

研究質、研究成果および研究価値
に関する模型解析

内 田 良 男
統 計 数 理 研 究 所

研究費，研究成果および研究価値に関するモデル解析〔註〕

目 次

| | |
|-------------------------------------|-----|
| § 1. 研究費と研究成果の基本的関係 | 1 |
| § 2. 研究成果の経済価値と研究費との関係 | 1 1 |
| § 3. 研究費の配分法と研究費総額の決定法 | 2 1 |
| § 3. 1 研究条件が同等である多数の研究課題がある場合 | 2 1 |
| § 3. 2 研究条件が異なる多数の研究課題がある場合 | 2 3 |
| § 3. 3 研究条件によつて多数の研究課題を分類した場合 | |
| § 4. 研究費の分割投入法 | 3 1 |
| § 4. 1 単純型モデルへ繰込み投入する場合 | 3 1 |
| § 4. 2 単純型モデルへ繰込み投入する場合の分割投入法 | 3 8 |

〔註〕＜研究成果の評価に関する統計的研究＞（文部省科学試験研究費）
に関する報告の一部である。

§ 1. 研究費と研究成果の関係

研究課題について検べるとき、その一つの見方は研究費と研究成果との関連はどうかということである。この関連について問う際、各課題がもっている研究組織（研究主体）、この課題に関係ある既存の学問的成果、あるいはまたこの課題について研究を進めるのに必要な既存の設備などを見逃がすことはできない。この種の事柄を一括して研究条件とよんでおこう。

ある研究課題のもつ研究条件を C 、この課題に交付される研究費を I 、そして研究成果を R で示すならば、これらの関係を

$$R = \varphi(I, C) \dots\dots\dots (1)$$

として表わすことができるであろう。これがもつべき性質について以下に述べよう。

研究条件が同等でしかも研究費が同額であつても研究成果は必ずしも等しくないということは想像に難くない。しかしその差異に多少はあつても総体的にはある種の分布法則に従うと想像される。そこで、 R はそのような分布法則にしたがう確率変数として取扱うのが適切と思われる。そこで研究条件 C 、研究費 I で行われる研究の成果を R で表わしたとき、 R の平均値について

$$E[R] = \psi(I, C) \dots\dots\dots (2)$$

が成立つと考える。これに併行させて分散

$$D^2[R] = \sigma_R^2(I, C) \dots\dots\dots (3)$$

も定義しておこう。

さて、平均値 $E[R]$ のもつべき性質としては、研究条件が変わらない限り、研究費がより多いほど研究成果がより少いということは平均的にはありえない、ということである。すなわち、

$$I > I' \quad \text{ならば} \quad \psi(I, C) \geq \psi(I', C) \dots\dots\dots (4)$$

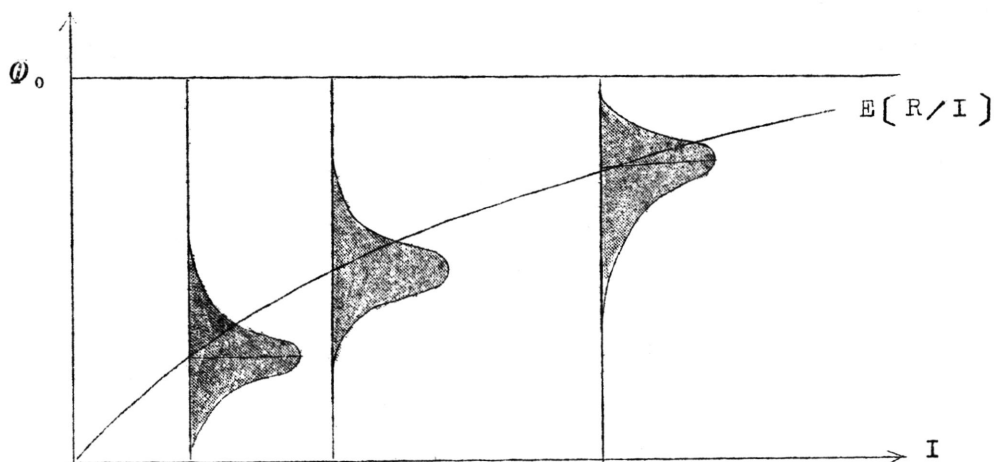
また、研究費が少なければ少いほど研究成果は平均的にはより少いが、その極端な場合は研究費が0のときであつて、この場合の研究成果は0と考えておくのが適切であろう。この逆の場合は研究費を必要なだけいくらでも交付するのであるが、この場合は、当面の研究題がもつ目標を完全に

果す場合である。この目標は有限であるべきであるから、それを ψ_0 で示すならば $\psi(I, c) \leq \psi_0(c)$ である。これらの事柄を式に表わしておけば次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \lim_{I \rightarrow 0} E[R] &= \lim_{I \rightarrow 0} \psi(I, c) = 0 \\ \lim_{I \rightarrow \infty} E[R] &= \lim_{I \rightarrow \infty} \psi(I, c) = \psi_0(c) \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

研究成果の分布については、研究費が僅少の場合、研究成果は平均的には僅少と考えられるが、意外に大きな成果を挙げることもありうる。また研究費が十分に多額であれば研究成果も平均的に多大なものとなる。しかし、この場合にも意外に僅かしか成果があがらないこともありうる。これらの事柄から、研究費が僅少の場合、研究成果の分布は成果の多い方に尾をひいており、研究費が多い場合はその逆に成果の少ない方に尾をひいていることとなる。研究成果の高い方、低い方に尾をひく分布は、研究費の函数として把握されているものであつて、研究費を連続変数として考え

R の 分 布



る限り適当な研究費の場合の研究成果は、高低何れにも偏らない対称な分布となるであろう。次に示す函数は、研究成果の分布密度函数として、以上にのべた基本的関係を満すものである。そこで、以下ではこの函数を研究費と研究成果に関する模型として諸種の問題について論じよう。(〔註

1) ~ (註3))

$$g(r; I, C) = \frac{1}{\beta(I, C)} r^{-m} (\Phi_0 - r)^{m-1} \quad (6)$$

$$0 \leq r \leq \Phi_0$$

ここで、 $m = \exp \{-\lambda I\}$
 $\beta(I, C) = B(1-m, m)$ (ベータ函数) (7)

であり、また常数 λ 、 Φ_0 はともに研究条件 C の函数 $\lambda = \lambda(C)$ 、 $\Phi_0 = \Phi_0(C)$ である。

この分布にしたがう場合、

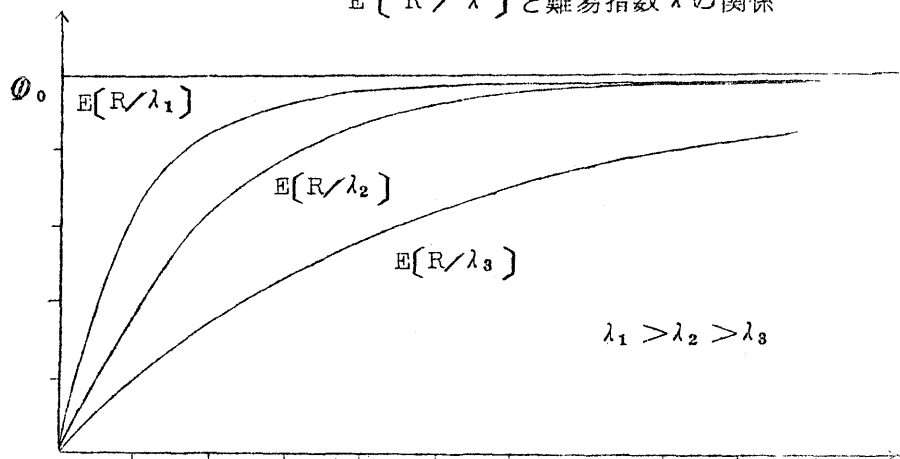
$$E[R] = \Phi_0 (1 - e^{-\lambda I}) \quad (8)$$

$$D^2[R] = \frac{1}{2} \Phi_0^2 (1 - e^{-\lambda I}) e^{-\lambda I} \quad (9)$$

である。

$E[R]$ は $\Phi_0(C) (1 - \exp\{-\lambda(C)I\})$ であるから $\lambda_1 > \lambda_2$ ならば $E[R/\lambda_1] > E[R/\lambda_2]$ となる。しかも $\lim_{I \rightarrow \infty} E[R/\lambda_1] = \lim_{I \rightarrow \infty} E[R/\lambda_2] = \Phi_0(C)$ であるから、 $I \rightarrow \infty$ に対応する $E[R/\lambda]$ の状態が、 $\lambda_1 > \lambda_2$ のとき、 λ_2 のときより λ_1 のときの方が急速に極限值 $\Phi_0(C)$ に接近する

$E[R/\lambda]$ と難易指数 λ の関係



という様子を物語っている。λが小さい程、その研究課題はIを増やせばそれだけより大きな研究成果を期待できると解釈できるから、このλを研究課題に固有な研究難易指数とよぶこととする。λがより小さいほど難しい研究である。前と同様にE[R]に着目すると、これは $\psi_0 [1 - \exp\{-\lambda(c)I\}]$ で、 $\lim_{I \rightarrow \infty} E[R] = \psi_0(c)$ であるから、 $\psi_0(c)$ は研究課題に固有な研究成果の限界値である。換言するならば各研究課題のもつ懐の深さ、言換えて奥行きともいうべきものである。この意味から、 $\psi_0(c)$ を研究奥行指数とよんでおこう。

これら2つのパラメータの性質から、各研究課題に応じてλ(c)と $\psi_0(c)$ とは全く別個の、独立な性格付けのパラメータとみることができる。 $\psi_0(c)$ は研究課題自体のもつ研究開発すべき余地であり、λ(c)は研究開発を行なう主体のもつ条件すなわち研究組織(研究員、研究施設などに関する事柄)の状態を物語るものである。したがって、研究課題条件cは、上に述べた考へに従つて研究組織、研究施設に関するもの c_1 と研究課題自体に関するもの c_2 とに分離するならば $c = (c_1, c_2)$ で表現され、

$$\lambda(c) = \lambda(c_1), \quad \psi_0(c) = \psi_0(c_2) \quad (10)$$

となる。

E[R]について更に詳しく調べてみよう。

$$\lim_{I \rightarrow 0} E[R] = 0, \quad \lim_{I \rightarrow \infty} E[R] = \psi_0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{dE[R]}{dI} = \lambda \psi_0 e^{-\lambda I}, \quad \frac{d^2 E[R]}{dI^2} = -\lambda^2 \psi_0 e^{-\lambda I}$$

であるから、λ > 0, I > 0, $\psi_0 > 0$ によつて

$$\frac{dE[R]}{dI} > 0, \quad \frac{d^2 E[R]}{dI^2} < 0 \quad \text{である。}$$

また、 $D^2[R]$ については、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{I \rightarrow 0} D^2 [R] &= 0, & \lim_{I \rightarrow \infty} D^2 [R] &= 0 \\ \frac{d D^2 [R]}{d I} &= -\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda I} (1 - 2e^{-\lambda I}) \\ \frac{d^2 D^2 [R]}{d I^2} &= \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda I} (1 - 4e^{-\lambda I}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

であるから、 $\frac{d D^2 [R]}{d I}$ は $I = \frac{\log 2}{\lambda}$ 、 $\frac{d^2 D^2 [R]}{d I^2}$ は $I = \frac{2 \log 2}{\lambda}$

を境として符号が変わる。すなわち

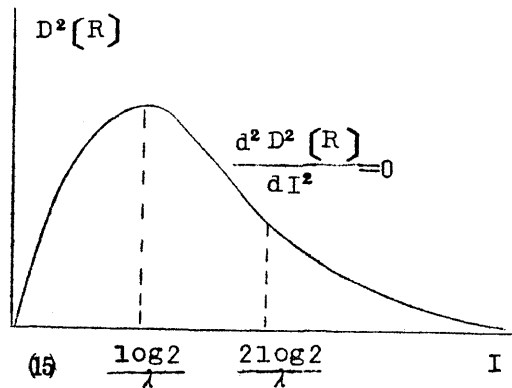
$$\frac{d D^2 [R]}{d I} \left\{ \begin{array}{l} > 0 & I < \frac{\log 2}{\lambda} \\ = 0 & I = \frac{\log 2}{\lambda} \\ < 0 & I > \frac{\log 2}{\lambda} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{d^2 D^2 [R]}{d I^2} \left\{ \begin{array}{l} < 0 & I < \frac{2 \log 2}{\lambda} \\ = 0 & I = \frac{2 \log 2}{\lambda} \\ > 0 & I > \frac{2 \log 2}{\lambda} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

である。(図参照)

