汎用最適化パッケージによるクリンチ／エリミネーションナンバーの計算

伊藤　聡　数理・推論研究系，統計的機械学習研究センター，統計思考院　教授

リーグスポーツのシーズンが始まったばかりの時点では，残り試合すべてに勝てば優勝し，残り試合すべてに負ければ最下位になることは明らかであるように，シーズン中のどの時点においても，最終的にある特定の状況を達成することが確定する最小の残り勝ち試合数，また逆にその状況を達成できないことが確定する最小の負け試合数が存在し，それぞれをクリンチナンバー，エリミネーションナンバーと呼ぶ。本研究の目的は，このようなクリンチ／エリミネーションナンバーの求解に際し，様々なスポーツリーグに対して汎用的に使える枠組を提供することである。

求解の難易度はリーグの実施形態によって異なるが，難易度に影響を与える因子として，引分の有無とその扱い，同成績の場合の扱いが挙げられる。前者については，米国のMLBやNBAのように引分を認めない他，勝点方式，勝率方式などがあるが，勝率方式の場合は非線形モデルを取り扱うことになる。一方，後者の同成績（同勝数，同勝点，同勝率）の扱いについては，当該チーム間で再試合を実施する他に，あらかじめ順位判定基準が，例えばNPBパ・リーグの①勝率→②当該チーム間勝率→③交流戦を除く勝率→④前年度順位のように，定められている場合があり，現在の汎用最適化パッケージの性能を考えると，非線形性の有無よりも，求解の難易度に及ぼす影響が大きいと言える。

クリンチ／エリミネーション問題の構造

リーグに属するチーム集合を L とし，そのチーム数を n とする。リーグ L の全チーム間のこれまでの勝敗記録と残り試合数が与えられているとし，w_{ij} をチーム $i \in L$ のチーム $j \in L$ に対する現時点での勝数，g_{ij} をチーム i, j 間の残り試合数とする（w および g は対角成分が0である n 次正方行列，特に後者は対称行列と考えてよい）。いま，チーム $i \in L$ のチーム $j \in L$ に対する今後の勝数を x_{ij} と表すことにすると，

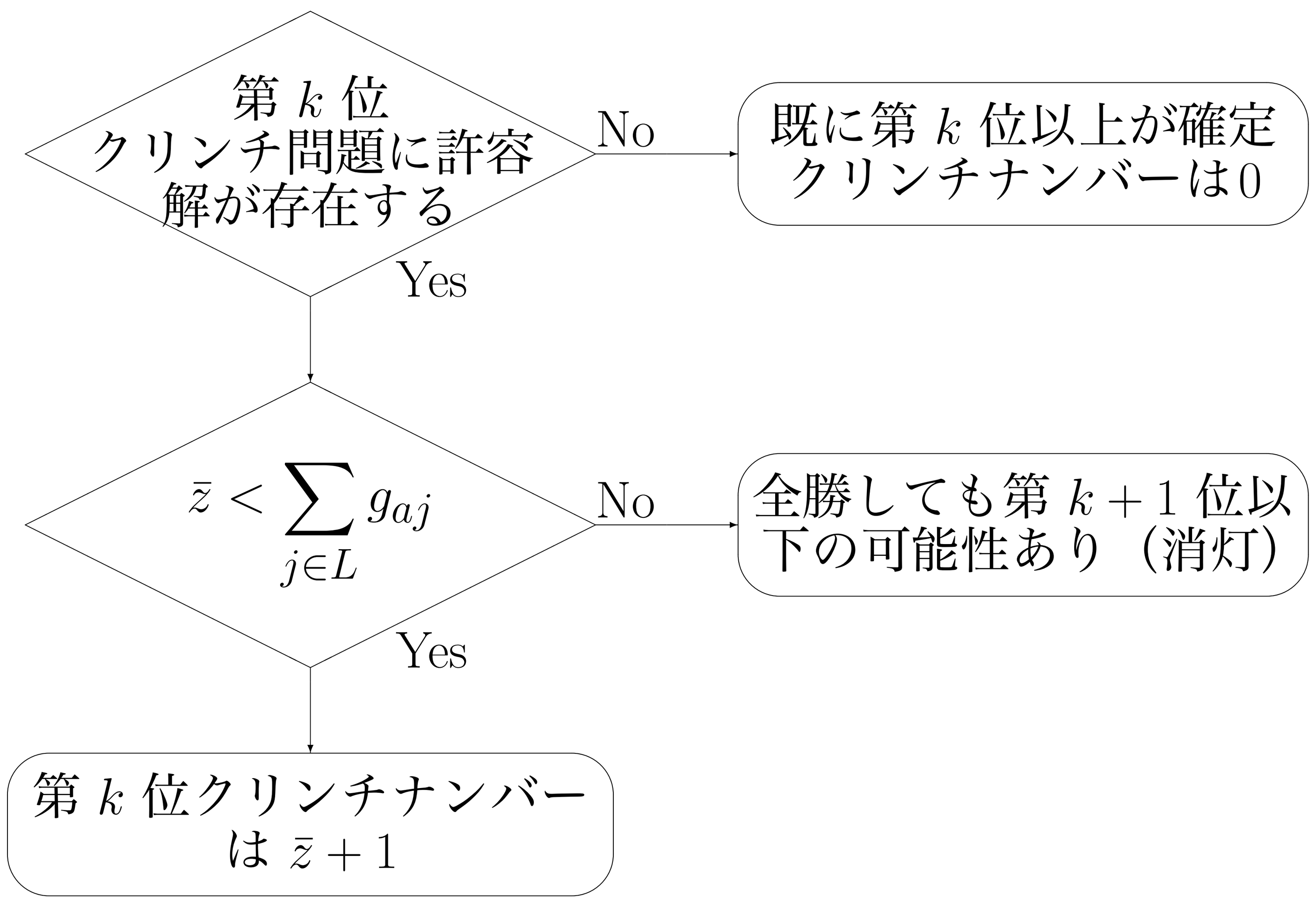
$$x_{ij} + x_{ji} \le g_{ij}, \quad x_{ii} = 0, \quad x_{ij} \ge 0 \quad (\forall i, j \in L)$$

