「ベクトル束上の力学系」の考え方

松江　要 (統計思考院 / 数学協働プログラム)   kmatsue@ism.ac.jp

1. はじめに -- ベクトル束

力学系（現象の時間発展）は、ユークリッド空間や多様体の上で考察される事が多い。しかし、各点の上のある特定のデータの時間発展も併せて考察する事で、現象の理解の視野を拡げる事ができる。本稿は、ベースとなる集合の各点にベクトル空間がデータとして載った幾何学的対象、**ベクトル束**の上の力学系のお話。

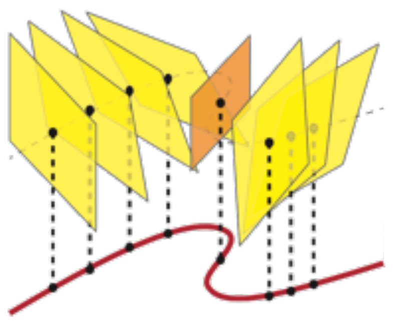
定義　**ベクトル束**は次で構成される：$\xi = (p, E, B, F)$

- E, B：ハウスドルフ空間、$p : E \to B$：全射連続写像（**射影**）
- 各　$b \in B$　に対して、逆像　$p^{-1}(b) \cong F$　はベクトル空間（**ファイバー**）
- 各　$b \in B$　に対して、次が満たされる：

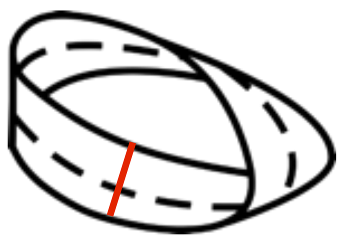
  $\exists U : b$ の B 内開近傍、$\exists h_b : p^{-1}(U) \to U \times F$　：同相写像　s.t.

  $p = p_1 \circ h_b$.　($p_1 : B \times F \to B$ は第1成分への射影)　□

最後の性質は、E は「 $U (\subset B)$ **だけを見ると、ベクトル空間** F **が真っ直ぐ乗っている**」事を意味している。この h_b を**局所自明化**と呼ぶ。
E をベクトル束 ξ の**全空間**、B を**底空間**と呼ぶ。



左図では曲線の各点の上に、ベクトル空間 (ファイバー) のデータがあり、全体でベクトル束をなす。ファイバーは、底空間の点に連続的に依存する。



メビウスの帯。円周の各点の上に線分が乗っていると考える事で、ベクトル束とみなせる。円周の一部だけを切り取れば、線分が真っ直ぐ並んでいる (局所自明) が、全体では捻れている。「非自明」なベクトル束の典型例。

2. ベクトル束とスペクトル

典型的なベクトル束上の力学系は、底空間上の微分方程式 $y' = g(y)$ と、ファイバー上の振る舞いを記述する**線型**の微分方程式 $x' = A(t)x$ を組み合わせた物で生成される。生成される力学系は、次の概念の枠組みで議論される。

定義　ベクトル束 $\xi = (p, E, B, F)$ の全空間 E 上の flow $\pi : E \times \mathbb{R} \to E$ は次を満たす時 **linear skew-product flow** という：

$$\pi(x, y, t) = (\varphi(x, y, t), \sigma(y, t)).$$

- σ は底空間 B 上の flow. $x \mapsto \varphi(x, y, t) : F_y \to F_{\sigma(y,t)}$ は線型. $(F_y = p^{-1}(y))$
  $\varphi(x, y, t)$ はしばしば $\Phi(y, t)x$ と書かれる。　□

力学系を理解する一つのアプローチは、その漸近挙動を理解する事である。平衡点や周期軌道の存在や安定性の解析が一例として挙げられる。安定性の解析は、線型化行列の**スペクトル**を見る事で実現できる。ベクトル束上の力学系においては、以下の **dichotomy** が安定性の解析の中心となる。

