# Discrete distributions whose truncated means have logarithmic order

志村 隆彰　数理・推論研究系　助教

## 1　問題

### 1.1　緩慢変動する切断平均と相対安定性

独立同分布確率変数列に対する大数の法則が成り立つためには共通分布に有限な平均が存在しなければならないが、平均が存在しない場合にも一定の条件の下で、類似する極限定理が成り立つことが知られている。

【切断平均】確率変数 $X$ あるいは確率分布 $F$ の切断平均 (truncated mean) とは、$x \geq 0$ の関数

$$\mathbf{E}X1(|X|<x), \quad \int_{|t|<x} tF(dt)$$

をいう。切断平均は、$x \to \infty$ のとき平均が存在すれば それに収束し、存在しない場合であってもその挙動が $X$ の大きな値のとり方を表す。

【相対安定性】独立同分布確率変数列に対して、ある数列 $a_n$ が、

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{a_n} \to 1 \quad \textit{in probability}$$

となるようにとることが出来るとき、$S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ は相対安定 (relatively stable) であるという。$X>0$ のとき、$S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ が相対安定であることと切断平均 $\mathbf{E}X1(X<x)$ が緩慢変動すること (任意の $k>0$ に対して、$\mathbf{E}X1(X<kx) \sim \mathbf{E}X1(X<x)$) と同値である。

**問題意識**　相対安定性と同値である切断平均の緩慢変動性は分布の裾

$$\bar{F}(x):=1-F(x)=\int_x^\infty F(dt)$$

の遠方での挙動の性質である。それを切断積率で表現すると積分が介在する分、どのような分布であるのかが見えにくくなってしまうきらいがある。そこで、同じような切断平均(漸近的な意味で)をもつ分布の裾の挙動の多様性及びそれぞれに従う確率変数列の性質の違いをみたい。

### 1.2　問題の説明

$X \geq 0$ で次を満たすものを考える。

$$\lim_{x\to\infty} EX1(X<x)/\log x = C \in (0,\infty) \tag{1}$$

(1) をみたす確率変数 $X$ の分布 $F$ を求めることが最初の問題である。$t^{-2}$ オーダーの密度を持つ分布が (1) を満たすことは直ちにわかるが、これとは裾の漸近挙動が異なるペーター・ポール分布（ペテルスブルグのゲームの分布）も (1) を満たす。

$$P(X=2^k)=2^{-k} \quad (k=1,2,\cdots).$$

## 2　結果

### 2.1　分布の多様性

台が発散する正の狭義増加数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$ からなる離散分布のみを扱う。便宜上 $a_0=1$ とおき、 $a_1>1$ とし、$\{a_n\}_{n\geq1}$ を台とする離散分布

$$p_n:=P(X=a_n)>0, \quad \sum_{n=1}^\infty p_n=1$$

を考える。このとき次が成り立つ。

**定理１（台に対する条件とその上の確率の存在）**

1. 上述の離散分布が (1) を満たすならば、

$$\log a_{n+1} \sim \log a_n. \tag{2}$$

2. 分布の台が (2) をみたすとき、各点の確率を

$$p_k=\frac{b}{a_k}\log\frac{a_k}{a_{k-1}} \quad \text{for } k\geq1 \tag{3}$$

と定めれば (1) を満たす。$b$ は正規化定数で $b>1$ となる。

この (3) の確率分布の挙動を見る。この分布は台である数列の増加の速度が離散の程度を決め、遅いほどその程度が低く、速いほど高くなる。

**命題**　$r:=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ とおく。

1. $r=1 \iff x\overline{F}(x)\to b.$
2. $r>1 \Rightarrow \liminf_{x\to\infty} x\overline{F}(x)=b\frac{\log r}{r-1}$ かつ $\limsup_{x\to\infty} x\overline{F}(x)=b\frac{\log r}{r-1}r.$
3. $r=\infty \Rightarrow \liminf_{x\to\infty} x\overline{F}(x)=0,\ \limsup_{x\to\infty} x\overline{F}(x)=\infty.$

**例**

1. $a_n=n, n^2$ のように高々多項式オーダーで増える数列のとき、分布の裾はべきオーダー（$\sim bx^{-1}$）になる。
2. $a_n=2^n$ $a_1=2$ のときがペーター・ポール分布で 、$\bar{F}(x)\asymp 1/x$ 。
3. $a_n=2^{n^2}$ のように更に速く発散する数列に対しては、$\bar{F}(x)\asymp 1/x$ も成り立たない。

### 2.2　確率変数列の最大値をとる回数

(3) の分布に従う独立確率変数列の最大値に対し、これをとる確率変数の個数を論じる。確率変数列（部分）最大値を $M_n$、$M_n$ を実現している確率変数の個数を $K_n$ であらわす。

$$M_n:=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}, \quad K_n=\sharp\{1\leq l\leq n: M_n=X_l\}.$$

(3) の分布は離散だから $K_n\geq2$ となりうるが、考えるのは、$n$ が大きい時に $K_n=1$ となる条件である。離散の程度が低い、台の数列では増加の速度が遅いほど $K_n=1$ となりやすいことが想像できる。

以下、二つの意味で、$K_n=1$ $(n\to\infty)$ となるための条件を与える。

**定理２（弱法則）** (3) の分布に従う確率変数列の最大値が1つだけとなる、つまり、

$$\lim_{n\to\infty} P(K_n=1)=1 \tag{4}$$

であるための必要十分条件は $r=1$ である。

(4) よりもさらに強い意味で収束するためには、収束 $r=\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n-1}$ 1 の速度の条件が必要である。そのために次のように $\epsilon_n$ を定める。

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=1+\epsilon_n.$$

**定理３（強法則）**

$$P\left(\lim_{n\to\infty} K_n=1\right)=1$$

であるためには以下が必要十分条件である。

$$\sum_{n=1}^\infty {\epsilon_n}^2=\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}-1\right)^2<\infty.$$

**例**

1. $a_n=n^\rho (\rho>0)$ ならば、強法則が成り立つ。
2. $a_n=e^{n^\rho}$ $(0<\rho<1)$ では $r=1$ である。

$$\sum_{n=1}^\infty {\epsilon_n}^2 \asymp \sum_{n=1}^\infty \rho^2/n^{2(1-\rho)} \begin{cases} <\infty & (0<\rho<1/2) \\ =\infty & (1/2\leq\rho<1) \end{cases}$$

で、強法則が成り立つか否かは $\rho$ の値による。

これは中田寿夫（福岡教育大学）との共同研究である。