2016年6月17日　統計数理研究所　オープンハウス

Variety of distributions with asymptotically logarithmic truncated mean

志村 隆彰　数理・推論研究系　助教

1 問題

1.1 切断積率と極限定理

平均や分散が存在しない（発散する）場合にそれらの有限性に準ずる条件として切断積率の挙動が用いられることがある。

【切断積率】

確率変数Xあるいは確率分布Fの$\rho(>0)$次の切断（絶対）積率とは、$x \geq 0$の関数

$$\mathbf{E}|X|^\rho 1(|X|<x),$$
$$\int_{|t|<x} |t|^\rho F(dt)$$

をいう。特に、$\rho = 1$のときを切断平均(truncated mean) とよぶ。

【相対安定性】

$X, X_1, X_2, \ldots$を独立同分布実数値確率変数列とする。ある数列a_nが

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{a_n} \to 1 \quad \textit{in probability}$$

となるようにとることが出来るとき、$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$は相対安定(relatively stable)であるという。

$X > 0$のとき、$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$が相対安定であることと切断平均$\mathbf{E}X1(X<x)$が緩慢変動することと同値である。

【緩慢変動関数】

ある半開区間$[x_0, \infty)$上の正値関数$l(x)$が緩慢変動関数(slowly varying function)であるとは、任意の$k>0$に対して、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{l(kx)}{l(x)} = 1$$

が成り立つときをいう。自明な正値定数関数の他に$\log x$、$(\log x)^2$などがある。

【問題意識】

相対安定性と同値である切断平均の緩慢変動性は分布の裾$F((x,\infty))$

$$\bar{F}(x) := 1 - F(x) = \int_x^\infty F(dt)$$

の遠方での挙動の性質である。それを切断積率で表現すると積分が介在する分、どのような分布であるのかが見えにくくなってしまうきらいがある。そこで、同じような切断平均(漸近的な意味で)をもつ分布の裾の挙動の多様性をみてみたい。

1.2 問題の説明

$X, X_1, X_2, \ldots$を独立同分布正値確率変数列とし、切断平均$EX1(X<x)$が対数関数$\log x$と漸近的に等しい場合を扱う：

$$\lim_{x\to\infty} EX1(X<x)/\log x = C \in (0,\infty) \tag{1}$$

(1)をみたす確率変数Xの分布Fを求めることが問題である。

知られているふたつの例を紹介する。

【例1（密度がt^{-2}オーダーであるもの）】

たとえば片側コーシー分布$p(t) = 2\frac{c}{\pi}\frac{1}{(t-\gamma)^2+c^2} \sim \frac{C}{t^2}$は(1)を満たす。ところが、(1)を満たす分布はこれだけではない。

【例2 ペーター・ポール分布（ペテルスブルグのゲームの分布)】

$$P(X=2^k) = 2^{-k} \quad (k=1,2,\cdots)$$

も(1)を満たす（$C = 1/\log 2$、$a_n = n(\log n)/\log 2$)。

この分布の裾は

$$\bar{F}(x) \asymp 1/x$$

を満たすが、$\bar{F}(x) \sim C/x$ for some $C>0$とはならない。すなわち、片側コーシー分布とペーター・ポール分布は裾の漸近挙動が異なる

2 結果

2.1 分布の多様性

台が発散する正の狭義増加数列$\{a_n\}_{n\geq 1}$からなる離散分布のみを扱う。便宜上$a_0 = 1$とおき、$a_1 > 1$とする。$\{a_n\}_{n\geq 1}$を台とする離散分布を考える。

$$p_n := P(X=a_n) > 0, \quad \sum_{n=1}^\infty p_n = 1$$

とする。このとき台である数列に対する条件とその上の確率の存在について次が成り立つ。

定理（台に対する条件とその上の確率の存在）

1. 上述の離散分布が(1)を満たすならば、

$$\log a_{n+1} \sim \log a_n \tag{2}$$

が成り立つ。

2. 分布の台が(2)をみたすとき、各点の確率を

$$p_k = \frac{b}{a_k}\log\frac{a_k}{a_{k-1}} \quad \text{for } k \geq 1$$

と定めれば(1)を満たす。bは正規化定数で$b>1$となる。

次にこの定理の2の確率分布の挙動を見る。この分布は台である数列から自動的に決まり、台となる数列の増加の速さが重要である。分布の構成方法から増加の速度が遅いほど滑らかな分布になり、速いほど局所的な変化が激しくなる。

命題 $r := \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$とおく。

1. $r = 1 \iff x\overline{F}(x) \sim b.$
2. $r > 1 \Rightarrow \liminf_{x\to\infty} x\overline{F}(x) = b\frac{\log r}{r-1}$ かつ $\limsup_{x\to\infty} x\overline{F}(x) = b\frac{\log r}{r-1}r.$ さらに、
$$\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < \infty \iff x\overline{F}(x) \asymp 1.$$
3. $r = \infty \Rightarrow \liminf_{x\to\infty} x\overline{F}(x) = 0,\ \limsup_{x\to\infty} x\overline{F}(x) = \infty.$

【例】

1. $a_n = n, n^2$のように高々多項式オーダーで増える数列に対しては、裾が片側コーシー分布と同じくべき（$\sim bx^{-1}$）の分布になる。
2. ペーター・ポール分布は等比数列 $a_n = 2^n$ $a_1 = 2$ の場合であり、$\bar{F}(x) \asymp 1/x$となる。
3. $a_n = 2^{n^2}$のように更に速く発散する数列に対しては、$\bar{F}(x) \asymp 1/x$が成り立たない。

【まとめ】

・切断平均が対数オーダーで発散する離散分布には台の点列の増加の速さに上限があり、それを満たす台上には条件を満たす分布が存在する。

・台となる数列の増加の速さにより分布の多様性が生じる。

【参考文献】

Bingham, N.H., Goldie, C.M. and Teugels, J.L.(1987). Regular Variation. Cambridge. Cambridge University press.

志村 隆彰（統計数理研究所）・中田 寿夫（福岡教育大）. (2016). 切断平均が対数オーダーとなる離散的な分布について, 統計数理研究所 共同研究リポート **352** 無限分解可能過程に関連する諸問題(20) , 84-90.