

# 木グラフで表現できる距離空間とは何か

早水 桃子 総合研究大学院大学 統計科学専攻 博士後期課程 2年

## Introduction



都市の集合と、各都市間の距離が与えられている。同じ都市を複数回通らずに全都市を訪れるようなツアーの長さは最短でいくつか？

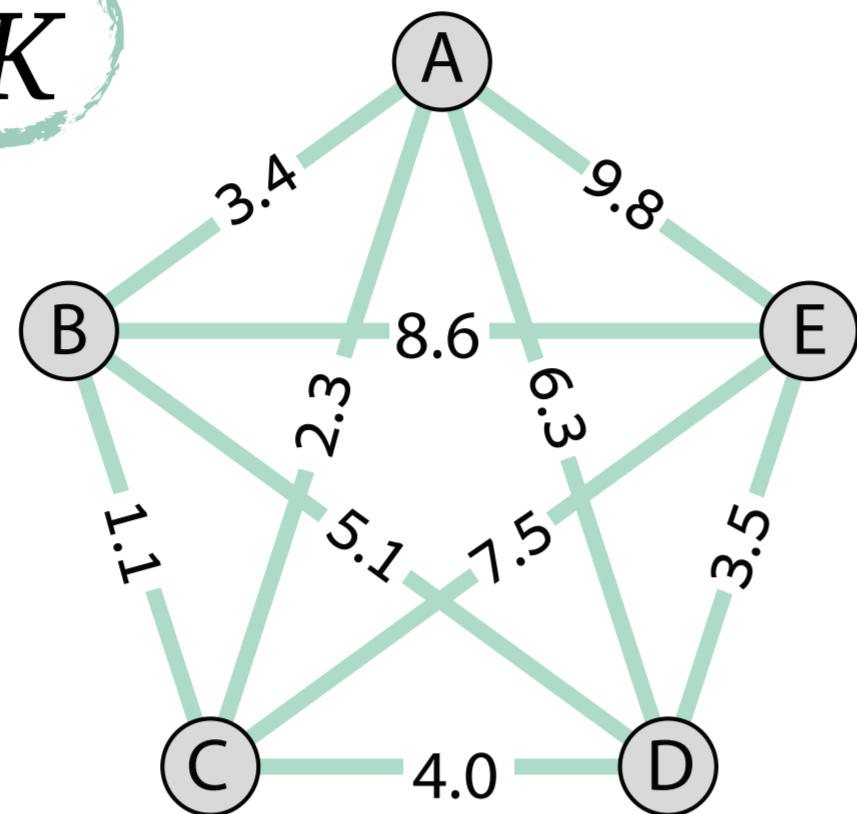


巡回セールスマン問題のメトリック版 (NP-hard)。あらゆる入力に対する厳密解を求めるのは困難だが、この例に対しては、実は簡単に計算できる。

D

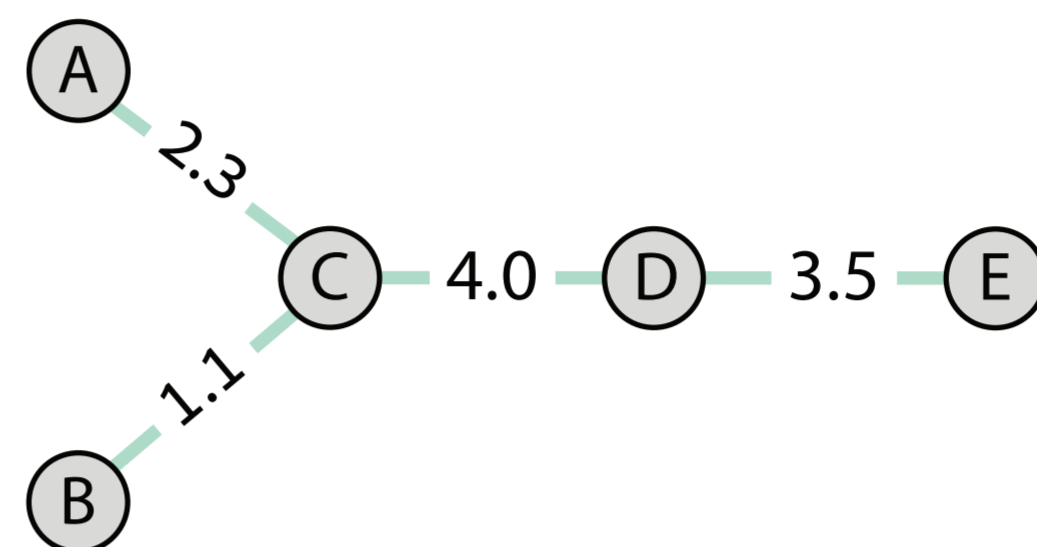
0	3.4	2.3	6.3	9.8
3.4	0	1.1	5.1	8.6
2.3	1.1	0	4.0	7.5
6.3	5.1	4.0	0	3.5
9.8	8.6	7.5	3.5	0