$D^2 [R]$ が最大となるのは $I = \frac{\log 2}{\lambda}$ のときで、その値は $(\frac{1}{8}) \frac{\lambda}{2}$ である。 $I = \frac{\log 2}{\lambda}$ のときは $E [R]$ の値は $(\frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}$ であるから、変動係数は

$$(C, V) = \frac{D [R]}{E [R]} = \frac{1}{2}$$



である。変動係数を基準に話を進めてみよう。一般に

$$(C, V)^2 = \frac{D^2 [R]}{E^2 [R]} = \left(\frac{1}{2}\right) e^{-\lambda I} (1 - e^{-\lambda I})^{-1} \quad (16)$$

であるから、第1次、第2次導函数を求めると、

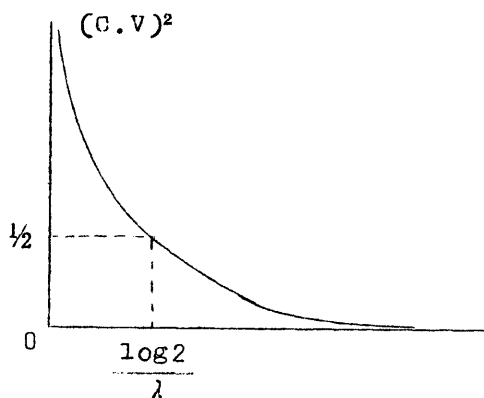
$$\left. \begin{aligned} \frac{d(C, V)^2}{dI} &= -\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda I} (1 - e^{-\lambda I})^{-2} \\ \frac{d^2 (C, V)^2}{dI^2} &= \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda I} (1 - e^{-2\lambda I}) (1 - e^{-\lambda I})^{-4} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

である。 $\lambda > 0$, $I > 0$ であるから $\frac{d(C, V)^2}{dI} < 0$, $\frac{d^2 (C, V)^2}{dI^2} > 0$ である。

また

$$\lim_{I \rightarrow 0} (C, V)^2 = \infty, \quad \lim_{I \rightarrow \infty} (C, V)^2 = 0 \quad (18)$$

である。(図参照)



要 約

研究条件が一定であるならば、研究費の多いほどより大きな研究成果を期待できる。しかし、このことは平均的な意味で確認されるのであつて、研究成果の変動状態を併わせて考える必要がある。この変動状態を $D[R]$ で測るならば、これは研究費 I が $\frac{1}{\lambda} \log 2$ で最大となり、研究費がこれを越えると $D[R]$ の大きさは次第に小さく、減少の割合は次第に大きくなる。研究費がこれを越えれば、大きさは依然として減るが、減少の割合は低下する。したがつて、研究費が $\frac{1}{\lambda} \log 2$ 程度では研究成果の大きさは不安定で、大きかつたり小さかつたりする。研究費が $\frac{1}{\lambda} \log 2$ を越えると、

研究成果の大きさの安定性は加速度的に増大するが、研究費が $\frac{2}{\lambda} \log 2$ を越えると安定性は依然として増えるが、増大の仕方は次第に緩慢になる。

変動状態を期待される研究成果の大きさ $E[R]$ に対する相対的な量すなわち所謂変動係数によつて測ることにすれば、研究成果が大きければ大きい程、変動係数は小さく、言換えると研究成果の大きさの安定性が大きいことになる。

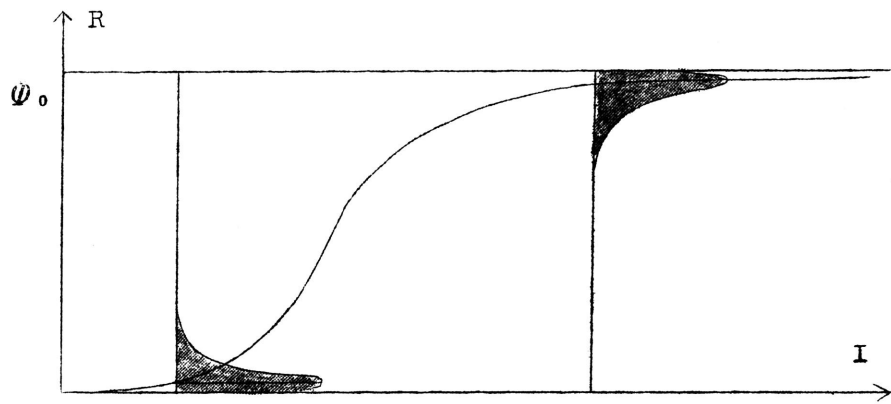
次表によつて、研究費が $\frac{1}{\lambda} \log 2$ のときは、研究費 ϕ_0 の50%の研究成果を期待できるが変動係数は71%で非常に大きいことが分る。また、研究費が上の倍額 $\frac{2}{\lambda} \log 2$ のときは、研究費 ϕ_0 の75%の研究成果を期待でき、変動係数は24%で、上よりは相当小さいことが分かる。

| | | | | |
|---------------------|---|------------------------------|------------------------------|----------|
| 研究費 I | 0 | $\frac{1}{\lambda} \log 2$ | $\frac{2}{\lambda} \log 2$ | ∞ |
| 研究成果の平均 $E[R]$ | 0 | $\frac{1}{2} \phi_0$ | $\frac{3}{4} \phi_0$ | ϕ_0 |
| 研究成果の分散 $D^2[R]$ | 0 | $\frac{1}{8} \phi_0^2$ | $\frac{1}{32} \phi_0^2$ | 0 |
| 研究成果の標準偏差 $D[R]$ | 0 | $\frac{1}{2\sqrt{2}} \phi_0$ | $\frac{1}{4\sqrt{2}} \phi_0$ | 0 |
| 研究成果の変動係数 | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ | 0 |
| $C.V = D[R] / E[R]$ | | = 0.7071 | = 0.2357 | |

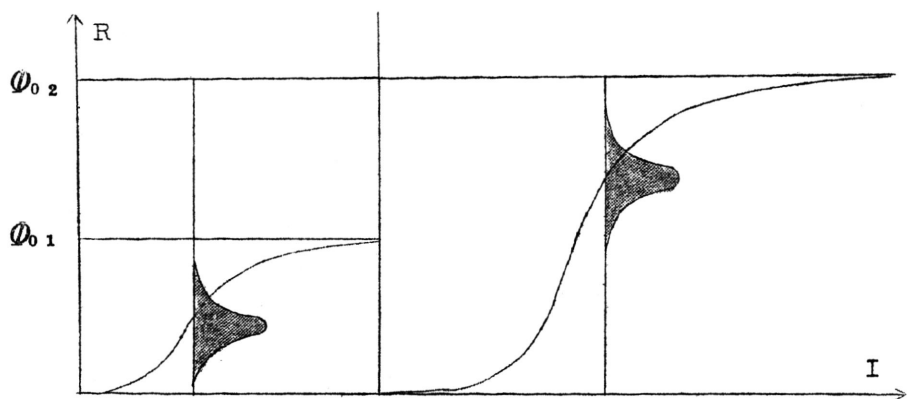
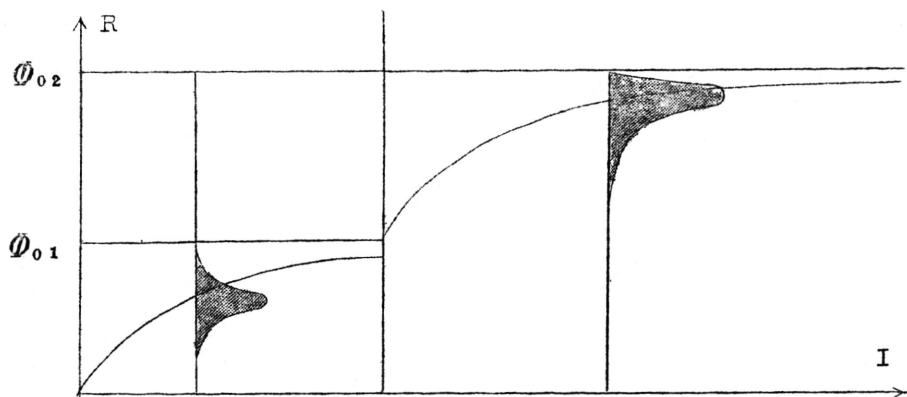
構造模型についての補足的考察

さきに掲げた模型では、 $E[R] = \phi_0 (1 - e^{-\lambda I})$ であつて、 $E[R]$ は研究費 I の増加函数であるが、増加速度は研究費 I の減少函数であつた。このような点について考察してみよう。

ある種の研究課題では、 $E[R]$ は上と同様に研究費 I の増加函数であるが、増加速度は研究費 I が少ない場合に増加函数で、多い場合に減少函数である——このような構造をもつた研究課題がある。



上に掲げた2種の構造模型は、 $E[R]$ が研究費 I の連続函数であるという意味で、単純なものである。ある種の研究課題では、研究費 I がある境界を越えるか否かによつて、研究の質が変わる。例えば実験・調査を必要とする研究においては、研究費が僅少の場合、実験設備・調査範囲などを極度に小さく制限しなければならない。このような研究課題に対する模型はやゝ複雑なものとなる。2例を図示したが、実際上は個々の具体的な課題について検討しなければ、どれが適切であるかは定められない。このような構造を示す模型を、単純型に対し、重畳型とよんでおくことにする。重畳型模型に基づく諸論は別の機会に行なうこととし、今回は単純型模型のうち $E[R] = \psi \cdot (1 - e^{-\lambda I})$ の場合で、諸種の問題について検討する。



§ 2. 研究成果の経済価値と研究費との関係

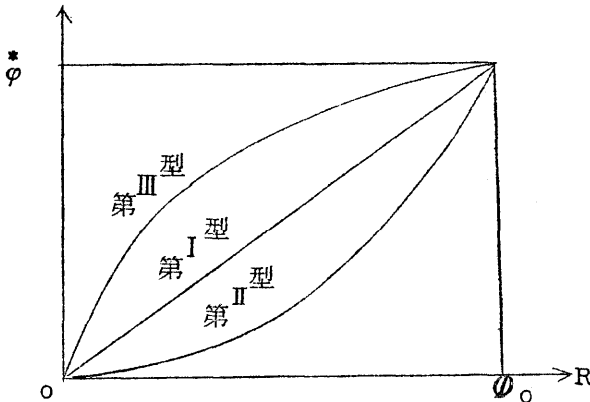
研究成果 R は経済的価値を測つたものでない。ここで、もし経済的価値が研究成果の函数として測れるものとした場合、どのように理論を進めうるかについて検討しよう。経済的価値を

$$\varphi = \varphi(R, I), \quad 0 \leq R \leq \varphi_0(C), \quad 0 \leq I \dots \dots \dots (1)$$

で示すならば、これは R に関して非減少の函数であるべきである。しかも両端においては

$$\lim_{R \rightarrow 0} \varphi(R, I) = 0 \quad \lim_{R \rightarrow \varphi_0(C)} \varphi(R, I) = \varphi_c^* \dots \dots \dots (2)$$

である。
 $\varphi(R)$



一般的に、 $\varphi(R)$ は、 R に比例するか、そうでなければ上方(下方)凸である。実際上はその何れが適切であるかは、具体的に個々の対象について調べなければ定めることはできないから、ここでは起りうる単純なる

通りについて検討しておくこととする。

(第I型) $\varphi(R) = (\varphi_c^* / \varphi_0) R \dots \dots \dots (3)$

(第II型) $\varphi(R) = \varphi_c^* (R / \varphi_0)^2 \dots \dots \dots (4)$

(第III型) $\varphi(R) = \varphi_c^* \{1 - (\varphi_0 - R)^2 / \varphi_0^2\} \dots \dots \dots (5)$

まず、経済価値が研究成果 R に比例する簡単な場合(第I型)について調べておこう。 R の分布密度は、§ 1 の(6)で定めた $f(r; I, C)$ であるとするならば、

$$E[\varphi(R)] = (\varphi_c^* / \varphi_0) E[R] = \varphi_c^* (1 - e^{-\lambda I}) \quad (6)$$

である。経済的効果の指標として、単位研究費当りの経済価値 $\varphi(R)/I$ の平均値

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E [\varphi(R)/I] \\ &= E [\varphi(R)] / I \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

を考えると、(6)の場合は

$$\varepsilon = \varphi_c^* (1 - e^{-\lambda I}) / I \dots\dots\dots(8)$$

となる。

$$\frac{d\varepsilon}{dI} = \varphi_c^* \{ (\lambda I + 1) e^{-\lambda I} - 1 \} / I^2$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dI^2} = -\varphi_c^* \{ (\lambda^2 I^2 + 2\lambda I + 2) e^{-\lambda I} - 2 \} / I^3$$