定義　$M \subset B$ に対して、linear skew-product flow π は次を満たす時 M 上で **exponential dichotomy** を持つという：

$$\exists P : E(M) \to E(M) \text{ (projection)}, \exists K, \alpha > 0 \text{ s.t.}$$

$$|\Phi(y,t)P(y)\Phi(y,s)^{-1}| \leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad s \leq t,$$

$$|\Phi(y,t)(I - P(y))\Phi(y,s)^{-1}| \leq K e^{-\alpha(s-t)}, \quad t \leq s.$$

ただし、$E(M)$は E の M 上の制限。　□

上の不等式はファイバーの安定な方向、下の不等式はファイバーの不安定な方向の振る舞いを表している。この振る舞い方を、発展作用素 $\Phi(y,t)$ のかわりに $\Phi_\lambda(y,t) = e^{-\lambda t}\Phi(y,t),\ \lambda \in \mathbb{R}$ に対しても考察する。これは、線型方程式 $x' = A(t)x$ のかわりに $x' = (A(t) - \lambda I)x$ を考察する事に対応している。
ここで、$\pi_\lambda(x, y, t) := (\Phi_\lambda(y,t)x, \sigma(y,t))$　とし、次を定義する。

定義　$\rho(M) := \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \pi_\lambda \text{ admits an exponential dichotomy over } M\}.$
$\Sigma(M) := \mathbb{R} \setminus \rho(M).$　□

$\rho(M)$ を M 上の(linear skew-product flowの)**レゾルベント**、
$\Sigma(M)$ を M 上の**スペクトル**と呼ぶ。

スペクトルは、linear skew-product flowに対する**ベクトル束の不変な分解**を導く。
これは、ベクトル空間の行列に対する固有空間分解に対応している。

定理 [1]　$M \subset B$ をコンパクト連結不変集合、$n = \dim \xi \equiv \max_{y \in B} \dim F_y$ とする。

- このとき、$\Sigma(M) = [a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_k, b_k],\ k \leq n.$
- $\lambda_i \in \rho(M)\ (i = 0, \cdots, k)$ s.t. $\lambda_0 < a_1 \leq b_1 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{k-1} < a_k \leq b_k < \lambda_k.$

$\Rightarrow V_i = V_i(M) := \mathcal{S}_{\lambda_i}(M) \cap \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}}(M)$ は $\xi(M)$ の不変部分束で、任意の $y \in M$ に対して $\dim(V_i)_y = n_i \geq 1,\ \sum_{i=1}^k n_i = n.$ $(\xi(M) = \xi|_M)$

- $(V_i)_y \cap (V_j)_y = \{0\},\ i \neq j,\ \forall y \in M$　で、$\xi(M) = V_1(M) \oplus \cdots \oplus V_k(M).$
- 不変部分束とその上のflow $(V_i(M), \pi|_{V_i})$ のスペクトルは $\Sigma_i(M) = [a_i, b_i]$. □

ただし、$\mathcal{S}_\lambda := \{(x,y) \in E \mid \|e^{-\lambda t}\varphi(x,y,t)\| \to 0 \text{ as } t \to +\infty\},$
$\mathcal{U}_\lambda := \{(x,y) \in E \mid \|e^{-\lambda t}\varphi(x,y,t)\| \to 0 \text{ as } t \to -\infty\}$

この不変部分束（**スペクトル部分束**）が、行列の固有空間に対応するベクトル束上の力学系の“不変”な幾何学的構造である。

3. 応用：軌道上の不変ファイバーの計算法

応用として、次の **fast-slow system** を考える：

$$x' = f(x, y, \epsilon), \quad y' = \epsilon g(x, y, \epsilon) \quad (\epsilon > 0). \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l.$$

ϵ は多重時間スケールを支配するパラメータである。この系の典型的な解析アプローチとして、特異極限　$(\epsilon = 0)$　における「多様体」$S_0 \subset \{(x,y) \mid f(x,y,0) = 0\}$ を　ϵ で摂動させた多様体　$S_\epsilon = \{(x,y) \mid x = h^\epsilon(y)\}$ を構成し、その近傍での力学系を考察する事が挙げられる (e.g., [2])。

この「近傍」は各点での x 方向の安定性、特に線型化行列 $f_x(h^\epsilon(y), y, \epsilon)$ の情報を使って決定される。抽象的な議論では、グラフ変換により安定性情報を点に依らず真っ直ぐにした上で展開される。しかし、数値計算などによる実際の応用ではそのような前提は使えない。では、

与えられた多様体に対する x 成分の安定な方向はどこを向いているのだろうか？

これは、多様体 S_ϵ の各点におけるファイバー、特にその基底を計算する事により得られる。ここでは、多様体 S_ϵ 上の力学系に付随するファイバーの計算法を考察する。

