達するという方法をとるであろう。それは数学的方法の一例をここに示すことにもなるであろう。その方法は，現代数学の一部門である束論（lattice theory）におうものである。

たとえば統計学の基本的な方法として，われわれは集団化をまずあげてき

た。そうして次に，標識化と層別化とをあげてきた。日常の用語に頼るところの表現は，もとより漠然さと多義性とを伴わざるを得ない。論理学の基礎を論ずるとき，これらの不明確性を極度に避けなければならない。これに対して数学的方法の優位をわれわれは見いだすであろう。

論理学において最も基本的な事柄は，いうまでもなく，「ある対象がある属性をもつ」という概念である。主語と述語とをつなぐということである。命題において主語を前提として，今述語だけの相互関係，結合を論ずることによって，Boole の賓辞算が生まれる。ところで属性に対応してその属性をもつ物全体のつくる集合を対応させると集合算が得られる。

Boole は賓辞算との間に双対同型 (dual isomorphism) を導入した。すなわち，ある属性 x に対して，属性 x を有する対象の全体の組 $\hat{x}$ を対応させる。逆あにる対象の組 X のもつ属性 x と $a(X)$ で表わす。すると同型ということは $\hat{\alpha}(X)=X$ であり，$a(\hat{x})=x$ であることを意味する。賓辞算は内包の論理であり，集合算は外延の論理であるが，Boole の主張するようであるならば，これらは双対同型である。それは観念の世界（属性）と物質の世界（対象）とを同値とするものである。このことは，まさに観念論の旗印の明らかな進出であって，それゆえに，多くの背理と困難に導き，人間認識の真相を形式化していないことは怪しむにたりないのである。人間の認識は，歴史のいかなる段階においても，完成していない。われわれのもつものは，常に相対的真理である。われわれの到達し得たところをもって，客観的存在と同一視することがそこに潜められているかぎり，この種の背理は当然であろう。宇宙におけるあらゆる対象の集合というものを，歴史的に制約された相対的なものであるところの人間の観念の世界と同一視するところに，あらゆるパラドックスを生ずる。われわれは会話の世界を制限しなければならないのである。

われわれは，賓辞の世界から出発するであろう。それは対象の世界の存在を否定することではない。われわれは，対象の世界の存在を実践により確認しつつ生きているのである。しかし，対象を把握することは，ただ1回きりででき

るものではない。それは無限の逐次近似として完成されるべき把握の対象である。そうしてその過程において現実にもつものは，対象のある部分的な模写であり，反映である。Xはaである。Xはbである。…Xはzである等々の命題はもつ。けれどもXはくみとりきれないある物としてなお残るのである。われわれは a, b, c, …, z 等の属性を集めてきて，これに対して，相互関係を論理として組み立てていく。人間の認識が進むにつれて，a, b, …, z 等の属性のほかにXはイである。Xはハである…等の命題もまた人間の実践を通じて与えられてくる。すると今度は a, b, …, z とイ，ロ，ハとをいっしょにして整合し得るところの論理が，組み立てられなければならない。

われわれは，Xの存在は，本書で説いてきたように，これを前提している。その条件のもとにおいてわれわれは命題算から出発しなければならない。属性の世界，述語の世界から出発していく。ここで問題になるのは，いかなる属性の世界から出発していくかということである。これをわれわれは，最も抽象的なものの組み立てから具体的なものへ向上することによってなしとげようとする。それには，概念の徹底的な純粋化，すなわち抽象化が必要である。そこに数学的方法の優位がある。

“ある対象がある属性をもつ”という論理の基本概念において，属性にのみ着目するならば，属性相互間の比較ということが根本になるわけである。しかし属性は相互に比較されるものとはかぎらない。しかしもしも比較されるという関係にあるならば，基本的なことは，属性相互間の包含関係であるといわなければならないであろう。それゆえに，束論においてはこの包含関係をまずもって合理化するのである。

定義 あるいはY集合において2つの元の間に記号≧で表わされる1つの関係が定義されていて，次の関係をみたすとき，この関係≧を半順序という。

P1：Yのすべてのaに対して $a \geqq a$（反射律）

P2：$a \geqq b$ かつ $b \geqq a$ ならば $a=b$（反対称律）

P3：$a \geqq b$ かつ $b \geqq c$ ならば $a \geqq c$（移動律）

このときYを半順序集合といい，$a \geqq b$ は $b \leqq a$ とも書かれる。今 $a \geqq b$ にしてかつ $a \neq b$ なるとき，$a>b$（または $b<a$）と書く。

この定義においては，Yの任意の元 a, b が与えられたとき，$a \geqq b$ であるか $a \leqq b$ であるかのいずれかである，ということを要求しているのではない。もし，これを要求するならば，論理の数学的構成は，現実の論理を反映し得ないことになるであろう。たとえば a は“日本人である”という属性をあらわし，b は“身長1メートル60以下である”という属性であるとするならば，$a \gneqq b$ でもまた $a \leqq b$ でもないとしなければならない。しかし a と b とは互いに直接には順序づけられないとはいえ，$a \geqq c$, $b \geqq c$ というような c もあり得るし，$a \leqq b$, $b \leqq d$ というような d もあり得る。たとえば c として“日本人であって身長1メートル60以下である”，d として“日本人であって生後6か月である”をとればよい。a, b は互いに比較されなくとも，このような c および d が考えられるような世界が前提されなければならないことを要請するならば，それは，1つの大きな制約ではある。しかし，属性にこの程度の相互関係すらもないときには，われわれは，別々のいくつかの世界を同時に考えることになるだけであろう。1つの世界として考えるべきものは，半順序集合をさらに限定して束とすることによってなされる。このために，次の定義が導入される。

定義　Zが半順序集合Pの部分集合であるとき，Zに属するすべての元 z に対して，$Z \geqq a$ となるようなYの元 a をZの下界という。Zの下界がZ自身に属すれば，それはただ1通りに定まり，これをZの最小元という。Zに属するいかなる z についても $a>z$ となることのないような元を極小元であるという。

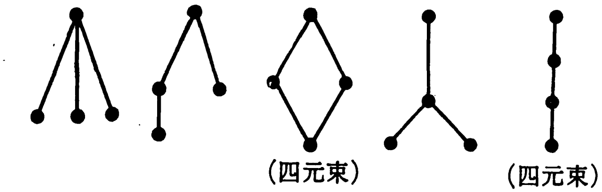
双対的に，上界，最大元，極大元が下界，最小元，極小元の双対として定義される。Zの上界の集合に最小元があれば，これをZの上端という。下端はその双対である。このようなことばを用意することによって，半順序集合の限定されたものとして規定される束なるものは次のように定義される。

定義　1つの半順序集合Lにおいて，その任意の2元 a, b に対して，a, b

より構成された集合に対して上端および下端が常にLに存在するとき，Lを束（lattice）という。a, b の上端を $a\vee b$ で示して，これを結（join）といい，a, b の下端を $a\wedge b$ で示して，これを交（meet）という。

半順序集合に対して，束であるという限定は，属性の世界から対象の世界へ立ちかえってみるとき，その意味がはっきりするであろう。たとえば“私は日本人である”という命題と“この三角形は二等辺である”という命題とにおいて，日本人であるという属性aと，二等辺であるという属性bとに対しては，$a\vee b$, $a\wedge b$ いずれも考えられないのである。束を形成するというとき，それはある特定の対象に関する属性の命題の集合であるという性質がはっきりと限定されざるを得ないのである。対象はいつも前提されているのである。

有限個の元よりなる束を有限束というのであるが，そのうちとくに簡単な有限束を図式に示すこともこの際有効なことであろう。今有限束の各元に紙面の一点を対応させて，束論の意味で $a<b$ ならば，紙面上ではaに対する点がbに対する点よりも上にあるようにし，また $a>c<b$ となるような c がなければaとbとを線分でつなぐことにする。すると四元半順序集合のすべては次の場合によってつくされている。このうち四元束となるのは，2通りの場合である（14－1図）。



14－1図

束を半順序集合の限定されたものとして以上のように規定したのであるが，代数的ないき方としては，$a\vee b$, $a\wedge b$ という演算に関する公理を規定することによって，束を規定することもできるのである。われわれは以下順次に公理を追加していくことにより，次第に抽象的なものから具体的な規定へ進む。そ

のために導入する束に関する公理をＬ1，Ｌ2等で示すことにする。

Ｌ１：巾等律（idempotent）　$a\wedge a=a$, $a\vee a$

Ｌ２：交換律（commutative）　$a\wedge b=b\wedge a$, $a\vee b=b\vee a$

Ｌ３：結合律（associative）　$a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$

$a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$

Ｌ４：吸収律（absorptive）　$a\wedge(a\vee b)=a$, $a\vee(a\wedge b)=a$

これに関して次の公理が束論の出発点になる。

公理　L1—L4 は束を特徴づける。いいかえれば，束Ｌの交および結はL1—L4 の関係を満足する。逆にある集合においてそれに属する任意の二元間にL1—L4 の関係を満足する$\wedge$，$\vee$が定義されているならば，これは束である。この証明はほとんど明らかで，$x\wedge y=y$ なるとき，かつそのときにかぎり $x\geqq y$ であるとして順序を定義すればよいのである。

束を規定するものは属性間の結合であったが，“a とそして b” が $a\vee b$ で，“a あるいは b” が，$a\wedge b$ で表わされるのである。

以上，属性に関して述べてきたことは，命題算についても成り立つのである。以下には，これゆえ便宜上命題算について説明しよう。2つの与えられた命題 x, y に対して，“x および y”，“x あるいは y” ならびに “非 x” をそれぞれ $x\vee y$, $x\wedge y$ および x^* で表わす。0によって何事も主張しない命題を意味し，Ｉによってあらゆることを主張する命題を意味する。同義反復（tautologies）である複合的命題は，単に論理的関係だけによって真であることを保証されるものであり，束論的には0に等しいのである。命題算で核心的な役割をなすものは，“x ならば y” であるという関係である。これを $x\rightarrow y$ であらわす。x と y とが同等ということは，“x から y が推論され，かつ y から x が推論される” ということであると解釈されよう。そのかぎりにおいてそれは，$(x\rightarrow y)\vee(y\rightarrow x)$ に等しいと考えられるのである。

(1) $\mathrm{I}\rightarrow x$, (2) $x\rightarrow 0$, (3) $x\rightarrow x$ のときはすべて同義反復であって，いずれも0に等しい。

たとえば(1)は，“虚偽の命題からはいかなる命題も推論される”を意味する。

排中律をめぐる問題は，ある命題xに対してそれの否定x^*が推論関係において規定されるかということである。矛盾律は，xとx^*とは2つともには真ではあり得ないということを主張する。すなわちxおよびx^*が成り立つということは虚偽の命題である。すなわち $x \vee x^* = \mathrm{I}$ である。矛盾律はxとx^*とは2つともには真ではあり得ないということを主張する。このことは少なくも一方は偽であることを意味するから，実は双方とも，すなわちxもx^*もともに偽であってもよいわけである。すなわち $x = \mathrm{I}$ でありかつ $x^* = \mathrm{I}$ であることを否定しえないのである。日常の論理においてこのことが許されないのは，排中律の成立があるからである。これに反し，排中律はxとx^*とは，2つともには偽ではあり得ないことを主張する。このことは少なくとも一方は真であることを主張するものである。すなわち“xあるいはx^*が成り立つ”ということは同義反復である。すなわち$x \vee x^* = 0$，排中律を一般に認めないと，xとx^*とがともに偽であり得るということになるのである。

Whitehead および Russell の方法にあっては，yあるいはx^*が真ならば$x \to y$は真であり，かつ，yあるいはx^*が偽ならば$x \to y$は偽であると考えるという立場をとり，$x \to y = x^* \vee y$ とおく。この解釈をとるときには，排中律の成立を認めることになるのである。

排中律の成立を要請しない直観論理では，もっと一般の見地から出発しなければならない。Brouwer 論理では，$x \to y$, x^* を束におけるある規定として定義する。それは排中律を要請しない。この規定にさらに，排中律の要請を加えるならば，Boole-Whitehead の論理（古典論理）となるのである。Garrett Birkhoff : Lattice Theory, American Math. Soc. Colloquium Publication Vol. 25 (1940) によって以下に大要を紹介しよう。

【1】 Brouwer 論理（直観論理）

定義 0およびIを有する束において，次のような性質をもつ操作 $x \to y$ が

定義されているとき，この束を Brouwer 束という。

B1：$x \geqq y$ のとき，かつそのときにかぎり $x \to y = 0$

B2：$x \to (y \to z) = (x \vee y) \to z$

$x \to \mathrm{I}$ を x^* で表わし，$x=0$ を $\vdash x$ で示す。

直観論理をこのように簡単に特徴づけたのは，束論の大きな成功の1つであるというべきであろう。この Brouwer 論理においては，Heyting が論理学の公理として選んだ推論の諸規則の成立することが示される。x の否定 x^* に関して成立する若干の事柄もまた容易に導けるのである。これらを次にあげよう。

