力学系の不動点と精度保証付数値計算 ー 双曲性・不変多様体 ー

2014年6月13日　統計数理研究所　オープンハウス

松江　要　　統計思考院（数学協働プログラム）　特任助教

1. 始めに

本稿では具体的に与えられた力学系の不動点を、その周りの力学系の性質を込めて検証するための方法を紹介する。微分方程式や写像の解軌道に関する様々な研究で"安定性解析"や"分岐"の研究が行われ、そこに数値計算が伴う事が多い。しかし**数値計算を用いた結果は数学的に正しい結果を反映しているのか？**この問いに数値計算は答えてくれない。そこで結果の数学的厳密性を伴う数値計算法で解析する手法がある。良く知られているのが"区間演算"を用いた精度保証付き数値計算であり、そのアイデアを応用する事で数値計算をしながら数学的議論を持ち込む事が出来る。

ここで区間演算について言及する。コンピュータで行われる様々な計算は、数学的厳密な意味で正しい結果とは言えないものがほとんどである。コンピュータでは浮動小数点数による演算が採用され、ごく簡単な以下の例も、通常正しい結果を導く事が出来ない。それはメモリの有限性による限界である：

1/3 = 0.33333333333333 ?

そこで、ある2つの浮動小数点数で包み込む事で厳密な結果を導く。以下は数学的厳密な意味で正しい：$1/3 \in [0.333333333333333, 0.333333333333334]$.
浮動小数点数の替わりにそれらで構成される区間を基本単位とし、四則演算や関数演算を行うのが区間演算の基本的考え方である。詳しくは精度保証付き数値計算の文献を参照されたい。
以下ではこの考えに基づいた力学系の考察を行う。ここでは種々の条件をどのように表しているかが鍵となる。集合Xの写像fによる像は次の包含Yで表す：$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y.$

2. Conley指数, 円盤

精度保証付き数値計算を応用して力学系を解析する手法としては、解析的手法と位相的手法に大きく分かれる。今回は位相的手法、Conley指数と円盤（cf. covering relation [4]）を紹介する。特に断りのない限り、φ を $\mathbb{R}^n$ 上のflowとし $x\cdot I := \{\varphi(x,t) \mid t \in I\}$ とする。

2-1. Conley指数

$N \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし、$\mathrm{Inv}(N) := \{x \in N \mid x\cdot\mathbb{R} \subset N\}$ とする。

定義　Nは $\mathrm{Inv}(N) \subset \mathrm{int}(N)$ を満たすとき、孤立化近傍であるという。 ■

孤立性は、集合の境界におけるベクトル場の情報で決まる。それを用いた不変集合の代数トポロジー的不変量がConley指数である。

定義　$x \in \partial N$ は次を満たすとき入口点（$x \in N^-$）という：
$$\exists \epsilon_x > 0 \text{ s.t. } \quad x\cdot t \in \mathrm{int}(N),\ x\cdot(-t) \notin \mathrm{int}(N)\ (\forall t \in (0,\epsilon_x)).$$

$x \in \partial N$ は次を満たすとき出口点（$x \in N^+$）という：
$$\exists \epsilon_x > 0 \text{ s.t. } \ x\cdot(-t) \notin \partial N,\ x\cdot t \notin N\ (\forall t \in (0,\epsilon_x)).$$

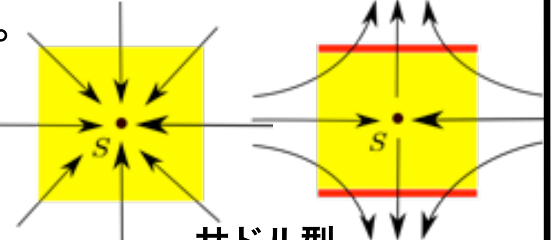
Nは次を満たすとき、孤立化ブロックであるという (これは孤立化近傍となる)：

1. $\partial N = N^- \cup N^+$. 2. Nの出口 N^+ は ∂N の閉部分集合.

Nを孤立化近傍として、$S := \mathrm{Inv}(N)$ のConley指数が次で定義される：
$$CH_*(S) := H_*(B, B^+).$$
(B：Nに含まれるSの孤立化ブロック) ■

一般に $S \subset B \subset N$ となる孤立化ブロックが存在し、上の相対ホモロジーを用いたConley指数の定義は孤立化近傍の取り方に依らない事が知られている。

定理 ([3])　$CH_*(S) \not\cong 0$ ならば $S \neq \emptyset$ である。とくに
$$CH_k(S) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = \exists l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$
ならば S はflow φ の不動点を含む。この時のSの孤立化ブロックをサドル型孤立化ブロックと呼ぶ事にする。



