過負荷故障によるネットワーク上のパーコレーション転移

水高 将吾 統計思考院 特任助教

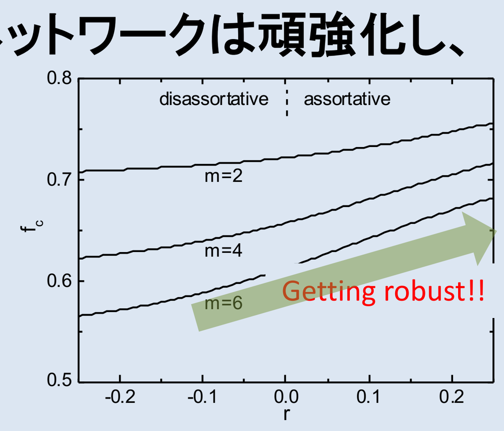
2017年6月16日 統計数理研究所 オープンハウス

Topics

- ネットワーク上のパーコレーション
- ネットワークの頑強性
- 過負荷故障
- 負荷揺らぎ
- ランダムウォーカー

Conclusions

- 過負荷故障に対するスケールフリーネットワークの頑強性をパーコレーション問題として扱った。
- 過負荷故障に対する頑強性には2種類の意味がある。
  総負荷量 W_c とノード除去率 f_c
- W_cとf_c.両方の意味で、スケールフリー性が強くなればなるほど、ネットワークは脆弱になる。
- 耐性パラメータを大きくすると、W_cの意味でネットワークは頑強化し、f_cの意味で脆弱化する。
- 次数相関がある場合
  ✓上記の傾向は変わらない。
  ✓正の次数相関はネットワークを頑強化する。



1. Introduction

ネットワークの頑強性

- 電力網の大停電
- インターネットの通信障害
- 感染症の蔓延など…

= ***ネットワーク上のパーコレーション問題***

従来のパーコレーション過程

✓ *ランダム除去* スケールフリーネットワークは頑強

✓ *ターゲット攻撃* スケールフリーネットワークは脆弱

現実ネットワークには様々なパーコレーション過程がある!!

機能性ネットワークにおける過負荷故障

機能性ネットワーク

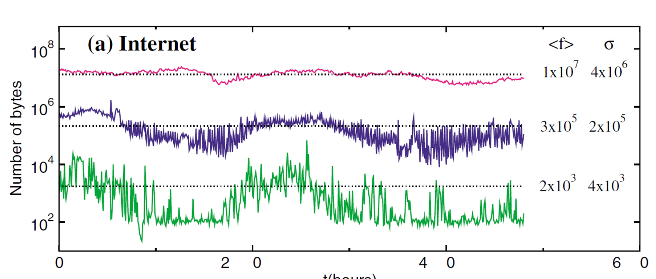
機能 ⟷ 流れ

e. g.)

電力網: 電力供給 ⟷ 電流

インターネット: 情報交換 ⟷ パケットの流れ

流れ = 平均流 + 揺らぎ



M. Argollo de Menezes and A.-L. Barabasi, PRL **92**, 028701 (2004).

負荷 = 平均負荷 + 負荷揺らぎ

ノード耐性を上回る負荷

➔ ***過負荷故障***

2. Objective

過負荷故障に対してスケールフリーネットワークが頑強かどうかを明らかにする。

3. Theory of overload failures

V. Kishore, M. S. Santhanam, and R. E. Amritkar, PRL 106, 188701 (2011).

- 離散的な負荷 ➔ ランダムウォーカー
- 負荷総量 ➔ ランダムウォーカーの総数 (W_0)
- iノード上の負荷 ➔ iノード上のウォーカー数 (w_i)
- iノードの過負荷故障 ➔ w_i がiノードの耐性q_iを超える

➔ 次の仮定の下で、過負荷故障確率が定量化される。

Overload probability

ネットワーク上のランダムウォーカー

J. D. Noh and H. Rieger, PRL **92**, 118701 (2004).

次数kのノードに存在するウォーカー数分布:

$$h_k^{W_0}(w) = \binom{W_0}{w} p_k{}^w (1-p_k)^{W_0-w}, \qquad \text{where } p_k = \frac{k}{2M}$$

$$\langle w\rangle_k = p_k W_0 = \frac{W_0 k}{2M}, \qquad \sigma_k^2 = \frac{W_0 k}{2M}\left(1-\frac{k}{2M}\right)$$