定理　Brouwer 論理においては次のことが成り立つ。

(1°)　$\vdash a \to (a \vee a)$

(2°)　$\vdash (a \vee b) \to (b \vee a)$

(3°)　$\vdash (a \to b) \to (a \vee c \to b \vee c)$

(4°)　$\vdash [(a \to b) \vee (b \to c)] \to (a \to c)$

(5°)　$\vdash b \to (a \to b)$

(6°)　$\vdash [a \vee (a \to b)] \to b$

(7°)　$\vdash a \to (a \vee b)$

(8°)　$\vdash (a \wedge b) \to (b \wedge a)$

(9°)　$\vdash [(a \to c) \vee (b \to c)] \to (a \vee b \to c)$

(10°)　$\vdash a^* \to (a \to b)$

(11°)　$\vdash [(a \vee b) \vee a \to b^*)] \to a^*$

たとえば，(4°) を「“b ならば c” である。しかるに a ならば b である。よって a ならば c である”」と読むならば，それは三段論法の論理であり，すなわち，演繹的推論を示す。また (9°) は “a ならば c である。また b ならば c である。よって，a あるいは b ならば c である” と解釈すれば，枚挙的帰納推理である。

定理　上述の Brouwer 束は x^* に関して次の性質をもつ。

(1°) : $(x^*)^* \leqq x$

(2°) : $x \geqq y$ ならば $y^* \geqq x^*$

(3°) : $(x > y)^* = x^* \vee y^*$

(4°) : $(x \vee y)^* \leqq x^* \wedge y^*$

(5°) : $((x^*)^*)^*$

この定理は，次の定理を証明することによって，簡単に導かれるものであることを注意しよう。

定理　Brouwer 束は次の2性質をもつ。

(1°) 分配束である。(2°)$a \to b$ は $t \vee a \geqq b$ となるような t のうち，最小元である。

逆に (1°), (2°) の性質を有する束は $a \to b$ に関して B1—B2 を満足し，したがって Brouwer 束となる。

ここに分配束という概念が登場してくるのであるが，これは次のように規定される。ある束が分配束であるための必充条件は，その束において相対補充が一意的なことである。いいかえれば，$a \leqq x \leqq b$ であるときには，$x \wedge y = a$ にしてかつ $x \wedge y$ となるような y はたかだか1通りにきまる。

【2】 Boole-Whitehead 論理（古典論理）　Brouwer 論理においては一般に $(x^*)^* \leqq x$ であって，$(x^*)^* = x$ はかならずしも成立しない。$(x^*)^* = x$ の成立を認めることがすなわち排中律の承認に一致するのである。この条件はまた Brouwer 論理に対して $x \wedge x^* = 0$ という条件も加えることと同等である。Brouwer 論理においてさらに排中律を要請すれば，それは古典論理にほかならない。すなわち次の定理が成り立つのである。

定理　Brouwer 束において $(x^*)^* = x$ または $x^* \leqq x = 0$ が常に成り立つとすれば，この束は Boole 代数になる。そうして $x \to y = x^* \wedge y$,

ここに始めてBoole 束が登場してくるのである。これは次のように定義できるものである。

定義　ある束Lが次の条件を満足するとき可補であるという。すなわちLは

0およびIを有し，かつすべてのxに対して次のようなx'をもつ。

（i）$(x')'=x$,（ii）$x\wedge x'=0$, $x\vee x'=\mathrm{I}$,（iii）$x\geqq y$ ならば $x'\leqq y'$

定義　分配束が可補であるとき，Lをブール代数という。

このBoole束に達するとき，次のようにしてBooleの双対同型対応（dual-isomorphism）が得られる。

定理　$\hat{x}$ をもってある属性 x を有する対象の全体とする。x と x との対応 $x\rightarrow\hat{x}$ は双方対同型対応である。すなわち

$$\widehat{x\vee y}=\hat{x}\wedge\hat{y},\qquad x\wedge y=\hat{x}\vee\hat{y},\qquad \widehat{(x')}=(\hat{x})'$$

属性の論理代数は内包の論理であり，対象の論理的外延の論理であるといわれる。上の定理は2つの論理代数が双対的同型であることを示すものである。ところがブール代数は自分自身に双対同型であるからして，内包の論理と外延の論理とは同型になる。

ブール束は，しかしながら会話の世界を制限しない場合には，パラドックスにおちいることはすでに述べたとおりである。

ブール－ホワイトヘッドの論理を論じたこの機会に，Aristotelesの論理が個体の論理といわれることに対してある種の示唆を述べておこう。Aristotelesの論理では，弁証法を単に蓋然推理にとどまる不完全な論理と考え，あくまでも三段論法の分析論理を論理の主体と考える。それゆえ，自同律，矛盾律，排中律を固守するのは必然である。このことから単純不可分な個別を論理の窮極の要素と見なしたものと一部の哲学者から考えられている。しかし，このことを束論の用語において規定することはできないであろうか。これは束論における原子元（atomic element）の存在と結びつけて考えられるべき問題ではないかと思われる。それは一般のブール代数に対してさらに規定を加えるものであることを注意しておこう。

【3】 古典力学の論理　ここに古典力学の論理というのは，古典力学における命題計算の論理を意味する。われわれは，このような意味での古典力学の論理に，力学的自然観の一側面を見て取るとともに，なおこれを通じて以下述べ

るような点で，この論理と共通性をもつ現代の統計学の論理の性格を明らかにし得るであろう。共通性というのは，両者はともに，その命題計算の論理がブール代数をなしていることである。その論理は，直観論理に対して排中律の導入を意味し，したがって1つの制約を意味することは前述のようであるが，しかしここではさらに量子力学の論理との対比において，その限界性を明らかにすることも必要であろう。すなわち量子力学の論理を通じてみることによって始めて古典力学の論理が明らかに自覚されるし，したがって後者と同一の命題計算の論理の上に立つ近代の統計学の論理が，明確に規定されるであろう。

量子力学を含めた現代の物理学的認識を理解するには，周知のように観測という操作と観測の対象との交互作用が明確に自覚されなければならない。このためには，一方に観測の結果を表現する世界としての観測空間，他方に観測の対象となる状態というものの構成する相空間，この2つを定立して考えるのである。そうして観測に関しては，同時に観測可能なものとそうでないものとが区別されなければならない。今同時に観測可能なn個の観測を行なった結果，測定値の読みをx_1，x_2，…，x_nとすれば，これを座標にもつ点をこれに対応させることにより，観測結果はn次元ユークリッド空間の一点と考えられる。このn次元ユークリッド空間が観測空間を表現するものとなる。これに対して状態をその空間の一点として代表させ，物理現象の時間的変化をその空間の流れとして把握すべきところの場所を提供するものは，相空間である。この相空間を利用することによって，次のような構成が可能になる。すなわちある時刻t_0においてある状態に対応している相空間の点p_0があること，伝播の法則が与えられていること，この2つのことによって，あとの時刻tにおける状態に対応する相空間の点p_tが決定されていると考える。この対応こそは，数学的な因果関係というものの表明にほかならないのである。この数学的な因果関係は古典力学，統計力学，電磁力学，量子力学のすべてを通じて前提されている。たとえば，古典力学ではn個の位置とn個の運動量とを与えることにより，相空間の一点がきまり，伝播法則は Newton の引力逆自乗則であること

はいうまでもない。一般的にいうと，自由度nの体系は座標 q_1, q_2, …, q_n およびこれに共役な運動量 p_1, p_2, …, p_n よりなる $2n$ 個の正準変数により相空間の一点としてあらわされ，伝播法則は，ハミルトン－ヤコービの微分方程式で与えられる。このようにして古典力学は $2n$ 次元空間の領域としていいあらわされる。電磁力学では，電磁気ポテンシャルと静電気ポテンシャルの関数が知られて後初めて，相空間が指定され得るのであるから，電磁力学に対応する相空間は当然無限次元の関数空間である。古典統計力学の相空間に関しては，われわれはすでに説明しておいた。最後に量子力学では，これに対応する相空間の点というべきものは波動関数である。かくして量子力学に対応する相空間もまた関数空間であり，とくにヒルベルト空間として特徴づけられる。伝播の法則は，すなわちシュレーディンガーの波動方程式により与えられる。伝播の法則は古典力学では測度不変（保存）な変換群を規定するものであったが，量子力学ではユニタリー変換という性質をもつ。

観測空間と相空間の結びつけが次に問題になる。すなわち相空間の元および部分集合が，観測空間の元および部分集合，すなわち実験的命題とどのように関係づけられるかが問題なのである。古典力学系ではこれは容易にできるわけである。それは位置と速度（したがって運動量）を測定すれば，位相空間の部分集合と観測空間の部分集合との間には，一対一の対応がつく。そうして位置と運動量とは，古典力学の構成では，同時に測定可能な観測によって与えられる。しかし，気体論および電磁理論になると，このような簡単な手続きはないのである。

たとえば，古典統計力学の歴史において人間の認識の能力をこえるところのマクスウェルの魔物が登場してきたのは，このような事情を示すものである。量子力学においては，その対象が波動粒子の二重性のため，いわゆる不確定関係ということが状態の観測に関して見いだされる。すなわち，各同時に観測可能な物理量と，そうでない物理量とがあるわけである。このため量子力学の数学的構成は，同時に観測をなし得る物理量の組のとる値によって状態の記述が

与えられたとき，これと相補の関係にある他の物理量の組を観測すれば，いかなる値がいかなる確率で得られるかという問題に答えるように組み立てられなければならなくなる。第1に，物理量については観測によって得られる数値と，その確率分布とを与えるような形式を考えること，第2に，そうして物理系の状態自身には，これらの確率を与える客観的存在として，これをヒルベルト相空間の一点として定立する。この二点がその数学的構成上の要点である。

この量子力学と対比して初めて古典力学の論理が明瞭になるであろう。同時に観測し得られない測定という概念は古典力学にはなかったのであって，実験的命題と相空間における部分集合とが対応づけられる。という意味は，次のようである。a，b が相空間に属する部分集合であって，これらにはそれぞれ対応する実験的命題があるとする。すると a と b との和集合，共通集合ならびに補集合という相空間の部分集合に対しては，これに対応する実験的命題が存在し，命題の論理計算が集合算と同等であることを意味する。このようにして，実験的命題に対応する相空間の部分集合の集合系は，すでに第10章で述べた意味で集合体（field）をつくっている。しかしここに注意すべきことは，実験的命題としては，たとえばある瞬間ある落体の運動は$\sqrt{2}$ m/secの速度をもつというようなことは無意味であるから，実験的命題に対応するものは，相空間における任意の部分集合ではもとよりあり得ないわけであって，ある制限された部分集合の，たとえば，ルベグ可測集合体でなければならないであろう。

このようにして，古典力学における命題計算の論理代数は，Birkhoff のいうように，(a)完備なブール代数であり，(b)無制限な分配則を満足しないものであり，(c)範疇的な性質をもたないものであり，(d)かくして完全加法的な確率分布をもつものである。このことを説明することはここではできないけれども，つまるところそれは，第10章で説明したコルモゴーロフ確率論においてとった完全加法的集合族における集合算によって論理代数が表現されるということにほかならないのである。

4.　現段階における統計数学の論理構成

統計学の現段階を反省してその限界を自覚するのには，その構成論理の基礎をなす統計数学を検討しなければならない。ここに統計数学というのは，確率論といわゆる統計推理の数学理論を意味することにする。後者はネーマン-ピアソン以来 Wald 等までの最近の発達までをふくめてみても，つまるところ測度論的な確率論的な確率論の上にうち立てられたものであるのに変わりはない。したがって，ここで問題の論理構成ということは，けっきょくのところ測度論的な確率論における命題の論理計算の意義と性格とを明らかにすることである。このことはこの確率論に反映され，模写されている現在の統計的認識の世界がどのような理念により指導されているかを，同時に明らかにするものでなければならない。したがって，一方において抽象的に確率論における命題の論理代数を数学的に規定していくことは，他面において統計調査におけるわれわれの実践をその本質において把握してこれを反映するものでなければならない。

統計調査の企画，生産，解釈の各段階を通じて，われわれの実際に行なう操作に分類という操作があることはすでに述べたとおりである。分類という概念に対して，抽象的に半順序の概念を導入し，さらに束の概念にまでこれを限定しておいた。ところで分類の操作では，縦横の線を引いてマス目をつくり，統計資料を分類して，このマス目に分けて入れるという段階がある。具体的にそれを行なうものは，統計集計機の操作がそれである。この段階が統計的方法の初段階に必須であることは，第1章1節「ドイツ国勢学派」の項において述べたとおりである。われわれはこの操作の論理的意義をまず明らかにすべきであろう。そうしてこれに関して第 10 章の「確率空間の構成」で述べたところをここに思い起こすべきである。

