

# 動的システムの最適制御アルゴリズムとその応用

豊田 充 統計思考院 特任助教

## はじめに

微分方程式で表現される動的システムを制御対象として、設定した評価関数を最大化あるいは最小化するような制御入力的设计を考えます。

$$\begin{aligned} & \underset{u \in \mathcal{U}}{\text{minimize}} && J(u), \\ & J(u) = && \int_0^T l(t, x(t), u(t)) dt + h(x(T)), \\ & \text{subject to} && \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0. \end{aligned}$$

- $x$ : 状態変数,  $u$ : 制御入力,  $\mathcal{U}$ は許容制御入力の集合
- $T$ : 固定された終端時刻
- $J(u)$ : 評価関数, これを小さく/大きくする
- $l(t, x, u)$ : ステージコスト関数,  $h(x(T))$ : 終端コスト関数

多くの工学的問題では解析解は求まらないため、数値計算アルゴリズムによって、離散的な制御入力の系列を求めることを検討します。この問題に対する計算法としては、

- 動的計画法を適用し離散時間ベルマン方程式を計算する方法
- 最大原理により得られる2点境界値問題を計算する方法
- 非線形最適化の手法を適用する方法

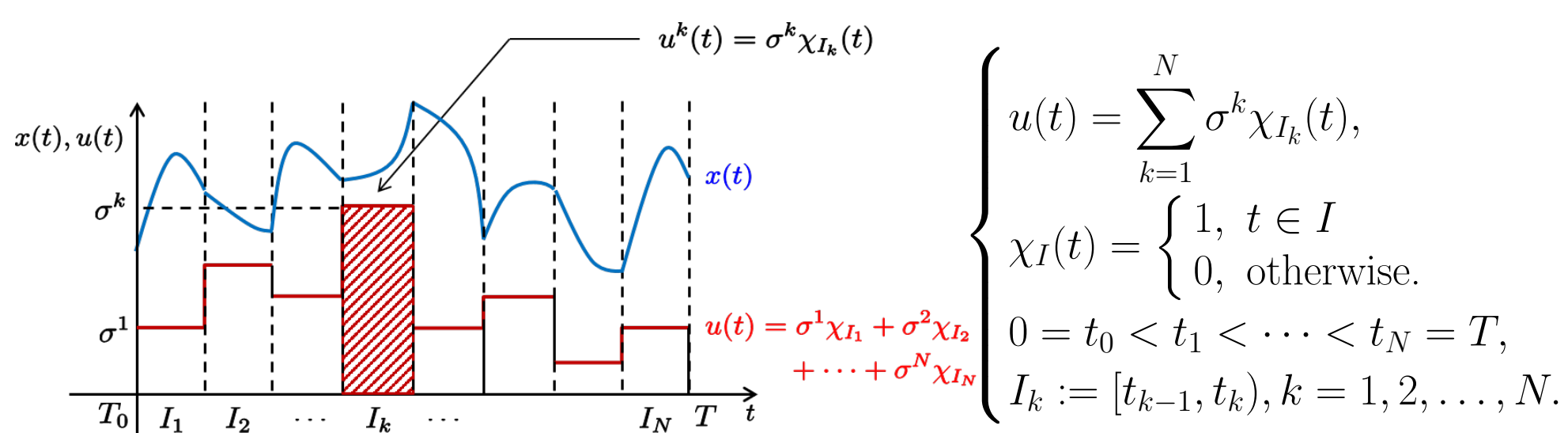
などが挙げられます。工学的な応用問題に関しては、動的計画法を用いた計算法が主体でしたが、これは

- ある種の列挙式の解法と見ることができ、実装もシンプルである。
- 近似計算適用に際して、広いクラスのシステムに適用可能。
- 理想的な動的計画法は大域的最適解を求めることができる。

といったアルゴリズムの簡便さが背景にあります。状態変数を離散化するという性質上、状態変数の数の増加に応じて計算量が指数的に増加する点が問題となります。

## Control Parametrization による計算[1]

本研究では非線形最適化の手法の適用によるアプローチをとります。制御入力を離散化して非線形計画問題に変換します。



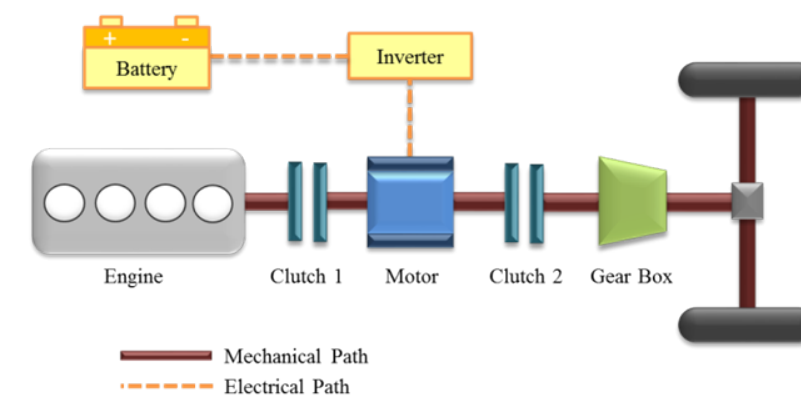
離散化された制御入力について、階段高さのパラメータ $\sigma$ に依存する評価関数の勾配はvariation method あるいはcostate method と呼ばれる変分法的手法によって求まることが知られています。

