

# 非対称分布による資産価格時系列変動モデリング

川崎 能典 モデリング研究系 教授

概要: 2009年4月まで東京商品取引所(東商取)は商品先物価格に値幅制限を設けていたが, 2009年5月からはサーキットブレーカーシステムを導入した. この制度変更の結果, 商品先物の価格変化(価格前日差)の分布特性は大きく変化し, サーキットブレーカーシステムの下では下落時の分布の裾が重くなっていることが観察される. 値幅制限時代のデータに対しては, 打ち切りのある価格差系列に対してMCMCにより自己回帰モデルを適用すると, 概ね正規分布の仮定が適切であり, 価格の上昇・下落で非対称性は観察されない. サーキットブレーカーシステムの下では, 上記の経験的事実を踏まえ, (1)正規分布, (2)非対称ラプラス分布, (3)半指数・半正規分布, を低次の自己回帰を許しながらMCMCで推定した. 分析の結果, 半指数・半正規分布のあてはまりが最も良く, 価格変動の非対称性が統計モデルによって確認された. [本研究は, 青木義充氏(QUICK(株), 総研大修了生)との共同研究である.]

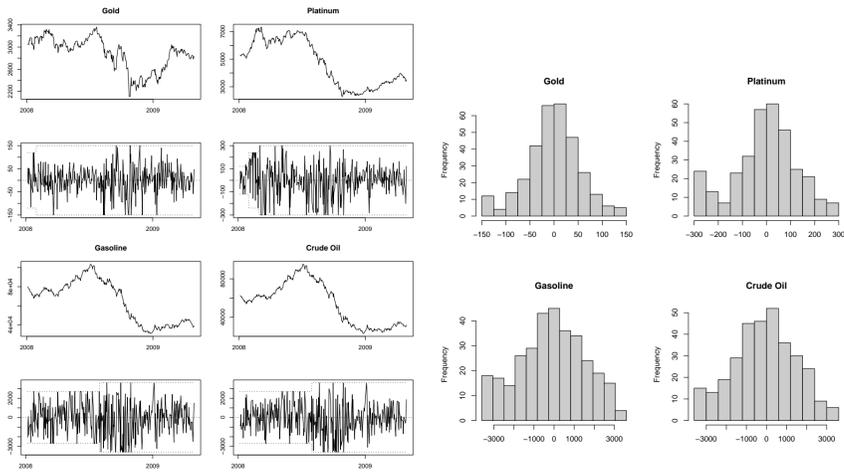
## 1. 商品先物と取引制度

本研究では, 東商取で取引された4種類の商品先物(金, 白金, ガソリン, 原油)の日次価格時系列を取り扱う. 最も取引の多い期先物を接続することで, 一本の長期時系列を生成する. 2008年1月から2009年4月までは値幅制限が行われており, 2009年5月から2010年12月までのデータはサーキットブレーカーシステムのもとで観察されている.

## 2. 値幅制限下でのデータ

値幅制限制度の下では, 取引価格が一度上限(あるいは下限)に達すると, その日の取引は以降全て中止され, 取引が可能となるのは翌営業日以降である. 観測された価格は $P_t$ は, 値幅制限がなければもっと大きな(あるいは小さな)値 $X_t$ をとり得た可能性がある. 値幅制限値を $L$ とすると,  $|X_t - P_{t-1}| < L$ なら $P_t = X_t$ だが,  $|X_t - P_{t-1}| \geq L$ なら $P_{t-1} + L$ しか観測されない.(下落時なら $|X_t - P_{t-1}| \leq -L$ のとき $P_{t-1} - L$ を観測.)このような打ち切りがあるため, 観測時系列 $\{P_t\}$ のヒストグラムの裾挙動は下図右パネルのように不自然な形になる.

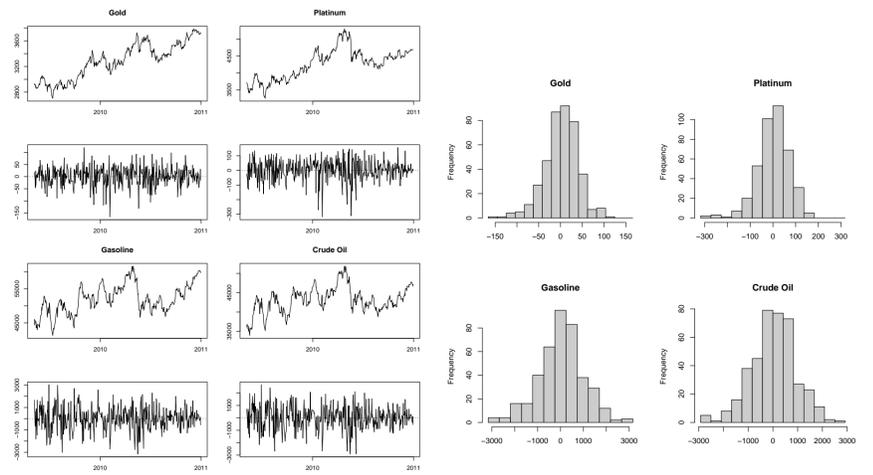
なお, この最大値幅 $L$ は前月の価格水準を参考に東商取が商品毎に当月分を決める. 従って, 最大値幅は変わりうるが先決変数である. 下図左パネルを参照.