たとえば2つの要因AおよびBについての分類操作を考える。Aの起こり得べき場合を，たとえば n_1 通り，Bの起こり得べき場合を n_2 通りとすると，

AとBとの起こり得べきあらゆる組み合わせは $n_1 \times n_2$ 通りであると考えられる。これを束論の用語でかくと，

$$\mathrm{I}=a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{n_1}=b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_{n_2}$$

$$a_i=a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \cdots \vee a_{in_2}$$

$$b_j=b_{j_1} \vee b_{j_2} \vee \cdots \vee b_{jn_1}$$

であると考えている。これがマス目の論理ともいうべきものである。詳細にこの内容を吟味していくと，分類の論理にこのことを要求するためには，次の公理が束の公理 L1—L4 のほかに加わっていなければならない。

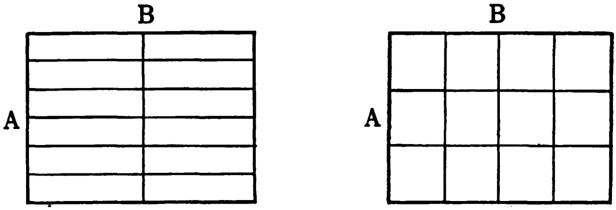
L5：$a \vee (b \wedge c)=(a \vee b) \wedge (a \vee c)$ および $a \wedge (b \vee c)=(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

この公理を命題計算の分配公理という。分配公理を満足する，すなわちＬ１—Ｌ４およびＬ５を満足する束を分配束という。

これは前節において与えたところの分配束の定義と同等のものである。分配束であるということは，古典力学の論理では確かに満足されている。直観論理においても満足されているといえる。けれども量子力学では，これを満足したいのである。分配束であるということが，すべての観測が同時観測可能という意味になるのであって，集合算の持つ特徴である。たとえばAの起こり得る場合が6通り，Bの起こり得る場合が4通りあるといえば，AとBとを組にしては 6×4=24 通りの細別が可能と考えるのが統計的認識の現状ではあるけれども，これも実は統計調査の今までの対象についてはこのようにみなしてきたというにとどまるのである。量子力学的対象については，AとBとが同時に観測し得られるものでないかぎり，これはいえない。ひとり量子力学的対象にかぎらず，およそ認識において対象と観測との間に交互作用が起こり，観測という人間の働きかけによって，対象に変化が起こる場合には，当然考慮されなければならない問題であるといわなければならない。社会現象においても，心理現象においても，われわれの観測においては，そういう交互作用を考慮するのがむしろ一般であるとさえいえるであろう。現在，統計調査といえば，あたかも学校の身体検査のように，身長，体重，胸囲，血沈等々数か所の測定所をまわ

ってきて，あとはその測定値を集めさえすればよいというわけであって，測定自身が対象に影響をおよぼしているとは考えていない。血沈速度をみるために血液が若干量とられたからといって，体重，身長，胸囲に影響があるとは考えない。しかし統計的調査の世界が段々に押し広められていき，計量化の問題が経済学や心理学において次第に進められていくにつれて，古典物理学における測定の概念をもって，統計的調査の計量を考えることは不適切な場面もあることは予想されるところであろう。現在行なわれている統計調査のうちでも対物調査でなく，たとえば世論調査のように質問者と回答者とがあって，質問自体が回答者に影響をおよぼすというような場面や，人間の知能検査におけるいろいろのテストの適用などの問題において立ち入って考えるならば，統計調査の基礎にある論理構成の変革自体も考えられないわけではないであろう。

統計的認識の段階を整理して，集団化，標識化，層別化，等質化，数量化，確率化といったのであるが，分類にあたるところ，すなわち類別化ともいうべきものを，われわれは層別化といったのである。とくに層別化という用語を用いたのは，このマス目の論理，すなわち分配則の適用をみとめるという意味をふくませたいと思ったからであり，これにより現在の統計認識の限界を明らかにしたかったからである。これに反し，類別化ということにはもう少し広い意味をもたせるようにしたいと考えたからである。マス目の論理は，分配則を比喩的に表現したもので，縦につくった格子があり，これと別に横につくった格子があれば，両者をいっしょにしてマス目がつくられ，縦の格子によって細分されると同時に，横の格子によって細分されたともみられる。そうして全体が個々の格子の組からなっているという，この細分と総合の関係を意味する。たとえば要因Aについて6通りあり，要因Bについて4通りあれば，マス目の論理では，6×4＝24 通りの場合に細別されて考えられるのである。しかし，ここにAの方を細分すればするほどBの方の細別は困難になり，細別してできる格子の数は 12 個をこえないという事情を想像するならば，この場合には，たとえば分類の様式は14－2図のようになるであろう。



14-2 図

最後に分配則が量子力学の命題では成立しないこともあり得べき例をあげておこう。これはノイマン－バーコフによるものである。今，波動束ψについてある程度の平面の一方の側での観測をaとし，この平面の他方の側での観測をb'とし，この平面に対称な位置での観測をbとすると，次のようにして分配則は成立しない。すなわちこの場合，

$$b\wedge(a\vee a')=b\wedge \mathrm{I}=b$$

他方

$$0=b\wedge a=b\wedge a'=(b\wedge a)\vee(b\wedge a')$$

であるから，

$$b\wedge(a\vee a')\neq(b\wedge a)\vee(b\wedge a')$$

第15章　統計学の将来

1.　統計学の発展

統計学の史的発展をたどり，その諸形態を分析してきたわれわれは，ここに統計学の将来の進路を予見し得ないであろうか。ここに進路というとき，それはおよそ3通りの意味があるであろう。それは統計的認識の対象として新たな分野が増加することが1つ。統計的認識の方法が新しい進歩を加えることが1つ。そうして統計的認識の効果が増大すること，すなわち実践への指導力をますことが1つ。なぜならば，他のすべての科学の場合と同様に，統計学においても対象，方法，実践の三方面が考えられるからである。

すでに述べたところから明らかなように，対象，方法，実践の三方面を通じての，統計学の進歩は，ときにはある科学の進歩により，ときには生産技術の進歩により，そしてときには経済社会の進展により，規定され方向づけられてきている。これらの進歩の要因を，統計学の基盤として指摘することを，われわれはいつも怠らなかった。そうして，比較的に，より抽象的な数学の進歩に動因をもつ方法の進歩——たとえばルベグ測度の導入——という場合にも，さらに突き進んでそれ自身の進歩の要因をもかえりみてきた。こうしてわれわれの突き止め得たことは，統計学の進歩が帰するところは，社会の生産関係に関連しているということであって，そうでない場合は見いだし得なかったことをわれわれは実証できたとしてよいであろう。しかしながら，ここに関連といってもただ関連の存在を突き止めるだけでは不充分であろう。関連の中間項が指摘され関連の機構が明らかにされ，関連の鎖につながるものの相対的重要度が指定されなければならないであろう。さらにこの関連の相互依存関係を明らか

にすべきであろう。すなわち統計学が社会の生産関係に規定されるとともに，社会の進展に統計学のはたしてきた役目が明らかにされなければならないであろう。統計学を規定するものとともに，統計学が規定するところのものが指摘されなければならないであろう。なぜならば，このようにして初めて，統計学の変革の原理が把握されるからである。

このためにわれわれは，一応分析的に対象，方法，実践の三方向にわけて考えることにしよう。統計学の進歩としては，統計的認識の目標として新たな研究対象を獲得することが1つであろう。それは在来の方法の単なる適用であったとしても，適用を可能にしたこと自身が，多くの進歩の成果であり，また要因となることを思わなければならない。統計学の進歩としては，統計学の効果が高まることがもちろんあげられるであろう。それは実践に対する指導力を強めることである。以上の二点，すなわち対象の拡充と実践指導力の向上に関しては，統計学はもっとも直接的に統計学の周辺と，それらの基盤とに関連せざるを得ないであろう。自由主義経済では不可能であったりあるいは無意味であった統計調査も，計画経済では可能であり必須であろう。電気集計機の発明によって初めて可能となった集計もあるから，ある種の統計は集計技術に制約されるといえる。またある方面の科学の進歩が数量化を可能にしたために統計学の援用が考慮されるという場合もあるであろう。小農経営から資本主義の大農経営となったために農事統計学が進歩したという事情もあるであろう。供出高が問題になるがゆえに，実収高や作付面積の統計が問題になり，供出を強制できる社会であるがゆえに，これらの統計もまた可能となるということもあるであろう。そうしてそれらはすべて統計学の対象の拡充であり，統計学の実践への進出であるという意味では進歩であろう。そうしてそれらはいうまでもなく，根源的な社会の生産関係に規定されているというべきであろう。しかし，統計自体の進歩といわれるものは，これらを媒介として，その方法を豊富にし，あるいは変革していくというところに結晶を見いだし得たものでなければならないのである。

この結晶の析出過程の分析が，われわれの当面の関心事でなければならない。この結晶には，素材が与えられなければならない。それは統計学に対しては外から与えられたものである。ある対象の統計的認識がいかなる精度において要求されるかは，統計学以外の世界から指定される。それは外から与えられなければならないが，しかして統計学というフラスコのなかで統計的認識の過程が分析されることが，今の場合必要なのである。われわれが一方において近代統計学の基盤が農事試験と大量生産とにあることを指摘したのは結晶の素料を示すものであったし，他方において近代統計学の方法を分析して近代確率論の公理および命題の論理計算にまで立ち入ったのは，近代統計学の結晶過程を分析するためであり，フラスコ内での作業であった。

統計学の将来をうかがうためにも，われわれはこの方法によるべきであろう。われわれはまず素料を集めてくる。そうして，これを統計学のフラスコに入れて，ながめてみるべきであろう。結晶はまだできていない。いかなる結晶になり行くであろうかが問題である。

統計学のフラスコは，しかし一定不変の固定したものでないところに，この比喩は注意を要するであろう。得られた結晶は，このフラスコに吸収されて，これを補強変質させるような意味をもち，容器は生長していくようなものでなければならない。

それでは，統計学の容器とは何であろうか。統計学は，たえず進歩してきた。人間の身体の細胞は，何年かの間にはすっかり入れかわるにしても，同一人という概念は可能である。統計学においてそれを規定づけるものは何であろうか。統計学の認識は，集団化，標識化，層別化，数量化と確率化にあるとしてわれわれはこれを規定した。だが，これらの概念を規定するのには，もとよりある程度の漠然性と多義性とをまぬがれなかった。およそそれはことばの世界において行なおうとするものであるかぎりまぬがれがたいところである。しかしこれらの概念自体は単に抽象的に与えられるものとみるべきではない。それはようするに，その時までにわれわれが実践しきたった統計調査および獲得

した統計的認識の全経験を背後にもって，これを反映したものにほかならないからである。それゆえ，具体的には，それは，統計調査，統計認識の各段階に応じて異なった様相をもつものなのである。このようにして，以上の概念の歴史性を明確にし，その発展性を認めるならば，過去の進歩がそうであったように，統計学将来の進歩はこれらの概念を原型として，これらの概念のいっそう深刻な規定，豊富な発展のうちに見いだされるといってよいであろう。その発展は，対象がこれを強制するのである。それゆえに，われわれは統計学の将来の発展の契機をふくむ対象を，統計学の現存のフラスコに入れて吟味することが必要になるであろう。本章の以下の所論は，若干のサンプルについて，それを試みたものにほかならない。

このような進歩の動因をあたえるものとして，統計学は現在多くの問題に取りかこまれている。心理学における統計的方法の適用などはその一例であろう。ここにおいても集団化から確率化まで以上の諸段階が考慮されなければならないであろう。しかしこの場合，たとえば標識化，数量化とはどのような意味であるか，心理現象のもつ特異性は，命題に関する論理計算の取り扱いにおいて，深刻な変革を要求するものではなかろうか。すでに量子力学における実験的命題の論理計算において，従来のブール代数による論理計算は否定されていることをここに思いあわすべきである。層別法という場合にも，それが前章の終わりに述べたように，論理計算が分配束を満足するものである場合とそうでない場合との区別は，充分に注意されなければならないであろう。分配束を満足する分類を意味する層別という概念は，統計学の現段階には適用できるであろうか。新たな研究対象は，その概念の拡充および変革を要求するであろう。それは，量子力学において状態の概念が物理量と明確に区別された事情，同時に観測不可能な観測の存在を承認せざるを得なかった事情を思い合わすべきであろう。また確率化というところにも，われわれは数量的に確からしさを表現するという考え方にかならずしもとらわれる必要もないであろう。このことも対象がこれを強制することであろう。

2. 経済学における統計的方法

経済学に関しては，経済統計学の計量について論じ，また社会統計の認識に関連しても，若干は述べてきた。しかしそれらは，経済学における統計的方法の現段階をいまだつくしていなかった。われわれは，それをここに論じるために残しておいたのである。

