最適化の数理と応用

伊藤　聡　数理・推論研究系，統計的機械学習研究センター，統計思考院　教授

測度空間における凸最適化

コンパクトなハウスドルフ空間 X, Y, Z に対し，これらの上で定義される有限な符号つきボレル測度からなる実バナッハ空間を $M(X)$ 等と書くことにする。関数 $f,\ g,\ h,\ \varphi,\ \psi$ がすべて定義域上で連続であるとき，以下のような測度空間 $M(X)$ 上の最適化問題（一般化モーメント問題）

$$
\begin{cases}
\displaystyle\min_{\mu\in M(X)} \int_X f(x)\,d\mu \\
\text{subject to} \quad \displaystyle\int_X \varphi(x,y)\,d\mu \ge g(y) \quad \forall y \in Y \\
\qquad\qquad\quad\ \displaystyle\int_X \psi(x,z)\,d\mu = h(z) \quad \forall z \in Z \\
\qquad\qquad\quad\ \mu \ge 0
\end{cases}
$$

を考えることができる。これを主問題とすると，双対問題は

$$
\begin{cases}
\displaystyle\max_{\substack{\nu\in M(Y)\\ \xi\in M(Z)}} \int_Y g(y)\,d\nu + \int_Z h(z)\,d\xi \\
\text{subject to} \quad \displaystyle\int_Y \varphi(x,y)\,d\nu + \int_Z \psi(x,z)\,d\xi \le f(x) \quad \forall x \in X \\
\qquad\qquad\quad\ \nu \ge 0
\end{cases}
$$

と書ける（Y, Z が有限集合ならば，後者は半無限線形計画問題となる）。

Z は有限集合 $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_l\}$ であるとし，X, Y をそれぞれ有限部分集合

$$X_k := \{x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{n_k}^k\} \subset X, \quad Y_k := \{y_1^k, y_2^k, \ldots, y_{m_k}^k\} \subset Y$$

で緩和して得られる有限次元線形計画問題の主双対ペア

$$
\begin{cases}
\displaystyle\min_{\mu\in\mathbb{R}^{n_k}} \sum_{i=1}^{n_k} f(x_i^k)\,\mu_i \\
\text{subject to} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} \varphi(x_i^k, y_j^k)\,\mu_i \ge g(y_j^k), \quad j = 1,2,\ldots,m_k \\
\qquad\qquad\quad\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k} \psi(x_i^k, z_j)\,\mu_i = h(z_j), \quad j = 1,2,\ldots,l \\
\qquad\qquad\quad\ \mu_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,n_k
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\displaystyle\max_{\substack{\nu\in\mathbb{R}^{m_k}\\ \xi\in\mathbb{R}^{l}}} \sum_{j=1}^{m_k} g(y_j^k)\,\nu_j + \sum_{j=1}^{l} h(z_j)\,\xi_j \\
\text{subject to} \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{m_k} \varphi(x_i^k, y_j^k)\,\nu_j + \sum_{j=1}^{l} \psi(x_i^k, z_j)\,\xi_j \le f(x_i^k), \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,2,\ldots,n_k \\
\qquad\qquad\quad\ \nu_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,m_k
\end{cases}
$$

を逐次的に解くことにより，双方向切除平面法のアルゴリズムを構成することができる。

ヒルベルト空間におけるリプシッツ最適化

X を実ヒルベルト空間，D を X の非空開部分集合，Y をハウスドルフ空間，f を $D \times Y$ 上の実汎関数とし，最大値汎関数 $v : D \to R$ を

$$v(x) := \sup_{y\in Y}\ f(x,y)$$

と定義する。いま，Y がコンパクトで，f が $D \times Y$ 上で連続ならば，最大解写像 $\widehat{Y} : D \to 2^Y$ を

$$\widehat{Y}(x) := \arg\max_{y\in Y}\ f(x,y) = \{\, y \in Y \mid f(x,y) = v(x) \,\}$$

により定義することができるが，最大解集合 $\widehat{Y}(x)$ は任意の $x \in D$ に対して非空コンパクト，$v : D \to R$ は D 上で連続となる。

さらに $f : D \times Y \to R$ が任意の $y \in Y$ に対し D 上でフレッシェ偏微分可能，かつ $\nabla_x f : D \times Y \to X$ が $D \times Y$ 上で連続ならば，最大値汎関数 $v : D \to R$ は D の任意の点の近傍でリプシッツ連続であり，任意の $x \in D$ における一般勾配 $\partial^\circ v(x)$ は

$$
\begin{aligned}
\partial^\circ v(x) &= \overline{\mathrm{co}}\,\{\, \nabla_x f(x,y) \mid y \in \widehat{Y}(x) \,\} \\
&= \left\{ \int_Y \nabla_x f(x,y)\,d\mu \;\middle|\; \int_Y d\mu = 1,\ \mu \ge 0,\ \int_{\widehat{Y}(x)^c} d\mu = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