多様体 S_ϵ 上の flow は次を解く事で得られる：$\dot{y} = g(h^\epsilon(y), y, \epsilon).$
各点 $(h^\epsilon(y), y)$ では、x 方向の安定性の情報は線型化行列 $f_x(h^\epsilon(y), y, \epsilon)$ の固有ベクトルにより決定される。よって、S_ϵ 上の flow に沿った”固有ベクトル”の時間発展は、次の方程式系により決定される：

$$\dot{v} = A(y)v, \quad \dot{y} = g(h^\epsilon(y), y, \epsilon), \quad A(y) \equiv f_x(h^\epsilon(y), y, \epsilon)$$

これは、$\mathbb{R}^n \times S_\epsilon$ 上の linear skew-product flow を定める。 しかし、線型方程式 $\dot{v} = A(y)v$ をまともに解くと、指数増大・減少の効果によりすぐに計算が破綻する (exponential dichotomyの定義を参照)。ここで、長時間解くための工夫として、次の概念を応用する。

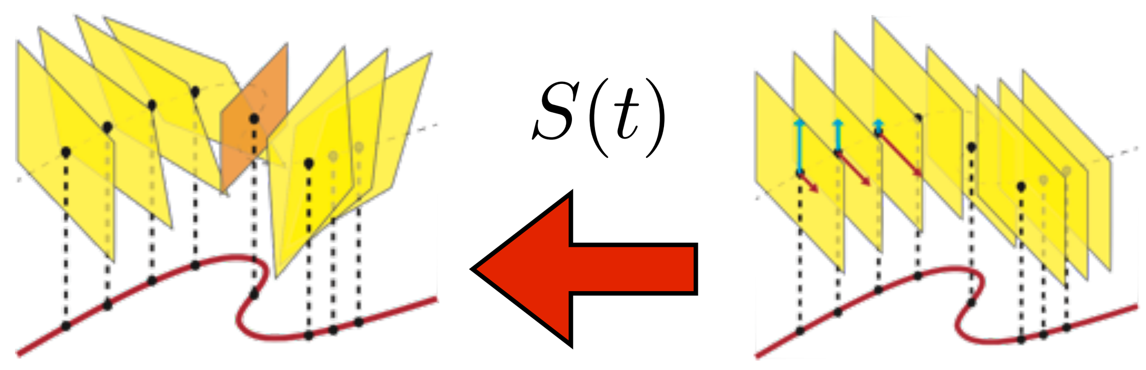
定義

2つの一様連続な正方行列値関数 $A(t), B(t)$ は次を満たす時、**運動学的に相似 (kinematically similar)** であるという：有界、可逆な連続行列値関数 $S(t)$ で、次を満たす物が存在する：$S' = AS - SB.$　□

係数行列が運動学的に相似な2つの flow は、同一のexponential dichotomyをもつ事が知られている。よって、スペクトルの情報も保存される。

ここで、行列 $B(y)$ として $A(y)$ の対角化行列をとり、方程式 $S' = AS - SB$を解く。解 $S(\tau)$ は有界である事が期待され、方程式 $\dot{w} = B(y)w$ の基本解行列 $\Phi^B(y,\tau)$ はよくわかっている。ここで、$\Phi^A(y,\tau) := S(\tau)\Phi^B(y,\tau)$ が $\dot{v} = A(y)v$ の解となるので、linear skew-product flow を計算できる。また、$A(y)$の固有値が S_ϵ の各点で相異なると仮定する。このとき、スペクトル部分束の不変性より、得られる flow は各点における不変ファイバーの基底を記述する。

以上より、不変部分束の分解を伴うベクトル束を得る。得られたファイバーの基底を使う事で、多様体 S_ϵ の滑らかな近傍（管状近傍）を数値計算できる (e.g., [3])。



手計算でも求められる基本解行列（右）と、相似を与える行列を介して、元の系の基本解行列を求める。力学系の安定性を、ファイバーを介して知る事ができる。

参考文献

[1] R. Sacker and G. Sell, A Spectral Theory for Linear Differential Systems, J. Diff. Eq., 27(1978), 320--358.
[2] K. Matsue, Rigorous numerics for fast-slow systems with one-dimensional slow variable : topological shadowing approach, arXiv 1507.01462, to appear in Top. Meth. Non. Anal.
[3] K. Matsue, Rigorous verification of tubular neighborhoods around slow manifolds via (un)stable normal bundles, in preparation.