2018年6月15日　統計数理研究所　オープンハウス

正規性に基づく飛躍型拡散過程の推定

上原　悠槙　　リスク解析戦略研究センター　特任研究員

1. 設定, 目的

■ 飛躍型拡散過程

$$dX_t = \underbrace{a(X_t,\alpha)dt + b(X_t,\beta)dw_t}_{\text{連続部分}} + \underbrace{c(X_{t-})dN_t}_{\text{不連続(ジャンプ)部分}}$$

- **観測:** $(X_{t_j^n})_{j=1}^n, t_j^n = jh_n, T_n := nh_n \to \infty, nh_n^2 \to 0$
- **確率過程:** w_t :標準 Wiener 過程, N_t : 複合ポアソン過程
- **推定対象:** $(\alpha,\beta) \in \Theta$

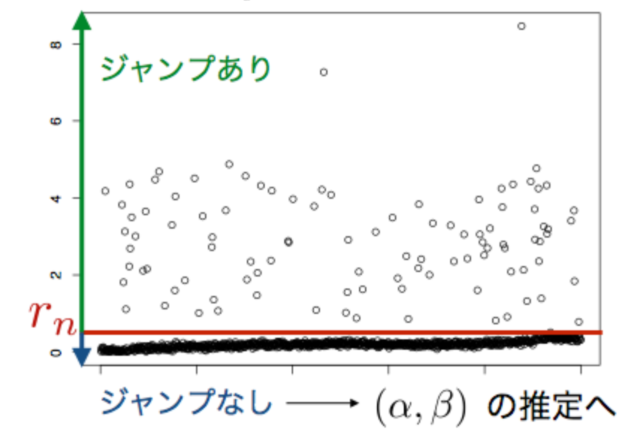
$N \equiv 0$ ⇨	正規型疑似最尤推定により (α,β) を推定可能
$N \not\equiv 0$ ⇨	**ジャンプ(非正規挙動)を考慮した推定手法が必須**

■ 先行研究

閾値推定法 [SY06]

1. 閾値パラメータ r_n を定める
2. $|X_{t_j^n} - X_{t_{j-1}^n}| < r_n$ を満たすデータのみを用いて (α,β) を正規型疑似最尤推定

増分 $\{\Delta_j X\}_{j=1}^n$ の大きさのプロット



問題点: 有限標本のパフォーマンスが r_n に依存, その選択が困難

■ 目的

閾値パラメータの調整を要さない (α,β) の推定方法の提案

2. 提案手法: 繰り返し Jarque-Bera 正規性検定

■ 飛躍型拡散過程に関する Jarque-Bera 検定 [M13]:

$$\underbrace{H_0 : N_{T_n} \equiv 0.}_{\text{ジャンプなし}} \text{ v.s. } \underbrace{H_1 : N_{T_n} \not\equiv 0.}_{\text{少なくとも一つジャンプあり}}$$

$$\epsilon_j(\theta) := \frac{\Delta_j X}{\sqrt{h_n} b_{j-1}(\beta)}, \bar{\bar{\epsilon}}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \epsilon_j(\hat{\beta}_n), \quad \hat{S}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (\epsilon_j(\hat{\beta}_n) - \bar{\bar{\epsilon}}_n)^2,$$

$$\hat{N}_i := \hat{S}_n^{-1/2}(\epsilon_i(\hat{\theta}_n) - \bar{\bar{\epsilon}}_n), \ f_{j-1}(\theta) := f(X_{t_{j-1}}, \theta).$$

定理 ([M13], Theorem 3.1, Theorem 4.1)

$$\mathrm{JB}_n := \frac{1}{6n}\left(\sum_{j=1}^n \hat{N}_j^3 - 3\sqrt{h_n}\sum_{j=1}^n \partial_x b_{j-1}(\hat{\beta}_n)\right)^2 + \frac{1}{24n}\left(\sum_{j=1}^n (\hat{N}_j^4 - 3)\right)^2 \xrightarrow[H_0]{\mathcal{L}} \chi^2(2)$$

$$\mathrm{JB}_n := \frac{1}{6n}\left(\sum_{j=1}^n \hat{N}_j^3 - 3\sqrt{h_n}\sum_{j=1}^n \partial_x b_{j-1}(\hat{\beta}_n)\right)^2 + \frac{1}{24n}\left(\sum_{j=1}^n (\hat{N}_j^4 - 3)\right)^2 \xrightarrow[H_1]{\mathcal{L}} \infty$$

☑ 提案手法: 繰り返し Jarque-Bera 正規性検定

$\{(X_{j-1}, \Delta_j X)\}_{j=1}^n \mapsto \hat{\theta}_n := (\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n), \ \hat{\mathcal{J}}_n$: ジャンプ検出集合

$\{(X_{j-1}, \Delta_j X)\}_{j \notin \hat{\mathcal{J}}_n}$

$\mathcal{H}_0$: 受容 → $\{(X_{j-1}, \Delta_j X)\}_{j \notin \hat{\mathcal{J}}_n} \mapsto \hat{\theta}_n^\star$