depend only on k

➔ $q_k = \langle w\rangle_k + m\sigma_k$ Capacity

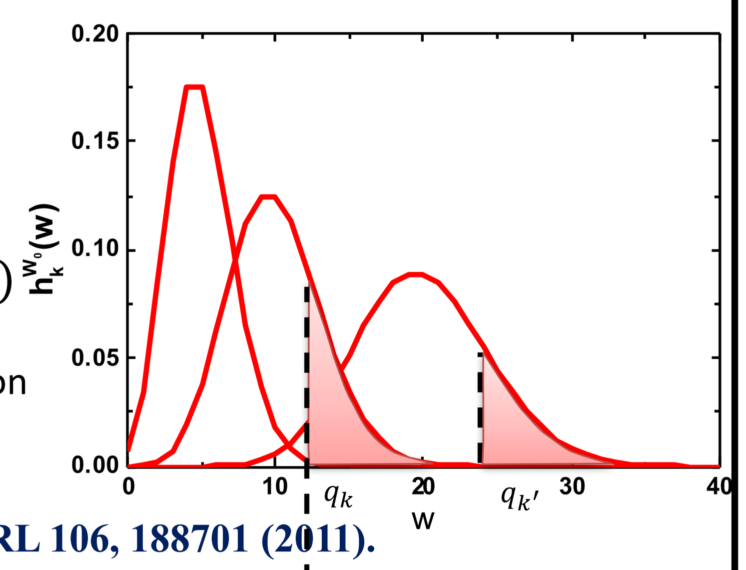
Overload probability $F_{W_0}(k)$

$$F_{W_0}(k) = \sum_{w=[q_k]+1}^{W_0} \binom{W_0}{w} p_k{}^w (1-p_k)^{W_0-w}$$

$$= I_{k/2M}([q_k(W_0)]+1, W_0-[q_k(W_0)])$$

$I_p(a,b)$: Regularized incomplete beta function

$[x]$: The greatest integer not greater than x



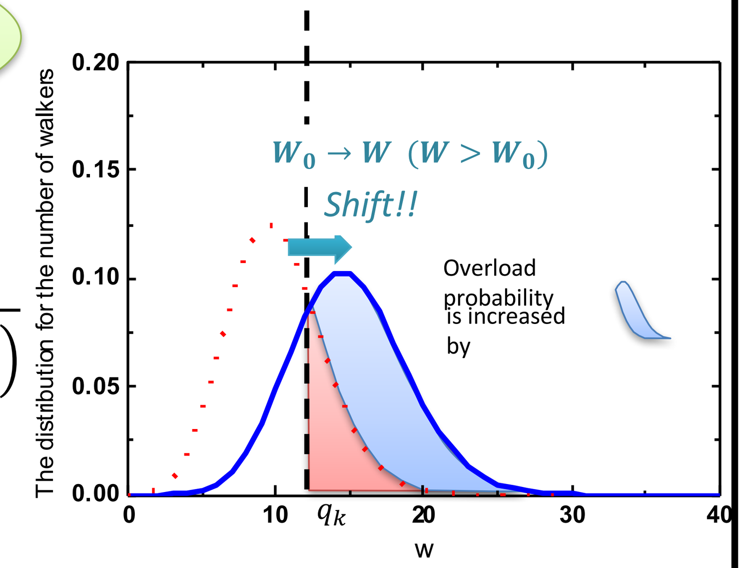
V. Kishore, M. S. Santhanam, and R. E. Amrittakar, PRL 106, 188701 (2011).

総負荷量の増大効果

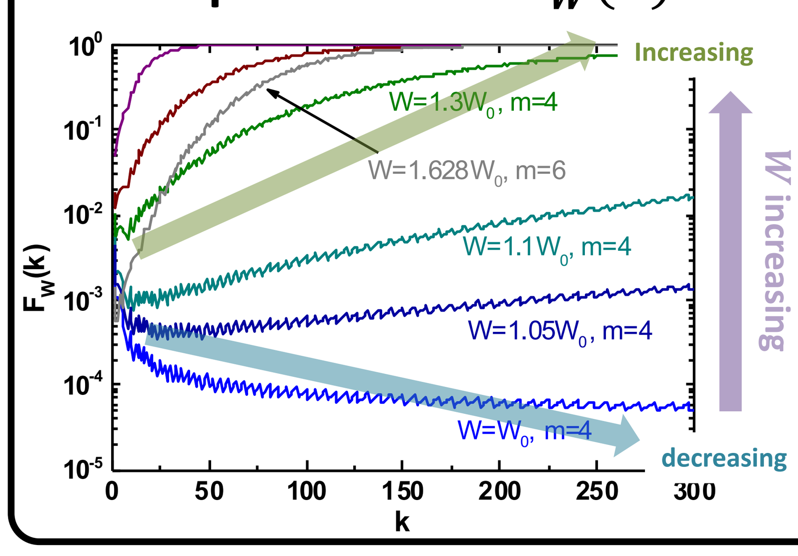
$W_0 \to W$

$$F_W(k) = I_{k/2M}([q_k(W_0)]+1, W-[q_k(W_0)])$$

Notice $q_k(W_0) = \frac{W_0 k}{2M} + m\sqrt{\frac{W_0 k}{2M}\left(1-\frac{k}{2M}\right)}$



W dependence of $F_W(k)$



$F_W(k)$の振舞いが劇的に変化!!!