## 3. サーキットブレーカーシステム下でのデータ

東商取のサーキットブレーカーシステムでは, 依然最大値幅 $L$ は存在するのだが, その値は一日あたり最大4回まで更新(拡大)される. 例えば金の場合, 最初の最大値幅 $L_1$ は150円と定められている. 価格が上下限に達すると, 取引所(サーキット)は5分間の休憩(ブレイク)に入り,  $L_2 = 300$ と最大値幅が拡大されて取引は再開される.

サーキットブレーカーシステムの導入で, 商品先物の価格差の分布特性は大きく変わった. 打ち切りの消滅: 4回の最大値幅改訂を経てもそれを超える価格変化があれば, 当該日の取引は停止であるが, そのような日は標本期間では全資産で存在しない. 価格変化の非対称性: 4つの商品先物で価格差時系列からヒストグラムを描くと, 左裾(下落側)は裾が重く, 右裾(上昇側)は裾が軽いという印象を与える.



## 4. 統計的モデリングと推定

非対称性の有無を検討するために, 時系列のイノベーション項 $\epsilon_t$ に以下の3つのモデルを考える.

1. 正規:  $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-\epsilon_t^2/2\sigma^2\}$
2. 非対称ラプラス:  $p_1\theta_1 \exp(\theta_1\epsilon_t)I_{D_1}(t) + p_2\theta_2 \exp(\theta_2\epsilon_t)I_{D_2}(t)$
3. 半指数・半正規:  $p_1\theta_1 \exp(\theta_1\epsilon_t)I_{D_1}(t) + p_2[2(2\pi\sigma_2^2)^{-1/2} \exp\{-\epsilon_t^2/2\sigma_2^2\}I_{D_2}(t)]$

ここで $D_1 = \{t|\Delta X_t < \alpha\}$ は下降局面,  $D_2 = \{t|\Delta X_t \geq \alpha\}$ は上昇局面であり,  $\alpha$ の表現は採用するモデルで異なる. 例えば上の非対称ラプラスであれば, 期待値は $\nu = -p_1/\theta_1 + p_2/\theta_2$ であるので,  $\epsilon_t$ の位置パラメータを $\nu$ だけずらし, 平均構造に $\Delta X_t = \mu - \nu + \epsilon_t$ として繰り入れる. 従ってこの場合 $\alpha = \mu - \nu$ である.

推定はサーキットブレーカー時代のモデル1を除きMCMCで行う.

1.  $\alpha$ のサンプリング
2.  $p_1$ のサンプリング
3. 下降局面のパラメータ( $\theta_1$ )のサンプリング
4. 上昇局面のパラメータ( $\theta_2$ ないし $\sigma_2^2$ )のサンプリング

値幅制限時代に関しては, 打ち切りのあるところでデータを増補するサンプリングが行われる.

## 5. 推定結果

モデル選択はDICによる. 値幅制限時代は概ね正規分布が適当で, 場合によってはAR(1)構造が見られる. サーキットブレーカーシステムの下では, 全資産で半指数・半正規分布が支持された.

	モデル	$\Delta DIC$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$-\hat{\nu}$	$\hat{\phi}$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$
金	正規	0	-0.68						3390		
	正規 AR(1)	1.03	-0.70			-0.07			3184		
	非対称ラプラス	9.70	3.08	-0.77	-3.85		0.02068	0.0238		0.51	0.49
	半指数・半正規	4.84	-4.37	0.95	5.31		0.02120		3182	0.43	0.57
白金	正規	0.26	-5.55						21457		
	正規 AR(1)	0	-5.69			-0.07			21521		
	非対称ラプラス	40.56	6.33	-5.94	-12.27		0.0078	0.0092		0.51	0.49
	半指数・半正規	24.01	-17.43	-1.76	15.670		0.0083		21201	0.42	0.58
ガソリン	正規	6.856	-125.38						3609906		
	正規 AR(1)	0	-131.44			-0.12			3524183		
	非対称ラプラス	82.85	-64.94	-129.58	-64.64		0.0006	0.0006		0.50	0.48
	半指数・半正規	47.38	-412.00	-59.21	352.80		0.0007		4316168	0.42	0.58
原油	正規	1.95	-93.79						2897869		
	正規 AR(1)	0	-96.57			-0.10			2885595		
	非対称ラプラス	73.30	-35.025	-99.22	-64.21		0.0007	0.0007		0.50	0.50
	半指数・半正規	28.03	-397.38	-73.04	324.34		0.0007		3341211	0.41	0.58

	モデル	$\Delta DIC$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$-\hat{\nu}$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$
金	正規	11.72	1.98					1495		
	非対称ラプラス	19.49	5.30	1.83	3.47	0.0312	0.0373		0.52	0.48
	半指数・半正規	0	-2.86	1.99	-4.86	0.0330		1412	0.42	0.58
白金	正規	33.16	2.40					4975		
	非対称ラプラス	31.01	5.51	2.17	3.34	0.0178	0.0199		0.50	0.50
	半指数・半正規	0	-6.07	1.98	-8.08	0.0185		4423	0.42	0.58
ガソリン	正規	7.54	37.81					1002981		
	非対称ラプラス	16.36	56.90	35.83	21.08	0.0013	0.0013		0.50	0.50
	半指数・半正規	0	-153.68	43.92	-197.59	0.0014		1088107	0.41	0.59
原油	正規	1.33	26.27					829293		
	非対称ラプラス	28.26	35.30	23.92	11.39	0.0014	0.0014		0.50	0.40
	半指数・半正規	0	-164.17	21.32	-185.49	0.0015		921835	0.41	0.59