であるから、

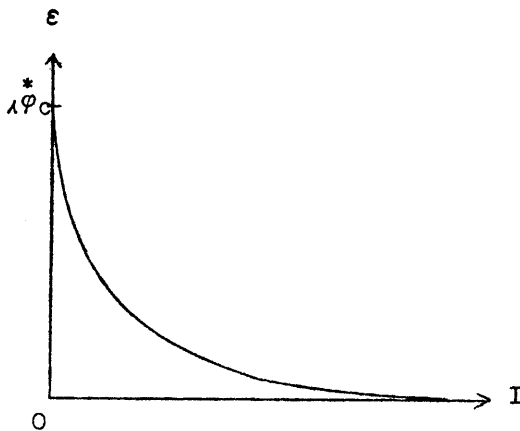
$$\frac{d\varepsilon}{dI} < 0, \quad \frac{d^2\varepsilon}{dI^2} > 0$$

$$\lim_{I \rightarrow 0} \frac{d\varepsilon}{dI} = -\frac{1}{2} \lambda^2, \quad \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{d\varepsilon}{dI} = 0$$

また、

$$\lim_{I \rightarrow 0} \varepsilon = \lambda \varphi_c^*, \quad \lim_{I \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$$

であるから、効率 ε は、図に示す通り、研究費が増すほど低下することを示している。



価値関数 $\varphi(R)$ が、研究成果 R の線型函数である場合に対し、2次函数である第II型、第III型ではどのような性質を示すかについて検討しよう。第II型の場合は、

$$E[\varphi(R)] = \frac{1}{2} \varphi_c^* (1 - e^{-\lambda I}) (2 - e^{-\lambda I}) \dots\dots\dots(9)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varphi_c^* (1 - e^{-\lambda I}) (2 - e^{-\lambda I}) / I \dots\dots\dots(10)$$

また、第Ⅲの場合は、

$$E[\varphi(R)] = \frac{1}{2} \varphi_c^* \{ (1 - e^{-\lambda I}) (2 + e^{-\lambda I}) \} \dots\dots\dots(11)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varphi_c^* \{ (1 - e^{-\lambda I}) (2 + e^{-\lambda I}) \} / I \dots\dots\dots(12)$$

$E[\varphi(R)]$ および ε の行動を、3つの型で比較しやすくするために、 $x = \lambda I$ によつて変数変換すると、(6)、(8)、(9)、(10)、(11) および(12)の各式は次のようになる。

$$E[\varphi(R)] = \frac{1}{2} \varphi_c^* g_I(x), \quad g_I(x) = 2(1 - e^{-x}) \dots\dots\dots(6)$$

$$E[\varphi(R)] = \frac{1}{2} \varphi_c^* g_{II}(x), \quad g_{II}(x) = (1 - e^{-x})(2 - e^{-x}) \dots\dots\dots(9)$$

$$E[\varphi(R)] = \frac{1}{2} \varphi_c^* g_{III}(x), \quad g_{III}(x) = (1 - e^{-x})(2 + e^{-x}) \dots\dots\dots(11)$$

および

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \lambda \varphi_c^* h_I(x), \quad h_I(x) = 2(1 - e^{-x}) / x \dots\dots\dots(8)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \lambda \varphi_c^* h_{II}(x), \quad h_{II}(x) = (1 - e^{-x})(2 - e^{-x}) / x \dots\dots\dots(10)$$

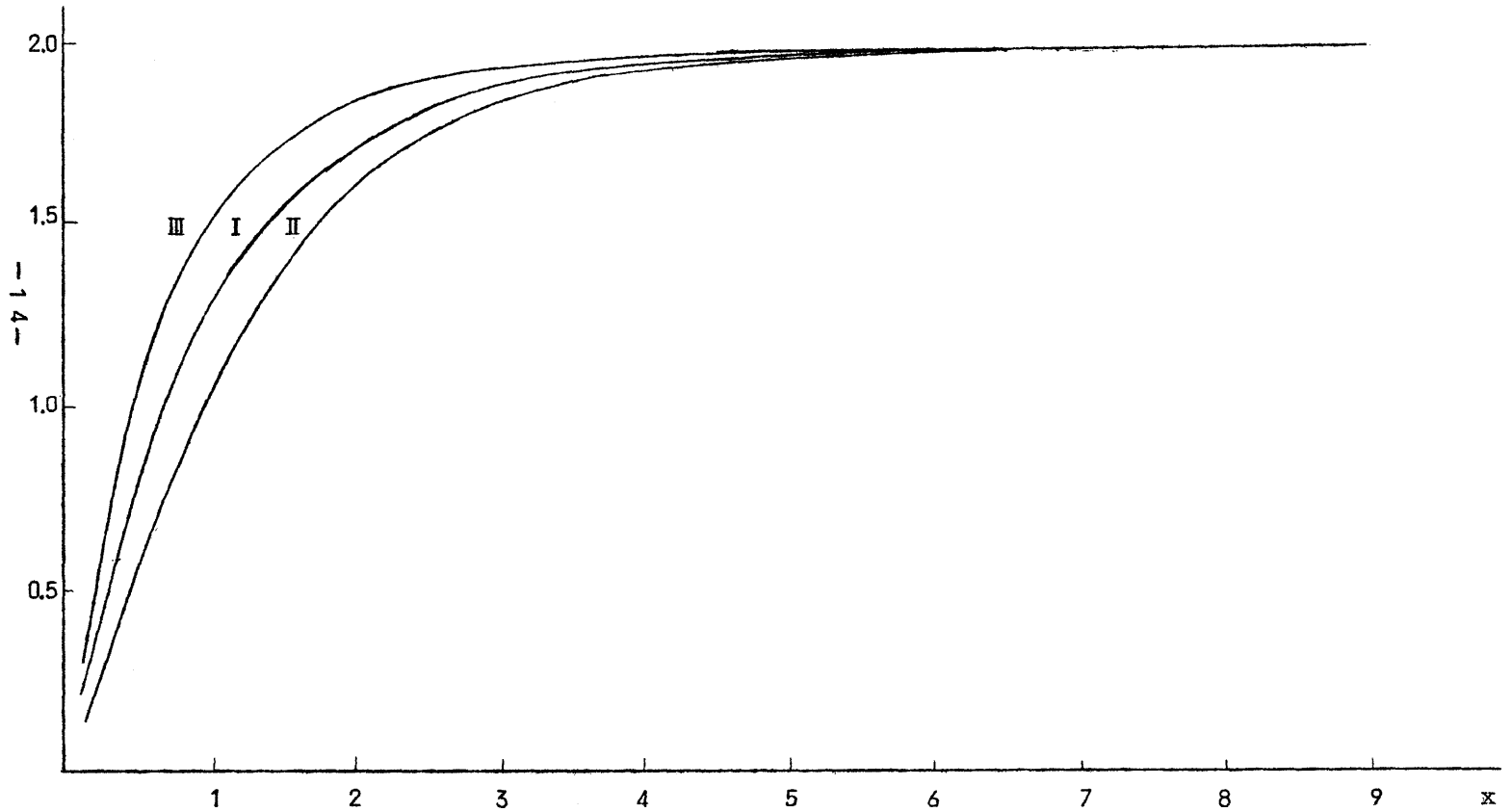
$$\varepsilon = \frac{1}{2} \lambda \varphi_c^* h_{III}(x), \quad h_{III}(x) = (1 - e^{-x})(2 + e^{-x}) / x \dots\dots\dots(12)$$

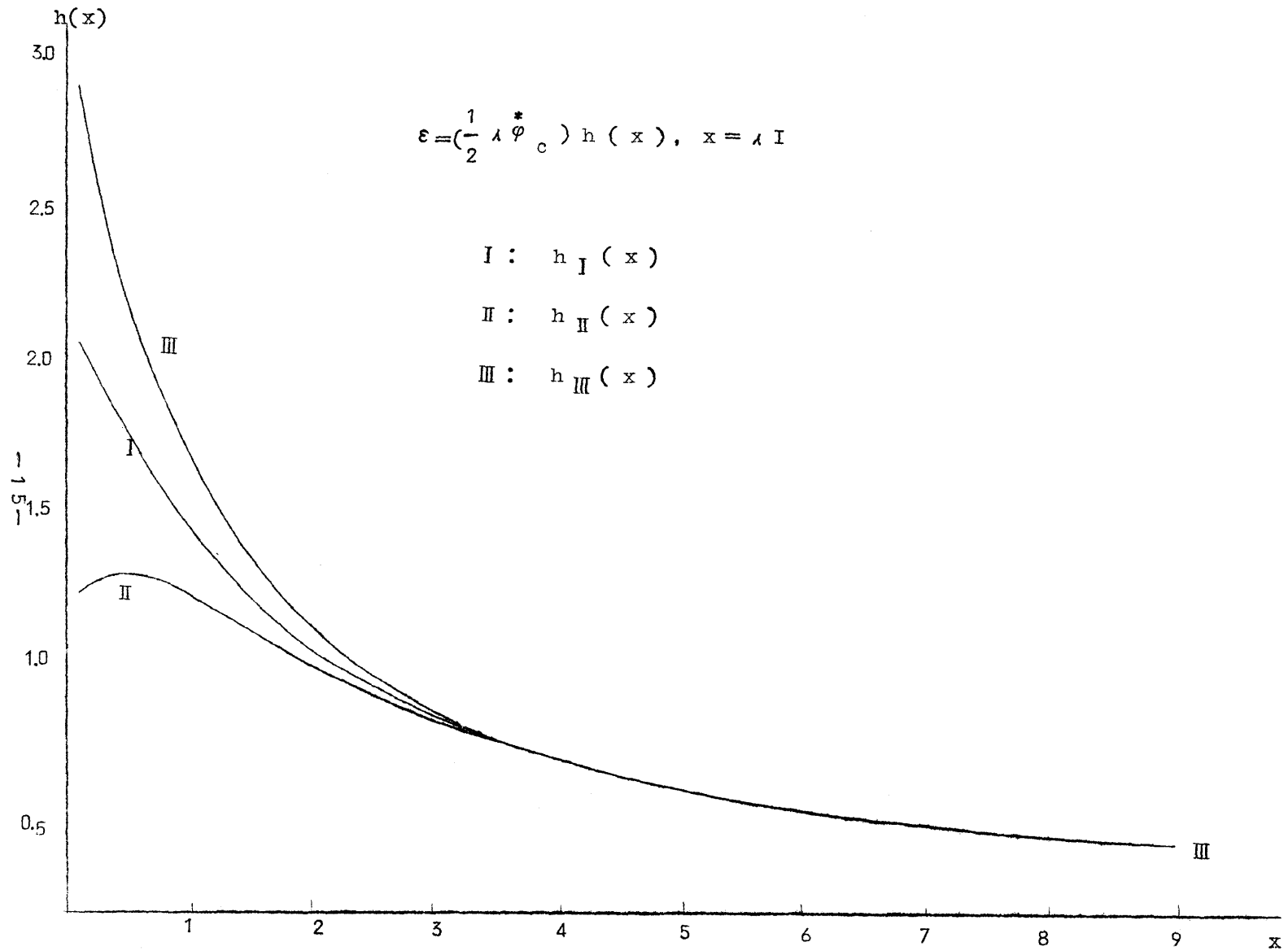
そこで $g_I(x)$ 、 $g_{II}(x)$ 、 $g_{III}(x)$ に関する図と $h_I(x)$ 、 $h_{II}(x)$ 、 $h_{III}(x)$ に関する図とを画き、これらの相互の関係を検討することとする。

$$E[\varphi(R)] = \left(\frac{1}{2} \varphi_c^*\right) g(x), \quad x = \lambda I$$

$g(x)$

I: $g_I(x)$, II: $g_{II}(x)$, III: $g_{III}(x)$





単位研究費当りの経済価値 $\varphi(R)/I$ の安定性を問題として採上げよう。安定性を測る量として変動係数を用いると

$$\begin{aligned} \{C.V.(\varphi(R)/I)\}^2 &= \frac{D^2[\varphi(R)/I]}{\{E[\varphi(R)/I]\}^2} \\ &= \frac{D^2[\varphi(R)]}{\{E[\varphi(R)]\}^2} \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

であるから、まづ $D^2[\varphi(R)]$ を求めることとする。 $\varphi(R)$ の第 I 型～第 III 型の各型に対して

$$\text{(第 I 型)} \quad D^2[\varphi(R)] = \frac{1}{2} \varphi_c^2 (1 - e^{-\lambda I}) e^{-\lambda I} \dots\dots\dots(14)$$

$$\begin{aligned} \text{(第 II 型)} \quad D^2[\varphi(R)] &= \frac{1}{24} \varphi_c^2 (1 - e^{-\lambda I}) (2 - e^{-\lambda I}) \\ &\quad \times (11 - 5 e^{-\lambda I}) e^{-\lambda I} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(第 III 型)} \quad D^2[\varphi(R)] &= \frac{1}{24} \varphi_c^2 (1 - e^{-\lambda I}) (1 + e^{-\lambda I}) \\ &\quad \times (6 + 5 e^{-\lambda I}) e^{-\lambda I} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