✓ スケールフリーネットワークの頑強性は?

4. Analytical approach

ネットワークのパーコレーション転移

- 任意の次数分布
- 任意の次数-次数相関
- 任意の次数依存したノード除去

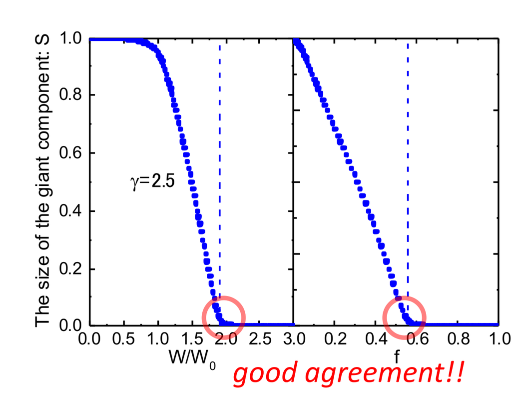
T. Tanizawa, S. Havlin, and H. E. Stanley, PRE 85, 046109 (2012).

転移点 ➔ Branching matrix $B_{kk'}$の最大固有値が1となる。

$$B_{kk'} = b_{k'} P(k'|k)(k'-1)$$

Conditional probability that an arbitrary neighbor of a degree-k node has the degree k'

Remaining fraction of degree-k'



Case of non-correlated networks:

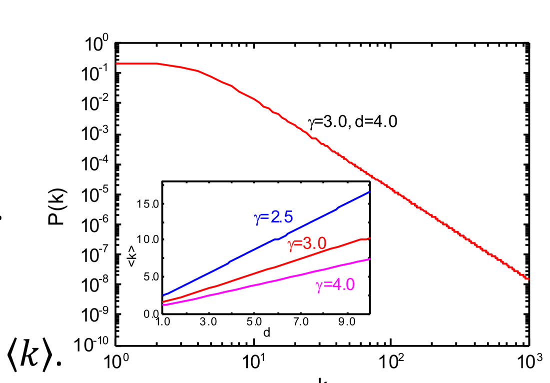
$$\sum_k[(k-1)F_W(k)-k+2]kP(k) = 0$$

$$f_c = \sum_k F_{W_c}(k)P(k)$$

Degree distribution $P(k)$: $P(k) \propto \dfrac{1}{(k^\gamma + d^\gamma)}$

We can tune the average degree $\langle k\rangle$ by controlling d for any value of γ.

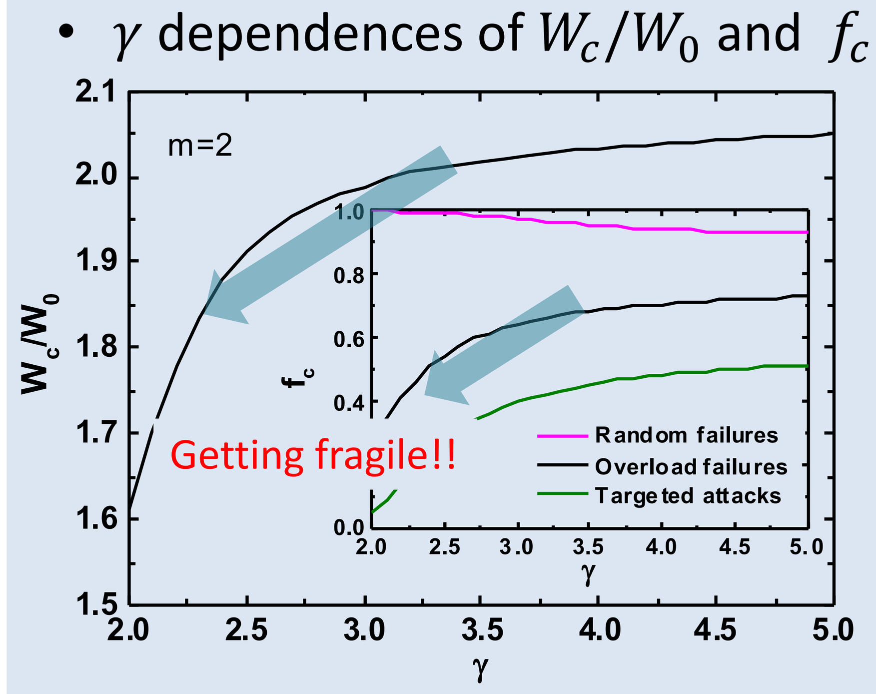
We compare the robustness of networks with different γ but the same $\langle k\rangle$.



5. Results

(Under the conditions that $\langle k\rangle = 10, W_0 = 2M$)

- γ dependences of W_c/W_0 and f_c



- m dependences of W_c/W_0 and f_c