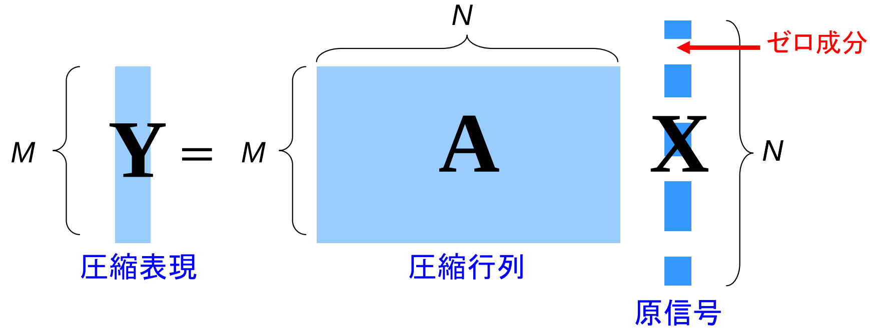
レプリカ法による制限等長定数の解析

坂田　綾香　　モデリング研究系　助教

東京工業大学　大学院総合理工学研究科　樺島祥介氏との共同研究



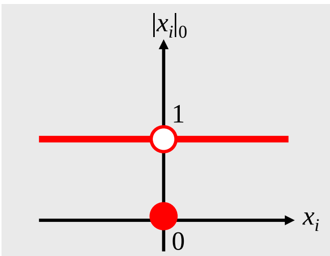
最もスパースな原信号Xを
一意に復元するための条件は？

スパースな原信号の復元方法

l_0再構成

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \underbrace{\|\mathbf{x}\|_0}_{\text{非ゼロ要素の数}}, \text{subject to } \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

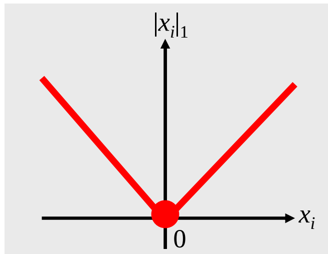
- NP困難
- 全数探索が必要



l_1再構成

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \underbrace{\|\mathbf{x}\|_1}_{\text{絶対値の和}}, \text{subject to } \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

- 線形計画問題
- l_0 再構成の凸緩和



復元成功の十分条件は制限等長定数により与えられる

制限等長定数の定義

S個の非ゼロ要素を持つベクトルをS-スパースベクトルと呼ぶ。

全ての S-スパースベクトル $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^N$ について、
次の関係を満たす定数 $\delta_S^{\min}, \delta_S^{\max}$ が存在するとき、

$$(1-\delta_S^{\min})\|\mathbf{x}\|_F^2 \le \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_F^2 \le (1+\delta_S^{\max})\|\mathbf{x}\|_F^2$$

行列$\boldsymbol{A}$ はS-制限等長性(RIP)を満たす。
$\delta_S = \max\{\delta_S^{\min}, \delta_S^{\max}\}$を制限等長定数(RIC)と呼ぶ。

δ_Sが小さいとき、$\boldsymbol{A}$ は正規直交系に近い。

1. $\delta_{2S} < 1$のとき、l_0 再構成は一意なS-スパース解を与える。

2. $\delta_{2S} < 2^{1/2} - 1$のとき、$l_1$ 再構成はl_0 再構成と同じ解を与える。

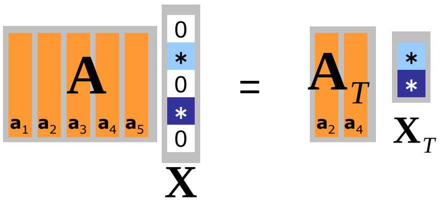
[Candes and Tao, *IEEE Trans. Inform. Theory* (2005)]

3. (**2.**の改善)
$(4\sqrt{2}-3)\delta_{2S}^{\min} + \delta_{2S}^{\max} < 4(\sqrt{2}-1)$　のとき、
l_1 再構成はl_0 再構成と同じ解を与える。

[Foucart and Lai, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* (2009)]

要するに

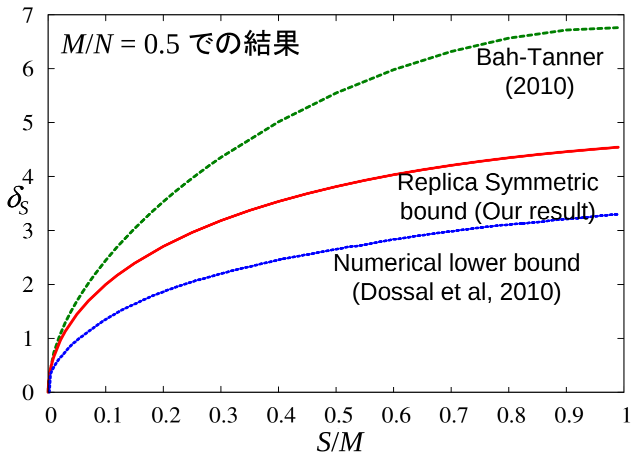
S = 2, T = {2,4}, N = 5, V = {1, 2, 3, 4, 5}



$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}_T^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_T)\|\mathbf{x}_T\|_F^2 \le \|\mathbf{A}_T\mathbf{x}_T\|_F^2 \le \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_T)\|\mathbf{x}_T\|_F^2$$

$$\downarrow$$

$$\delta_S = \max\{1 - \min_{T:|T|=S, T\subseteq V} \lambda_{\min}(\mathbf{A}_T^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_T), \max_{T:|T|=S, T\subseteq V} \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_T) - 1\}.$$



我々の見積もりは、
既存研究より
良い上界を与える。

詳しい導出は
arxiv: 1501.06281