サドル型
孤立化ブロック

2-2. 円盤

$N \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とする。

定義　$\mathbb{R}^n$ 内単位閉球 $B_n = B_n(0,1)$ と同相な集合をh-setと呼ぶ。
h-set Nに対して、次の記号を導入する：

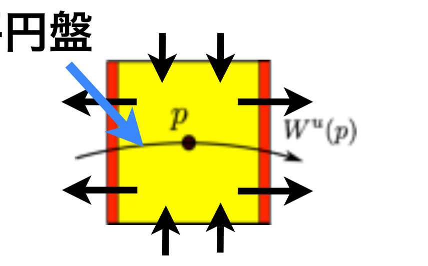
$u(N), s(N) : u(N) + s(N) = n$ なる自然数

$c_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{u(N)} \times \mathbb{R}^{s(N)} : c_N(N) = \overline{B_{u(N)}} \times \overline{B_{s(N)}}$ なる同相写像 ■

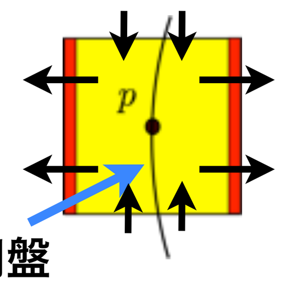
$$\dim N := n, \quad N_c := \overline{B_{u(N)}} \times \overline{B_{s(N)}},$$
$$N_c^- := \partial B_{u(N)} \times \overline{B_{s(N)}}, \quad N_c^+ := \overline{B_{u(N)}} \times \partial B_{s(N)},$$
$$N^- := c_N^{-1}(N_c^-), \quad N^+ := c_N^{-1}(N_c^+).$$

定義　Nをh-set, $b : \overline{B_{u(N)}} \to N$ を連続写像, $b_c := c_N \circ b$ とする。 次を満たす時、bをN内水平円盤という：ホモトピー $h : [0,1] \times \overline{B_{u(N)}} \to N$ で次を満たすものがとれる：
$$h_0 = b_c,$$
$$h_1(x) = (x, 0),\ \forall x \in \overline{B_{u(N)}},$$
$$h(t,x) \in N_c^-,\ \forall t \in [0,1],\ \forall x \in \partial B_{u(N)}.$$

水平円盤



Nをh-set, $b : \overline{B_{s(N)}} \to N$ を連続写像, $b_c := c_N \circ b$ とする。 次を満たす時、bをN内垂直円盤という：ホモトピー $h : [0,1] \times \overline{B_{s(N)}} \to N$ で次を満たすものがとれる：
$$h_0 = b_c,$$
$$h_1(x) = (0, x),\ \forall x \in \overline{B_{s(N)}},$$
$$h(t,x) \in N_c^+,\ \forall t \in [0,1],\ \forall x \in \partial B_{s(N)}.$$
■



垂直円盤

3. 数値検証法：不動点周りの力学系

ここから微分方程式の力学系の不動点周りの力学系を調べる方法を述べる。

（∗）　$\dot{x} = f(x,\lambda)$　　$(f : \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}^n : C^1)$

について、ある$\lambda_0 \in (a,b)$において**近似**不動点 p_0 が計算できたとする (i.e. $f(p_0,\lambda_0) \approx 0$).
さらに、(p_0,λ_0) において線型化行列 $f_x(p_0,\lambda_0)$ が対角化できると仮定する。その固有値を $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ とし、簡単のために全て実数であるとする。このとき、(p_0,λ_0) の周りで（∗）は次のように書ける：$\dot{y}_i = d_i y_i + \epsilon_i(y,\lambda)\ (i = 1,\cdots,n), \quad y = (y_1,\cdots,y_n)^T = Px.$
Nをp_0を含むコンパクト集合とし、次の包含をとる：$\{\epsilon_i(y,\lambda) \mid x \in N, \lambda \in [a,b]\} \subset [\delta_i^-, \delta_i^+].$
そして、Bを次で定義する。これは非自明Conley指数を持つ孤立化ブロックの候補となる：
$$B := \prod_{i=1}^n B_i, \quad B_i := \left[-\frac{\delta_i^-}{\lambda_i}, -\frac{\delta_i^+}{\lambda_i}\right]\ (\lambda_i > 0), \quad \left[-\frac{\delta_i^+}{\lambda_i}, -\frac{\delta_i^-}{\lambda_i}\right]\ (\lambda_i < 0).$$

定理　$B \subset N$ の時、Bは、よってNは任意の $\lambda \in [a,b]$ に対して（∗）の不動点 p_λ^* を含む。 ■

上の固有値 λ_i と$[\delta_i^-, \delta_i^+]$さえ区間演算で計算できれば、数学的厳密に不動点を得る事が出来る。
真の不動点と p_0 の誤差はBあるいは近傍Nの大きさで表現される。しかしこの定理では不動点の存在と孤立化ブロックBの周りの力学系の情報のみに言及しており、p_λ^* の一意性やその周りの力学系の情報には言及していない。よって、より踏み込んだ解析のためには別の手法で p_λ^* 周りの力学系の情報を引き出す必要がある。しかし、次が成り立つ。