$\mathcal{H}_0$: 棄却 → $j^\star := \underset{j \notin \hat{\mathcal{J}}_n}{\mathrm{argmax}} |\Delta_j X|$ を $\hat{\mathcal{J}}_n$ に追加

☑ 推定量の漸近挙動

統計モデル

$$dX_t = \sum_{l=1}^{p_\alpha} \alpha^{(l)} a^{(l)}(X_t)dt + \sqrt{\sum_{k=1}^{p_\beta} \beta^{(k)} b^{(k)}(X_t)} dw_t + c(X_{t-})dN_t,$$

を考える. この時, 適当な条件の下, 推定量

$$\hat{\beta}_n^\star := \underset{\beta}{\mathrm{argmin}} \sum_{j \notin \hat{\mathcal{J}}_n} \left\{ (\Delta_j X)^2 - h_n \sum_{k=1}^{p_\beta} \beta^{(k)} b_{j-1}^{(k)} \right\}^2$$

$$\hat{\alpha}_n^\star := \underset{\alpha}{\mathrm{argmin}} \sum_{j \notin \hat{\mathcal{J}}_n} \frac{(\Delta_j X - h_n \sum_{l=1}^{p_\alpha} \alpha^{(l)} a_{j-1}^{(l)})^2}{\sum_{k=1}^{p_\beta} \hat{\beta}_n^{\star(k)} b_{j-1}^{(k)}}$$

はそれぞれ, $\sqrt{n}, \sqrt{T_n}-$ consistency を持つ. すなわち,

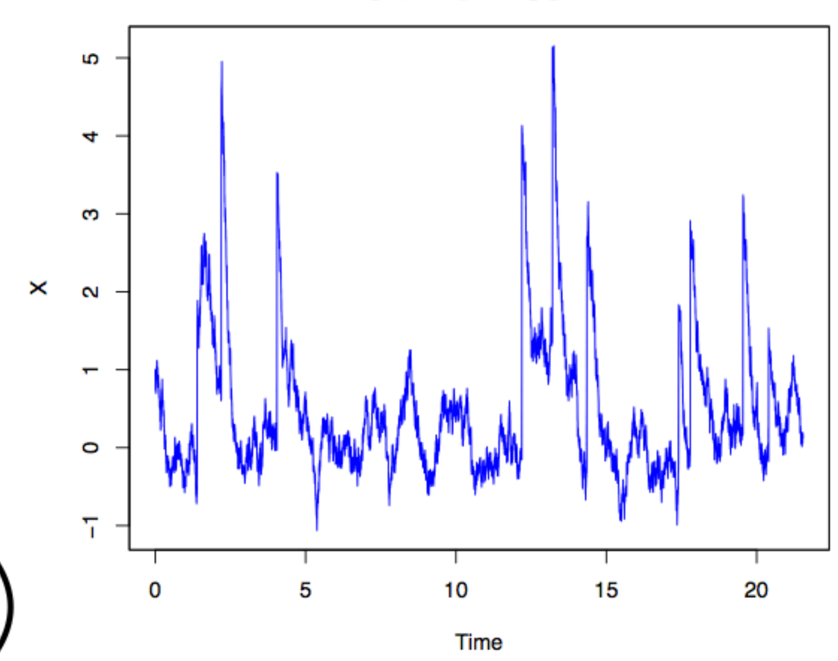
$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \quad \text{s.t.}$$
$$P\left(\left|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n^\star - \beta_0)\right| \vee \left|\sqrt{T_n}(\hat{\alpha}_n^\star - \alpha_0)\right| > M \right) < \epsilon.$$

3. 数値実験

■ **モデル:** $dX_t = -3X_t dt + \beta_1(1 + X_t^2)^{\beta_2} dw_t + dN_t.$

■ **設定:** $n = 10^4, h_n = n^{-2/3}, q = 10^{-3}, \sharp\mathrm{MC} = 10^3,$
$\sharp\text{jump times} = 20, \ \text{jump law} = U(0.2, 5),$
$\text{true values} : \beta_{1,0} = 1, \ \beta_{2,0} = 0.3.$

標本路



☑ **推定結果:**

ジャンプ抽出による推定精度の向上

		beta1	beta2
ジャンプ抽出前	mean	3.02	0.03
	sd	(0.37)	(0.13)
ジャンプ抽出後	mean	1.00	0.30
	sd	(0.01)	(0.01)

4. まとめ, 今後の課題

まとめ

正規性検定に基づく閾値パラメータの調整を要さない新たな飛躍型拡散過程の推定方法を提案

- ■ 数値実験によりその精度を確認

今後の課題

- ■ 一般のモデルに対する推定量の漸近挙動の解明
- ■ 統計解析ソフト R 上への実装

参考文献

[M13]: H. Masuda. Asymptotics for functionals of self-normalized residuals of discretely observed stochastic processes. *Stochastic Process. Appl.*, 123(7):2752–2778, 2013.

[SY06]: Y. Shimizu and N. Yoshida. Estimation of parameters for diffusion processes with jumps from discrete observations. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 9(3):227–277, 2006.