である。したがって、変動係数は

$$\text{(第 I 型)} \quad (C.V.)^2 = \frac{1}{2} e^{-\lambda I} / (1 - e^{-\lambda I}) \dots\dots\dots(17)$$

$$\begin{aligned}
 (\text{第 II 型})(C.V.)^2 &= \frac{1 - \lambda I}{6} (11 - 5e^{-\lambda I}) \\
 &\div (1 - e^{-\lambda I})(2 - e^{-\lambda I}) \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{第 III 型})(C.V.)^2 &= \frac{1 - \lambda I}{6} (1 + e^{-\lambda I})(6 + 5e^{-\lambda I}) \\
 &\div (1 - e^{-\lambda I})(2 + e^{-\lambda I})^2 \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

である。変動係数を、3つの型で比較するために、前と同様に $x \equiv \lambda I$ に
 よつて変数変換を行なうこととする。これによつてえた結果を次の図に示
 した。

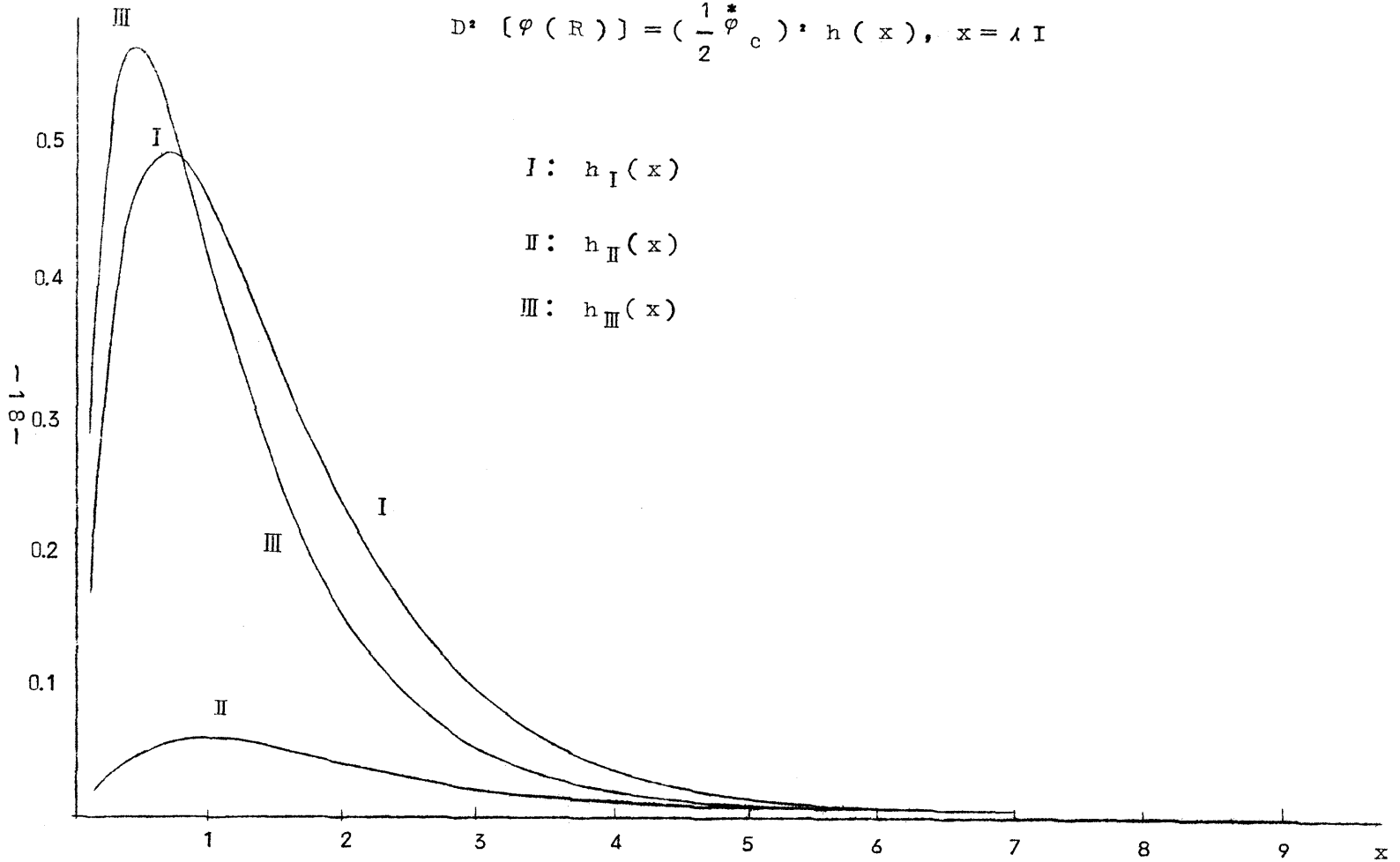
$h(x)$

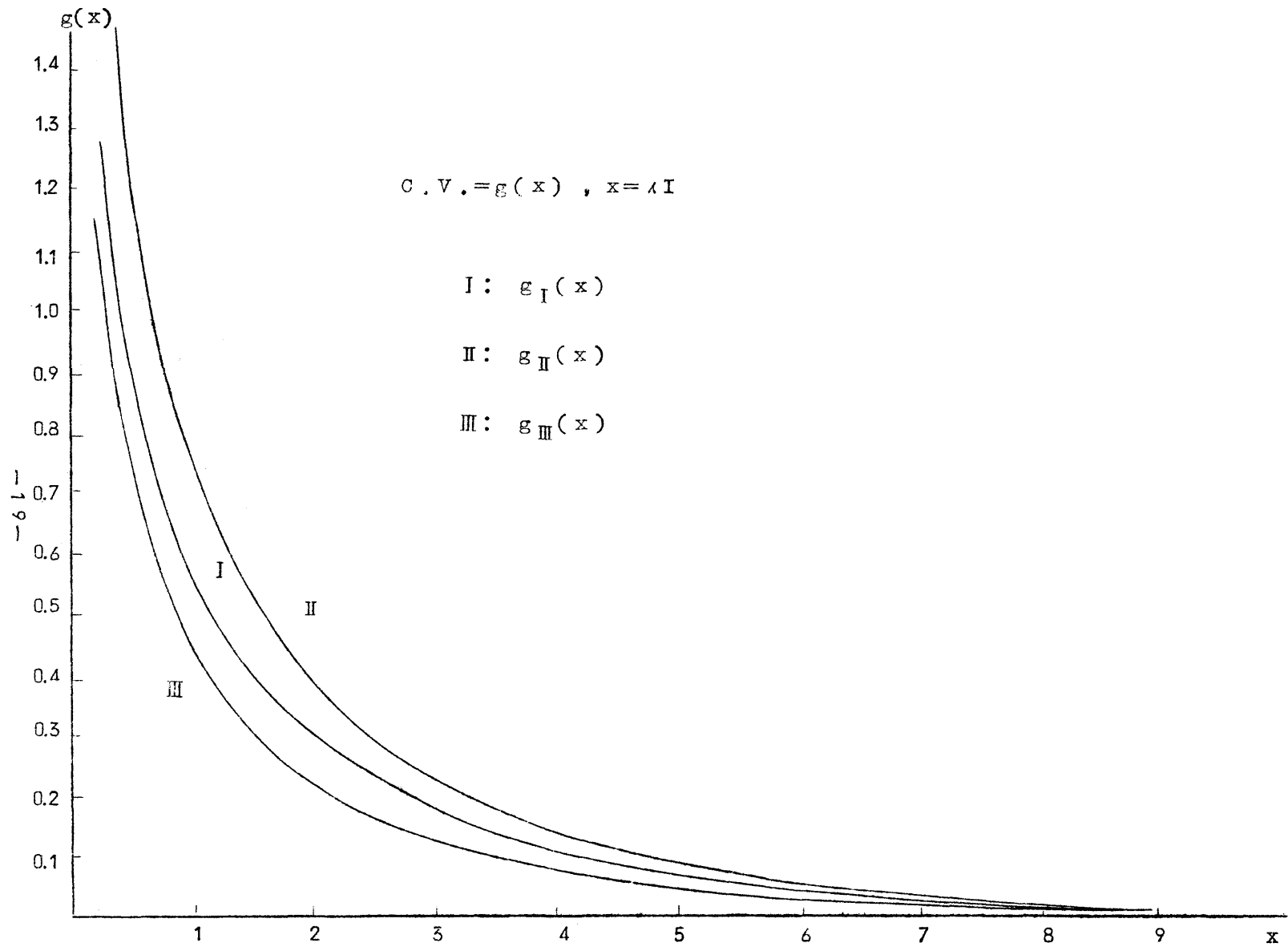
$$D: [\varphi(R)] = \left(\frac{1}{2} \varphi_c^*\right) \cdot h(x), \quad x = \lambda I$$

I: $h_I(x)$

II: $h_{II}(x)$

III: $h_{III}(x)$





変動係数 C.V. (但し $\kappa = \lambda I$) の値

| κ | 第 I 型 | 第 II 型 | 第 III 型 |
|----------|-------|--------|---------|
| 0.1 | 2.180 | 3.601 | 1.940 |
| 5 | 0.878 | 1.212 | 0.741 |
| 1.0 | 530 | 745 | 431 |
| 5 | 379 | 516 | 290 |
| 2.0 | 280 | 380 | 208 |
| 5 | 223 | 287 | 154 |
| 3.0 | 162 | 219 | 117 |
| 4 | 097 | 131 | 069 |
| 5 | 058 | 079 | 041 |
| 6 | 035 | 048 | 025 |
| 7 | 021 | 029 | 015 |
| 8 | 013 | 018 | 009 |
| 9 | 008 | 011 | 006 |

§ 3. 研究費総額の配分法と決定法

これまでの§では1つの研究課題があるとき、研究費と研究成果（経済価値）との間にどのような関係があるかについて検討してきた。ここでは、多数の研究課題がある場合で、これらに投入する研究費総額と研究成果全体との関係について検討する。

§ 3.1 研究条件が同等である多数の研究課題がある場合

初めに研究課題はすべて研究条件が同等である場合について論じよう。我々の模型では研究条件は研究興行指数と研究難易指数とで表わせるから、研究課題はすべて (ψ_0, λ) なる研究条件にあるものとする。

ここで n 個の研究課題があつて、これらに分配できる研究費総額を T 円であるとする。第 i 課題に交付する研究費を I_i 円 $(i=1, 2, \dots, n)$ とする。第 i 課題の研究成果を R_i で表わすならば、 n 個の研究成果は全体では

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \dots\dots\dots(1)$$

である。（このように総合成果を単純和としてよいかどうかについては議論の余地がある。これについては別の機会に触れよう）したがつて期待値は

$$\begin{aligned} E[R] &= \sum_{i=1}^n E[R_i] \\ &= \psi_0 \left\{ n - \sum_{i=1}^n e^{-\lambda I_i} \right\} \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

である。これは $T = \sum_{i=1}^n I_i$ なる条件を満たすべきであり最大値が存在するから、ラグランジュ乗数 μ を用いて、函数

$$h(I_1, I_2, \dots, I_n; \mu) = E[R] + \mu(T - \sum_{i=1}^n I_i) \dots\dots\dots(3)$$

を考えれば、

$$\frac{dh}{dI_j} = \lambda e^{-\lambda I_j} - \mu \quad (j=1,2,\dots, n) \dots\dots\dots(4)$$

これより $\frac{dh}{dI_j} = 0$ を解けば、 $\mu = \lambda e^{-\frac{\lambda}{n}T}$ によつて

$$I_j = \frac{T}{n} \quad (j=1,2,\dots, n) \dots\dots\dots(5)$$

となる。したがつて全体の研究成果は研究費総額を n 等分したとき最大となることが期待される。このような配分法にしたがつたときの研究成果の期待値とその分散は

$$\max E[R] = n \phi_0 \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}T} \right) \dots\dots\dots(6)$$

$$D^2 [R/\max E[R]] = \left(\frac{n}{2}\right) \phi_0^2 e^{-\frac{\lambda}{n}T} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}T} \right) \dots\dots\dots(7)$$

である。したがつて変動係数については

$$(C.V.)^2 = \frac{1}{2n} e^{-\frac{\lambda}{n}T} \left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}T} \right)^{-1} \dots\dots\dots(8)$$

