事前過程とA超幾何系

間野 修平　**数理・推論研究系 准教授**

0　本ポスターの内容

ノンパラメトリック・ベイズ統計ではランダム測度を事前分布として用いますが，それらは事前過程と呼ばれます．本ポスターでは，あるクラスの事前過程を用いる統計的推測に現れるGel'fandらの超幾何系の周辺について紹介しています．作成者は不在ですので，ご質問やコメントは電子メール `smano@ism.ac.jp` にお願いいたします．

1　ベイズ統計と分割の確率函数

定義 1 (Ferguson 1973) 可測空間$(\mathcal{X},\mathcal{B})$上のある確率測度を$\mu$とする．$\mathcal{X}$上のランダム確率測度$P$が$\mathcal{X}$の任意の分割$\{A_1,...,A_k\}$に対し

$$(P(A_1),...,P(A_k)) \sim Dir(\theta\mu(A_1),...,\theta\mu(A_k))$$

を満たすとき，PをDirichlet過程$DP(\theta,\mu)$という．

Dirichlet過程はDirichlet分布の無限次元版で，逐次抽出はBlackwell-MacQueenの壺(1973; 中華料理店過程とも呼ばれる)で表現されます．色の連続スペクトルをμとし，θの重みで抽出される黒い玉が入った壺を考えます．$i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$回目に抽出される玉の色をX_iとし，黒でなければ同じ色の玉を加えて戻し，黒であればμに従う新しい色の玉を加えて戻すとき，

$$X_1\sim\mu,\qquad X_2|X_1\sim\frac{\theta\mu+\delta_{X_1}}{\theta+1},...,\qquad X_n|X_1,...,X_{n-1}\sim\frac{\theta\mu+\sum_{j=1}^{n-1}\delta_{X_j}}{\theta+n-1}$$

は$DP(\theta,\mu)$からの逐次抽出です．これはベイズ更新で，同時分布は周辺尤度です．共役性や事後一致性は明らかです．

周辺尤度から事前過程のモデリングを考えます．一般に，周辺尤度は交換可能な分割の確率函数(Exchangeable Partition Probability Function; EPPF)で，同値類が生成する確率分割Π_nは，対称な確率函数p_nに対し

$$\mathbb{P}(\Pi_n=\{A_1,...,A_k\})=p_n(|A_1|,...,|A_k|),\qquad 1\leq k\leq n$$

を満たします．重複度$c_j:=\#\{i;n_i=j\}$の台は，$n=n_1+\cdots+n_k$について

$$\mathcal{S}_{n,k}:=\left\{(c_1,...,c_n):\sum_{i=1}^n ic_i=n,\sum_{i=1}^n c_i=k\right\}\qquad(1)$$

です．

定義 2 (Vershik 1996) EPPFのクラス

$$p_n(n_1,...,n_k)=v_{n,k}\prod_{i=1}^k w_{n_i},\qquad w_i:=x_i i!\qquad(2)$$

を(ある)可乗測度という．

定理 1 (Gnedin & Pitman 2006) EPPF (2)が無限交換可能性を満たせば，$w_i=(1-\alpha)_{i-1}, i\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$である．ただし，$(a)_i:=a(a+1)\cdots(a+i-1)$．

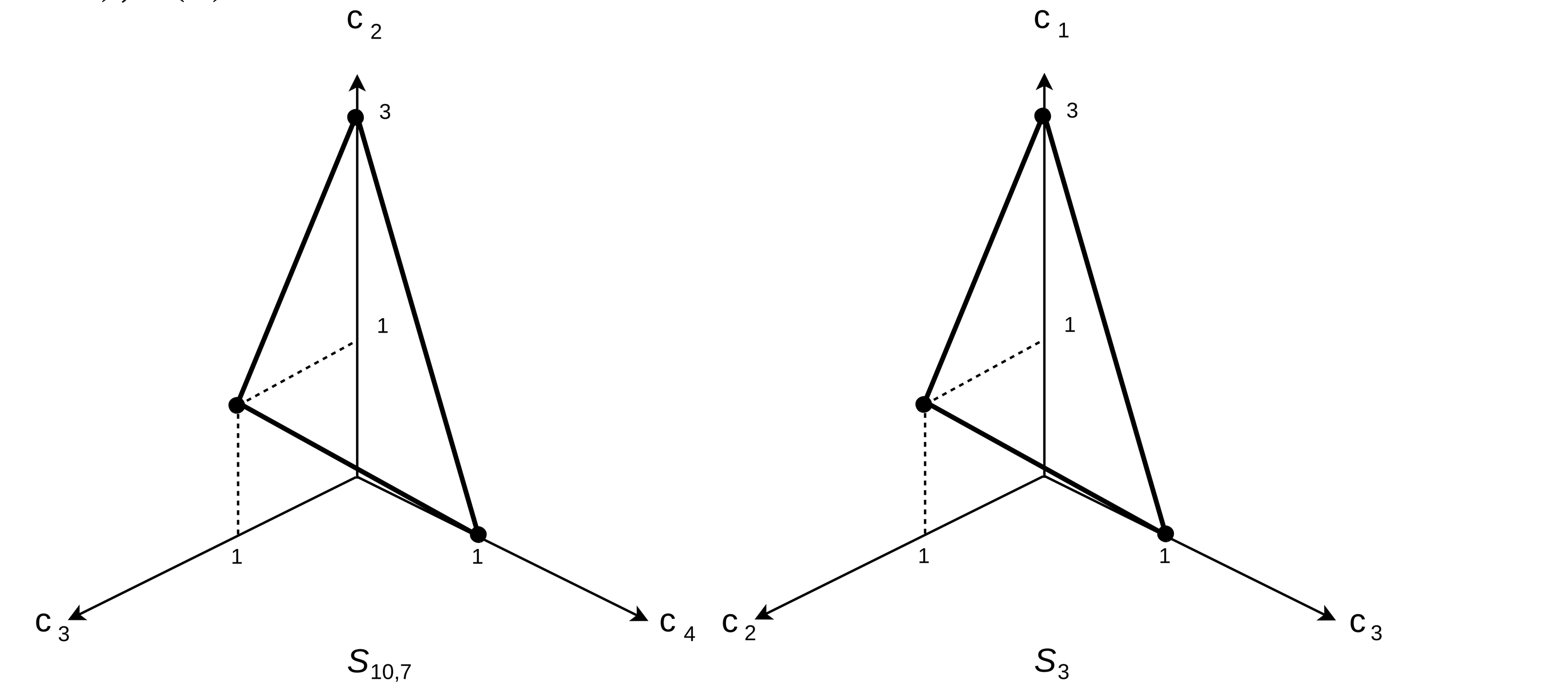
EPPF (2)に基づく統計的推測も可能ですが，一般に母数空間が複雑で理論的考察に向かないので，ここでは母数vに対する完備十分統計量である分割の数で条件付けた確率函数