で与えられる（μ は最大解集合 $\widehat{Y}(x)$ 上でのみ正となる確率測度）。

この確率測度による一般勾配の表現を用いれば，実ヒルベルト空間上で定義されたmin-max問題やロバスト最適化問題など，最大値汎関数を含む最適化問題の最適性条件が得られ，またこれらを数値的に解くためのアルゴリズムを構成することができる。

リーグスポーツにおける応用

リーグスポーツにおいて勝敗の組合せが有限であることを考えると，シーズン中のどの時点においても，最終的にある順位以上になることが確定する最小の勝ち試合数（クリンチ数），もしくは逆にある順位に届かないことが確定する最小の負け試合数（エリミネーション数）が存在することは明らかである。例えば，k 位以上が確定するとは，残り試合すべてに敗れたとしても $k+1$ 位以下になる可能性がないことであり，$k+1$ 位以下になるという制約条件の下で今後の勝数を最大にするという最大化問題（これをクリンチ問題と呼ぶことにし，最大勝数を $\bar{z}$ とする）を解くことにより，クリンチ数は以下のように求めることができる。

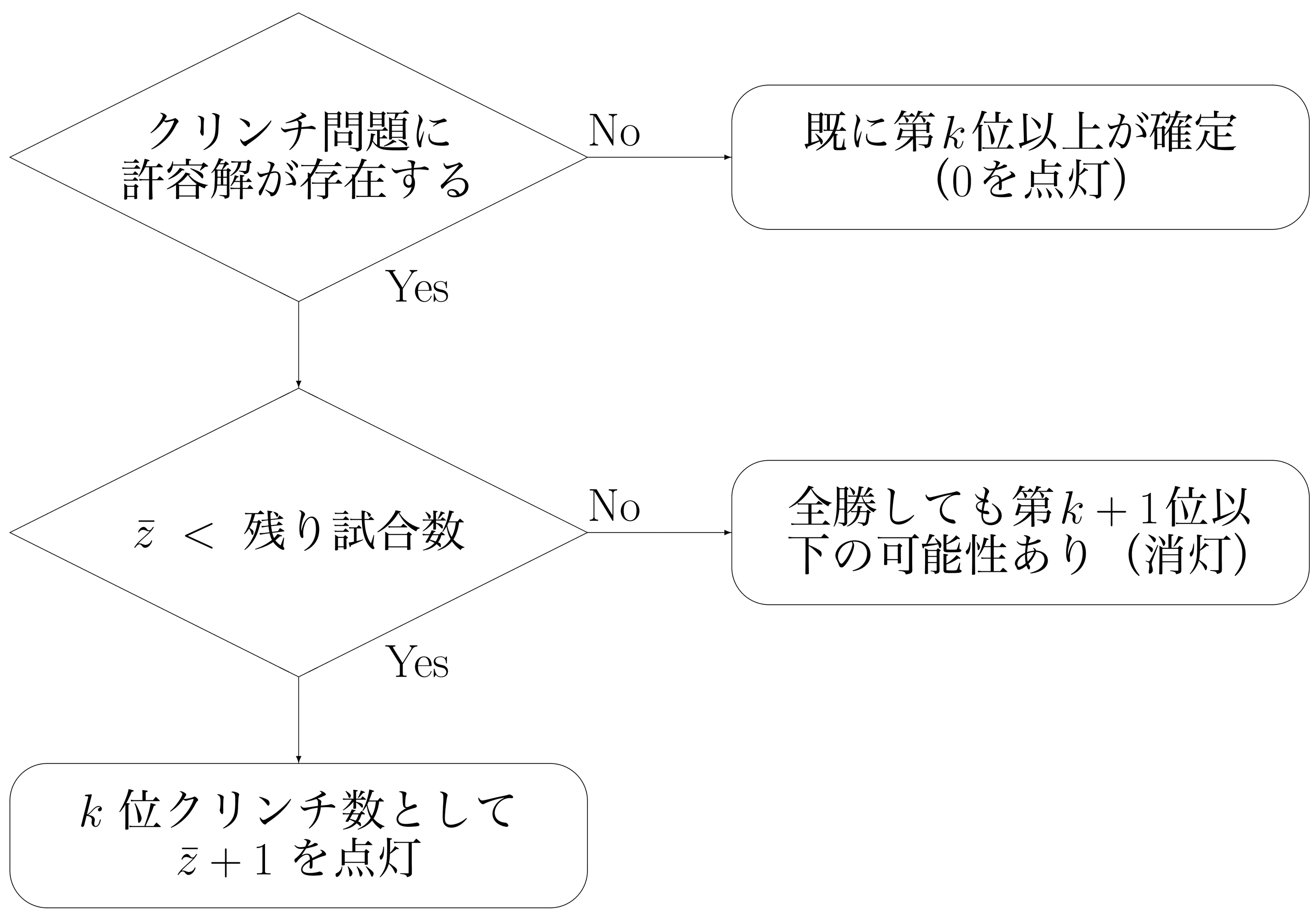

図. k 位クリンチ数を求めるアルゴリズム

このような勝敗数の計算は，引分の有無や価値，そして同成績の場合の順位決定方法などにより，求解の難易度が様々に変化し，汎用的で効率的な定式化と解法が望まれている。