

日内共分散推定量を含むScalar BEKKモデルの実証分析

小池 祐太 リスク解析戦略研究センター 特任研究員

1 イントロダクション

昨今IT技術の進歩等によって金融取引の高頻度化が進み、1日内の取引だけで大量の金融データが入手できるようになった。近年、そのような日内高頻度取引データをその金融資産のボラティリティの予測に役立てようという研究が盛んに行われている。それらの研究のうち、Realized Volatilityを始めとする、高頻度データに基づく日次ボラティリティの推定量(Realized Measureと呼ばれる)を、GARCHモデルやSVモデルといった伝統的なボラティリティ予測モデルに組み込み予測精度を向上させようという研究が活発である。Realized Measureには、高頻度データに含まれるジャンプや観測誤差をどのように扱うかによって様々なものが存在するが、モデルに組み込むRealized Measureの種類がモデルの予測能力に影響を与えることが報告されている。

一方で、最近、多変量の場合のRealized Measure(複数の金融資産の間の日次の共分散行列の推定量にあたる)も、1変量の場合に様々なものが提案されてきた。本研究では、そのような推定量を多変量のGARCH型モデルに組み込むことで、モデルの予測性能がどのように変化するかを、実データを用いて検証するのが目的である。そして、モデルの予測性能を向上させるためには、どの要因を考慮した日内共分散推定量を使うべきかということについて知見を得たいと思う。

2 モデル

\mathbf{r}_t を2種類の金融資産の時点 t での対数リターンからなる列ベクトルとする、また、 \mathcal{F}_t を時点 t までに得られる情報からなる σ -加法族とする。このとき、各時点 t において条件付き共分散 $H_t := \text{Cov}(\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1})$ を推定することが目標となる。以下 $E[\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ を仮定する。この問題を解くために、Engle & Kroner (1995, Econometric Theory)は、GARCHを多次元化した次のモデル(Scalar BEKKモデル)

$$H_t = (1 - a - b)\mu + bH_{t-1} + aP_{t-1}. \quad (1)$$

を導入した。ここに、 $P_t = \mathbf{r}_t \mathbf{r}_t^\top$ 、 $a, b \geq 0$ 、 C は非負定値対称行列であり、また P_t, H_t はともに強定常であると仮定して、 $\mu = E[H_t]$ とする。定常性を保証するために、

$$b < 1, \quad a + b < 1 \quad (2)$$

が必要である。

日内共分散推定量の観測値 RM_t は強定常正定値対称行列値確率変数列であり、かつ $\mu_{RM} = E[RM_t]$ が存在して正定値であると仮定する。このとき、Noureldin et al. (2012, J. Appl. Econ.)は、Scalar BEKKモデル(1)のアナロジーとして、次のモデル(Scalar HEAVYモデル)

$$H_t = (1 - a - b)\mu + bH_{t-1} + a\widetilde{RM}_{t-1} \quad (3)$$

を導入した。ここに、 $\widetilde{RM}_t = \lambda RM_t \lambda'$ 、 $\lambda = \mu_{RM}^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}}$ である。定常性のためにやはり条件(2)が必要である。本研究では、モデル(3)の RM_t を様々な種類の日内共分散推定量に変えた場合に、モデルの予測能力がどう変化するか検証することを目的とする。

日内共分散推定量としては、次の7種類を用いることにする。

- [RC] 5分足対数リターンに基づく Realized Covariance
- [BPC] 5分足対数リターンに基づく Realized Bipower Covariation
- [HY] Hayashi-Yoshida Estimator
- [THY] Truncated Hayashi-Yoshida Estimator
- [RK] Realized Kernel
- [PHY] Pre-averaged Hayashi-Yoshida Estimator
- [PTHY] Pre-averaged Truncated Hayashi-Yoshida Estimator

1は実証研究でよく使われるもので、秒単位で記録された生の高頻度データ(超高頻度データと呼ばれる)が含む問題(観測誤差が多い・観測時刻が非同期である)を回避するために、相対的に低頻度なデータを用いている。3は非同期観測を制御するために導入された推定量であり、6はそれに加えて観測誤差も制御している。また、非同期観測および観測誤差を

制御する推定量として、6とは別に5があり、こちらのほうが実証研究でよく使われるので含めておいた。2, 4, 7はそれぞれ1, 3, 6の推定量からジャンプの影響を除去したものである。

2.1 モデルの推定

モデル(3)に含まれるパラメータ a, b, μ および μ_{RM} の推定は、Noureldin et al. (2012)で提案されている2段階推定に基づくことにする。