を満たす $x = (x_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ は今後起こり得る勝敗に関するシナリオを過不足無く与える（$\mathbb{Z}$ は整数の集合であり，引分がない場合は第1式の不等号を等号に変えるものとする）。w および g が与えられたとき，これらの条件を満たすシナリオ集合を X で表す。

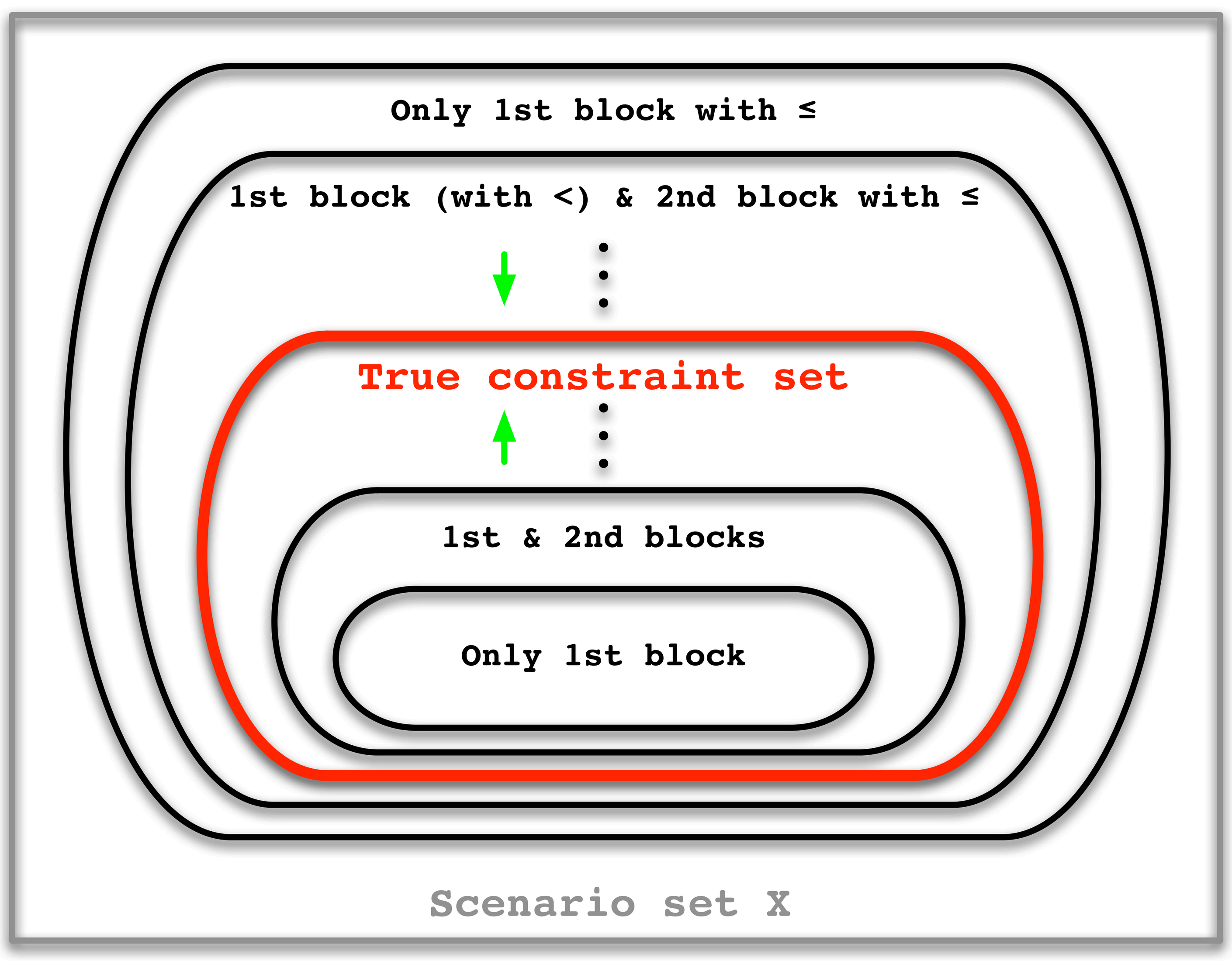
ここで，第 k 位クリンチナンバーを求めることを考える。k 位以上が確定するとは，残り試合すべてに敗れたとしても $k+1$ 位以下になる可能性がないことであり，$k+1$ 位以下になるという制約条件の下で今後の勝数を最大にするという問題（第 k 位クリンチ問題）を解く。詳細は省略するが，NPB のように4つの順位判定基準がある場合，チーム $i \in L$ のこれらの値を $(\mathrm{C1})_i \sim (\mathrm{C4})_i$ で表すことにすると，チーム $a \in L$ に対する第 k 位クリンチ問題は次のような構造を持つ。

