2016年6月17日　統計数理研究所　オープンハウス

最小張木(Minimum Spanning Tree)の最小辺の長さの分布

髙井　勉　　総合研究大学院大学 統計科学専攻 ５年一貫制博士課程５年

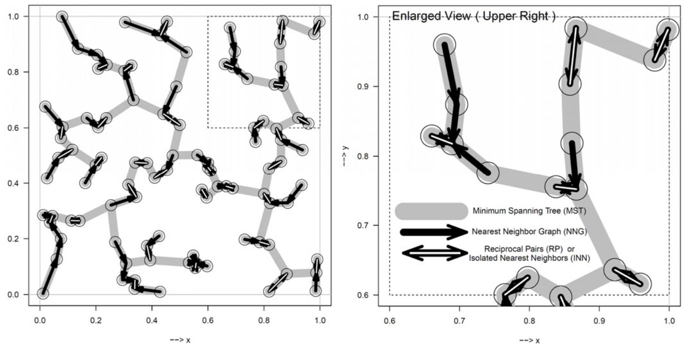
【１】概要

Roberts(1968)とWatanabe(2008)は一様ランダムな点配置に対する最小張木の辺長の近似分布を導出している。本研究では、最小張木の最小辺の長さに限定し、先行研究とは異なるアプローチを行う。

最小張木の近似として第１近隣木を考え、その最小辺の長さの理論分布(第１順序統計量の確率密度関数)を導出し、モンテカルロ法により推定した分布と比較した。両者の形状は著しく乖離するという結果になった。第１近隣木の最小辺が必ず孤立最近接対(第１近隣木の辺長の第１と第２の順序統計量がタイになる)を形成することが原因と考えられる。そこで、孤立最近接対の最小辺の長さの理論分布を導出し、モンテカルロ法の推定値と比較した。両者の形状は殆ど一致するという結果が得られた。

【２】研究対象である点配置と関連する３つの近接グラフ

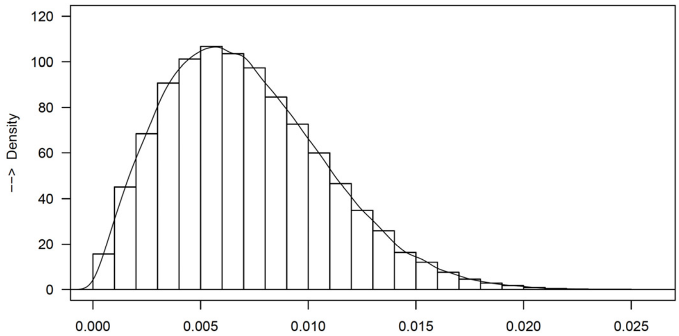
単位正方形内に一様ランダムに100点(λ=100)を配置した場合を考える。この点配置に対応する３つの近接グラフを下図に示す。最小張木を灰色の線で、その近似としての第１近隣木を黒の矢印で、孤立最近接対を白抜きの線で示す。



【３】最小張木の近似としての第１近隣木

Kruskal(1956)によれば、全ての点間距離の長さを昇順に並べ、閉路を形成しないように連結したものが最小張木である。一方、古山(2003)は『 全ての第１近隣木の辺は最小張木の辺である 』ことを証明している。また、第１近隣木の最小辺の長さは全ての点間距離の長さ以下である。したがって『 最小張木の最小辺は第１近隣木の最小辺でもある 』。

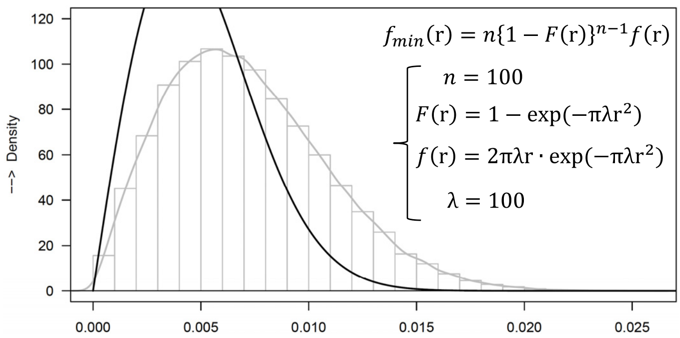
第１近隣木の最小辺の長さに対するモンテカルロ法の結果(ヒストグラムと推定した確率密度関数)を下図に示す。これは最小張木の最小辺の長さの分布でもある。