今日の経済学について指摘できる1つの特徴は，経済における統計的な，あるいは総体的な概念の把握であるといわれる。その1つの範例を，われわれはKeynes の経済学においてみるであろう。Walras, Pareto の経済理論が，自由主義経済における個人間の経済行為を抽象化し，理念化しようとした理論であるとみられるのに対して，Keynes の理論においてみられるいちじるしい特徴は，そのような個人の形成する経済社会の構造的な理解を前提とし，これを総体的に規定する巨視的な諸概念を前面に出していることである。国民所得という概念の理解もこのような理論的方法的基礎において把握されなければならない。このことは力学と対比して説明する方が適切であろう。Walras, Pareto 等の理論は質点の力学に対応する。彼らの理論では社会はこのような質点に対応する個人の集合であるが，経済現象を規定するものとしてとりあげられたのは，個々の経済単位が相互に関係し合う相互関係だけである。質点が，それ自身無内容な不可分的なもので，それには内部性といわれるものがないように，これらの経済単位個々の相互間を規定する関係以外に何も与えられていない。ニュートン力学を，質点間に逆自乗の法則が成り立つという外的関係に帰着させてみるように，限界効用の原理が経済単位間の関係を規定しつくしている。そうしてその結果としては，経済単位の存在する数だけそれだけ多くの変数をもち，したがって一般均衡理論では理論的には何万個かの未知数を含む連立方程式を研究の対象としなければならないことになるのである。この理論のもつ欠陥としては，第1に，経済単位の存在する場の概念がないことである。第2に，均衡のなりつくした姿において成り立つ等式を与えるにすぎないことであ

る。第3に，そのような方程式が事実上無限に多く，方程式系が理念的存在にとどまること，第4に，以上の理由により，この理論が実験されるような形式をもたないことがあげられるであろう。Walras や Pareto の賛美者も多いし，その先験的価値は大きいとして充分に認められるべきであろうが，経済理論としては，いまだ幼稚なものといわなければならない。

第1の欠陥に対しては，われわれのいわんとすることは，経済単位をこれの存在する経済社会の構造から離れて考えること自体を非難するわけではない。競争の理論や独占の理論におけるすぐれた展開は充分に高く評価されてよいであろう。しかしそれはあくまでも抽象であり，この抽象に対して，境界条件を入れて，適用範囲を具体化していかなければならない。個々の経済単位といっても，これには2つの見方があろう。1つは，これらの経済単位の若干だけを周囲から切り離して考える場合である。他の1つは，個々の経済単位は，あたかも気体論の分子のように，典型的に全体の経済単位を代表するものを考えることである。ところで，個々の経済単位若干個の組自体の行動を論ずる場合には，この対象と，これをふくむ場との間に，どこかの線において切断を入れなければならないであろう。その切断のなかだけにおいて当の経済単位の行動を追究するとき，切断の外からの作用は規定されず，与えられたものとして取り扱わなければならない。それは，当然経済単位の行動に対して不確定性を生ずるものであるといわなければならない。この不確定性の考慮のない抽象は，すでに現実への適用に関して最初から限界性をもつといわなければならない。しかしこの不確定性の世界に一旦はいりこまなければならなくなるとき，不完全な知識のもとにおける経済行為が対象とならなければならない。したがって，経済行為者がすべて最大利用や最大利潤を追求する目的をもつと同時に，この目的を実現するための方法について完全な知識をもつという前提がくつがえされる。次に，ある経済単位を孤立化させてみるのが目的でなく，そこに考えるところの個々の経済単位は，代表点としてこれをみるというのであれば，大なり小なりいっさいの影響が加わってくるのであって，このときには，経済単位

全体の構成する経済構造が規定されていなければならない。それはあたかも，液体であるか気体であるか固体であるかの規定のもとに，分子の集合状態ならびに各分子の運動状態を規定することによって，構造的に規定して出発する分子論的物性論の方法に類似して考えられなければならないであろう。経済理論の理想はここにあろうけれども，一足飛びにそこへいくには多くの困難があり，当然ふむべき途中の諸段階があるであろう。

第2の点に関しては，経済学の動学化の問題として取り扱われている。Pareto は Walras の仕事を Lagrange の解析力学の業績になぞらえてたたえたのではあるけれども，Walras の仕事は静力学であっても動力学にはたとえられないのである。それゆえにここに問題になるのは，経済現象のメカニズムを反映すべき運動方程式の設定ということであろう。これは，第6章でも少しふれたところであったが，ここにはきわめて多くの困難があるわけであって，この点に成功しないかぎり，統計力学的方法の援用には多くの困難のあるのはまぬがれがたいであろう。しかしこの困難の克服は，同時に多くのメカニズムの導入となるであろうし，微分方程式が物理現象に適合しているのに対して，定差方程式等の一般関数方程式の援用が当然考慮されなければならない。若干の経済単位を切り離してその間の関係だけをみようというときには，外部からの交互作用や与件には，不確定的な要素をふくむゆえ，それは，たとえば確率的な関数方程式ともいうべきものになるであろう。

第3の点に関しては，これを克服するのには，すでに述べた統計力学的な見地をとるか，あるいは，Walras, Pareto の方針をなげすて，分子論的な考え方をすてて，熱力学的に総体概念に依存するという方法をとるべきであろう。後者こそまずふむべき認識の順序であろう。巨視的理論といわれるものは正にこの段階に相当するものであったといえよう。巨視的な経済理論のこのいき方は，熱力学が統計力学に先行した歴史を思い合わすと，一面において科学の進むべき必然性をふくむものとも理解されるのである。熱力学との類比をここに強調するのは，次の点においても大切であろう。温度，エントロピーというの

は，総体概念である。これに対して，巨視的な経済理論では雇傭量とか有効需要とかいう総体的概念を規定し，これら相互関係を見いだすものである。ここに重要な点は，熱力学が熱機関による効率の問題から発生し，そうして人間がその効率を支配できる技術を獲得していたときにこの問題が起こったように，巨視的な経済理論は，これらの総体量のあるものを国家の政策により人為的に支配することが可能であり，あるいは必要となった段階において生まれたということである。たとえば国民所得という概念が単に，構成要素を貨幣価値において集計したものという形式的定義では不充分であって，記述的文法として理解されてはならない。ここに集計されるべき全体が実体概念として把握されていなければならない。これらはすべて現代の経済社会が大きな変革期に際会していることの必然の結果である。

そうして第4に，経済理論の実証性の問題に立ち入るとき，この問題は最も経済学と密接になってくるであろう。計量経済学は，すでに述べたように，統計理論と統計との結合とを目標にしておこったものである。従来の一般均衡理論との関係はともかくとして，特殊均衡理論を現実の統計資料の実証により把握しようという努力はあった。しかしながら，この道はけっして容易ではないであろう。経済学の諸概念のうちあるものは，それをいかにして実験と結び合わせるかを考慮することなく形成されている。測定できるものがすべてであり，それ以外に客観的実在をみとめないというような実証主義は，経済現象の分析において適切なものとはわれわれは思わない。測定されるものは断面であって，実在それ自身は客観的存在として定立されなければならない。もちろんそれは観測しつくされず，観測結果は，常に観測手段に依存する相対的なものであっても，それは仕方がないであろう。経済現象の計量においても，われわれは同時に観測し得ない経済量というものと同時に観測し得るものであろうし，一方を精密に測定することは，他方の不確実性をますという事情もまた考慮されるであろう。だが計量経済学の発達のためには，経済学における実験あるいは実証の意義を検討しなければならないであろう。その必要は同時にまた

可能性を前提とする。それは経済理論と政策との結びつきということなしには考えられないのである。しかも，この結びつきは，統計をもつことによって可能となるのである。理論，統計，政策の三者の相互依存性を明確にするとき，統計学の将来はこれを生む社会の基盤と直結せざるを得ない。

Walras, Pareto の一般均衡理論の形式を離れるとき，このようにして，各種の不確定性が登場してくるのである。この不確定性をどのように克服するか，そうして，それを統計理論といかに結びつけるか，これは将来の統計学の問題であろう。またこのような不確定性の伴う経済量の測定計画をあたえるところの調査の理論もまた，統計学を発展させる動因となるであろう。

Marshall から Pigou を経て Keynes にいたる線をたどるとき，均衡理論の発展としてその到達したところは，総体概念を中心課題とする点においてマルクス経済学と類似するということになるであろう。だが労働価値説を前提とするマルキシズムと Keynes の記述論とを，われわれは，明確に区別する必要があるであろう。

われわれは，次節においては予想の問題に関して直観確率，あるいは蓋然性の問題を論じ，4節においては，近ごろアメリカを中心に試みられたところの精密標本論の経済統計学への応用にふれたいと思う。

3. 蓋然性と予想の問題

Walras, Pareto 等にその典型をみるところのいわゆる近代経済理論が，個人の完全知識を前提とし，完全な合理性をもって行動するという構想の上に構成されるものであるかぎり，景気変動に関する諸問題をその体系内にとり入れることにおいてすでに多くの困難があったわけである。このために，経済学の動力学化の傾向が生じ，これに結びついて個人計画の反省が深められたのである。個人の計画は，多少の基礎と推定にもとづいて，予想を立てて行動する。しかし予想は，あくまで予想にとどまり，かならずしも事実と一致するとはかぎらない。予想の問題が起こるのは，第1にいわゆる経済外的与件に関して知

識の不完全にもよるし，第2に，経済均衡が成り立つまでのいわゆる模索過程までにもある。さらに第3に，個人相互間の関連性に深く関係している。F. H. Knight のいうように，予想にもとづく個人的計画では，意見は一種の蓋然的判断であって，それは推測であるが，しかしその蓋然性はかならずしも数学的な確率ではない。このような不確実性の伴う問題は，経済では，保険，投機，企業等の方向においてこれをみるであろう。

まず他との比較のため保険事業の場合について考えてみよう。保険事業は，第1章で述べたように統計学のあけぼの以来，人口統計に密接不離の関係にあるところ生命保険においてみられるように，確率論の重要な応用部門であったのである。保険の形態として，次のことが必要条件としてあげられるであろう。A，B両者の間に次のような契約が成り立つ。すなわちある不確定事象Eがあって，Eが起これば，AはBにある特定の金額Mを支払い，Eが起こらなければAはBに他の特定の金額Nを支払うということ，ならびにこの前提のもとでBはAに一定金額Pを支払うという契約関係がこれである。そしてこの契約の規定する経済行為においてAに当たるものが保険者，Bに当たるものが被保険者（損害保険の用語の意味）である。しかし，上述の条件は保険契約の一般形態を示すものではあるが，保険の本質はまだ尽くしていない。このために保険を預金，慈善，企業，賭博と比較してその類似と相違とをみるのがよいであろう。BがAにPを提出すれば，――MにしろNにしろ――とにかくある金額がBへ返ってくるという点では，預金と同一であるけれども，返却金額が一定しないこと，M，N≧Pが保証されていないこと，この二点においては預金あるいは貯蓄とは異なるのである。次に慈善と比較しよう。またBにとってはMは通常Pに比べて大きく，これに反してBにとってはN－Pは比較的苦痛を与えない。こういう利益がBに与えられること，しかもその利益がBの努力でなくしてAによって与えられるという意味で，AのBに対する慈善事業と類似する。しかし第1にPは0でないこと，第2に他種の資金に依存しないでMまたはNが支払われるべき関係になければならないこと，この二点により保険は

AのBに対する慈善とは異なる。企業と保険とを比べると，Pを投資して，ある金額を獲得するという性格はあるけれども，不確実事象Eそのものを B 自身が管理して，Bに有利にし向けるという可能性のないことと，起こり得べき結果のすべてに対して，ある金額がそれぞれ予定されているという点とにおいて，Bの行為は企業の一般概念と異なる。最後に賭博と保険を比較すると，BにとってMはPに比べて大きく，相当の利益があるとともに，N－P自体はたとえマイナスになっても，Bにとってそれほど苦痛でないという事情が保険にはなければならない。このことは，もしAとBとの両者間だけの協約についてみると，AとBとを対等において考えるかぎり，Aの位置とBの位置とを置き換えてもいい得るべきことでなければならない。したがってPはNに比べて相当大きく，P－M自身はたとえマイナスになってもAにとってそれほど苦痛でないという条件がつく。Aの要求する条件はBのそれと相矛盾する。このようにしてAとBとはその立場を置き換えできないものである。不確実事象Eの生起に伴うBへの支払いによる不利益を，Bとの契約以外になんらかの方法により，Aは保証されなければならない。しかも保険は上述のように慈善事象ではない。とすればこのことはいかにして可能であるかというと，不確実事象を集団的にまとめて取り扱うというところに生ずる。すなわち同一のAがある相異なる，B_1，B_2，…，B_n とそれぞれある相異なる不確定事象 E_1，E_2，…，E_n について契約するということによって得られる。Aが B_i へ支払う金額を X_i とすれば，E_i が起これば M_i，E_i が起こらなければ N_i であるから，これらの契約全体についてみれば $X_1+X_2+\cdots+X_n$ の取り得る値はいろいろである。その値の最大値は $M_1+M_2+\cdots+M_n$ であり，最小値は $N_1+N_2+\cdots+N_n$ である。保険が成立するためには，次の条件が必要である。(a) 各 B_i にとって M_i は P_i に比べて相当に大きくかつ N_i-P_i はマイナスになっても大して苦痛でないこと，(b) $X_1+X_2+\cdots+X_n$ が $P_1+P_2+\cdots+P_n$ を越えることが，きわめてまれであること。条件(a)は各 B_i を保険に加入させるための必要条件であり，条件(b)は保険Aをして保険事業を営ましめるための必要条件である。しかし

