複素空間上のコーシー分布

加藤　昇吾　　数理・推論研究系　准教授

はじめに

コーシー分布の特徴づけ

実数上のコーシー分布の導出法の１つとして，以下のメビウス変換を用いた特徴づけによる方法が知られている．

【定理】(Knight, 1976)　確率変数Xが実数上のコーシー分布に従うのは，以下のとき，またその時に限る：
任意の$a,b,c,d \in \mathbb{R}$ $(ad-bc \neq 0)$に対して，ある$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$が存在し，

$$\frac{aX+b}{cX+d} \overset{\mathrm{d}}{=} \alpha X + \beta$$

を満たす．ただし，$Y \overset{\mathrm{d}}{=} Z$は，確率変数$Y$と$Z$の分布が等しいことを表す．

このアイデアを応用し，他の多様体上における'メビウス変換'を定義することで，それらの多様体上の'コーシー分布'が提案された．(例えば，多次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^p$上や円周上のコーシー分布など．)

研究の目的

メビウス変換は，元々は複素平面$\mathbb{C}$上において定義された変換である．

しかし，複素平面$\mathbb{C}$上および複素空間$\mathbb{C}^p$上でのコーシー分布は議論されていないようである．

そこで本報告では，以下の２つを提案する：

(i) $\mathbb{C}$上のメビウス変換を拡張した$\mathbb{C}^p$上のメビウス変換,

(ii) その変換によって特徴づけられる$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布．

複素空間上のコーシー分布

はじめに$\mathbb{C}^p$上のメビウス変換を定義し，それから，その変換によって特徴づけられる$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布を提案する．

なお，以下の結果の詳細は，**Kato & McCullagh (revised)**に与えられている．

$\mathbb{C}^p$上のメビウス変換

ベクトルzを$z=(z_1,\ldots,z_p)' \in \mathbb{C}^p$とする．また，

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & b_p \\ c_1 & \cdots & c_p & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(p+1,\mathbb{C}),$$

とおく．ここに，$a=(a_{jk})$は$p\times p$行列，$b=(b_1,\ldots,b_p)'$，$c=(c_1,\ldots,c_p)$，$d\in\mathbb{C}$である．このとき，$\mathbb{C}^p$上の新たな変換を

$$M_g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z \in \mathbb{C}^p \qquad (1)$$

で定義する．

以後，M_gを$\mathbb{C}^p$上のメビウス変換と呼ぶことにする．

$\mathbb{C}^p$上のメビウス変換の性質

$\mathbb{C}^p$上のメビウス変換M_gについて，以下が成り立つ：

(i) M_gは，$\mathbb{C}^p$をそれ自身に写す，

(ii) $p=1$のとき，M_gは複素平面$\mathbb{C}$上のメビウス変換となる，

(iii) M_g全体の成す集合は，写像の合成を積として群をなす，

(iv) $c=0$のとき，M_gはアフィン変換となる．

$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布

$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布を確率密度関数

$$f(z) = \frac{\Gamma(p+1)}{\pi^p|\det\Sigma|}\left\{1+\overline{(z-\mu)}'\Sigma^{-1}(z-\mu)\right\}^{-(p+1)}, \quad z\in\mathbb{C}^p, \qquad (2)$$

で定義する．ここで，$\mu\in\mathbb{C}^p$，Σは$p\times p$正値定符号エルミート行列，$\bar{z}=(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_p)'$，$\bar{z}_j$は$z$の第$j$成分の共役複素数をあらわす（$j=1,\ldots,p$）．

$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布の特徴づけ

$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布(2)は，$\mathbb{C}^p$上のメビウス変換(1)から以下のように特徴づけられる．

【主定理】(Kato & McCullagh, revised)　確率ベクトルZが$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布に従うのは，以下のとき，またその時に限る：
任意のa,b,c,dに対して，ある$\alpha\in\mathrm{GL}(p,\mathbb{C})$と$\beta\in\mathbb{C}^p$が存在し，

$$\frac{aZ+b}{cZ+d} \overset{\mathrm{d}}{=} \alpha Z+\beta$$

を満たす．ただし，a,b,c,dは(1)と同様に定義された行列・ベクトル等を表す．

証明については，**Kato & McCullagh (revised)**を参照．

既存の分布との関係

最後に，$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布(2)と，既存の確率分布との関連について述べる．

(i) $\mathbb{C}^p$上のコーシー分布は，自由度1の$\mathbb{C}^p$上のt分布と等しい．

(ii) 確率ベクトルZが，$\mathbb{C}^p$上のコーシー分布に従っているとする．また，

$$Z_j = X_j + iX_{p+j}$$

と仮定する．ここで，$X_k\in\mathbb{R}$，$j=1,\ldots,p$，$k=1,\ldots,2p$．このとき，確率ベクトル$(X_1,\ldots,X_{2p})'$の分布は，尺度行列に制約を与えた自由度2の$\mathbb{R}^{2p}$上のt分布と等しくなる．

References

[1] Kato, S. & McCullagh, P. A characterization of a Cauchy family on the complex space, revised.

[2] Knight, F.B. (1976). A characterization of the Cauchy type. *Proc. Amer. Math. Soc.* **55** 130–135.