N = 100000　Bandwidth = 0.0003344

【４】第１近隣木の最小辺の長さの分布

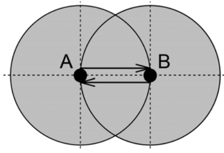
第１近隣木の辺長の理論分布を用いて第１近隣木の最小辺の長さの確率密度関数を求め、モンテカルロ法の結果と比較した。下図に示すように両者の形状は大きく食い違っている。次節では、この食い違いの原因を探る。



N = 100000　Bandwidth = 0.0003344

【５】第１近隣木の最小辺は必ず孤立最近接対になる。

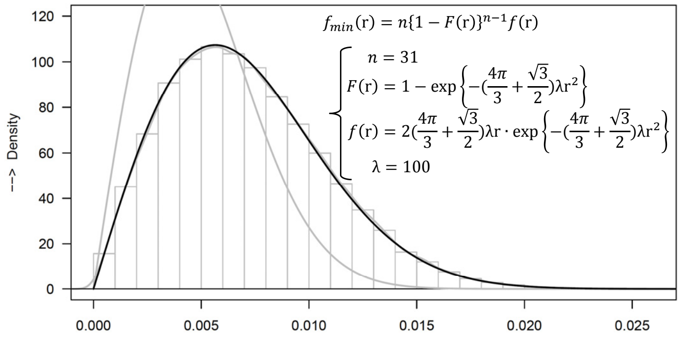
Pielou(1969)は、下図の灰色で示した(境界を含まない)領域内に第３の点が存在しなければ、点Ａと点Ｂは孤立最近接対になることを示している。



またPielou(1969)は孤立最近接対の発生確率が第１近隣木の辺の約６２％であると算出している。これは本研究の点配置の場合、３１か所に相当する。さらに『 第１近隣木の最小辺は必ず孤立最近接対になる 』。この証明は【７】に参考として示す。

【６】孤立最近接対の最小辺の長さの分布

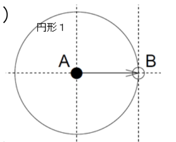
Pickard(1982)が孤立最近接対の辺長の理論分布を導出している。これを利用して孤立最近接対の最小辺の長さの確率密度関数を求めた。モンテカルロ法で推定した確率密度関数と比較した結果を下図に示す。両者の形状は殆ど一致している。



N = 100000　Bandwidth = 0.0003344

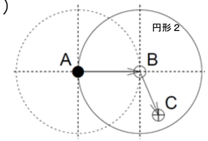
【７】『 第１近隣木の最小辺は必ず孤立最近接対になる 』ことの簡単な証明（参考）

（１）



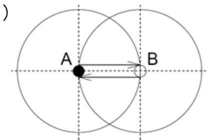
点Ａを中心とする円形１の(境界を含まない)領域内に第３の点が存在しなければ、点Ａから見て点Ｂは最近隣点になる。

（２）



辺ＡＢが第１近隣木の**最小辺**であると仮定すると、点Ｂを中心とする円形２の(境界を含まない)領域内には第３の点が存在しない。第３の点Ｃが存在すると辺ＢＣの方が辺ＡＢより短くなり、辺ＡＢが**最小辺**であることと矛盾する。

（３）



点Ｂを中心とする円形２の(境界を含まない)領域内に第３の点が存在しなければ、点Ｂから見ても点Ａは最近隣点になる。

したがって、点Ａと点Ｂは互いに最近隣点(孤立最近接対)となる。

【８】研究課題

孤立最近接対の最小辺の長さからではなく、第１近隣木の辺長の第１順序統計量と第２順序統計量の同時分布から、最小張木の最小辺の長さの分布を求める方法の研究。

【９】参考文献

Kruskal, J.B. (1956). On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. *Proceedings of the American Mathematical Society,* Vol. 7, No. 1 , 48-50.

Pickard, D.K. (1982). Isolated Nearest Neighbors, *Journal of Applied Probability*, Vol. 19, No.2, 444-449.

Pielou, E.C. (1969). *An Introduction to Mathematical Ecology*, John Wiley & Sons, Inc.

Roberts, F. D. K. (1968). Random minimal trees, *Biometrica*, **55**, 255–258.

Watanabe, D. (2008). Evaluating the Configuration and the Travel Efficiency on Proximity Graphs as Transportation Networks, *Forma*, **23**, 81–87.

古山正雄.(2003),｢地域間ネットワークにおける最短結合と近隣結合に関する理論的考察｣,都市計画論文集,No.38-3,379-384.