ながら，これだけの条件はいまだもって保険であることの充分条件ではない。富くじにおいてもこの条件は満足されている。たとえば1枚100円の富くじを2万枚発行し，180万円をくじに当たった者に分配するという事業は(a)，(b)の条件を満足している。保険であるためには，(c)保険にはいらなかったならば，E_i の出現は B_i にとっての不利益であるがゆえに，ここで払われる M_i はその補償をなし，E_i の出現しないことは B_i にとって不利益ではないから，E_i の出現しないこと自身により，B_i は少なくとも消極的に利益しているという条件が前提されているとみなければならない。この条件(c)のゆえに，富くじと保険とは区別される。

条件(b)に関しては，不確実事象，$E_1, E_2, \cdots, E_n$ を集団的にみる場合に，ある制約がつけられていることを意味する。それは今までのわれわれの所説から明らかなように，たとえばストカスティックであるということが1つの充分条件を形成する。Aの立場からみるならば，これらの不確実事象に対して，集団化が必要である。標識は死亡，火災，傷害等それぞれおおよそは与えられているとはいえ，故意による発生等を除外するための契約が必要であるから，その意味でたとえば死亡，火災，傷害等の定義を明らかにする標識化が必要であり，また層別化も必要である。それは不確実事象の生起について，突き止められる要因によって，被保険者各層に分けることである。年齢別，性別，契約期間等によって保険料 P_i を計算するのは，この操作を意味する。このようにして，等質化が行なわれる。特殊の弱体をさけるのも等質化のためといえる。同一分類欄にはいったところの E_i に対しては，これらの生起が M_i，N_i，P_i という三数量によりわれわれの意味で数量化される。この段階にいたってそれが確率化されたものと見なし得るためには，なお条件が必要である。なぜならば，B_i はAからなんらかの無作為化法をほどこしてえられるものでなくして，B_i はAへの申込者のなかからAによって選択されたものであるからである。このようにして B_i に関しての問題になる不確定事象 E_i が，すでに設けた分類欄の一項として確率化の前提を満足するか否かが，契約成立のための必要条件とな

る。それはそれとして，ともかく保険率計算のための actuary の操作が集団化から確率化へ対応しているのは，この方式が不確実事象の確率化を意味するにほかならないことによるわけである。確率化された部分集団における生起の確率は，一般には既存の他の統計資料により推定される。これを利用して，上述の (b) を満足するように組織立てるのが，actuary の本来の任務である。

保険契約における上述の層別法は，統計的知識を利用するために必須の前提であって，これは，危険率の算定は同種の危険にさらされる物件を集めて行なうというように表現されているのが普通であり，これを算域の分割ともいう。しかし保険料率の公平を期するために算域の分割を徹底し，いわゆる料率の個別化を主張する個別算域主義（individual valuation）は，集団現象を対象にする保険事業では，その限界がある。なぜならば分割が極端になるに従い，各部分集団にはいるべき事象の数は少数となり，したがってこの部分集団に関する予想の推定値が安定性を欠くことになるからである。保険事象は，不確実事象を集団として取り扱うがゆえに成立するのであるから，要因による分割による等質化と，統計係数の安定性との２つの要求がある。

ともあれ，保険事業の成立するのは，以上のようにして，次の条件 (d) が満足されなければならない。すなわち E_1, $E_2, \cdots$, E_n を等質部分集団の幾組かに分け，そして各性質部分集団において各不確実現象の生起が確率現象とみられるにいたり，しかもその確率が客観的に推定されるということが前提になるのである。このようにして，E_1, $E_2, \cdots$, E_n の生起の確率 p_1, $p_2, \cdots$, p_n が推定されることになり，$X_1+X_2+\cdots+X_n$ の平均値をして，

$$\{p_1M_1+(1-p_1)N_1\}+\{p_2M_2+(1-p_2)N_2\}$$
$$+\cdots+\{p_nM_n+(1-p_n)N_n\}$$

をもつことになるのである。この値を $P_1+P_2+\cdots+P_n$ に等しくとるようにするというのが収支全等の原則である。

ところが，これは平均値の総和を保険料の総和に等しくとるというだけであって，$X_1+X_2+\cdots+X_n$ はときに $P_1+P_2+\cdots+P_n$ を越えることもあるが，と

きには下まわることもあり，保険者が甚大な損害をこうむることもあるわけであって，保険者がこの危険から保証されないかぎり，保険事業としては成立しない。このためには危険率 α を与え，$X_1+X_2+\cdots+X_n$ がある金額 G を越える確率がこの α 以下にとどまるような金額Gを求める。このGに対して $G=P_1+P_2+\cdots+P_n$ が成り立つようにするということが要求される。他方Gが $X_1+X_2+\cdots+X_n$ の平均値を越えることが大きくなればなるほど，明らかにそれだけますます被保険者側に対する過大な負担を意味するのであって，不公平である。この困難を克服するのには，加入者の数を多くし，確率事象としての $E_1, E_2, \cdots, E_n$ の独立化をはかり，さらに各 X_i の $X_1+X_2+\cdots+X_n$ における相対的重要度をなるべく均等にする等の処置をとるのである。これらはいわば保険成立のための充分条件であるが，必要条件ではない。詳細は数学的危険論にゆずらなければならない。

われわれは保険についてややくわしく考察してきたが，このようにして保険化し得ない不確定事象についての予想にもとづいて，重要な経済行為が行なわれるのが現実の姿である。保険者Aと被保険者 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ がことごとく同一の経済主体に一致したとすれば，以上述べたことは (a), (b), (c), (d) ないし (e) の条件のもとでは，同一経済主体が自己に対して不確定事象 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ についての自己保険を行なうことにほかならない。しかし利子，賃銀，地代などをふくめて将来の価格組織の時系列についての予想，将来の需要関係についての予想等においては，一般にはこれらの条件が満足されていない。それゆえに，自己保険ができない。そこに資本主義経済の特質があらわれてくる。しかし以上の条件が満足されないばかりではない。たとえば価格に関しての予想自身が能動的に価格に作用して，将来の価格に対して引き上げ引き下げの作用をおよぼし得るのであるし，また現実の世界が不確実なるがゆえに，Walras, Pareto 等の経済理論の前提するように，労働，資本等がすべて使用し尽くされるというには，現実と一致しないものである。予想の働き得る経済秩序は常に動揺常なき姿であって，予想とその結果との間にいわゆる「プラス，マイナ

ス」の体系をたどるのである。Keynes がこの点を鋭くついて完全雇傭の条件をとりはずしたのは，現実への一層高次の近接であったわけである。

ラプラスの古典確率論，コルモゴーロフの測度論，ミーゼスの頻度説，そのどれにあっても，確率はこれを規定する公理こそ異なれ，いずれもとにかく数値として規定されてきた。以上のような不確定事象とこれに関する予想の様相とを省察するならば，かならずしも数量化されない確からしさという概念をわれわれはもつことがわかるし，これらを対象にする理論の必要も感ずるであろう。経済学に予想の作用を導入するとき，その予想の作用は，従来の確率論で取り扱えるような確からしさではない，とみるべきである。かならずしも数値化できないような確からしさの理論を考察したのが，近年においてほかならぬ J.M. Keynes その人である。A Treatise on Probability (1921 年) にそれが展開されている。Keynes は，probability ということばをそのまま用いた。Keynes の思想を数学的に厳密に形式化したものとみられるのは Koopman の直観確率 (intuitive probability) の説である。訳語の確率は数値的なものに限定して使用することにし，ケーンズ－コープマンの説を蓋然性の理論ということにしよう。

以下 Keynes の理論の特徴ともいうべきものをあげてみよう。

在来の論理学が命題の真偽いずれかである命題の論理を主として取り扱ってきたのに対して，Keynes の理論では蓋然性をもつ命題の論理を取り扱うものであるともいえる。それは Keynes のことばによれば，logic of implication から logic of probability への移行であり，真偽の範疇から，知識，無知ならびに分理的な信頼の範疇への向上である。この蓋然性をもつ命題の間の論理的関係を明らかにすることが，Keynes の理論の目標とするところであるともいえる。これが Keynes の理論の 1 つの特徴である。

Keynes の理論の第 2 の特徴というのは，事象の確からしさということを避けて命題の確からしさを問題にし，しかもある命題の確からしさとは，ある特定の命題が前提されてのみ意味があるとするところである。ある命題 a の確か

らしさというとき，人はそれの前提を予想するものであって，ただaが確からしいとか不確かであるということは意味がない。“aは等しい”とか“aはより大である”というような命題がそれ自身無意味であって，それぞれ何に等しいか，何より大かを規定する立言でなければならないと同様である。このようにしてある命題aの確からしさを問題にするときには，必ず前提hを指定してあるものとする。命題hが真なりと前提されている場合の，命題aの確からしさを a/h で表わす。

Keynes の理論の第3の特徴は，蓋然性はかならずしも数量化されるものでないということ，そして数量化はされないが半順序はもつということである。まず前半について説明しよう。命題hが真であるという前提のもとにおける命題aの蓋然性を a/h と書くとき，これが数量的に表わされるものと思ってはいけない。Keynesは多くの実例をあげていう。まず保険業者の立場からいえば，保険料があり得べき危険を超過すればことはたりるともいえる。すなわち，個個の不確定事象はかならずしもその確率の数値が与えられる必要があるわけではない，その蓋然性が数値化されなくともよい，ただ次のような事情があれば充分である。a/h の方が b/g より，より蓋然性があるというのを，$a/h>b/g$ と書くことにすると，当面の不確定事象 a/h に対して上記のような b/g，あるいは $c/k>a/h$ となるような c/kがあって，b/g または c/k か数値的な確率がわかっているというだけでことはたりるのであろう。このことは統計への確率論の応用について，将来の発展の余地が残されていることを示すものである。なぜならば，統計的調査において，あるいは統計推理においてわれわれの問題にするのは，多くは危険率の数値そのものでなくして，それらのあり得べき限界だからである。してみれば，危険率という数値自身は問題でないのみならず，危険率という数値の存在自身も必要ではないともいえるからである。

損害賠償に関する裁判において，この種の例はきわめて多いといわなければならない。Times Law Reports に次のような実例がある。競馬のウマの飼養者から契約破棄の損害賠償の訴訟があった。被告の所有した競馬ウマ Cyllene

は，1909 年に原告の雌ウマと交尾させる契約であった。ところが 1908 年夏，被告は原告の同意なしに Cyllene を 3 万ドルで南アメリカへ売ってしまった。これに対して原告は，Cyellne によってサービスされることによって，1 匹の雌ウマをもつことにより過去 4 年間に得たであろう利益平均金額を要求するというのである。すなわちこの 4 年間に 4 匹の子ウマを得て，3,300 ポンドで売ったとして，700 ギニーを要求する，という。判事 Telf 氏は被告の訴えを法律的に正当づけようとして考えた。しかし損害の問題となると打ち勝ちがたい困難がある。原告の要求し得るものは，利益を推定してそれが失われたからという賠償であってよいものか。ところがこの推定は，多くの事柄の上に立っている。第 1 に Cyllene が死んでは話にならない。生きていても病気ではいけない。健全であっても，子ウマができなければならない。子ウマははらんでも早産してはいけない。生まれた子ウマが元気に育っていかなければならない等等，かぞえ上げていくときりも限りもない。しかもその 1 つ 1 つが確実だともいえないではないか。判事Telf 氏はこのように考えて，原告に払うべきものは名目的な損害だけと判決した。その金額 1 シリングであったという。

Daily Express 紙で美人懸賞があった。6,000 枚の写真のなかから 1 枚を選ぶのである。イギリスの各地方において，その地方に住む候補者の写真を，その地方の読者へ見せて，投票によって選ぶ。このようにして 50 名の第 1 次候補者を選んだが，Hicks 氏はこれら 50 名の女性と会見することを約束し，かつこのうちから懸賞をもらうべき 12 名をさらに選ぶということになっていた。ところがある地方から首位で選ばれた某女史に対して，何かの都合で，この約束を守るべき責任ある機会が与えられなかった。このためこの女性は受賞者 12 名内の 1 人となるべき機会を失った。それゆえ損害賠償を要求するという訴訟事件が起こったのである。これに対して被告側では，いろいろ抗弁した。6,000 人のなかからの 1 人として考えよという意見は法廷の同情をひかなかった。50 人のなかの 1 人であることということは前提されなければならない。ある地方で第 1 位であったということも当然考慮されなければならない。

しかしさればといって，これを数量的にいかに表わすかはできないことであろう。ことに判定を下すHicks氏の個人的嗜好ということになると，計量化はむずかしい。けっきょくのところ，Lord Justice の態度は次のようになった。よしそれでは，粗雑な裁判をしよう。証拠のうちのあるものはこれを不問に付して事件を簡単化しよう，というのである。こう態度がきまればあとは簡単であって，平均の原理（doctrine of averages）を用いて損害を計算するのみである。すなわち賞金の 12/50 が，自信あるところの不運なこの女史に支払われることになった。