## ハイブリッド自動車制御問題への応用[2]

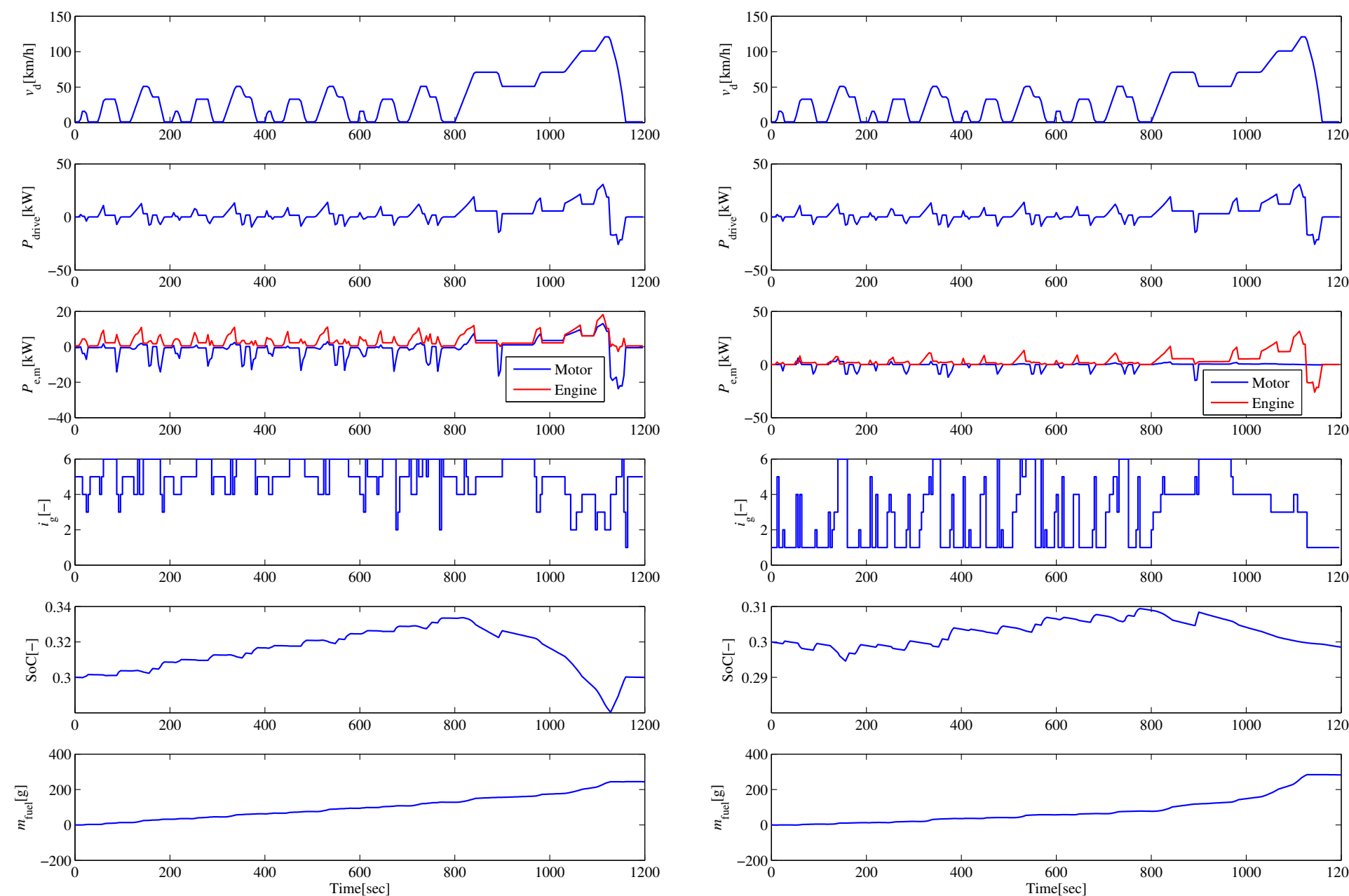
$$\begin{aligned} & \underset{u_1, u_2}{\text{minimize}} && \int_0^T \dot{m}_f(t, u_1(t), u_2(t)) dt, \\ & \text{subject to} && \dot{SoC} = f_{SoC}(u_1) = \frac{-U_{OC} + \sqrt{U_{OC}^2 - 4R_b \eta_m^{-\text{sgn } u_1(t)} u_1(t)}}{2Q_{b\max} R_b}, \\ & && SoC(0) = SoC(T), \\ & && P_{m,\min} \leq u_1(t) \leq P_{m,\max}, \\ & && u_2(t) \in \{i_g^{(1)}, i_g^{(2)}, i_g^{(3)}, i_g^{(4)}, i_g^{(5)}, i_g^{(6)}\}, \\ & && 0 \leq SoC(t) \leq 1. \end{aligned}$$