K



T

集合  $X = \{A, B, C, D, E\}$  と距離  $d$  を変えずに距離空間  $(X, d)$  を表現する木  $T$  が存在する。



正解は  
**21.8**  
(木の長さの2倍)

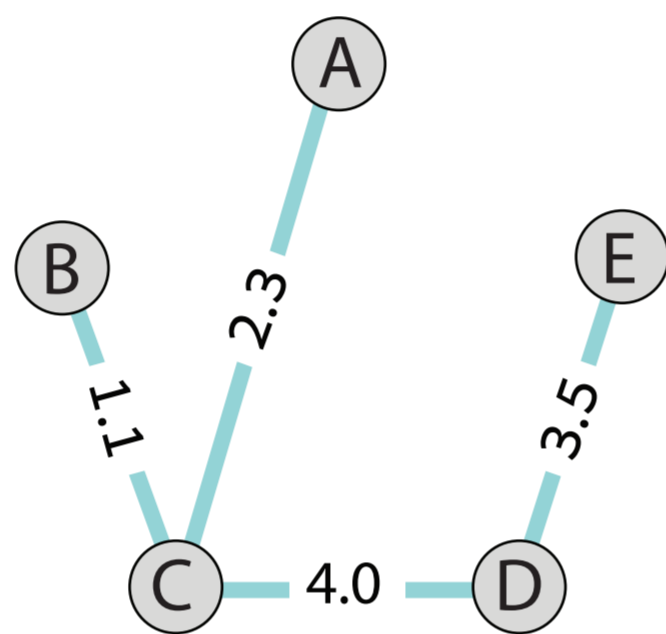
## Proposition



距離空間  $(X, d)$  を導く木  $T$  は存在するなら、どんなグラフ？



完全グラフ  $K$  の中に  
ただ一つの最小全域木！



**Notes** 完全グラフには必ず最小全域木が存在するが、ユニークとは限らない。

**Fact** ただし、次のルールを満たすときはユニーク。

### Tie - breaking rule

異なるペアは異なる距離  $d$  の値をとる

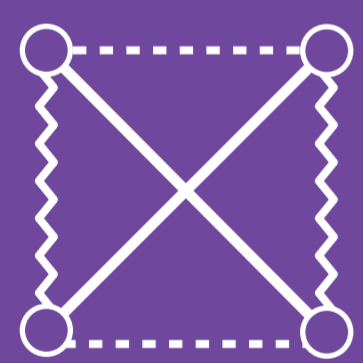
## Theorem



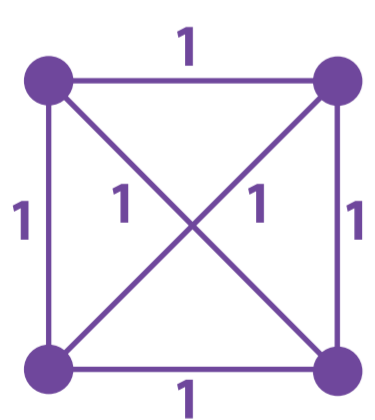
距離空間  $(X, d)$  はこのルールに従うとする。木  $T$  が存在するための必要十分条件は？