である。

(6), (7), (8)式を研究費総額 T の関数としてみたとき、どのように行動するかは、§ 1の(8), (9), (10)式に較べると明らかである。

【要約】 研究に投入できる予算に限度がある場合、ある予算のワク内では各研究課題にいくらの研究費を割当てたらよいかということが問題となる。ところで、多数ある研究課題が、すべて研究条件(研究費以外)が同等であるならば均等割に配分すると最も大きな研究成果を期待できることが分つた。そこで予算は均等割に各課題に分配する建前をとるとして、予算そのものほどの程度るとき有利であろうかという問題が出てくる。この有利かどうかという点を、標準偏差(分散)をとつて考えてみると、研究成果の大きさは研究費が $\frac{n}{\lambda} \log 2$ のとき最も不安定で、こ

これを越すと安定度は増加する。この状態は $2n\left(\frac{\log 2}{\lambda}\right)$ まで続くが、これを越すと安定度の増加の割合が次第に減る。したがって、研究成果の安定性という点からは、 $\frac{n}{\lambda} \log 2$ 程度の研究予算は是非とも避けるべきであり、できることならば $2n\left(\frac{\log 2}{\lambda}\right)$ に近い研究投資が有利であるということになる。なお、研究成果の安定性を研究成果の期待値を基準とする相対的な量である変動係数で測るならば、研究費が多いほど変動係数が小さいから、安定度が高いこととなる。

§ 3.2 研究条件が異なる多数の研究課題がある場合

§ 3.1 ではどの研究課題もすべて研究条件が同等であるとした。ここでは研究条件がすべて異なる場合についてのべよう。我々の場合、研究条件は2つのパラメータで規定できるから、 n ケの研究課題のうちで、第 i 課題のもつ研究条件は (ϕ_{0i}, λ_i) , ($i = 1, 2, \dots, n$) として表わすこととする。この研究課題に研究費として I_i を投入することにし、それによつてえられる研究成果を R_i で示すならば、全成果 R は、§ 3.1 と同様に、 $\sum_{i=1}^n R_i$ である。この R の期待値は次の通りである。

$$\begin{aligned}
 E[R] &= \sum_{i=1}^n E[R_i] \\
 &= \sum_{i=1}^n \phi_{0i} (1 - e^{-\lambda_i I_i}) \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

研究費総額が一定、すなわち $T = \sum_{i=1}^n I_i$ 、この条件の下で $E[R]$ が最大となるためには第 i 課題に投入する研究費は

$$I_j = T w_j + W (W_j - w_j), (j = 1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots(2)$$

である。ここで

$$\left. \begin{aligned}
 w_j &= \frac{1}{\lambda_j} / w, & w &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

$$w_j = \frac{\log \lambda_j \theta_{0j}}{\lambda_j} / W, \quad W = \sum_{j=1}^n \frac{\log \lambda_j \theta_{0j}}{\lambda_j} \quad \dots(3)$$

である。この配分法にしたがう場合は期待できる研究成果は

$$\max E[R] = \sum_{i=1}^n \theta_{0i} - w e^{-\frac{1}{w}(T-W)} \quad \dots\dots\dots(4)$$

であり、分散は次の通りである

$$D^2 [R/\max E[R]] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i \theta_{0i} - \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right) w e^{-\frac{1}{w}(T-W)} \right\} \\ \times w e^{-\frac{1}{w}(T-W)} \quad \dots\dots\dots(5)$$

研究成果の期待値については、

$$\frac{d^2}{dT} [\max E[R]] = e^{-\frac{1}{w}(T-W)} > 0 \\ \frac{d^2}{dT^2} [\max E[R]] = -\frac{1}{w} e^{-\frac{1}{w}(T-W)} < 0$$

であるから、研究費総額 T の増加関数であるが、増加速度は単調に減少する関数である。分散については、

$$\frac{d}{dT} \left\{ D^2 [R/\max E[R]] \right\} \\ = -\left(\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n w_i \theta_{0i} \right\} - 2w \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right) e^{-\frac{1}{w}(T-W)} \right) e^{-\frac{1}{w}(T-W)} \\ \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{d^2}{dT^2} \left\{ D^2 [R/\max E[R]] \right\}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{w}\right)\left\{\left(\sum_{i=1}^n w_i \phi_i\right) - 4w \left(\sum_{i=1}^n w_i^2\right) e^{-\frac{1}{w}(T-w)}\right\} e^{-\frac{1}{w}(T-w)} \dots\dots\dots(8)$$

である。(7), (8)式より

$$\frac{d}{dT} \left[D^2 [R/\max E[R]] \right] = 0, \frac{d^2}{dT^2} \left[D^2 [R/\max E[R]] \right] = 0$$

の解は前, 後者それぞれより,

$$T=W - \left\{ \log \left(\sum_{i=1}^n w_i \phi_i \right) - \log \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right) - \log w - \log 2 \right\} w \dots\dots (9)$$

$$T=W - \left\{ \log \left(\sum_{i=1}^n w_i \phi_i \right) - \log \left(\sum_{i=1}^n w_i \right) - \log w - \log 4 \right\} w \dots\dots (10)$$

である。それぞれを T_1 , T_2 で示すと,

$$\frac{d}{dT} \left[D^2 [R/\max E[R]] \right] \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0, T \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} T_1 \text{ (符号同順)}$$

$$\frac{d}{dT^2} \left[D^2 [R/\max E[R]] \right] \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0, T \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} T_2 \text{ (符号同順)}$$

となる。したがって、 $D^2 [R/\max E[R]]$ は $T < T_1$ で増加するが、増加の速度は減少する。 $T = T_1$ において増加は止まり、 T_1 を越えると減少する。減少の加速度は $T < T_2$ において次第に弱まり、 T_2 において加速度は 0 となる。 $D^2 [R/\max E[R]]$ は T_2 を越えても減少するが、減少の加速度は減少の速度を落すように働き、したがって減少の速度は次第に鈍くなる。 $T \rightarrow \infty$ にしたがって $D^2 [R/\max E[R]] \rightarrow 0$ である。 $T = T_1$, T_2 における値を(4), (5)式から求めておけば次の通りである。

$T = T_1$:

$$\max E[R] = \sum_{i=1}^n \phi_i - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sum_{i=1}^n w_i \phi_i}{\sum_{i=1}^n w_i^2} \dots\dots\dots(11)$$

$$D^2 [R/\max E[R]] = \frac{1}{8} \frac{\left(\sum_{i=1}^n w_i \Phi_{0i} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right)} \dots\dots\dots(12)$$

$$(C.V.)^2 = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sum_{i=1}^n w_i \Phi_{0i}^2}{\left\{ 2 \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_{0i} \right) - \left(\sum_{i=1}^n w_i \Phi_{0i} \right)^2 \right\}^2} \dots\dots(13)$$

T = T₂ :

$$\max E[R] = \sum_{i=1}^n \Phi_{0i} - \frac{1}{4} \frac{\sum_{i=1}^n w_i \Phi_{0i}}{\sum_{i=1}^n w_i^2} \dots\dots\dots(14)$$

$$D^2 [R/\max E[R]] = \frac{1}{32} \frac{\left(\sum_{i=1}^n w_i \Phi_{0i} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right)} \dots\dots\dots(15)$$

$$(C.V.)^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n w_i \Phi_{0i} \right)^2}{\left\{ 4 \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \Phi_{0i} \right) - \left(\sum_{i=1}^n w_i \Phi_{0i} \right)^2 \right\}^2} \dots\dots(16)$$

この§ 3.2の諸論は、特別な場合として§ 3.1の結果を含んでいる。すなわちλ_i = λ およびΦ_{0i} = Φ₀がすべての研究課題(i = 1, 2, ..., n)について成立つならば、(3)においてW = n/λ, W = n log λ Φ₀ / λ したがってw_j = 1/n, W_j = 1/nとなるから、(2)においてはI_j = T/n (j = 1, 2, ..., n)となる。これは§ 3.1の(5)と一致している。同様にすれば、(4), (5)は§ 3.1における(6), (7)に帰着する。

更に(9), (10)のT₁, T₂ は(n/λ) log₂, (2n/λ) log₂となり、§

3.1の要約でのべた事柄と一致する。

§ 3.3. 研究条件によつて多数の研究課題を分類した場合

§ 3.2.では研究条件がすべて異なる場合についてのべた。ここでは研究条件によつて多数ある研究課題が分類できる場合についてのべる。

研究課題は n 件であつて、研究条件によつて m ケの級に分類されるとする。第 i 級の研究条件を (ϕ_i, λ_i) , $(i = 1, 2, \dots, m)$ で表わし、この級に属する研究課題数を n_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 件とする。第 i 級の第 j 課題に投入する研究費を I_{ij} で示せば、研究費総額 T との間には

$$T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} I_{ij} \quad \dots\dots\dots(1)$$

である。研究課題数については

$$n = \sum_{i=1}^m n_i \quad \dots\dots\dots(2)$$

が成立つ。研究費 I_{ij} を投入することによつてえられる研究成果を R_{ij} で示せば、研究成果の全体はこれまでと同様に考えると、

$$R = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} R_{ij} \quad \dots\dots\dots(3)$$

である。この R については

$$E[R] = \sum_{i=1}^m \phi_i \left(n_i - \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_i I_{ij} \right) \quad \dots\dots\dots(4)$$

である。研究費総額 T を一定という条件(8)の下で $E[R]$ が最大となるためには、第 i 級の第 j 課題に投入する研究費は

$$I_{ij} = \frac{1}{n_i} \left\{ w_i T - (w_i - w_i) W \right\} \quad \dots\dots\dots(5)$$

である。ここで

$$\left. \begin{aligned} w_j &= \frac{n_j}{\lambda_j} / W, & W &= \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{\lambda_i} \\ w_j &= \frac{n_j}{\lambda_j} \log \lambda_j \phi_{0j} / W, & W &= \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{\lambda_i} \log \lambda_i \phi_{0i} \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

である。(5)より明らかなことは、どの級でも、同じ級にぞくする研究課題には同額の研究費を交付したとき、全体の研究成果は最大となることが期待されることである。

各級への配分は、(5)から

$$I_{i.} = w_i T - (w_i - W) W \quad \dots\dots\dots(7)$$

である。言いかえると、研究費総額 T を(7)によつて各級に配分し、各級内では均等配分、すなわち $I_{ij} = I_{i.}/n_i$, すれば $E[R]$ が最大となるということである。

この配分法にしたがうときに期待できる研究成果は

$$\max E[R] = \sum_{i=1}^m n_i \phi_{0i} - w e^{-\frac{1}{W}(T-W)} \quad \dots\dots\dots(8)$$

であり、分散は

$$D^2 [R/\max E[R]] = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} - \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i^2}{n_i} \right) w e^{-\frac{1}{W}(T-W)} \right\} \times w e^{-\frac{1}{W}(T-W)} \quad \dots\dots (9)$$

である。

研究成果の期待値については、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} [\max E[R]] &= e^{-\frac{1}{W}(T-W)} > 0 \\ \frac{d^2}{dT^2} [\max E[R]] &= -\frac{1}{W} e^{-\frac{1}{W}(T-W)} < 0 \end{aligned}$$

であつて、前§と全く同じであり、研究費総額 T の増加関数であるが増加速度は単調に減少する関数である。分散については、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dT} \left[D^2 [R/\max E[R]] \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ \left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right) - 2w \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i^2}{n_i} \right) e^{-\frac{1}{w}(T-w)} \right\} e^{-\frac{1}{w}(T-w)} \end{aligned} \quad \dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dT^2} D^2 [R/\max E[R]] \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{w} \right) \left\{ \left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right) - 4w \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i^2}{n_i} \right) e^{-\frac{1}{w}(T-w)} \right\} e^{-\frac{1}{w}(T-w)} \end{aligned} \quad \dots\dots (11)$$

である。(10), (11)式を0とおいて T について解いた値をそれぞれ T_1 , T_2 とおけば

$$T_1 = w - \left\{ \log \left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right) - \log \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i^2}{n_i} \right) - \log w - \log 2 \right\} w \quad \dots (12)$$

$$T_2 = w - \left\{ \log \left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right) - \log \left(\sum_{i=1}^m \frac{w_i^2}{n_i} \right) - \log w - \log 4 \right\} w \quad \dots (13)$$

である。 $D^2[R/\max E[R]]$ については

$$\frac{d}{dT} \left[D^2 [R/\max E[R]] \right] \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}, T \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} T_1 \quad (\text{符号同順})$$

$$\frac{d^2}{dT^2} \left[D^2 [R/\max E[R]] \right] \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}, T \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} T_2 \quad (\text{符号同順})$$

となる。したがつて、 $D^2 [R/\max E[R]]$ の T に関する行動は、(12), (13)による T_1 , T_2 を境として、§ 3.2.にのべたこと同様になつている。