いま、対数リターンと日内共分散推定量の観測データ $(\mathbf{r}_t, RM_t)_{t=1}^T$ が得られているとする。このとき、まず(3)内の μ および μ_{RM} を、モーメント推定量 $\widehat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T P_t$ 、 $\widehat{\mu}_{RM} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T RM_t$ で置きかえたものを \widehat{H}_t とする。次に、条件付きGauss型対数擬尤度関数

$$\ell_T(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \left[\log \det \widehat{H}_t + \text{tr}(\widehat{H}_t^{-1} P_t) \right] \quad \theta = (a, b) \quad (4)$$

を考え、これを最大にする θ を $\widehat{\theta}_T$ とする。

2.2 モデルの評価

観測データ $(\mathbf{r}_t, RM_t)_{t=1}^{T+\tau}$ をin-sample data $(\mathbf{r}_t, RM_t)_{t=1}^T$ とout-of-sample data $(\mathbf{r}_t, RM_t)_{t=T+1}^{T+\tau}$ に分割する。そして、in-sample dataを用いてモデル(3)のパラメータの推定量 $\widehat{\theta}_T$ を構成する。モデルのin-sample fitおよびout-of-sample fitの評価には、Hansen et al. (2012, J. Appl. Econ.)およびNoureldin et al. (2012)などに従い、それぞれ $-\frac{2}{T} \ell(\{\mathbf{r}_t, RM_t\}_{t=1}^T; \widehat{\theta}_T)$ および $-\frac{2}{\tau} \ell(\{\mathbf{r}_t, RM_t\}_{t=T+1}^{T+\tau}; \widehat{\theta}_T)$ の値を比較する。

3 データの解析結果

3.1 データ

用いた高頻度データは2010年4月から2011年2月までの期間にNYSEで記録された13種類の銘柄の取引データであり、それらのticker symbolはAXP, BA, CAT, GE, IBM, JPM, KO, MCD, MSFT, PG, SPY, TおよびWMTである。データはBarndorff-Nielsen et al. (2009, Econom. J.)に準じてcleaningした。SPY以外の銘柄は、Fuertes et al. (2009, J. Forecast.)において分析されている銘柄のうち、本研究で分析する期間中にDJIの構成銘柄であったものを選んだ。期間中の日次データの総数は230であり、そのうちの前半 $T = 169$ をin-sample dataとし(11月までのデータにあたる)、残りの $\tau = 61$ をout-of-sample dataとする。

\mathbf{r}_t は2種類の銘柄の100×log(第 t 日の終値/第 t 日の始値)の値(だいたい第 t 日の収益率の%表示)からなる列ベクトルとする。日次データはYahoo! Financeからとった。 \mathbf{r}_t の第2成分はSPYで固定し、第1成分を他の銘柄間で動かすことにする。状況としては、S&P 500をベンチマークとして、それに対する他の銘柄の動きを比較することを想定している。

3.2 解析結果

下表は2.2で述べた方法によってモデルのin-sample, out-of-sampleでのパフォーマンスを評価してランキングした結果を示している。なお、BEKKはモデル(1)を表す。

	BEKK	RC	BPC	HY	THY	RK	PHY	PTHY
AXP	8 8***	3 4**	4 7**	7 6*	6 5	5 3**	2 1	1 2
BA	8 8***	6 2	7 6**	5 7*	4 5*	3 1	1 4*	2 3*
CAT	8 8	4 2	1 1	3 7	2 6	7 5	6 4	5 3
GE	8 1	4 2	1 3	3 7	2 8	7 4	6 5	5 6
IBM	8 8**	1 4	4 1	7 7*	6 6*	5 3	2 2	3 5
JPM	8 8**	5 4*	1 5**	7 7**	6 6**	4 3**	3 2	2 1
KO	8 8**	5 3**	3 2	6 6*	7 7*	4 1	1 4	2 5*
MCD	8 6*	2 1	1 5**	7 7**	6 8**	3 2	5 3	4 4
MSFT	8 8**	4 5	1 4	6 6	5 1	7 7	3 2	2 3
PG	8 4	2 2	1 1	5 7**	4 8**	3 3	7 5**	6 6**
T	8 8**	5 5	4 4	3 2	7 7*	6 3	1 1	2 6*
WMT	8 8**	4 1	3 5*	6 6	7 7	1 2	5 3	2 4

対数擬尤度に基づくパフォーマンスのランキング

各セルの左側がin-sample fitのランクで、右側がout-of-sample fitのランク。Out-of-sample fitのランクについて、*, **, ***はそれぞれ有意水準0.1, 0.05, 0.01のDiebold-Mariano-West検定によってbest performerより有意に劣っていることを示す。