定理 ([2]+[4])　Nを上の定理で得られた集合とし、さらに次が成り立つと仮定する：
$$|\lambda_i| > \max\left\{\sum_{j=1}^n \sup_{x\in N,\lambda\in[a,b]}\left|\frac{\partial \epsilon_i}{\partial y_j}(y,\lambda)\right|, \sum_{j=1}^n \sup_{x\in N,\lambda\in[a,b]}\left|\frac{\partial \epsilon_j}{\partial y_i}(y,\lambda)\right|\right\},\ i = 1,\cdots,n.$$
このとき $\mathrm{Inv}(N) = \{p\}$で、pは不安定次元 k の双曲型不動点である。さらに不安定多様体 $W^u(p)$ はN内水平円盤、安定多様体 $W^s(p)$ はN内垂直円盤となる。 ■

これは仮定の下 $L_\lambda(y) := -\sum_{j=1} \mathrm{sgn}(\lambda_i)(y_i - (p_\lambda^*)_i)^2$ がリャプノフ関数となる事から従う。

さらにこの定理は強い仮定の下で無限次元力学系にも適用でき、その数値計算例が [2] にある。
全ての計算は区間演算の範疇にある不等式・包含の計算に帰着できる事に注意せよ。

4. Fast-slow systemへの応用

応用として、次のfast-slow systemを考える：
$$\dot{x} = f(x,y) \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n : C^r$$
$$\dot{y} = \epsilon g(x,y) \quad g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k : C^r$$

ε =0の時は y をパラメータとした系と考えられる(速い系)。ε >0とするとx,yを変数とする系となり、力学系としての様子が劇的に変わる (yに関する系は遅い系と呼ばれる)。
遅い系のおかげで、全系の様子を知るのは数値計算のレベルでも容易ではない。
そこで、微分方程式を解くことなく系の様子を知る事を考える。その出発点として、特異摂動を伴った不動点の様子を知りたい。それは上のアイデアを応用すると可能となる。今回は簡単のため、k=1として議論する。基本アイデアは上と同じで、

1. コンパクト集合として、N×[a,b]の形の集合を選ぶ。
2. Nが速い系 ($y \in [a,b]$) におけるサドル型孤立化ブロックである事を見る。
3. 次のいずれかが成り立つ事を検証する：
3-1：$g(x,a) > 0,\ g(x,b) < 0 \quad (\forall x \in N)$　3-2：$g(x,a) < 0,\ g(x,b) > 0 \quad (\forall x \in N)$

この時、Conley指数の性質より直ちに次がわかる：

定理　Nは任意の $y \in [a,b]$ に対して φ^0 の不動点を、またN×[a,b]は任意のε>0に対して φ^ϵ の不動点を含む。 ■

ここで不動点の安定性を調べたい。そのためには線型化行列の固有値をみれば良い。今の場合、
線型化行列　$DF = \begin{pmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ \epsilon g_x(x,y) & \epsilon g_y(x,y) \end{pmatrix}$ の固有値が

「ε = 0の時は0を固有値に含み、ε > 0の時に全ての固有値が虚軸に含まれなければOK」

なのだが、DFを直接扱うと、精度保証では検証できない。そもそも数値計算で $(0, \bar{\epsilon}]$ を表現する事が容易ではない。しかし簡単な線型代数により、εに依らない次の結果を得る。

定理　$\{\varphi^\epsilon\}_{\epsilon\in[0,\infty)}$ をflowのε-パラメータ族、 N×[a,b]を特異サドルキャップとする。
さらに任意の $(x,y) \in N \times [a,b]$ に対して $f_x(x,y)$および $g_y(x,y) - g_x(x,y)^T f_x(x,y)^{-1} f_y(x,y)$ の固有値が虚軸と交わらないと仮定する。このとき、

1. 任意のε>0に対して、$\mathrm{Inv}(N \times [a,b], \varphi^\epsilon)$ は唯一つの双曲型不動点 p_ϵで構成される。
2. p_ϵ の $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の通常のユークリッド位相におけるε→ 0 のときの極限 p_0 はN×[a,b]に含まれるflow φ^0 の法双曲型不動点である。 ■

さらに不変多様体に関する結果も示せるが、紙面の都合上省略する。特異摂動問題でも、通常の問題と同様の計算で数学的厳密性を伴いつつ解の性質を数値検証できる。

5. 参考文献

[1] C.K.R.T. Jones, “Geometric Singular Perturbation Theory”
in Springer Lecture Note 1609 “Dynamical Systems”
[2] K. Matsue, Rigorous numerics for stationary solutions of dissipative PDEs
- Existence and local dynamics -, NOLTA, 4(2013), 62--79.
[3] K. Mischaikow, “Conley index Theory”
in Springer Lecture Note 1609 “Dynamical Systems”
[4] P. Zgliczynski, Covering relations, cone conditions and stable manifold theorem,
J. of Diff. Equations, 246(2009), 1774--1819.