$T = T_1$, T_2 における値を(8), (9)式から求めると次の通りである。

$T = T_1$:

$$\max E[R] = \sum_{i=1}^m n_i \phi_{0i} - \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i}}{\sum_{i=1}^m w_i^2 / n_i} \quad \dots\dots (14)$$

$$D^2 [R/\max E[R]] = \frac{1}{8} \frac{\left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^m w_i^2/n_i \right)} \dots\dots(15)$$

$$(C.V.)^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{i=1}^m w_i^2/n_i \right) \left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right)^2}{\left\{ 2 \left(\sum_{i=1}^m w_i^2/n_i \right) \left(\sum_{i=1}^m \phi_{0i} \right) - \left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right) \right\}^2} \dots\dots(16)$$

T = T₂

$$\max E[R] = \sum_{i=1}^m n_i \phi_{0i} - \frac{1}{4} \frac{\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i}}{\sum_{i=1}^m w_i^2/n_i} \dots\dots(17)$$

$$D^2 [R/\max E[R]] = \frac{1}{32} \frac{\left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^m w_i^2/n_i \right)} \dots\dots(18)$$

$$(C.V.)^2 = \frac{1}{2} \frac{\left(\sum_{i=1}^m w_i^2/n_i \right) \left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right)^2}{\left\{ 4 \left(\sum_{i=1}^m w_i^2/n_i \right) \left(\sum_{i=1}^m \phi_{0i} \right) - \left(\sum_{i=1}^m w_i \phi_{0i} \right) \right\}^2} \dots\dots(19)$$

この § 3.3 の諸論は、§ 3.2 を特別な場合として含んでいる。すなわち § 3.3. において $n_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$) とするならば、明らかである。

§ 4. 研究費の分割投入法

研究すべき事項が多数あり、これらに必要な研究費が多額となると、研究予算の能率的運営上の次のような問題が起きる。ある研究会計年度中に採択されたすべての研究課題にその研究課題が必要とする研究費全額を交付するならば、次のような場合に較べて採択する研究課題数は少くなる。研究には相当期間の時間が必要であるから、必ずしも研究費全額が一会計年度中に交付されることが絶対必要条件でない。研究によつては数年度にわたつて交付を受けても何等差障りない。このような研究もかなりあるから、研究費総額を分割投入することにするならば、各会計年度に採択される研究課題数は前者より多くなる。多数の研究が併行して同時に行われるならば、研究の総合的成果はより大きいものと期待される。それ故に研究費の分割投入に関する問題を以下に論じよう。

§ 4.1 単純型模型へ繰込み投入する場合の準備

ある1つの研究課題へ投入する研究費を I とする。この研究費を m 回に分けて投入するものとし、第 i 回目の研究費を I_i ($i = 1, 2, \dots, m$) とする。 I_i を投入することによつてうる研究成果を R_i で示し、第 i 回までに投入した研究費を Π_i ($= I_1 + I_2 + \dots + I_i$) で示し、これによつてうる総合的研究成果を単純和 $1R_i = R_1 + R_2 + \dots + R_i$ とするならば、研究費 I を分割投入によつてうる総合的研究成果は $1R_m$ である。

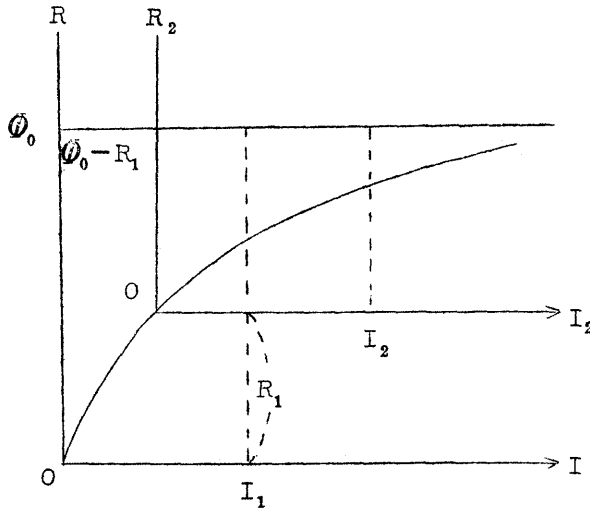
次に研究費 I を m 回に分けて投入する対象である研究課題を特徴付けよう。

- (1) この研究課題に研究費 I を投入すると、これによる研究成果 R は $R \in [0, \psi_0]$ で

$$E[R] = \psi_0 (1 - e^{-\lambda I})$$

$$D^2[R] = \frac{1}{2} \psi_0^2 (1 - e^{-\lambda I}) e^{-\lambda I}$$

なる特徴を持つている。〔注4〕



(2) m 回分割投入の第1回投入では、 R_1 なる研究成果がえられたとすれば、第2回投入では、 R_2 は $[0, \phi_0 - R_1]$ に分布し

$$E[R_2] = (\phi_0 - R_1)(1 - e^{-\lambda I_1}) \dots\dots\dots (1)$$

(2)

$$D^2[R_2] = \frac{1}{2}(\phi_0 - R_1)^2(1 - e^{-\lambda I_1})e^{-\lambda I_1} \dots\dots\dots (2)$$

である。Eおよび D^2 の下についている(2)は第1回の研究費 I_1 の投入によつてえられた研究成果が R_1 であつたという条件の下における R_2 の平均または分散を示すことを明らかにするための記号である。以下でも同様の記号を随時用いるが今後は別段断ることをしない。

一般に、第1回から第 $i-1$ 回までの研究費によつてえた研究成果を R_1, R_2, \dots, R_{i-1} で示すならば、この条件の下における第 i 回の研究費投入による成果 R_i については

〔準備1〕

$$E[R_i] = (\phi_0 - 1R_{i-1})(1 - e^{-\lambda I_i}) \dots\dots\dots (3)$$

(i)

〔準備2〕

$$D_{(i)}^2 [R_i] = \frac{1}{2} (\phi_0 - 1R_{i-1})^2 (1 - e^{-\lambda I_i}) e^{-\lambda I_i} \dots \dots \dots (4)$$

である。

このような場合，次の関係式が成立つ。

[準備3]

$$E_{(i)} [1R_i] = 1R_{i-1} + (\phi_0 - 1R_{i-1})(1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})}) \dots (5)$$

$$E_{(i-1, i)} [1R_i] = 1R_{i-2} + (\phi_0 - 1R_{i-2})(1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-2})}) \dots \dots \dots (6)$$

証明は次の通りである。

$$\begin{aligned} E_{(i)} [1R_i] &= E_{(i)} [1R_{i-1} + R_i] \\ &= 1R_{i-1} + E_{(i)} [R_i] \\ &= 1R_{i-1} + (\phi_0 - 1R_{i-1})(1 - e^{-\lambda I_i}) \\ &= 1R_{i-1} + (\phi_0 - 1R_{i-1})(1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } E_{(i-1, i)} [1R_i] &= E_{(i-1)} E_{(i)} [1R_i] \\ &= E_{(i-1)} [1R_{i-1} + (\phi_0 - 1R_{i-1})(1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})})] \\ &= E_{(i-1)} [\phi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})}) + 1R_{i-1} e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})}] \\ &= \phi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})}) + E_{(i-1)} [1R_{i-1}] e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})} \\ &= \phi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})}) + 1R_{i-2} + (\phi_0 - 1R_{i-2}) \\ &\quad \times (1 - e^{-\lambda(\Pi_{i-1} - \Pi_{i-2})}) e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-1})} \end{aligned}$$

$$= 1R_{i-2} + (\psi_0 - 1R_{i-2})(1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-2})})$$

上の〔準備3〕より予想できる次の一般的な関係がえられる。

さきに平均，分散をどの段階で考えるかを示すために $\langle i \rangle, (i-1, i)$ を用いたが，ここでは $\langle i \rangle$ で $(1, 2, \dots, i)$ を示すこととし， $\langle i \rangle - \langle i-j \rangle$ で $(i-j+1, i-j+2, \dots, i)$ を示すこととするならば，

$$\begin{aligned} \text{〔準備4〕} \quad \langle i \rangle \langle i-j \rangle^{\mathbb{E}} [1R_i] &= 1R_{i-j} + (\psi_0 - 1R_{i-j}) \\ &\times (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j})}) \quad \dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$(j = 1, 2, \dots, i; i = 1, 2, \dots, m)$$

証明は次の通りである。

まづ i を定めたとき $j = j'$ において上の関係が成立つとする。
このとき

$$\begin{aligned} \langle i \rangle \langle i-j'+1 \rangle^{\mathbb{E}} [1R_i] &= \langle i-j'+1 \rangle^{\mathbb{E}} \langle i \rangle \langle i-j' \rangle^{\mathbb{E}} [1R_i] \\ &= \langle i-j' \rangle^{\mathbb{E}} [1R_{i-j'} + (\psi_0 - 1R_{i-j'}) \\ &\quad \times (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})})] \\ &= \psi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})}) \\ &\quad + \langle i-j' \rangle^{\mathbb{E}} [1R_{i-j'}] e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})} \\ &= \psi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})}) \\ &\quad + \langle i-j' \rangle^{\mathbb{E}} [1R_{i-j'+1} + R_{i-j'}] e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})}) + \\
&+ \left\{ 1R_{i-j'+1} + \frac{E}{(i-j')} [R_{i-j'}] \right\} e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})} \\
&= \varphi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})}) \\
&+ \left\{ 1R_{i-j'+1} + (\varphi_0 - 1R_{i-j'+1}) \right. \\
&\quad \left. (1 - e^{-\lambda I_{i-j'}}) \right\} e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'})} \\
&= 1R_{i-j'+1} + (\varphi_0 - 1R_{i-j'+1}) \\
&\quad (1 - e^{-\lambda(\Pi_i - \Pi_{i-j'+1})})
\end{aligned}$$

次に j を定めておいて、 $i = i'$ において上と同様の関係が成立つことを示そう。

$$\begin{aligned}
\langle i'+1 \rangle \frac{E}{\langle i'+1-j \rangle} [1R_{i'+1}] &= \langle i' \rangle \frac{E}{\langle i'-j+1 \rangle} (i'+1) \\
&\quad [1R_{i'} + R_{i'+1}] \\
&= \langle i' \rangle \frac{E}{\langle i'-j+1 \rangle} [1R_{i'} + \frac{E}{(i'+1)} [R_{i'+1}]] \\
&= \langle i' \rangle \frac{E}{\langle i'-j+1 \rangle} [1R_{i'} + (\varphi_0 - 1R_{i'}) (1 - e^{-\lambda I_{i'+1}})] \\
&= \varphi_0 (1 - e^{-\lambda I_{i'+1}}) + \langle i' \rangle \frac{E}{\langle i'-j+1 \rangle} [1R_{i'}] e^{-\lambda I_{i'+1}} \\
&= \varphi_0 (1 - e^{-\lambda I_{i'+1}}) + \left\{ 1R_{i'-j+1} + (\varphi_0 - 1R_{i'-j+1}) \right. \\
&\quad \left. \times (1 - e^{-\lambda(\Pi_{i'} - \Pi_{i'-j+1})}) \right\} e^{-\lambda I_{i'+1}} \\
&= \varphi_0 (1 - e^{-\lambda I_{i'+1}}) + \varphi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_{i'} - \Pi_{i'-j+1})}) e^{-\lambda I_{i'+1}} \\
&\quad + 1R_{i'-j+1} e^{-\lambda(\Pi_{i'} - \Pi_{i'-j+1})} e^{-\lambda I_{i'+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_{i'+1} - \Pi_{i'+1-j})}) + 1R_{i'+1-j} \\
&\quad \times e^{-\lambda(\Pi_{i'+1} - \Pi_{i'+1-j})} \\
&= 1R_{i'+1-j} + (\psi_0 - 1R_{i'+1-j})(1 - e^{-\lambda(\Pi_{i'+1} - \Pi_{i'+1-j})})
\end{aligned}$$

よつて証明できた。

総合的研究成果の期待値 $E_{\langle m \rangle} [1R_m]$ は、〔準備4〕において $i = m$, $j = m$ とおいた特別な場合である。したがつて、直ちに

$$\text{〔定理1〕} \quad E_{\langle m \rangle} [1R_m] = \psi_0 (1 - e^{-\lambda \Pi_m}) \dots \dots \dots (8)$$

をうる。この Π_m は研究費 I に他ならないから、期待値は、研究費 I をいく回に分割しようとも、また m 回分割投入における配分をどのようにしようとも変わらない。この事実を物語つてゐる。

次に $1R_m$ の分散 $D^2_{\langle m \rangle} [1R_m]$ を求めよう。このためにいくつかの準備を行なう。

〔準備5〕

$$\begin{aligned}
D^2_{\langle m \rangle} [1R_m] = & \sum_{j=1}^m E_{\langle m-j \rangle} \left\{ D^2_{\langle m-j+1 \rangle \langle m-j \rangle} \right. \\
& \left. E_{\langle m \rangle \langle m-j+1 \rangle} [1R_m] \right\} \dots \dots \dots (9)
\end{aligned}$$