$$q_{n,k}(c;x)=\frac{n!}{B_{n,k}(x)}\frac{x^c}{c!},\qquad c\in\mathcal{S}_{n,k},\qquad x\in\mathbb{R}_{>0}^{n-k+1},\qquad(3)$$

$x^c=\prod_{i=1}^n x_i^{c_i}$, $c!=\prod_{i=1}^n c_i!$を扱います．これは代数的指数型分布族で，$B_{n,k}(x)$は偏Bell多項式です．

定理 2 (M 2016) 確率函数(3)において最尤推定量は確率1で存在しない．

説明 (3)はsteepで，最尤推定量の存在の必要十分条件は十分統計量cがNewtonポリトープ(台(1)の凸包)の内点であることである．分割ポリトープ(自然数の分割の凸包)に1対1のaffine写像があり(Young図)，自然数の分割は分割ポリトープの内点ではないから(分割ポリトープを逐次描く)，(1)のすべての格子点はNewtonポリトープの内点ではない．



左：$n=10,k=7$のNewtonポリトープ．頂点は$1\times 4+2\times 3$, $1\times 5+2+3$, $1\times 6+4$．
右：$n=3$の分割ポリトープ．頂点は1×3, $1+2$, 3．

注意 1 重複度cは事前過程からのサイズ1の標本とみなせますが，指数型分布族においてサイズ1の標本に最尤推定量が存在しないことは良くあります．曲指数型分布族における最尤推定量の存在の議論には情報幾何が有用で，昨年のポスターに発表しました．

2　A超幾何系と計算代数

定義 3 (Gel'fand, Kapranov & Zelevinsky 1980) 階数d，整数成分の$d\times m$行列A，$b\in\mathbf{k}^d$について

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}\theta_j-b_i,\qquad i\in\{1,...,d\},\qquad \partial^{c^+}-\partial^{c^-},\qquad c^+-c^-\in\ker A\cap\mathbb{Z}^m$$

をA超幾何系$H_A(b)$という．ただし，$\theta_i:=x_i\partial_i$, $c_i^+:=c_i\vee 0$, $c_i^-:=c_i\wedge 0$.

A超幾何多項式は次のように定義されます．

$$Z_A(b;x):=\sum_{\{c;Ac=b,c\in\mathbb{N}^m\}}\frac{x^c}{c!}$$

補題 1 行列

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2&\cdots&n-k\\1&1&1&\cdots&1\end{pmatrix},$$

$b=(n-k,k)^\top$のとき，A超幾何系の多項式解は一意で，A超幾何多項式，もしくは偏Bell多項式の定数倍である．

$H_A(b)$はWeyl代数$\mathbf{k}\langle x_1,...,x_m,\partial_1,...,\partial_m\rangle$の左イデアルです．de Rhamコホモロジーの議論より$H_A(b)$はA超幾何積分を消去し，$d=2$のとき

$$\int_C\left\{\sum_{i=1}^n x_i t^{a_{1i}}\right\}^{b_2}t^{-b_1-1}dt$$

です．補題1のAとbについては，サイクルCを原点周りにとれば留数積分は偏Bell多項式の母函数による表示を与えます．$H_A(b)$のイニシャルイデアルの標準単項式は$\{1,\theta_3,...,\theta_{n-k+1}\}$で，$Q_{n,k}(x)=(1,\theta_3,...,\theta_{n-k+1})^\top\bullet Z_A(b;x)$について$A$超幾何函数の隣接関係

$$x_i\bullet Q_{n-i,k-1}=P_i^{(n,k)}Q_{n,k},\qquad 1\leq i\leq n-k+1$$

が得られます．統計的推測のためにはA超幾何多項式を数値的に評価する必要がありますが，このような隣接関係を用いてホロノミック函数を評価する方法は差分ホロノミック勾配法と呼ばれます(Ohara & Takayama 2015)．補題1のときはA超幾何多項式についてPfaffian $P_i^{(n,k)}$が陽に得られ，特異点を避ける工夫をして，アルゴリズムを構築できます．

参考文献

M (2017+) *Statistical Inferences with Random Combinatorial Models*, Springer.