$$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\max_{\substack{x \in X \\ \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \{0,1\}^n}} \sum_{j \in L} x_{aj} \\
\text{subj. to } x_{aj} + x_{ja} = g_{aj} \quad \forall j \in L \\
\boxed{n - \displaystyle\sum_{i \in L} \alpha_i \text{ teams exist st } (\mathrm{C1})_a < (\mathrm{C1})_i} \\
\boxed{n - \displaystyle\sum_{i \in L} \beta_i \text{ teams exist st } (\mathrm{C1})_a = (\mathrm{C1})_i,\ (\mathrm{C2})_a < (\mathrm{C2})_i} \\
\boxed{n - \displaystyle\sum_{i \in L} \gamma_i \text{ teams exist st } (\mathrm{C1})_a = (\mathrm{C1})_i,\ (\mathrm{C2})_a = (\mathrm{C2})_i,\ (\mathrm{C3})_a < (\mathrm{C3})_i} \\
\boxed{n - \displaystyle\sum_{i \in L} \delta_i \text{ teams exist st } (\mathrm{C1})_a = (\mathrm{C1})_i,\ (\mathrm{C2})_a = (\mathrm{C2})_i,\ (\mathrm{C3})_a = (\mathrm{C3})_i,\ (\mathrm{C4})_a < (\mathrm{C4})_i} \\
\alpha_a = \beta_a = \gamma_a = \delta_a = 1, \quad \displaystyle\sum_{i \in L} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i) = 4n - k
\end{array}\right.$$

第 k 位クリンチ問題の最適目的関数値（最大勝数）を $\bar{z}$ とすると，第 k 位クリンチナンバーは以下のように求まる。



順位判定基準の内容に依存するが，上記のようなクリンチ問題を汎用最適化パッケージを用いて直接解くことは必ずしも容易ではない。そこで，最適目的関数値の上界と下界を利用することを考える。下図のように，クリンチ問題の各ブロック中の不等号 $(<)$ の一つを等号つき $(\le)$ に変えることにより3つのレベルの上界が得られ，またバイナリ変数 δ, γ, β を順に1に限定することにより3つのレベルの下界が得られる。これらを適切に用いることにより，クリンチ問題を高速に解くことが可能になる。



双対な概念である第 k 位エリミネーションナンバーは，k 位以上になるという制約条件の下での今後の最大敗数をもとめる問題（第 k 位エリミネーション問題）を解くことにより，同様に求めることができる。

ワイルドカードクリンチ／エリミネーション

リーグが複数の地区に分かれている場合，プレーオフでリーグ優勝チームなどを決定する際に，各地区の上位チームだけでなくワイルドカードと呼ばれる追加枠が設定されることが多い。日本のB.LEAGUEでも，3地区の2位クラブまでと各地区3位以下の中での上位2クラブの計8クラブが，B1リーグ優勝をかけてチャンピオンシップ・トーナメントを行う。この場合，チャンピオンシップ・トーナメント進出クリンチナンバーは，自地区で3位以下となり，かつ各地区3位以下のクラブの中で3番目以下になるという条件のもとでの，今後の最大勝数を求めることになる。後者の条件が，少なくとも1地区により上位の4クラブがあるか，あるいは少なくとも2地区により上位の3クラブがあることと等価であることを用いて，クリンチ問題を構成することができる。また，チャンピオンシップ・トーナメント進出エリミネーションナンバーは地区2位エリミネーションナンバーとワイルドカードエリミネーションナンバーを組み合せて求めることができる。