次に証明を行なう。初めに次の事柄を約束しておく。

$$(0) \quad E = 1, \quad E_{\langle 0 \rangle} = 1, \quad E_{\langle i \rangle \langle i \rangle} = 1, \quad 1R_0 = 0, \quad \Pi_0 = 0$$

しかるときには、

$$D^2_{\langle m \rangle} [1R_m] = E_{\langle m \rangle} [1R_m^2] - \left\{ E_{\langle m \rangle} [1R_m] \right\}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \langle_{m-1}^E \left[\frac{D^2}{(m)} [1R_m] \right] + \langle_{m-1}^E \left[\left\{ \frac{E}{(m)} [1R_m] \right\}^2 \right] \\
&\quad - \left\{ \frac{E}{(m)} [1R_m] \right\}^2 \\
&= \langle_{m-1}^E \left[\frac{D^2}{(m)} [1R_m] \right] + \langle_{m-2}^E \left[\frac{D^2}{(m-1)} \left\{ \frac{E}{(m)} [1R_m] \right\} \right] \\
&\quad + \langle_{m-2}^E \left[\left\{ \frac{E}{(m-1, m)} [1R_m] \right\}^2 \right] - \left\{ \frac{E}{(m)} [1R_m] \right\}^2
\end{aligned}$$

以下同様に逐次に分散を持ためば、最後には

$$\langle_{m-m-1}^E \left[\left\{ (2, 3, \dots, m) \frac{E}{(m)} [1R_m] \right\}^2 \right] - \left\{ \frac{E}{(m)} [1R_m] \right\}^2$$

となり、これは $\frac{D^2}{(1)} \left[\langle_{m-1}^E \langle_{1} \rangle [1R_m] \right]$ であつて、これらを整理すれば(9)式がえられる。

この定理にしたがつて諸項を順次に求めていこう。

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \langle_{m-1}^E \langle_{m-j+1} \rangle [1R_m] &= \phi_0 (1 - e^{-\lambda(\Pi_m - \Pi_{m-j+1})}) \\
&\quad + 1R_{m-j+1} e^{-\lambda(\Pi_m - \Pi_{m-j+1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \langle_{m-j+1}^D \langle_{m-j} \rangle \left[\langle_{m-1}^E \langle_{m-j+1} \rangle [1R_m] \right] \\
&= \langle_{m-j+1}^D \langle_{m-j} \rangle [R_{m-j+1}] e^{-2\lambda(\Pi_m - \Pi_{m-j+1})} \\
&= (\phi_0 - 1R_{m-j})^2 \mathcal{C}_{m-j}^{(1)}
\end{aligned}$$

ここで

$$\mathcal{C}_{m-j}^{(1)} \equiv \frac{1}{2} \left\{ e^{-\lambda(2\Pi_m - \Pi_{m-j+1} - \Pi_{m-j})} - e^{-2\lambda(\Pi_m - \Pi_{m-j})} \right\}$$

..... (10)

$$(iii) \quad \langle m-j \rangle^E [(\psi_0 - 1R_{m-j})^2] = C_{m-j} \langle m-j-1 \rangle^E [(\psi_0 - 1R_{m-j-1})^2]$$

ここで

$$C_{m-j} = \frac{1}{2} (1 + e^{-\lambda I_{m-j}}) e^{-\lambda I_{m-j}} \quad (j=1, 2, \dots, m-1)$$

(iv) (iii)の結果を逐次に用いると

$$\langle m-j \rangle^E [(\psi_0 - 1R_{m-j})^2] = \psi_0^2 C_{m-j}^{(2)}$$

ここで

$$C_{m-j}^{(2)} = C_1 C_2 \cdots C_{m-j}, \quad C_0^{(2)} = 1 \cdots \cdots (11)$$

したがって

$$(v) \quad \langle m-j \rangle^E \left[\langle m-j+1 \rangle^{D^2} - \langle m-j \rangle \langle m \rangle^E - \langle m-j+1 \rangle [1R_m] \right] \\ = C_{m-j}^{(1)} C_{m-j}^{(2)} \psi_0^2$$

以上の結果を総轄すると、【準備5】は次のようになる。

【定理2】

$$\langle m \rangle^{D^2} [1R_m] = \psi_0^2 \sum_{j=1}^m C_{m-j}^{(1)} C_{m-j}^{(2)} \cdots \cdots (12)$$

ここで $C_{m-j}^{(1)}$, $C_{m-j}^{(2)}$ はそれぞれ(ii), (iv)で定義されたものである。

§ 4.2 単純型模型へ繰込み投入する場合の分割投入法

簡単にするために

$$a_i = e^{\lambda I_i} \quad (i=1, 2, \dots, m) \cdots \cdots (13)$$

とにおいて(ii), (iv)の $C_{m-j}^{(1)}$, $C_{m-i}^{(2)}$ を書きかえると、【定理2】は次のように書ける。

$$\langle \underset{m}{D} \rangle^2 [1R_m] = \varphi_0^2 e^{-2\lambda} \underset{m}{H} \sim \dots \dots \dots (14)$$

$$\widetilde{H} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^j (a_j - 1) \prod_{i=1}^{j-1} (1 + a_i) \dots \dots \dots (15)$$

この \widetilde{H} を a_1, a_2, \dots, a_m に関する次数にしたがつて整頓すると、どの次数の項も係数は $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ となる。そこで

$$\left. \begin{aligned} H_m(1) &= a_1 + a_2 + \dots + a_m \\ H_m(2) &= (a_1 a_2 + \dots + a_1 a_m) + (a_2 a_3 + \dots + a_2 a_m) + \\ &\quad \dots + (a_{m-1} a_m) \\ &\quad \vdots \\ H_m(i) &= \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_i \leq m} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_i} \\ &\quad \vdots \\ H_m(m) &= a_1 a_2 \dots a_m \end{aligned} \right\} (16)$$

を定義すると、次の結果がえられる。

[定理 3]

$$\langle \underset{m}{D} \rangle^2 [1R_m] = \left(\frac{1}{2}\right)^m \varphi_0^2 e^{-2\lambda} \underset{m}{H} \left\{ \sum_{i=1}^m H_m(i) - (2^m - 1) \right\} \dots \dots (17)$$

ここで $H_m(i)$ は (16) で定義されたものである。

さて、[定理 1] によれば、研究費を分割投入しても分割しないで投入しても、また分割の回数をいく回にしても、更にどのような金額に分割投入しても研究成果の期待値 $\underset{m}{E} [1R]$ は同じである。そこで、この期待値の安定性を問題として、 m 回に分割する際にはどのような金額に分割したとき安定の割合が高いかについて検討しよう。この測度として分散を採上げる。 $\underset{m}{H} = I_1 + I_2 + \dots + I_m$ が一定とい

う条件の下で、 $D^2 [1R_m]$ が最小となる I_1, I_2, \dots, I_m を定めればよいのであるが、 $D^2 [1R_m]$ は正であるから、 $H_m(0) = 1$ とすれば $\sum_{i=0}^m H_m(i)$ が最小となる I_1, I_2, \dots, I_m を定めればよいことになる。 μ を Lagrange の乗数とし、 $\sum_{i=0}^m H_m(i) = \prod_{i=1}^m (1+a_i)$ に注目し、次の関数を考える。

$$G(I_1, I_2, \dots, I_m) = \prod_{i=1}^m (1+a_i) + \mu \left(\prod_m - \sum_{i=1}^m I_i \right)$$

これを I_j によつて微分すれば

$$\frac{dG}{dI_j} = \left\{ \prod_{i=1}^m (1+a_i) \right\} \frac{da_j}{dI_j} - \mu \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

となる。ここで $\frac{da_j}{dI_j} = \lambda a_j$ に注目し、 $\frac{dG}{dI_j} = 0$ を整理すれば、

$$\frac{a_j}{1+a_j} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{1}{\prod_{i=1}^m (1+a_i)} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

となる。右辺はすべての j に対して一定であるから、このことから $a_1 = a_2 = \dots = a_m$ がえられる。 $a_j = \lambda I_j$ なることによつて $I_1 = I_2 = \dots = I_m$ したがつて

$$I_j = \frac{\prod_m}{m} \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad \dots \dots \dots (10)$$

のとき $D^2 [1R_m]$ が最小となる。したがつて、研究費を m 回に分割し投入するならば、均等に分割するとき研究成果安定度が最も大きいことが示された。(10)を(1)に代入して整頓すれば次の結果になる。

[定理 4]

$D^2 [1R_m]$ は $I_i = \prod_m / m$ ($i=1, 2, \dots, m$) のとき最小であつて、その値は

$$\min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m] = \left(\frac{1}{2}\right)^m \theta_0^2 e^{-2\lambda \Pi_m} \times \left\{ \left(1 + e^{\lambda(\Pi_m/m)}\right)^m - 2^m \right\} \dots\dots\dots (19)$$

である。

まず、結論をのべておく。

【定理5】 均等分割したときの $\min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m]$ は、分割投入しないときの $D^2 [R]$ と較べると、

$$D^2 [R] > \min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m] \dots\dots\dots (20)$$

であつて、その差は(22)である。

(20)を確認するために、まず、(19)および § 1 (19)を次のように書きかえる。

(19)の行動を調べればおのづから明らかなことであるが、研究費が任意に定つているとき、分割投入の場合とそうでない場合とどちらがよいかを、何れの場合も研究成果の期待値は $\theta_0 \cdot (1 - e^{-\lambda I})$ で等しいから $\min_{\langle m \rangle} D^2 [1R]$ を規準にして、調べよう。

$$\begin{aligned} \min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m] &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \theta_0^2 e^{-2\lambda I} \left\{ \left(1 + e^{(1/m)\lambda I}\right)^m - 2^m \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \theta_0^2 e^{-\lambda I} \left(1 - e^{-(1/m)\lambda I}\right) \\ &\quad \times \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{2^{m-1}} \left\{ \sum_{v=1}^{m-i} 2^{v-1} \binom{m-v}{i} \right\} e^{-(m-i-1/m)\lambda I} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} D^2 [R] &= \left(\frac{1}{2}\right) \theta_0^2 e^{-\lambda I} \left(1 - e^{-(1/m)\lambda I}\right) \\ &\quad \times \sum_{i=0}^{m-1} e^{-(m-i-1/m)\lambda I} \end{aligned}$$

と書けるから、これらの差は

$$D^2 [R] - \min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m] = \left(\frac{1}{2}\right) \Phi_0^2 e^{\lambda I} (1 - e^{-(1/m)\lambda I})$$

$$\times \sum_{i=0}^{m-1} C_i e^{-(m-i-1/m)\lambda I}$$

ここで

$$C_i = 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{v=1}^{m-i} 2^{v-1} \left(\frac{m-v}{i}\right) \dots \dots \dots (21)$$

となる。mが偶数ならば

$$C_i = -C_{m-1-i} \quad (i=1, 2, \dots, \frac{m}{2})$$

また mが奇数ならば

$$C_i = -C_{m-1-i} \quad (i=1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}), \quad \frac{C_{m+1}}{2} = 0$$

が成立つ。しかも $C_i < 0$ ($i=1, 2, \dots, \frac{m}{2}$) または ($i=1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}$) であるから、

$$D^2 [R] - \min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m] = \left(\frac{1}{2}\right) \Phi_0^2 e^{-\lambda I} (1 - e^{-(1/m)\lambda I})$$

$$\times \sum_{i=0}^{m^*} C_{m-1-i} (e^{-(i/m)\lambda I} - e^{-(m-i-1/m)\lambda I})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \Phi_0^2 e^{-\lambda I} (1 - e^{-(1/m)\lambda I}) \sum_{i=0}^{m^*} C_{m-1-i} e^{-(i/m)\lambda I}$$

$$\sum_{i=0}^{m-2i-2} e^{-(j/m)\lambda I} \dots \dots \dots (22)$$

したがって、

$$D^2 [R] > \min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m]$$

となる。なお、 m^* は m が偶数のときは $\frac{m}{2}$ ，奇数のときは $\frac{m-1}{2}$ を表わすものとした。

この結果，研究費は，さきに想定した模型に関する限り，分割投入した方が研究成果の安定度が高いことになる。

研究費が定まつていて， m 回に分割投入すると定つているとき，研究費 Π_m を各回にどのように割振ればよいか—この問題に答えたのが〔定理4〕である。このように均等割の原理は2つの前提の上に成立つていゝる。そこで，研究費 I が定つていゝるとき， m 回の分割投入なら均等割 ($\Pi_m = I$)， m' 回の分割投入でも均等割 ($\Pi_{m'} = I$) がよいことは既に明らかであるが， m 回と m' 回 ($m \neq m'$) とでは何れがよいかは未だ分つていゝない。また， m 回に分割投入すると定つていゝるとき，研究費を $I (= \Pi_m)$ だけ投入なら均等割，研究費を $I' (= \Pi_{m'})$ だけ投入でも均等割がよいことも明らかであるが，研究成果の安定性という点からは， I と I' ($I \neq I'$) とでは何れがよいかも未だ分つていゝない。これらの問題に答えるためには $\min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m]$ の行動を $I (= \Pi_m)$ ， m を変えて追跡することが必要である。