数量化し得ない蓋然性はほかに幾らもその例をあげることができるであろう。帰納法において，新しい positive な一例を加えることは，命題の一般性を確かにたかめている。しかしその確からしさは数値で表わされるものであろうか。ある事柄は他の事柄より，より確かとはいえても，2倍確かであるというようなことはいえないのが多い。散歩に出かけたとして，生きて帰宅する確率はどれほどであるか，落雷に出会ったとせよ，この確率は減じているであろう，その量はいくらであろうか，これらの数値は与えられないけれども，雷雨の下で散歩することは危険として避けるのである。

次に第2の点に移ろう。単にかならずしも数量的でないというだけではなんら建設的なものをもたない。そこで Keynes の理論は，建設的な構想としては，蓋然性に半順序性を仮定するものである。Keynes の問題にする a/h の蓋然性を α, β, γ 等であらわすとき，これらを数であるとは仮定しないのは上述のとおりである。しかしそれのみではない。任意の2つの α, β が常に比較可能であるとも考えないのである。α が β よりもより確かであるということを，$\alpha\geqq\beta$ と書くことにすると，$\alpha\geqq\beta$ とも，$\beta\geqq\alpha$ ともいえない場合も許されなければならない。しかし $\geqq$ で規定されるものは，前章の束論の用語をもってすれば，半順序の公理は満足するものとして規定する。これが現在の数学の用語をもって表現される Keynes の蓋然性に与えた積極的な要請である。ここに真をあらわすにⅠ，偽をあらわすに0をもってすれば，すべての蓋然性は

$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満足することが当然要請される。

Keynes 理論の第4の特徴としてあげられるべきことは，無差別性の原理を根本原理にとることである。無理由の理由 (The Principle of Non-Sufficient Reason) をもって確率論を立てようとするとき，多くの困難に会い，論理的な矛盾にさえおち入る例も多くあげられている。それにもかかわらず，Keynes の蓋然性の理論では，これを精細に規定することによって改造して，全理論の基礎にとろうとするものである。Keynes によってこのように改良されたこの原理を，彼の用語に従い無差別性の原理(Principle of Indifference) と呼ぶのがよいであろう。この原理の主張しようとするところは，在来理解されるところによれば，本来次のことである。ある若干個の対立的な命題に対して，そのうちのどの命題も他のいずれの命題に対しても，より確からしいとする既知の理由がないとき，これらの対立的諸命題は同様に確からしいというのである。

この無差別性原理を無批判的に確率論にとり入れる場合，多くの矛盾を生ずる。このことの多くの例が確率論の教科書にしばしば引用されているのは周知のとおりである。しかしこれに関して Keynes は，従来の例を一々検討している。Keynes の再批判を概括して，われわれは次の2つの論点に帰するものとみてよいであろう。第1の論点として，かならずしも数値となり得ない蓋然性を，従来の確率論は積極的理由なしに，または無理に数量化しようとしていること。第2の論点として，従来例示された背理は無知の事情のもとにおいて論ずるとして，矛盾結果を導き出して背理におちいるとしたのであるが，実は多くの知識をそこに密輸入しているから矛盾となるというのである。たとえば，ある命題 a は真であるか偽であるかである。ところが，今 a の真実性について既知の理由というものがないとしよう。すると，a とその否定 a' とのおのおのの確率は 1/2 であるというのは，第1の論点に当たる例である。ある本の表紙の色がわからない。“その本は赤い”“その本は黒い”“その本は青である”という3つの命題のいずれも確率 1/2 である。ところが相互に相いれない3つの確率の和が1をこえるのはおかしいというのは，第2の論点に当たる例であ

る。なぜなら，数量化してないものを数量化していると同時に，無知とはいいながら，相異なる三色が同一書籍の表紙の色ではあり得ない，という知識を用いているからである。無差別原理の適用にみられる背理は，幾何学的確率論にもあれば，ベイズの定理の適用にもみられる。これらはいずれも確率論の伝来の問題として，将来においてもなお反省の余地をもつというべきであろうが，Keynes の指摘する上述の 2 つの論点は，たしかに，これらの伝来の問題に関する無差別原理の適用の背理を救うにたる場合も，ないとはいえないであろう。それはともあれ，Keynes は無差別原理の復活を企図するものである。このとき Keynes のとった方針は，蓋然性の理論は，常にある前提のもとにおけるある命題の蓋然性を問題にするものであって，推論の形式的規則に関してこの原理をより精細に規定するのが任務であることを，明確に認識して出発する。そうして，そのような形式的な規則に関するかぎり，蓋然性にも客観的な妥当性をもつものがあると考えるのである。ここに Keynes 等の理論の公理選定の根拠があるとみられよう。Keynes は無差別の形式に 2 通りの場合があることに着眼する。同一の前提 h に対して，2 つの相異なる命題 x および y があって，両者の蓋然性が同等である。すなわち $x/h=y/h$ という場合が 1 つである。相異なる 2 つの前提に対して，同一命題の蓋然性が同等である。すなわち $x/h=x/h_1h=x/h_1$ という場合がもう 1 つである。ここに h_1h は前提 h と h_1 とがともに成り立つという前提を示すことにする。第 1 の場合の判断を選択性（preferrence）の判断といい，第 2 の場合の判断を適切性（relevance）の判断という。第 1 の場合の等式 $x/h=y/h$ は，両者が無差別である。第 2 の等式 $x/h=x/hh_1$ の成り立つとき，h_1 は x/h に対して不適切であるという。単に選択性の判断だけからは，建設的なものは生まれてこないので，無差別原則にこの適切性の観点を与えたところに Keynes の理論の重要な特徴があるのである。従来 a/h という蓋然性について，ただ a の方の分析にとらわれていたが，前提の分析に着眼したものといえるであろう。このようにして，Keynes の蓋然性の理論で取り扱う蓋然性の比較は，

(i) ab/h と a/h との比較，　(ii) a/hh と a/h との比較

という二種類の型がある。

このような蓋然性の比較にあたって，さらに種々の公理を導入する必要がある。また普通の確率との関連を明らかにする道程も用意されていなければならないであろう。しかしそれらは比較的にいって，数学技術的なことであるともいえるから，Keynes の根本思想は上記の4特徴に要約されているとみてよろしいであろう。Keynes の理論の数学技術的方面に関しては，相当の不明確さがないとはいえない。われわれは，この点に関しては Keynes の思想を数学的に厳密に表明するところの公理を形式化している Koopman の論文をみればよいであろう。(O. Koopman, The Axioms and Algebra of Intuitive Probability, Annals of Math. 41, 1940年)

a/h をあたかも数のように，あるいは少なくとも種々の演算を許すものとして取り扱って論じている Keynes に対して，Koopman はブール代数における剰余類としてけっきょく規定したものである。また Keynes と Koopman とにあっては，取り扱う命題の論理的型が相異なるものというべきである。また a, b, k, h 等の命題を，contingency といい，a/b, b/k 等をeventuality という。Koopman は contingencies の命題計算の論理にはブール代数の成り立つものと前提している。以上の了解のもとに，Koopman がいわゆる直観論理としてあげるところのものは，次のようであった(a の否定を a' で示す)。

V. 自証性の公理 (Axiom of Verified Contingency) $a/b \prec k/k$

I. 包含性の公理 (Axiom of Implication) $a/h \succ k/k$ ならば $h \subset a$

R. 反射性の公理 (Axiom of Reflexivity) $a/h \prec a/h$

T. 移動性の公理 (Axiom of Transitisity) $a/h \prec b/k$ にしてかつ $b/k \prec c/l$ ならば，$a/h \prec c/l$

A. 反対称性の公理 (Axiom of Antisymmetry) $a/h \prec b/k$ ならば $a'/h \succ b'/k$

C. 結合性の公理 (Axiom of Composition) $a_1b_1h_1 \neq 0$ にしてかつ

$a_2b_2h_2 \neq 0$ とする。このとき，

C₁. $a_1/h_1 \prec a_2/h_2$ にしてかつ $b_1/a_1h_1 \prec b_2/a_2h_2$ ならば，$a_1b_1/h_2 \prec a_2b_2/h_2$

C₂. $a_1/h_1 \prec b_2/a_2h_2$ にしてかつ $b_1/a_1h_1 \prec a_2/b_2$ ならば，$a_1b_1/h_1 \prec a_2b_2/h_2$

D．分解性の公理（Axiom of Decomposition）$a_1b_1h_1 \neq 0$，$a_2b_2h_2 \neq 0$ にしてかつ $a_1b_1/h_1 \prec a_2b_2/h_2$ とする。このとき，(i) a_1/h_1 あるいは b_1/a_1h_1 のいずれか1つが，(ii) a_2/h_2 あるいは b_2/a_2h_2 のいずれかに対して $\succ$ なる関係をもつならば，(i) の残りの1つは (ii) の残りの1つに対して $\prec$ なる関係をもつ。

P．対立前提の公理（Axiom of Alternative Presumption）$a/bh \prec r/s$ でありかつ $a/b'h \prec r/s$ であるならば $a/h \prec r/s$。

S．細分性の公理（Axiom of Subdivision）任意の n に対して，$a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ が次の関係をもつとする。

(1°)　$a_i \wedge a_j = b_i \wedge b_j = 0$　$(i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n)$

(2°)　$a = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \cdots \vee a_n \neq 0$

(3°)　$b = b_1 \vee b_2 \vee b_3 \cdots \vee b_n \neq 0$

(4°)　$a_1/a < a_2/a < \cdots < a_n/a$

(5°)　$b_1/b < b_2/b < \cdots < b_n/b$

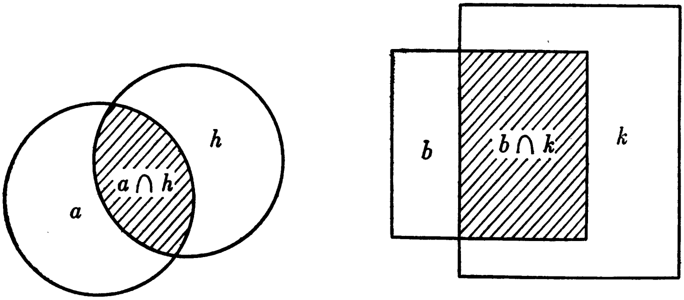
このときには $a_1/a < b_n/b$

以上9個の公理をもってKoopman は直観確率の公理とした。このうちとくにA, D, Sがこみ入っている。これらを理解する1つの直観的な方法は，平面図形の集合算にして論理計算をあらわすことである。たとえば $a/h < b/k$ という命題があれば，領域 a に対する領域 $a \wedge h$ の面積よりも領域 b に対する領域，$b \wedge k$ の面積比が多いというような解釈をつければよいであろう（15-1図）。

とくに，公理Sを理解するのには数値に関する次の定理に注意するのが理解をたすけるであろう。すなわち，

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$$



15—1図

$$0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots \leqq b_n$$

とすれば，必ず $a_1 \leqq b_n$ であり，$b_1 \leqq a_n$ である。

4. 計量経済学と実験統計学的方法

経済学における統計学的方法に関しては，第2節の所論のほかに，なお取り上げるべきものを残しておいた。それは，計量経済学に対して，近代統計学の方法を適用しようとする，最近の学界の一動向に関連する。第二次大戦中アメリカでは，大量生産の管理に，諸種の実験計画に，そうして社会的経済的な調査計画に，近代統計学的方法の顕著な応用がみられた。すでに述べたように，たとえば，大量生産管理においては，諸種の抜き取り検査方式，なかんずく，sequential test がこのようにしてうまれ，run の理論のいちじるしい発展もみられた。統計学的調査においても，真に画期的な進歩がみられていることもすでに少し述べたとおりである。

しかしなお1つ，今まで触れなかったことがあった。それが，これから問題にしようとする計量経済学への近代統計学的方法の応用ということである。われわれは，Trygve Haavelmo の総合報告 The Probability Approach in Econometrics, Econometrica, Vo. 12 (Supplement), 1944 年によって，その主張を聞くことができる。それについての批判といわれる結論をまずいうならば，充分には展開されていないのみならず，なお根本的な問題において，多

くの批判されるべき余地をもつ。われわれは既存の統計理論の応用による成功よりも，むしろ計量経済学が基盤になって生み出すべき新たな統計理論の新局面の展開に，より多くの期待をもちたいと思うのである。

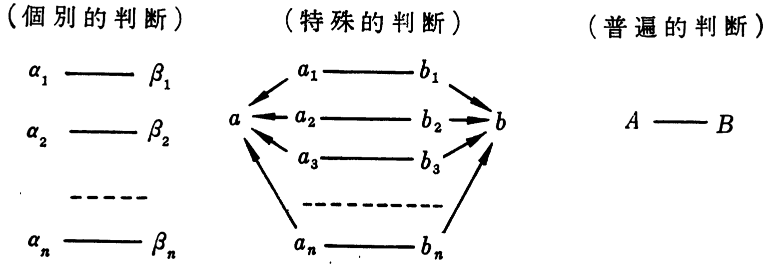
近代統計学の方法は，本質的には，実験の論理の上に立つものである。したがってこの方法の適用を意図しようとするかぎり，計量経済学における実験の概念の確立が前提されなければならないし，したがって同時に，実験されるべき仮説という概念が前提されなければならない。それは当然，従来の経済学の方法論的意義を根本的に再吟味することを要求するものとなるであろう。ここにおいて，われわれは，経済学における実験のあり得べき意義のみならず，経済学における観察，実証，帰納の意義を反省しなければならないであろう。Haavelmo の所説をきく前に，この点に関するわれわれの用意が必要である。