## REMARK

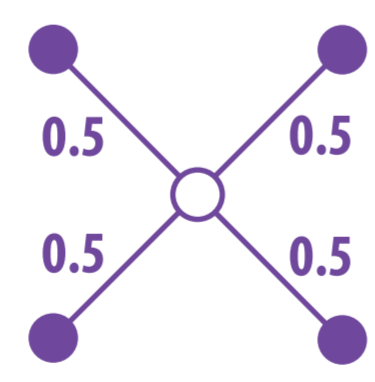
4点条件 (four-point condition) では答えにならない



どのような4点を選んでも、  
{実線の和, 波線の和, 点線の和} のうち  
最小でないもの2つが等しくなる。



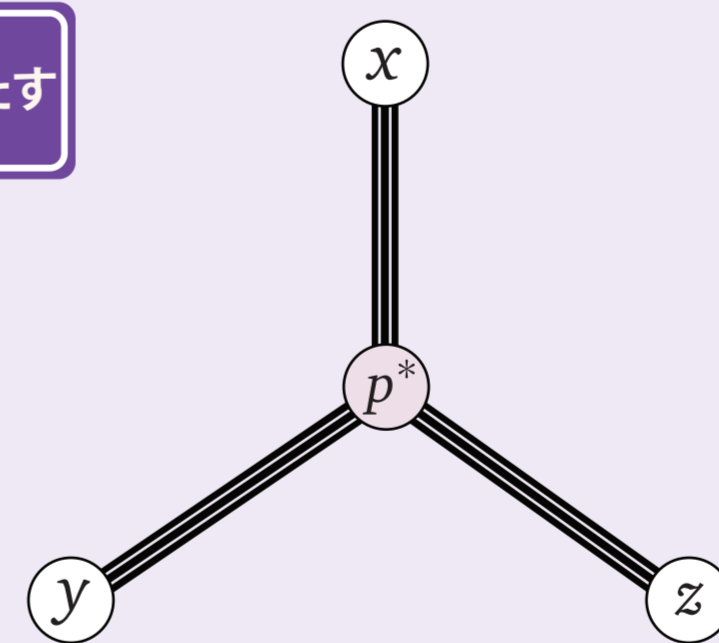
辺の長さがすべて等しい  
完全グラフは上の条件を  
明らかに満たしてしまう。



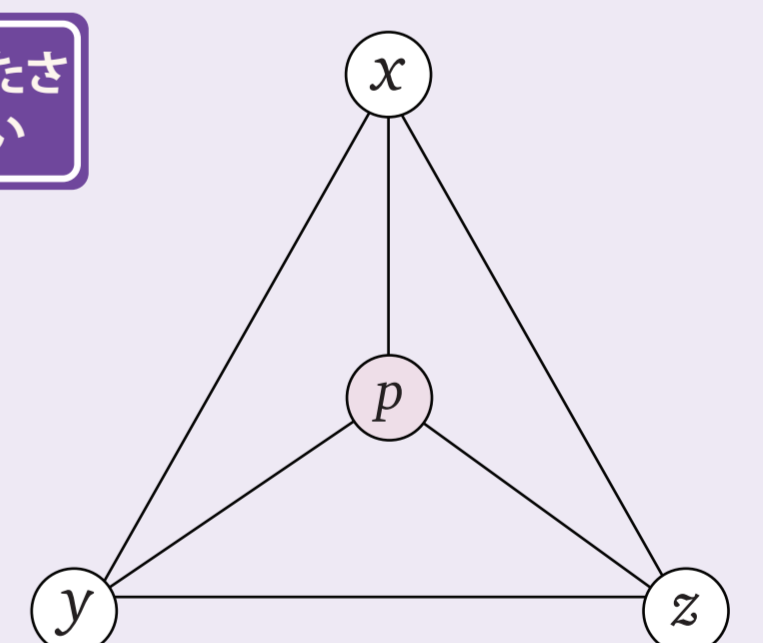
## The fourth point condition

どのような3点  $x, y, z \in X$  を選んでも、  
次の等式を満たす4番目の点  $p^* \in X$  が存在する！  
$$d(x, p^*) + d(y, p^*) + d(z, p^*) = \frac{1}{2} \{d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)\}.$$

みたす



みたさない

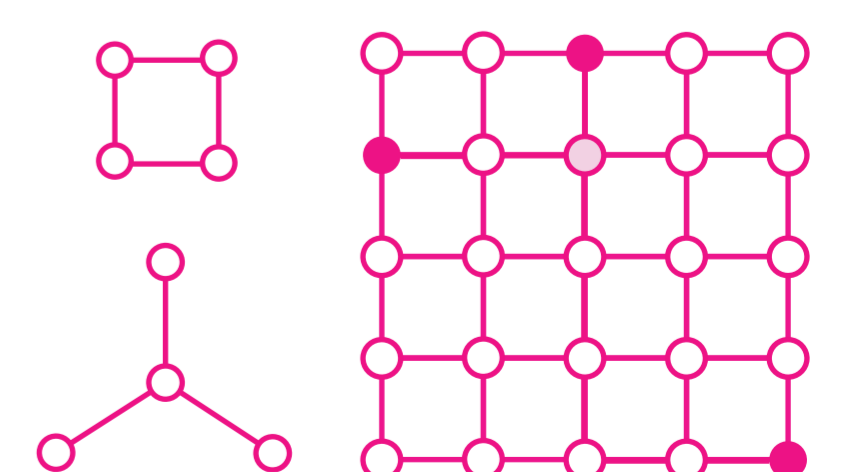


**Notes** 点  $p^*$  は、存在するなら自動的にユニーク。

## Corollary

The fourth point condition を満たすグラフは「メディアン・グラフ」と呼ばれることもある。これ自体は木やラティスなど色々なグラフを一括した総称だが、  
**有限個の頂点を持つメディアン・グラフのうち、tie-breaking rule を満たしうるものは木以外に存在しない** ということが明らかにされた。

### メディアン・グラフの例



## Preprint

M.Hayamizu and K.Fukumizu: On the Minimum Spanning Tree-like Metric Spaces. <http://arxiv.org/abs/1505.06145>