- 状態変数: SoC(State of Charge, バッテリー充電量)
- 制御入力:  $u_1$ (モーター出力),  $u_2$ (ギアシフト)

- 制御目的: 燃料消費量 $\dot{m}_f$ の時間積分の最小化
- 終端拘束: バッテリーに蓄積される電気的エネルギーと燃料との換算の問題を避けるため、最初と最後のバッテリー容量は同じになるように拘束。



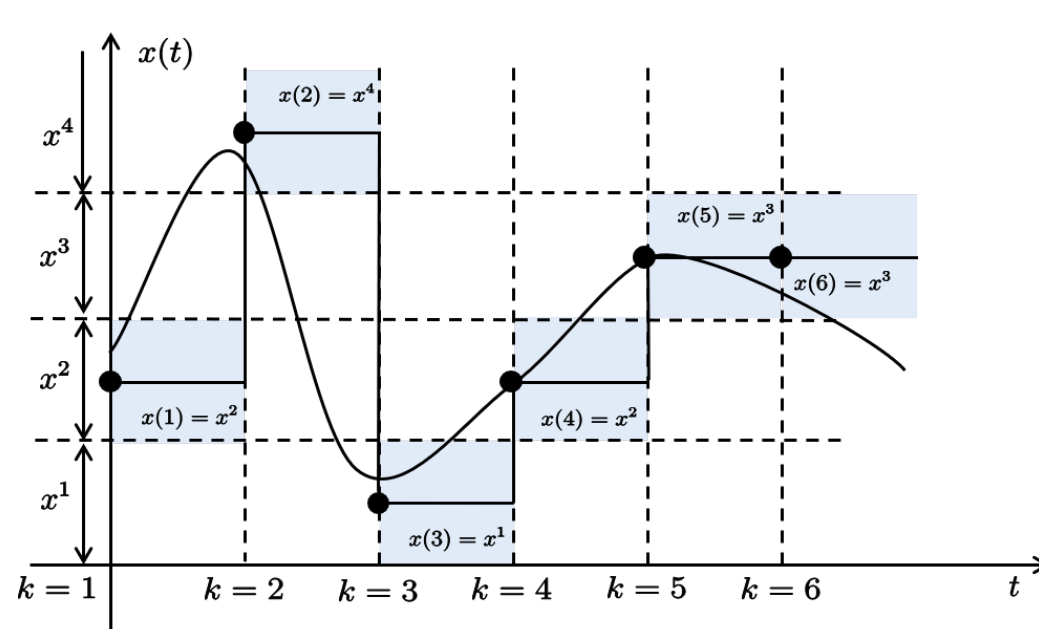
パラレル型ハイブリッド



Control Parametrization による結果      動的計画法による結果

- 1段目:車の走行速度, 2段目:走行に必要なパワー( $P_{\text{drive}}$ ), 3段目:エンジンとモーターの出力( $P_e, P_m$ ), 4段目:ギアシフト, 5段目:SoC, 6段目:燃料消費の積算
- 双方の評価関数値を燃費換算すると、Control Parametrizationによる結果は1Lあたり32.3km、動的計画法による結果は1Lあたり27.9km。
- 動的計画法では状態変数と制御入力双方を離散化して計算しますが、そのステップの適当な設定規範は知られていません。数値計算過程での補間による誤差等々の影響が大きいことが指摘されています[3]。

## 今後の課題



離散化のイメージ

- 実際の工学問題においてはアクチュエータの飽和や、システムの安全動作域といった制御入力 $u$ および状態変数 $x$ に関する拘束が存在します。これらの拘束を考慮した計算結果を得たいと考えています。

## 参考文献

- [1] K. Teo, C. Goh and K. Wong, A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems, Longman Sc & Tech, 1991.
- [2] 豊田 充, 申 鉄龍, 近似解法を用いた HEV エネルギーマネジメント最適化, 自動制御連合講演会講演論文集, Vol. 60, pp. 1203-1206, 2017.
- [3] P. Elbert, S. Ebbesen and L. Guzzella, Implementation of Dynamic Programming for n-Dimensional Optimal Control Problems With Final State Constraints, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 21, No. 3, pp. 924-931, 2013.
- [4] M. Kang, Y. Wu and T. Shen, Logical control approach to fuel efficiency optimization for commuting vehicles, International Journal of Automotive Technology, Vol. 18, No. 3, pp. 535-546, 2017.