科学のもつべき 1 つの性格は実証性ということである。現実の対象に対して理論は常に抽象化され，理想化されたモデルであるけれども，モデルとしての経済理論が意味をもつのは，経済理論の演繹するところの定言が，現実の対象においてこれに対応するものに関して成り立たなければならない。理論と現実とが双方から出てきて対決するところが，実験である。対決において，課題は理論から提出され，判決は実験がこれを決定する。その課題がすなわち仮説である。仮説は理論から演繹される命題である点においては理論体系に属する。しかし他方，現実によって判決され得べき命題でなければならないという性格によって限定された特殊の命題である。理論は課題としての仮説の作成者であるという指導性をもつけれども，仮説のこの性格によってその指導性は制約されている。これに対して現実は，判決を与えるという点において理論よりも優位にあるけれども，その判決が帰無仮説の検定にとどまるという点において制約をもつ。すなわち，仮説は，これが現実と矛盾することによって棄却（否定）されるけれども，現実との合致は，論理的には，これの採択を意味するものではない。理論と現実との対立は，果たし合いのような対立ではなく，一面対立であるとともに，一面協力であるのはいうまでもない。しかし，両者

を一応対立させてみるとき，実験と類似しているが，実験のもつ性格のうち若干をかくところの，広く実証とよばれるものが，観察と実験との間に介在していることを知るであろう。

この配置図において，一方の極限にいわゆる精密実験があり，他方の極限に純粋に受動的な観察がある。そうして，この両者の中間には種々の段階の実験ないし観察があるであろう。近代統計学の意味するところの実験もまたその1つであり，われわれはこれを統計的実験とでもいうべきであろう。その具体的な様相についてはすでに第4編においてこれを示した。それから帰結されることは次のようであろう。統計的実験は，観察である。しかし純粋に受動的な観察とは異なって，集団化，標識化，層別化，等質化，あるいはさらに数量化の諸操作過程の前提のもとに整理された資料についての観察である。統計的実験は実験である。なぜならばそれは仮説の検定を行なうからである。しかし精密実験とは異なって，確率化の操作を通じてのみ，仮説の検定の基準をもつ点において，理念的にはこれに依存しないところの精密実験とは異なるものである。精密実験でいう実験対象は，具体的普遍であって，1つの個物ではあるが同時に普遍者を代表する。これに比較して，統計的実験でいう統計は，以上の諸操作を経てはいるが，なお純粋ではない。

実証がこのように配列されているのに対して，認識の論理的段階がこれとどのような対応にあるかが当然考察される必要があるであろう。ここに採用されるべきものは Hegel の判断論ではなかろうか。個別，特殊，普遍の三段階の



15－2図

説がそれである。今個別的判断における命題「α は β である」を，α—β と標記し，同様に特殊的判断を a—b，普遍的判断をA—Bで示そう。われわれは，これを15－2図のように理解してよいのではなかろうか。

個別的判断は，現実に与えられた命題であり，認識は，ただこれらの命題の受動的集積にとどまる。これが現象論的段階といわれるものである。そしてそれは観察の立場に相当する。特殊的判断においては，各 α_i $(i=1,2,\cdots,n)$ に対して，ある a が存在しておって，α_i は a の特殊の場合であるという関係になる。ここにおいては，α_i は a の特殊相として a_i に転化している。個別的判断より特殊的判断への向上は，このような a の存在が前提となる。とすれば，ここに a は何であるかといえば，それは $a_1, a_2, \cdots, a_n$ となるところの一般者である。しかし，それ以外の a_j に関していまだ何も主張し得ない。すなわち個別的判断において原型 α_i をもつところの a_i に関しての総合しか意味しないのであって，その包含関係は，現実に与えられたものに限定されているという意味でなお現象論的である。しかし a において総合している点において個別的判断と異なるのである。このことはひとり $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ に関してのみならず，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ に関しても問題であり，15－2図の途中に段階として，α か β かのいずれか一方に関してのみ，個別より特殊への上昇が行なわれることもあろう。普遍的判断A—Bにおいては，a からAへ，同様に b からBへの上昇が問題である。Aは $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ をその特殊の場合としてふくむことは a と同じである。しかし，Aは a と異なって，なおそれ以外の個別をふくみ得るのであって，Aは a のように $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の集合和ではない。Bの b に対する関係も同様である。特殊的判断から，普遍的判断へいたる途中には，それゆえ，およそ次の過程が介在しているとみられるであろう。すなわちそれは a—b という認識である。そうして，それを経てA—Bにいたるのである。A—Bは a—b と異なり，まだ現実にあらわれない個別についての主張をふくむゆえ，それは枚挙的帰納法によって得られたものではない。Aは現実には $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ともなったが，それはなおそれ以外の a でもあり得る。理論と実践との見地から

もこの認識の段階を反省する必要があるであろう。認識の目標は，つまるところ実践の最もよき指針を得ることである。いっさいの抽象，いっさいの観察，いっさいの実験，そしていっさいの統計も，帰するところはそこであり，そこにいたるための手段であると考えられる。

普遍的認識はどのようにして可能になるであろうか。それは枚挙的帰納法のような完全性をもつ論理には依存し得ない。ここにもし普遍的認識の整合性だけを問題にするならば，普遍的概念A, Bを適切に定義することにより，AよりBへの演繹を導き出すという概念設定の問題ともみられよう。しかしもしも，さらに普遍的認識の実証性を問題にするならば，第1に，実験によって検証され得る性格をもつこと，第2に，事実実験に訴えた場合否定されないこと，この2点が必須の要請となる。命題A—Bの任意の個別相a—bはこの2つの必要条件を満足しなければならない。第1の条件は，Aの任意の個別相aの現実化を少なくとも原理的には可能であると前提してのみ意味があることに注意されなければならない。

精密実験とは，A—Bを検証するに当たって，代表者として個別相a—bをもって，これをはたし得るとするものである。しかるに，Aの個別相としてのaは，実はA自身には規定されていない種々の付随条件に対する限定を事実意味するものである。そうして，これらの付随条件がA—Bなる命題に対して非本質的な条件であるとみるというところに，すでに仮定がはいっていることが注意されなければならない。しかし，この仮定はいかにして是認されるのであろうか。第7章「実験の計画」，第12章「実験統計学の方法」において，変量分析法として，要因実験配列法として，われわれが紹介したところの近代統計学の問題にするところは，まさにこの点に出発したといってよいであろう。物理学，化学のいわゆる精密実験のように，他因子の影響からの独立性が保証されていない場合には，いわゆる精密実験にのみ依頼し得ないのであって，観察から精密実験にいたる道程として，統計的実験という段階を通らなければならない。またある段階においては，この統計的実験にとどまらざるをえないので

ある。

統計的実験の必要はそれゆえ認められなければならないが，しからば，統計的実験とは精密実験にいたろうとして，諸種の攪乱的因子にさまたげられ，そこに到達し得ない場合の，やむを得ない手段，いわば亜流的な実験という意味に解すべきであろうか。しかしそう解釈することは正当ではない。人間の認識の目標が現実に対処し，これを変革するところの実践の指針を得ることにあるとするかぎり，その解釈は正当ではない。実践は常に与えられた現実を対象とする。それは，人間が現実の対象からしりぞいてつくった普遍的概念のそのままの姿ではない。現実は無限に多くの要因の錯雑した無限の多様性をもつ。この現実の姿において，すなわち多くの複合要因の作用する場において．特定の要因の作用を分析することが必要であり，そこに要因実験配列法の思想のあることはすでに第12章で詳述したとおりである。

以上の一般的考察の後に，今問題とするところの経済学の実験という問題に立ちかえるならば，そこにおける実験とは統計的実験が中心課題となることが当然予想されるところであろう。しかも統計的実験が予想されるということ自身がさらに多くのことを前提としている。すなわちそれは，第1に，統計的観察の可能性すなわち資料収集の可能性を，第2に，経済学的命題が統計的概念として検定されるべき可能性を，第3に，ある範囲における実験条件の任意設定の可能性を，そうして第4に，経済現象に対する人類のある程度までの支配の可能性を，前提している。実験統計学的方法の計量経済学への応用は，この前提の上に立つものである。第1の条件として，近代における経済統計の大きな集積をあげ得るであろう。第2の条件として，すでに述べたように総体概念が経済学の通用語となった現状を指摘し得るであろう。第3の条件および第4の条件としては，理論の政策化といういちじるしい特徴にみられるように，経済計画あるいは経済統制の可能性と必要性とが前提になっている。これらを総括していうならば，実験統計学的方法の計量経済学への導入は，経済計画あるいは経済統制の可能性と必要性とを理解することによってのみ理解され得るも

のといえるのである。統計学の将来の発展の重大な契機は，経済計画の進行に伴うものであろう。

われわれは Haavelmo の論著を紹介する前に多くのページを費やしたが，しかし，これだけの準備は必要であると思うのである。Haavelmo においては，これらの基盤にふれて論じるところは少ないけれども，基盤を無視しての経済学説は考えられないのである。

Haavelmo のこの論著は全6章からなり，そのうち最初の2章は計量経済学を実験統計学と結びつけるために，経済理論とその実証可能性とを論じたものであり，理論的には本論文の立場を明らかにしたものである。第3章は，確率関数方程式として経済現象の相互関係を規定するところの提案である。この形式化を前提とすることによってのみ第4章以下の議論は成り立つ。Haavelmo は，この前提の上に立って，第4章「仮説検定論」，第5章「推定論」，第6章「予想の問題」を述べているのである。

Haavelmo に関する全面的な批判は，われわれの側において次の用意を必要とするであろう。それは歴史的社会的存在に対する認識論についての一般的見地をどのように位置づけるかということである。それは，機会を改めてこれを論じたいと思う。

ここでは次のことを指摘するにとどめる。

まず第1に，歴史的・社会的存在のもつ二面性ともいうべきものが問題である。それは1つには主体的見地からの歴史形成作用の面とともに，2つには第2の自然ともいわれ，社会的自然ともいわれるその法則性の問題である。主体性と法則性との問題を徹底的に究明することなしには，数学の応用は皮相なものとならざるを得ない。

第2には，すでに述べたように，実験の概念をこの分野において確立することである。それは未開拓の，進むに困難な広野であり，そこにおける開拓は，やがてそれ自身，経済学と統計学との両者の発展をともに意味するものになるであろう。

第3には，理論図式ともいわれるべきものの新たな創造が要求されはしないであろうか。経済学に関してはすでに説明した。数学的形式としては，一方において確率論的形式であるとともに，他方において過程としての把握を可能ならしめるものでなければならない。今，計量経済学者の間で，確率関数方程式の研究および応用が盛んであるのは，いわばそのあらわれである。しかし構造分析的には，なお私は，これのみにはあきたらない感じをもっている。熱力学の諸法則を統計力学的に基礎づけるような見方なり問題なりがあるわけで，individual と aggregate との関連を論じなければならない。Klein 等最近の研究はこの方向を示唆しているが，これに対して，さらに論究が必要であろう。

推測統計学のたどった地点は，自然科学といわず，社会科学といわず，それらに共有されるべき1つの前進基地を用意しつつあるわけで，とくに経済学との結びつきにおいて，さらに1つの新発足が日程にのぼりつつあるというべきであろう。

参考文献その他

本書を著述するに当たって，著者がとくに参考にした著書のうち主要なもののみをあげる。

第 1 編

〔1〕 Harald Westergaard : Contributions to the History of Statistics, 1932. (ウェスターゴード著，森谷喜一郎訳『統計学史』栗田書店 1943年)

〔2〕 I. Todohunter : A History of the Mathematical Theory of Probability (from the time of Pascal to that of Laplace), 1931.