このために， $x = \lambda I$ (但し $I = \Pi_m$) とおき(19)を書きかゝる。

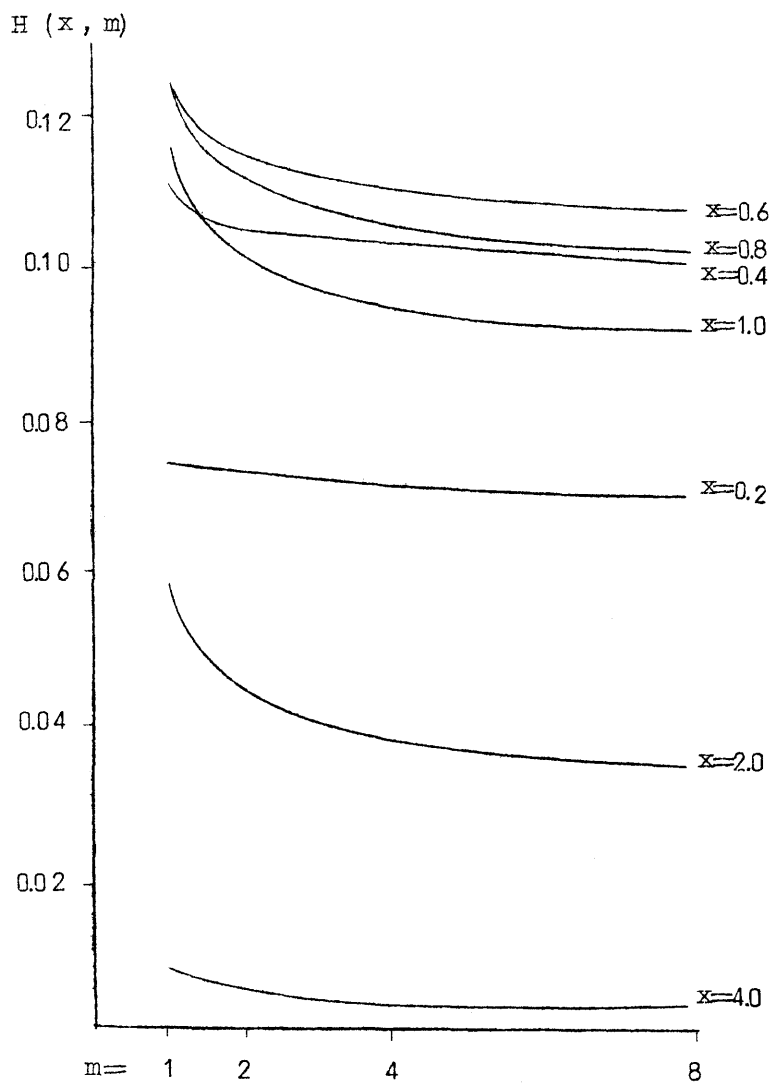
$$\min_{\langle m \rangle} D^2 [1R_m] = \theta_c^2 H(x, m)$$

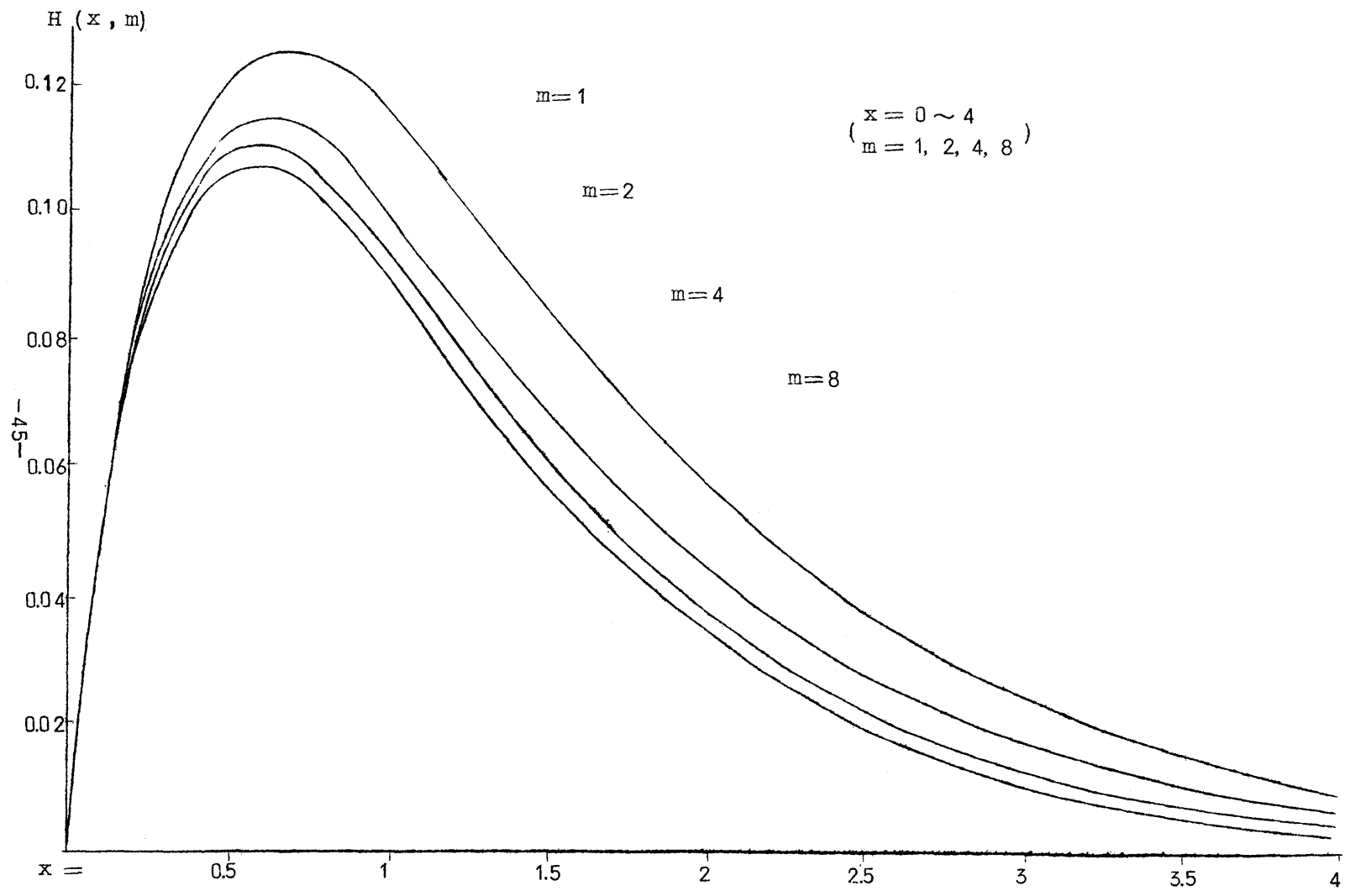
$$H(x, m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m e^{-2x} \left\{ (1 + e^{x/m})^m - 2^m \right\}$$

この $H(x, m)$ を， x と m をかえて追跡すると次の図が画ける。

したがつて，研究費が定つていゝるときは，分割回数が多いほど，研究成果の期待に安定性が高く，特に $x = 0.6 \sim 2.0$ 程度では2回乃至3回の分割でその効果が著しい。分割の回数を定めたとき，研究費の額によつて，研究成果の期待に安定性がどのように変わるかは第2の図が示してゝいる。

$(x=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 2.0, 4.0)$
 $(m=1, 2, 4, 8)$





注

〔注1〕 不完全ベータ分布

積分

$$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \beta_0(m, n)$$

はベータ函数である。これより

$$f(x; m, n) = \begin{cases} \beta_0^{-1}(m, n) x^{m-1} (1-x)^{n-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \text{ 又は } x > 1 \end{cases}$$

を定義すれば、これは不完全ベータ分布とよばれる函数である。

確率変数 X が上記の分布に従う場合の平均と分散は、それぞれ

$$E[X] = m / (m+n), \quad D^2[X] = mn / \left\{ (m+n)^2 (m+n+1) \right\}$$

である。ここで新たな変数 $R = \theta_0 X$ を定義するならば、確率変数 R のしたがう分布は、その密度函数が

$$g(Y; m, n) = \theta_0^{-(m+n-1)} \beta_0^{-1}(m, n) Y^{m-1} (\theta_0 - Y)^{n-1}$$

($0 \leq Y \leq \theta_0$)、平均と分散は $E[R] = \theta_0 \cdot m / (m+n)$ 、 $D^2[R] = \theta_0^2 \cdot mn / (m+n)^2 (m+n+1)$ である。

ここで2つの条件

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} E[R] = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} E[R] = \theta_0$$

を満すように $m = m(\theta)$ 、 $n = n(\theta)$ を定めることにする。このよ
うな函数はいくちもあるがここでは

$$m = (1 - e^{-\lambda\theta}), \quad n = (e^{-\lambda\theta}) \quad (\lambda > 0)$$

とする。したがつて、 $m+n=1$ であるから

$$E[R] = \theta_0 (1 - e^{-\lambda\theta}), \quad D^2[R] = \frac{\theta_0^2}{2} (1 - e^{-\lambda\theta}) e^{-\lambda\theta}$$

[注2] ベータ分布のモーメント

$$E[X] = \frac{m}{m+n}$$

$$E[X^2] = \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)}$$

$$E[X^3] = \frac{m(m+1)(m+2)}{(m+n)(m+n+1)(m+n+2)}$$

$$E[X^4] = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{(m+n)(m+n+1)(m+n+2)(m+n+3)}$$

一般に ν 次のモーメントは

$$E[X^\nu] = \frac{m(m+1)\cdots(m+\nu-1)}{(m+n)(m+n+1)\cdots(m+n+\nu-1)} \quad (\nu=1,2,3,\dots)$$

したがって分散は

$$D^2[X] = \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}$$

$$D^2[X^2] = \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)} \left\{ \frac{(m+2)(m+3)}{(m+n+2)(m+n+3)} - \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)} \right\}$$

[注3] ベータ分布の $m+n=1$ なるときのモーメント

$$E[X] = m$$

$$E[X^2] = \frac{1}{2}m(m+1)$$

$$E[X^3] = \frac{1}{3!}m(m+1)(m+2)$$

$$E[X^4] = \frac{1}{4!}m(m+1)(m+2)(m+3)$$

一般に

$$E [X^\nu] = \frac{1}{\nu!} m (m+1) (m+2) \dots (m+\nu-1)$$

また分散については

$$D^2 [X] = \frac{-1}{2} m (m-1)$$

$$D^2 [X^2] = \frac{-1}{24} (m-1) m (m+1) (5m+6)$$

$$E [1-X] = 1-m = -\frac{1}{1} (m-1)$$

$$E [(1-X)^2] = \frac{1}{2} (m-1) (m-2)$$

$$E [(1-X)^3] = \frac{-1}{3} (m-1) (m-2) (m-3)$$

$$E [(1-X)^4] = \frac{1}{4} (m-1) (m-2) (m-3) (m-4)$$

$$E [(1-X)^\nu] = \frac{1}{\nu} (m-1) (m-2) \dots (m-\nu)$$

$$D^2 [1-X] = \frac{-1}{2} m (m-1)$$

$$D^2 [(1-X)^2] = \frac{-1}{24} m (m-1) (m-2) (5m-11)$$

[注4] $Y_1 = \varphi_1 (x_1)$ に座標変換 $x_1 = a + x_2$, $y_1 = b + Y_2$ を行なうと $Y_2 = \varphi_1 (a + x_2) - b$ である。したがって $\varphi_2 (x_2) = \varphi_1 (a + x_2) - b$ である。函数型が

$$\varphi_1 (x) = C (1 - e^{-dx})$$

であるときは、

$$b = C (1 - e^{-da}), \quad C - b = C e^{-da}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 y_2 &= C (1 - e^{-d(a+x_2)}) - C (1 - e^{-da}) \\
 &= C e^{-da} (1 - e^{-dx_2}) \\
 &= (C - b) (1 - e^{-dx_2})
 \end{aligned}$$

したがって函数型が $C (1 - e^{-dx_1})$ のときは、一次変換 $x_1 = a + x_2$, $y_1 = b + y_2$ を施すと、 $(C - b) (1 - e^{-dx_2})$ となり、係数 C が $C - b$, 指数係数が不変となる。すなわち函数型は変わらないという特徴がある。

