2016年6月17日　統計数理研究所　オープンハウス

多変量コーシー分布と等角写像

加藤　昇吾　数理・推論研究系　准教授

はじめに

研究の背景

1変量コーシー分布について，以下の結果が知られている．

【定理】(McCullagh, 1992)

確率変数Xが1変量コーシー分布

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{|\sigma|}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R},$$

に従うとき，$X \sim C(\mu + i\sigma)$とあらわすことにする．ここで，iは虚数である（$i^2 = -1$）．このとき，

$$X \sim C(\theta) \implies \frac{aX+b}{cX+d} \sim C\left(\frac{a\theta+b}{c\theta+d}\right) \qquad (1)$$

が成り立つ．ここに，$\theta = \mu + i\sigma$，$a, b, c, d \in \mathbb{R}$，$ad - bc \neq 0$.

(1)においてあらわれた変換$\theta \mapsto (a\theta+b)/(c\theta+d)$はメビウス変換とよばれる．メビウス変換は複素平面上の等角写像として知られる．

研究の目的

上記で述べた結果は，１変量コーシー分布に関するものである．

本研究では，($\mathbb{R}^d$上の)多変量コーシー分布について，上述の結果を拡張することを目指す．

多変量コーシー分布とメビウス変換

以下の議論は厳密には，拡張されたユークリッド空間$\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$上で考えられるべきであるが，紙面の都合上，本報告では$\mathbb{R}^d$上で考える．

多変量コーシー分布

d変量コーシー分布を確率密度関数

$$f(x) = \frac{2^{d-1}\Gamma\{(d-1)/2\}}{\pi^{(d+1)/2}} \left(\frac{|\sigma|}{\sigma^2 + \|x-\mu\|^2}\right)^d, \quad x \in \mathbb{R}^d, \qquad (2)$$

で定義する．ここで，$\mu \in \mathbb{R}^d$は位置パラメータ，$\sigma \in \mathbb{R}$は尺度パラメータである．また，$\|\cdot\|$はユークリッドノルムをあらわす．

この分布は，通常の多変量コーシー分布（自由度1のt分布）とは異なっている点に注意する．

$\mathbb{R}^d$上のメビウス変換

$\mathbb{R}^d$上のメビウス変換は以下で与えられる．

$$\tilde{g}(x) = A\left(\gamma \frac{x+a}{\|x+a\|^\varepsilon} + b\right), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{-a\}. \qquad (3)$$

ここに，$a, b \in \mathbb{R}^d$，$\gamma \in \mathbb{R}$，Aはd次直交行列，$\varepsilon \in \{0, 2\}$である．また，$\tilde{g}(-a) = Ab \ (\varepsilon = 0)$，$\tilde{g}(-a) = \infty \ (\varepsilon = 2)$とする．

$\mathbb{R}^d$上のメビウス変換の性質

(i) $\tilde{g}$は，以下の４つの変換から成っている：

$$x \mapsto x + a, \quad x \mapsto \gamma x, \quad x \mapsto Ax, \quad x \mapsto x/\|x\|^2,$$

(ii) $\tilde{g}$は$\mathbb{R}^d$をそれ自身に写す等角写像である，

(iii) $\tilde{g}$全体の成す集合は，写像の合成を積として群をなす，

(iv) 特に$d = 2$のとき，$\tilde{g}$は(1)における複素平面上のメビウス変換と本質的に等しい．

複素数の拡張と新たな関数 [1]

多変量コーシー分布とメビウス変換の関係を調べる上で，以下の複素数の拡張を考えると便利である．

$$\theta = \mu + i\sigma, \quad \mu \in \mathbb{R}^d, \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

拡張された複素数θについて，以下の新たな関数を定義する．

$$g(\theta) = \mu_g + i\sigma_g \left(\equiv A\left(\gamma \frac{\theta+a}{\|\theta+a\|^\varepsilon} + b\right)\right), \quad \theta \in \mathbb{R}^d + i\mathbb{R}. \qquad (4)$$

ここに，$\mu_g (\in \mathbb{R}^d)$と$\sigma_g (\in \mathbb{R})$は，

$$\begin{pmatrix} \mu_g \\ \sigma_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\gamma \frac{\tilde{\theta} + \tilde{a}}{\|\tilde{\theta} + \tilde{a}\|^\varepsilon} + \tilde{b}\right),$$

である．また，$\tilde{\theta} = (\mu', \sigma)' \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{-\tilde{a}\}$，$\tilde{a} = (a', 0)' \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$，$\tilde{b} = (b', 0)' \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$，$\gamma \in \mathbb{R}$，$\varepsilon = 0, 2$，$A$は$d$次直交行列とする．$\theta = -a$のときは，$g(-a) = Ab \ (\varepsilon = 0)$，$g(-a) = \infty \ (\varepsilon = 2)$とする．

(4)において$\theta \in \mathbb{R}^d$のとき，gは$\mathbb{R}^d$上のメビウス変換(3)と等しくなる．

主結果 [1]

以後，$\mathbb{R}^d$値確率ベクトルXがd変量コーシー分布(2)に従うとき，$X \sim C_d(\mu + i\sigma)$とあらわすこととする．

$\mathbb{R}^d$値確率ベクトルXが，$X \sim C_d(\theta)$とする．このとき，

$$X + a \sim C_d(\theta + a), \quad \gamma X \sim C_d(\gamma\theta),$$

$$AX \sim C_d(A\theta), \quad \frac{X}{\|X\|^2} \sim C_d\left(\frac{\theta}{\|\theta\|^2}\right),$$

が成り立つ．ここに，$a \in \mathbb{R}^d$，$\gamma \in \mathbb{R}$，Aはd次直交行列をあらわす．また，C_dの引数における演算は(4)式にならうこととする．

これらをまとめると，以下を得る．

【主定理】(Kato & McCullagh, submitted)

関数gを(4)式により定義する．このとき，

$$X \sim C_d(\theta) \implies g(X) \sim C_d(g(\theta))$$

が成立する．

上記の定理において，特に$d = 1$のとき，冒頭で述べたMcCullagh (1992)の定理と本質的に等しくなる．

References

[1] Kato, S. & McCullagh, P. Conformal mapping for multivariate Cauchy families, submitted.

[2] McCullagh, P. (1992). Conditional inference and Cauchy models. *Biometrika*, **79**, 247–259.