〔3〕 高野岩三郎校閲，大原社会問題研究所編『統計学古典選集』全13巻，(栗田書店，第一出版 1941～49年)

John Graunt: Natural and Political Observations Mentioned in Following index and made upon the Bills of Mortality, 1662. (グラント著，久留間鮫造訳『死亡表に関する自然的及政治的考察』統計学古典選集・第3巻 1941年)

William Petty: Political Arithmetik, 1667. (ペッティー著，大内兵衛訳『政治算術』統計学古典選集・第4巻 1941年)

Lambert Adolphe Jacques Quetelet: Sur la Statistique, dans "Lettres à S. A. R. le Duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques, 1846. (ケトレー著，高野岩三郎訳『道徳的・政治的諸科学へ応用された確率理論についての書簡』統計学古典選集・第5巻 1942年)

Gustav Schmoller : Über die Resultate der Bevölkerungs-und Moral-Statistik, 1871. (シュモラー著，大内兵衛訳『人口統計及道徳統計の結果に

就て』統計学古典選集・第8巻 1943年）

Wilhelm Lexis: Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft, 1877.（レキシス著，久留間鮫造訳『人間社会に於ける大量現象の理論に就て』統計学古典選集・第9巻 1943年）

〔4〕 高野岩三郎著『社会統計学史研究』第一出版（1942年）

〔5〕 Lambert Adolphe Jacques Quetelet, Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale, 1835.（ケトレー著，平貞蔵，山村喬訳『人間に就いて』岩波文庫 上巻，1939年；下巻，1940年）

〔6〕 Pierre-Simon Marquis de Laplace: Théorie analytique des probabilités, 1812.

第2編

〔7〕 Karl Pearson: The Grammer of Science, 1896.（ピアソン著，平林初之輔訳『科学概論』春秋社 1930年）

〔8〕 Walter A. Shewhart: Statistical method from the viewpoint of quality control, 1939.（坂本平八監訳『品質管理の基礎概念』岩波書店 1960年）

〔9〕 Emil Borel: Le Hasaard, 1937.（ボレル著，矢野健太郎訳『偶然論』岩波書店 1942年）

第3編以後

〔10〕 Ronald Aylmer Fisher: Statistical Methods for Research Workers, 1936.（遠藤健児，鍋谷清治訳『統計的方法』荘文社 1950年）

〔11〕 Ronald Aylmer Fisher: The Design of Experiments, 1935.（遠藤健児，鍋谷清治訳『実験計画法』1951年）

〔12〕 A. Kolmogorov: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1933.

〔13〕 Richard von Mises: Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik, I Band: Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1931.

〔14〕 John Maynard Keynes: A Treatise on Probability, 1921.

〔15〕 Garrett Birkhoff: Lattice Theory, 1940.

なお Biometrika, Journal of the Royal Statistical Association, Journal of the American Statistical Association 等の所載諸論文におうところが多い。

またわが国の一般的な教科書としての次の著述は，本書を読まれる場合の参考にあげておく。

有沢広己『統計学要論』(上)，明善社 (1949年)

伏見康治『確率論及統計論』(1943年)

伊藤清『確率論の基礎』岩波書店 (1944年)

増山元三郎『少数例のまとめ方』Ⅰ，Ⅱ，竹内書店 (1964年)

森田優三『統計学汎論』日本評論社 (1943年)

成実清松『数理統計学』 (1934年)

蜷川虎三『統計学概論』岩波全書 (1943年)

佐藤良一郎『数理統計学』培風館 (1949年)

末綱恕一『確率論』岩波全書 (1949年)

術語の点に関しては，多くの場合，統計科学研究会の試案としてかつて私たちが作成に関係した用語集に準拠はしたが，二，三の点では，平素の習慣とか書く場合と話す場合の相違とかいうことのため，一般的でない用語もあったかと思われる。たとえば Random というのも，逢機的，無作為的，等確的，射倖的等種々の訳語があるようである。終わりの2つの訳語はとにかくとして，逢機，無作為もまだ適切でないところがある。Randomization という場合には，逢機化，無作為化のほかに確率化という訳が適当な場合もある。

(1947 年 10 月記)

なお本書の初版には，その当時比較的手にはいりやすい良書があったので，十数種を巻末に記載し，読者が本書を読むときの参考にされるように希望した。それから早くも 20 年余になろうとしている。そこにあげた著述のほとんどは今日容易に手にはいらないようである。一方，この 20 年間に数多くの著述が統計学関係では刊行されている。すでに定評のある教科書類も多いことである。一々これをあげるまでもないかと思うほどである。

本書を読んでいただいた読者は，著者がどのような著述をし，それが本書とどんな関係にあるかを知りたいと思われるかもしれない。本書は著者にとって初めての著述であったので，そうした関係のものは1冊もあげていないからである。こうした読者の役に立てばと思い，これについて紹介しよう。

1） 北川敏男『推測統計学』I，II，岩波全書（1958年）

これは大学初年級の教科書として，まとめたものである。本書に引きつづき読まれるもよし，あるいはこの教科書のIを学ばれるときに本書を参考にしていただくのもよい。

2） 北川敏男，稲葉三男共著『統計学通論』共立出版社

上記の岩波全書よりも手にはいりやすい。大学初年級で広く用いられているようである。

著者には教科書としての著述は今のところこの2つしかない。これらが統計学に関する基本的知識をうち立てるのに役立てば幸いである。

本書の読者のうち，ある方たちは，本書に展開された思想がその後著者じしんによって，どのような方向に多少なりとも発展したかという点に興味をいだかれるかもしれない。著者は，その後約 10 年にわたって推測過程論というものの展開に努力した。それが制御過程論と早くから結びつき，そしてやがて著者をして，計画数学へ，さらに情報科学へと，研究をすすめる出発点となったように，自分じしんには思われる。

この推測過程論については，10編近くの拙論文があるが，これは多くは英文で専門誌にあり，一般の読者に向かないので，いずれ成書においてとりまとめ

たいと思いながら，多忙であっていまだに実現しない。現在比較的手にはいりやすいものとしては，次の4つの書物を参照していただくほかはない。

3）北川敏男『推測過程論』岩波講座「現代応用数学」14（1958年）

4）北川敏男『実験計画法講義』Ⅰ，Ⅱ，培風館（1956～1957年）

5）中山伊知郎編『現代統計学大辞典』東洋経済社（1962年）のなかの次の2編がある。

Ⅰ　拙著：推測統計（19—20ページ）

Ⅱ　拙著：1.4 推測過程論（223—233ページ）

著者が 1960 年ごろ，その当時までの研究を整理したものに，次の文献(6)がある。ここでは，本書にあらわには示されてない観点への前進があるといえるかもしれない。文献（7）は推測過程論とともに密接な関連において展開される制御過程論に関するものである。

著者自身の1960年代の歩みは，しかし（5）において到達したところに止まりえなかった。文献（8）から（12）まではその歩みである。これらが(13)におよんで情報科学に接続するのである。その思想は（15），（16）で解説してある。（8）から（12）までについては既成書にしていない。他日を期するほかはない。これらすべての出発点となったのは本書である。

7) Kitagawa, T.: The logical aspects of successive processes of statistical inferences and controls, Bull. Intern. Stat. Institute 38 (1961), 151—164.

8) Kitagawa, T.: Successive process of statistical controls (1) Mem Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 7 (1950), 13—26; (2) loc. cit. 13 (1959) 1—16; (3) loc. cit 14 (1960) 1—33.

9) Kitagawa, T.: A mathematical formulation of evolutionary operation programs, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 15 (1961), 27—71.

10) Kitagawa, T.: Estimation after preliminary test of signficance,

Univ. California Publication in Statistics, 3, No. 4, 147 (1963), 147—186

11) Kitagawa, T.: Automatically Controlled sequence of statistical procedures in data analysis, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 17 (1963) 106—129.

12) Kitagawa, T.: Relativistic logic of mutual specification in statistics, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 17 (1963) 76—105.

13) Kitagawa, T.: Automatically controlled sequence of statistical procedures, Bernoulli-Bayes-Laplace Anniversary Volume, Proc. Intern. Research Seminar, Statistical Lab. Univ. California (1963), Springer-Verlag (1965), 146—178.

14) Kitagawa, T.: Information Science and itsconnection with statistics, The 5th Berkeley Symposium on Theory of Probability, Mathematical Statistics and their Applications, 1965, Berkeley (1967), 491—530.

15) 北川敏男『サイバネティックスの創建——ウィーナーの辿りし道』共立出版：情報科学講座，ＡＩ—１，情報科学への道（1966年）

16) 北川敏男『組織と情報』ＮＨＫ現代科学講座５，日本放送出版協会（1966年）

17) 北川敏男『情報科学の構想』共立出版：情報科学講座，ＡＩ—２，情報科学の動向，Ｉ，第１章（1968年）

18) 北川敏男『ソ連におけるサイバネティックス』共立出版：情報科学講座，ＡＩ—３，情報科学の動向，II，（1968年）

（1968年３月）

著　者　記

索　　引

人 名 索 引

事 項 索 引

L

M

N

Z

■ 著者略歴 ■

北川敏男／きたがわ としお

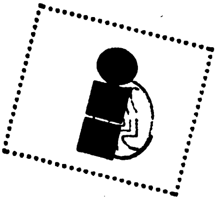
1909年北海道小樽市に生まれる。1934年東京大学理学部数学科卒業。同年大阪大学助手，1939年九州大学理学部助教授，1943年同学教授となり現在に至る。1953年デミング賞を受け，1956年国際統計協会正会員に推され，1957年カルカッタ大学名誉理学博士を授けられる。1951年以来，日本学術会議会員に選出されること６回。1961年より1967年まで九州大学付属図書館長。理学博士。

専攻：統計学，計画数学，情報学。

著書：「新編統計数値表」（増山元三郎と共著）「実験計画要因配置表」（三留三千男と共著）「実験計画法講義，Ⅰ，Ⅱ」「ポアソン分布表」（以上培風館）「推測統計学，Ⅰ，Ⅱ」「推測過程論」（現代応用数学講座，以上岩波書店）「品質管理入門」（日本評論新社）「組織と情報」（現代科学講座，NHKブックス）「情報科学への道」「確率過程論」「マルコフ過程論」「学習制御と学習制御機械」「学習理論・学習解析」等（情報科学講座編集，共立出版）その他。

新版 統計学の認識

■ 1948. 12. 5 第1版第1刷発行 ©
■ 1969. 5. 15 第2版第2刷発行



■ 著　者／北川敏男
■ 発行者／中村　浩
■ 印刷所／奥村印刷株式会社
■ 製本所／株式会社関山製本社
■ 発行所／株式会社 白揚社
東京都千代田区二番町3番地 郵便番号 102
電話 (03) 262—3825〜6　振替 東京 25400
■ 定　価 1800円

科学一般

人間はどこまで機械か　J.Z.ヤング著／岡本彰祐訳　¥ 650
脳と意識の生理学

科学入門　J.サマヴィル著／市井三郎訳　¥ 560
科学の方法と歴史

自然と生命のパレード　J.H.ストアラー著／浦本昌紀訳　¥ 580
生態学入門

電子工業史　W.R.マクローリン著／山崎俊雄他訳　¥ 1200
無線の発明と技術革新

超心理の世界　ベー・エス・マトベーエフ著／馬上義太郎訳　¥ 560
心の神秘

催眠・心霊・タナトロギー　エリ・ワシリエフ著／秋田義夫訳　¥ 480
超心理の探究

サイバネティックス入門　A.M.コンドラトフ著／秋田義夫訳　¥ 560
数と思考の工学と将来

20世紀の天文学〈全3巻〉　O.ストゥルベ他著／小尾信彌他訳　各¥ 980
①太陽と太陽系　②星の世界　③銀河系と宇宙

パズル・ピクチュア　H.ラクリス著／金子　務訳　¥ 750
目で見る科学入門

人間は死ななくなる　ア・エリ・シュワルツ著／秋田義夫訳　¥ 480
医学の最前線

100万人の相対性理論　M.ガードナー著／金子　務訳　¥ 580
特殊・一般相対性理論から宇宙モデルまで

面白い化学の世界　L.ブラーソフ他著／小林茂樹訳　¥ 560
あなたも化学に強くなれる

ウィリアムズのゲーム理論入門　J.D.ウィリアムズ著／竹内　啓他訳　¥ 1300
経営・人生ゲームの戦略と応用

ミクロ宇宙の探検　H.E.ダックワース著／市場泰男訳　¥ 560
現代物理学入門

サイボーグ　D.S.ハラシー著／桜井靖久訳　¥ 560
未来人間をつくる科学

（送料　各50円）

動物・探検記

シンバ　M.ジョンソン著／藤原英司訳　¥320
百獣の王国・タンガニカへ

ソロモンの花嫁　O.ジョンソン著／藤原英司訳　¥320
人食い土人との生活記

私は冒険と結婚した　O.ジョンソン著／藤原英司訳　¥320

密林奇談　E.J.コーベット著／藤原英司訳　¥320
クマオンの人食い虎

愛の動物記〈上・下〉　B.チャプリーナ著／馬上義太郎訳　上¥280　下¥250
ソビエト動物園動物記

野生動物の楽園　エス・スクレビツキー著／馬上義太郎訳　¥320
北国の動物の数々

うそとほんとの動物記　O.P.ブレランド著／岡田　耕訳　¥560
あなたの知らない動物200話

タイピー　H.メルヴィル著／本多喜久夫訳　¥290
南太平洋の愛と恐怖

日本の野鳥　池田真次郎著　¥480
鳥の生態とハンターガイド

動物の不思議な知恵　イゴリ・アキムシキン著／秋田義夫訳　¥580
動物の本能と生態

野性の遺産　サリー・キャリガー著／藤原　栄訳　¥680
動物の不思議な生態と行動